

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет «Запорізька політехніка»

Індивідуальні завдання
до виконання розрахункових робіт для студентів технічних
спеціальностей денної форми навчання з вищої математики.
Розділи: «Границі та неперервність функції однієї змінної»,
«Диференціювання функції однієї змінної»

Індивідуальні завдання до виконання розрахункових робіт для студентів технічних спеціальностей денної форми навчання з вищої математики. Розділи: «Границі та неперервність функції однієї змінної», «Диференціювання функції однієї змінної» / «Запорізька політехніка» нац. ун-т. Каф. математики ; уклад.: І. М. Килимник. Запоріжжя : «Запорізька політехніка», 2026. 69 с.

Укладач: Килимник І. М., канд. техн. наук, доцент

Рецензент: Антоненко Н. М., канд. фіз.-мат. наук, доцент

Відповідальний за випуск: Килимник І.М., канд. техн. наук, доцент

Затверджено на засіданні
кафедри математики
Протокол № 1 від 18.08.2026 р.

Рекомендовано до видання
НМК машинобудівного факультету
Протокол № 1 від 21.08 .2026 р.

ЗМІСТ

Правила оформлення та виконання розрахункових робіт	4
1 Границя послідовності та функції	5
1.1 Короткий виклад теоретичного матеріалу	5
1.2 Аудиторні завдання	9
1.3 Індивідуальні завдання	11
2 Неперервність функції	35
2.1 Короткий виклад теоретичного матеріалу	35
2.2 Аудиторні завдання	35
2.3 Індивідуальні завдання	38
3 Диференціювання функції однієї змінної	45
3.1 Короткий виклад теоретичного матеріалу	45
3.2 Аудиторні завдання	49
3.3 Індивідуальні завдання	53
Перелік рекомендованої літератури	69

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕННЯ ТА ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВИХ РОБІТ

1. Студент повинен виконувати розрахункову роботу в окремому зошиті.

2. На обкладинці зошита посередині треба записати:

- тему розрахункової роботи,
- прізвище, ім'я, по батькові повністю;
- номер академічної групи;
- номер варіанта (*варіанти вказує викладач*).

3. У розрахунковій роботі повинні бути розв'язані всі завдання, вказані викладачем. Розв'язання завдань необхідно записувати в порядку номерів завдань, зберігаючи їх послідовність. Умова задачі в завданні переписується повністю. Розв'язування кожного завдання повинно бути повністю наведено.

4. Розрахункова робота подається викладачеві на перевірку і захищається студентом на консультаціях.

5. Розрахункова робота, що виконана не за своїм варіантом, не зараховується.

Зауваження. У випадку дистанційної форми навчання студент завантажує виконану розрахункову роботу у відповідне завдання курсу «Вища математика» на загальноуніверситетській платформі MOODLE.

1 ГРАНИЦЯ ПОСЛІДОВНОСТІ ТА ФУНКЦІЇ

1.1 Короткий виклад теоретичного матеріалу

Означення 1.1. Множину чисел $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, ($n \in N$), яка визначена для кожного натурального числа за однаковим правилом, називають *числовою послідовністю* і позначають $\{x_n\}$, де $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ — члени числової послідовності, x_n — загальний член послідовності.

Означення 1.2. Число A називається *границею числової послідовності* $\{x_n\}$, якщо для будь-якого завгодно малого додатного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке натуральне число $N = N(\varepsilon)$, таке що для всіх $n > N$ виконується нерівність $|x_n - A| < \varepsilon$ і записують

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A.$$

Означення 1.3. Число A називається *границею функції* $y = f(x)$ при $x \rightarrow \infty$, якщо для довільного завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $M(\varepsilon) > 0$, що при $|x| > M$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$ і записують

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A.$$

Означення 1.4. Число A називається *границею функції* $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, якщо для довільного завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що при $|x - x_0| < \delta$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$ і записують

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

Означення 1.5. Число A називається *границею функції* $y = f(x)$ зліва в точці x_0 , якщо для довільного завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що при $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$ і записують

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) = A.$$

Означення 1.6. Число A називається *границею функції* $y=f(x)$ *справа* в точці x_0 , якщо для довільного завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що при $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$ і записують

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0) = A.$$

Ліву і праву границі функції називають *односторонніми границями*.

Означення 1.7. Функцію $\alpha(x)$ називають *нескінченно малою функцією*, якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ або $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = 0$.

Таблиця 1.1 – Деякі еквівалентні нескінченно малі функції
У таблиці $\alpha(x) \rightarrow 0$, коли $x \rightarrow x_0$, $k \in \mathbb{R}$

$\sin(k \cdot \alpha(x)) \sim k \cdot \alpha(x)$	$\operatorname{tg}(k \cdot \alpha(x)) \sim k \cdot \alpha(x)$
$\arcsin(k \cdot \alpha(x)) \sim k \cdot \alpha(x)$	$\operatorname{arctg}(k \cdot \alpha(x)) \sim k \cdot \alpha(x)$
$1 - \cos k \cdot \alpha(x) \sim \frac{(k \cdot \alpha(x))^2}{2}$	$e^{k \cdot \alpha(x)} - 1 \sim k \cdot \alpha(x)$
$a^{k \cdot \alpha(x)} - 1 \sim k \cdot \alpha(x) \cdot \ln a$	$\ln(1 + k \cdot \alpha(x)) \sim k \cdot \alpha(x)$
$(1 + k \cdot \alpha(x))^n - 1 \sim n \cdot k \cdot \alpha(x),$ $(n > 0)$	$\sqrt[n]{1 + k \cdot \alpha(x)} - 1 \sim \frac{k \cdot \alpha(x)}{n},$ $(n > 1)$

Основні теореми про границі

Якщо існують границі $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ і $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x). \quad (1.1)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x). \quad (1.2)$$

Наслідки: $\lim_{x \rightarrow x_0} (C \cdot f(x)) = C \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^n = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^n.$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}. \quad (1.3)$$

Перша важлива границя:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (1.4)$$

Наслідки: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(kx)}{x} = k, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} kx}{x} = k,$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Друга важлива границя:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \approx 2,71828, \quad (1.5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e. \quad (1.6)$$

Наслідки: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a,$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{n}, \quad (n \in \mathbb{N}), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha.$$

Деякі «умовні» правила дій над символами $\infty, -\infty, +\infty$:

а) $(\pm\infty) + a = \pm\infty, \quad a - (\pm\infty) = \mp\infty;$

б) $(+\infty) + (+\infty) = (+\infty), \quad (-\infty) - (-\infty) = +\infty;$

в) $(-\infty) + (-\infty) = -\infty, \quad (-\infty) - (+\infty) = -\infty;$

$$\text{г) } \infty \cdot a = a \cdot \infty = \begin{cases} \infty, a > 0 \\ -\infty, a < 0 \end{cases}; \quad \infty \cdot \infty = \infty; \quad \frac{\infty}{a} = \begin{cases} \infty, a > 0 \\ -\infty, a < 0 \end{cases};$$

$$\text{д) } \frac{a}{\infty} = 0; \quad \frac{a}{0} = \begin{cases} \infty, a > 0 \\ -\infty, a < 0 \end{cases};$$

$$\text{е) } (+\infty)^n = +\infty; \quad (-\infty)^n = \begin{cases} +\infty, n = 2m \\ -\infty, n = 2m - 1 \end{cases}; \quad \sqrt[n]{+\infty} = \infty.$$

де $a = \text{const}$, $a \neq 0$, $n \in N$, $m \in N$.

Знаходження границі $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ зводиться до підстановки у функцію $f(x)$ граничного значення аргументу x_0 . Однак, підстановка може привести до «невизначених виразів», а саме: $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, $\left[\frac{0}{0}\right]$, $[\infty - \infty]$, $[0 \cdot \infty]$, $[1^\infty]$ та інші. Це вирази, яким не можна поставити у відповідність числовий результат. Знаходження границі в цьому випадку називається *розкриттям невизначеності*.

Таблиця 1.2 – Деякі формули елементарної математики

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$	$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$	$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$
$\log_a b^k = k \log_a b, \quad a > 0, b > 0, a \neq 1;$	
$\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b$	$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} a > 0, b > 0, c > 0, c \neq 1$
$\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$	
$1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$	$1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$
$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$	$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$

1.2 Аудиторні завдання

1. Знайти границі послідовностей

1а)	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^5 + 1} - 6n^3}{\sqrt{2n^6 + 3} - n}$	б)	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^6 + 2} + \sqrt{4n^4 + 1}}{\sqrt[4]{n^4 + 1} (2n + 1)}$
в)	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n + 5} - \sqrt[4]{16n^4 + 1}}{\sqrt[3]{n} - \sqrt{16n^4 + 3}}$	г)	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^6 + 2} - \sqrt{n^2 + 1}}{\sqrt[4]{n^4 + n} + \sqrt{n + 2}}$
2.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 - 2n + 3} \right)$	3.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} - 7^n}{2 \cdot 7^{n+1} + 3^n}$
4а)	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(n+2)! - 3(n+1)!}$	б)	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+5)((n+1)! - (n+4)!)}{(n+5)!}$

Відповіді: 1а) $-3\sqrt{2}$, б) 1.5, в) 0, г) ∞ ; 2. 2; 3. $-\frac{1}{14}$; 4а) 0, б) -2.

2. Знайти границі функцій

1.	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 3x - 4}{2x + 5}$	2.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 1}{5x^2 + 3x}$
3.	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 4x + 1}{x^4 + 2x^2}$	4.	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 4x + 5}{2x^2 - x - 10}$
5.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4x}{6x^3 - 2}$	6.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6 + 3x^2 + 1}{x^3 + 2x}$
7.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x^2}{4x + 3x^3}$	8.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 7x}{4 - 6x^2}$
9.	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 4x + 1}{2x^2 - 7x - 9}$	10.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x^3 + 15x - 16}$

11.	$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x}-5}{x^2-6x-16}$	12.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2+3x-5}{\sqrt[3]{2x+6}-2}$
13a)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2-5x}{\sin 3x}$	б)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 10x}{x \cdot \operatorname{tg} 4x}$
в)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos 3x}{\sin^2 3x}$	г)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{arctg} 3x}{\sin^2 2x}$
д)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin 4x}{\arcsin^2 3x}$	е)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x \cdot \operatorname{arctg}^2 2x}$
14 a)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+3} \right)^{4x+8}$	б)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{4x-2} \right)^{3x+1}$
в)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2+3}{x^2-1} \right)^{2x+4}$	г)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+4}{5x-2} \right)^{3-4x}$
15a)	$\lim_{x \rightarrow 0} (1-7x)^{\frac{6}{5x}}$	б)	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x \cdot \sin^2 x \right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}^3 x}}$
16a)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x - 2^{7x}}{\operatorname{tg} 3x}$	б)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{9^x - 2^{3x}}{\ln(1-7x)}$
17 a)	$\lim_{x \rightarrow 1} (3x-2)^{\frac{x}{3x-3}}$	б)	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin 2x}{\left(\frac{\pi}{4} - x \right)^2}$

Відповіді: 1. $\frac{10}{9}$; 2. 0,5; 3. 0; 4. ∞ ; 5. 0; 6. ∞ ; 7. $\frac{2}{3}$; 8. -0,5;
 9. $\frac{3}{11}$; 10. $\frac{1}{6}$; 11. 0,02; 12. 10,5; 13a) $-\frac{5}{3}$, б) 12,5, в) $-\frac{8}{9}$,
 г) 0,75, д) $\frac{4}{9}$, е) -0,125; 14a) e^{-20} , б) 0, в) ∞ , г) ∞ ; 15a) $e^{-8,4}$,
 б) е; 16a) $-\frac{5}{3} \ln 2$, б) $\frac{1}{7} \ln \frac{8}{9}$; 17a) е, б) 2.

1.3 Індивідуальні завдання

1.3.1 Знайти границі

1.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^5 + 3} - \sqrt{n - 3}}{\sqrt[5]{n^5 + 3} + \sqrt{n - 3}}$	2.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{2n + 1} - \sqrt[3]{27n^3 + 2}}{\sqrt[4]{n} - \sqrt[3]{8n^5 + n}}$
3.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n - 1} + 3\sqrt{n^4 + 2}}{\sqrt{n^2 - 1} - \sqrt[3]{n^2 + 3}}$	4.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5n + 2} - \sqrt[5]{n - 1}}{\sqrt[3]{8n^3 + 1} - \sqrt{n - 3}}$
5.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3 - 1} + 4\sqrt{n - 1}}{\sqrt[3]{n^2 + 1} - \sqrt{n}}$	6.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 - 4} + \sqrt{n}}{\sqrt[7]{n^5 + 1} - \sqrt{n + 1}}$
7.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n^5 + 2} + \sqrt{n + 4}}{\sqrt[3]{n + 2} - \sqrt[3]{8n^3 + 1}}$	8.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n - 1}}{\sqrt[5]{n^5 - 3} + \sqrt[3]{n}}$
9.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 6} + 2\sqrt{n^4 - 1}}{\sqrt[3]{n^2 + 5} - \sqrt{n^2 + 2}}$	10.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + n} - \sqrt[3]{n^6 + 3}}{\sqrt{6n^2 - 2n + 1} + \sqrt{n}}$
11.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{81n^4 + 2n} - \sqrt[3]{n^2 - 1}}{\sqrt[7]{n^3 + 3} + \sqrt[3]{n^2 - 1}}$	12.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[6]{n^7 + n^3 - n^2} + \sqrt[3]{n^4 + 7}}{\sqrt[4]{16n^8 + 2n - 1} + \sqrt[3]{n}}$
13.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n + 1} - \sqrt[3]{n^2 + 5}}{\sqrt[5]{n^3 - n} + \sqrt{n + 1}}$	14.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{5n^2 + 4} - \sqrt{16n - 1}}{\sqrt[7]{n^{14} + 2n} - \sqrt[3]{n^2 + 3}}$
15.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + \sqrt[3]{n^2 + 2}}{\sqrt[3]{8n - 1} - \sqrt[5]{n^2 + 4}}$	16.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{9n^2 + 2} - \sqrt[3]{27n^6 + 1}}{\sqrt[7]{2n + 3} - \sqrt[5]{8n + n^{12}}}$
17.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^6 - 1} + \sqrt[3]{n^2 + 2}}{\sqrt[5]{n^3 + n} - \sqrt{n^2 + 4}}$	18.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \sqrt[3]{n^2 + n^6}}{n^4 + \sqrt[7]{n^5 + 1}}$
19.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n^4 + 3} - \sqrt[5]{n^2 - 2}}{\sqrt[5]{n^2 - 2} + \sqrt{n}}$	20.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n + 2} - \sqrt[3]{n^2 - 1}}{\sqrt[3]{n^9 + 1} - 5n}$

21.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4 + 3} - \sqrt[5]{n^2}}{\sqrt[6]{n^3 + 1} - 5\sqrt{n}}$	22.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2 + 2} - 6n}$
23.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3 + 1} + 4\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^2 + 2} - \sqrt[5]{n^3 - 4}}$	24.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 3\sqrt[3]{n^4 - 1}}{\sqrt[5]{n^{10} + 2n} + 6n}$
25.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n^6 - 1}}{\sqrt[3]{n+3} + \sqrt[3]{n^4 + 2}}$	26.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4\sqrt{n} - 3\sqrt[3]{n^2 + 5}}{5\sqrt[3]{n^3 + 4} - \sqrt{n}}$
27.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4 + 3} - \sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^4 + 3} - \sqrt{n}}$	28.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{n^4 + n} - 5}{\sqrt[4]{n^4 + 2} - \sqrt{n}}$
29.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^6 - 3} + \sqrt{n}}{\sqrt[5]{n^4 + 1} - \sqrt[3]{n}}$	30.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n^3 + 1} - \sqrt[3]{n^4 + 1}}{\sqrt[3]{n+1} + \sqrt[3]{n^6 + 1}}$

1.3.2 Знайти границі

1.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2n^2 + 1} - \sqrt{2n^2 + 3n} \right)$	2.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 3n + 2} - n \right)$
3.	$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(\sqrt{4n^2 + 5} - 2n \right)$	4.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{9n^2 - 1} - \sqrt{n^2 + 4n} \right)$
5.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{9n^2 + 5n} - 3n \right)$	6.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{3n^2 + 4} - \sqrt{3n^2 + 5n} \right)$
7.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4n^2 - 2n + 5} - 2n \right)$	8.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{4n^2 - 3n} - \sqrt{n^2 + 5} \right)$
9.	$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(\sqrt{9n^2 + 7} - 3n \right)$	10.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{25n^2 + 9n} - 5n \right)$
11.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 - 7n + 3} \right)$	12.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 7n - 4} - n \right)$
13.	$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(\sqrt{16n^2 + 2} - 4n \right)$	14.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{3n^2 + 1} - \sqrt{n} \right)$

15.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4n^2 + 7n} - 2n \right)$	16.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{5n^2 - 3n} - \sqrt{5n^2 + 2} \right)$
17.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - \sqrt{n^2 - 4n + 2} \right)$	18.	$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(2n - \sqrt{4n^2 - 3} \right)$
19.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{9n^2 - 3n} \right)$	20.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3n - \sqrt{9n^2 + 7n} \right)$
21.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{7n^2 + 4} - \sqrt{7n^2 + 5n - 3} \right)$	22.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2n - \sqrt{4n^2 - 8n + 3} \right)$
23.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{4n^2 + 1} - \sqrt{5n^2 + 2n} \right)$	24.	$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(5n - \sqrt{25n^2 - 7n} \right)$
25.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3n - \sqrt{9n^2 + 10n} \right)$	26.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{6n^2 - 2n} - \sqrt{6n^2 + 1} \right)$
27.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2n - \sqrt{4n^2 - 5n + 7} \right)$	28.	$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(7n - \sqrt{49n^2 + 5} \right)$
29.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{n} - \sqrt{5n^2 + 4} \right)$	30.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2} - \sqrt{n^2 - 8n} \right)$

1.3.3 Знайти границі

1.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 7^n}{2^n - 7^{n-1}}$	2.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 2^{n+1}}{3^n - 2^n}$
3.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n + 3^{n+1}}{4^n - 3^n}$	4.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 2^{n+2}}{3^n - 2^n}$
5.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n - 5^n}{4^{n+1} + 5^n}$	6.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+2} - 2^n}{5^{n+1} + 2^{n+1}}$
7.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n - 6^{n+1}}{4^{n+1} + 6^{n+2}}$	8.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n - 6^n}{5^{n+1} - 6^n}$
9.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 7^n}{3^{n+2} - 7^n}$	10.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n + 7^{n-1}}{5^{n+1} - 7^n}$

11.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} - 8^n}{8^{n+2} + 3^n}$	12.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n + 9^{n-1}}{4^{n+2} - 9^n}$
13.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n - 9^{n+1}}{5^{n+1} + 9^n}$	14.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 6^{n+1}}{2^{n+1} - 6^n}$
15.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n + 2^{n+3}}{5^n - 2^{n+1}}$	16.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n + 2^{n+2}}{4^{n+1} - 2^n}$
17.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 9^{n+1}}{2^{n+1} - 9^n}$	18.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6^{n+1} - 9^n}{6^n + 9^{n+1}}$
19.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} + 7^{n-1}}{3^n + 7^{n+1}}$	20.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n + 7^n}{5^n + 7^{n+1}}$
21.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} - 3^{n+1}}{5^n + 3^n}$	22.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1} + 7^{n+1}}{4^{n+2} + 7^{n+2}}$
23.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6^n + 5^n}{6^{n+1} - 5^{n+1}}$	24.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 9^{n+1}}{9^n - 3^{n+1}}$
25.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+2} - 9^{n+1}}{2^{n+1} + 9^{n+2}}$	26.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} - 4^n}{5^n + 4^{n+1}}$
27.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9^n - 7^n}{9^{n+1} + 7^{n+1}}$	28.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+2} - 7^{n+2}}{4^n + 7^n}$
29.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n-1} + 5^n}{2^n - 5^{n-1}}$	30.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6^n + 7^n}{6^{n+2} - 7^{n+2}}$

1.3.4 Знайти границі

1.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)! + (2n+2)!}{(2n+3)!}$	2.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)! - (n+2)!}{(n+3)!}$
3.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((2n)! + (2n+1)!) \cdot n}{(2n+2)!}$	4.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot (n+3)!}{(n+4)! - (n+2)!}$

5.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((2n-1)!+(2n)!)\cdot n}{(2n+1)!}$	6.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)!\cdot(n+3)}{(n+3)!-(n+1)!}$
7.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)!+n!}{(2n-1)\cdot(n+1)!}$	8.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+2)\cdot(n+3)!}{(n+4)!+(n+2)!}$
9.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)!}{(n+1)\cdot((2n-1)!-(2n)!)}$	10.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)!+(n+2)!}{(3n-1)\cdot(n+3)!}$
11.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!+(2n+1)!}{(2n+2)!-(2n+1)!}$	12.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)!-(2n+2)!}{(2n+1)!+(2n+2)!}$
13.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)!+(2n+1)!}{(n+1)\cdot((2n)!+(2n+1)!)}$	14.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-1)!-(3n+1)!}{(3n)!-(2n-1)!}$
15.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n)!\cdot(2n+3)}{(3n-1)!+(3n+1)!}$	16.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n)!+(3n+2)!}{(3n+1)!\cdot(2n+1)!}$
17.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!+(n+3)!}{n!+(n+3)!}$	18.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)!-(n+2)!}{n!+(n+2)!}$
19.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!-(n+2)!}{(n+1)!-(n+2)!}$	20.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)!\cdot(2n+1)}{(n)!-(n-1)!}$
21.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!+n!}{(3n+1)\cdot n!}$	22.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5n-4)\cdot(n+1)!}{(n+2)!+(n+1)!}$
23.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+5)!+(n+4)!}{(n+6)!}$	24.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+6)!}{n\cdot((n+5)!-(n+4)!)}$
25.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n\cdot((2n+1)!-(2n+2)!)}{(2n+3)!}$	26.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5n-3)\cdot((2n)!-(2n+1)!)}{(2n+2)!}$
27.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!+(n-1)!}{n!-(n-1)!}$	28.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+5)\cdot((2n-1)!+(2n)!)}{(2n+1)!}$
29.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+8)!}{4n\cdot((n+7)!+(n+6)!)}$	30.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n-1)\cdot((n+4)!-(n+3)!)}{(n+5)!}$

1.3.5 Знайти границі

1.	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 11x + 15}{3x^2 + 5x - 12}$	2.	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + 5x - 7}{x^3 - 1}$
3.	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 - 6x + 3}{x^2 - 4x + 3}$	4.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 2x - 28}{x^3 - 8}$
5.	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - x^2 + x + 1}{x^4 - 1}$	6.	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^4 - 1}$
7.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 7x + 10}{5x^2 + 3x - 3}$	8.	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 4x + 4}$
9.	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}$	10.	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + 7x - 4}{x^3 + 64}$
11.	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^2 + 19x - 5}{2x^2 + 11x + 5}$	12.	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^3 + x - 2}$
13.	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - 7x + 5}$	14.	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 8}{2x^2 - 9x + 10}$
15.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{9x^2 + 17x - 2}{x^2 + 2x}$	16.	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x - 2}{x^3 - x^2 + x + 1}$
17.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^3 - 2x^2 + 5x}{3x^2 + 7x}$	18.	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - 5x + 1}{x^2 - 1}$
19.	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + 5x - 42}{x^2 + 5x + 6}$	20.	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 30}{x^2 + 4}$
21.	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 3x - 15}{x^3 - 64}$	22.	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^3 + 4x}$
23.	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 5}{x^2 - 4x}$	24.	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 11x + 10}{x^2 - 5x - 14}$
25.	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4}{3x^2 + x - 10}$	26.	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^3 + 2x - 5}{4x^2 - 5x + 1}$

27.	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 - 11x - 6}{3x^2 + 4x - 5}$	28.	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 24}{2x^3 + 5x - 1}$
29.	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 11x + 18}$	30.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - x + 6}{7x^2 - 14x + 1}$

1.3.6 Знайти границі

1.	$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 11x + 15}{2x^3 - 4x}$	2.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 5x - 7}{3x^3 + x}$
3.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 - 6x + 3}{x^2 + 4x}$	4.	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^3 + 2x - 28}{3x^2 - 7}$
5.	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - x^2 + x + 1}{3x - 7x^2}$	6.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^3 + 4x - 2}$
7.	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{5x^2 - 3}$	8.	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x}{x^3 - 4x - 4}$
9.	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 3x^2 - 2}{x^2 + 6x + 1}$	10.	$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x^2 + 7x - 4}{x^2 - 6x}$
11.	$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{4x^2 - 19x - 5}{2x^2 + 6x + 5}$	12.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{3x^3 + x - 2}$
13.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 5x + 3}{3x^3 - 7x}$	14.	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 3x - 14}{2x^2 - 7x + 10}$
15.	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{9x^2 + 17x - 2}{x^2 + 4x - 1}$	16.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^3 - 4x^2 + 1}$
17.	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x^3 + 5x^2 + 12}{3x^2 + 5x}$	18.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^4 - 5x^2 + 1}{3x^3 - 1}$
19.	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 + 5x - 42}{x^3 + 4x}$	20.	$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - x - 30}{2x - 4}$

21.	$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 3x - 28}{x^3 - 20}$	22.	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - 4x - 7}{x^3 + 6x}$
23.	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^3 + x + 1}$	24.	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 11x + 10}{x^2 - 5x + 14}$
25.	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + x + 10}{4x^2 + 1}$	26.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 + 2x - 5}{4x^2 + 2x - 1}$
27.	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x^3 + 4x}$	28.	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 - 4x - 20}{x^3 + 3}$
29.	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x - 4}{x^2 + 2x + 7}$	30.	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{5x^2 - 6x - 27}{x^3 + x - 1}$

1.3.7 Знайти границі

1.	$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 7x}{3x^2 + 5x - 12}$	2.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 7}{3x^2 - 4x + 1}$
3.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 6x}{x^2 - 4x + 3}$	4.	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4}{x^3 - 8}$
5.	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + 3x}{x^3 + 2x + 3}$	6.	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 3x - 10}$
7.	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 1}{5x^2 - 3x - 14}$	8.	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 2x}{x^2 + 4x + 4}$
9.	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 + 3x^2}{x^2 + 3x + 2}$	10.	$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x - 6}{2x^2 + 3x - 9}$
11.	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 4x + 1}{x^3 + 7x^2 - 6}$	12.	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + 6}{x^3 + 2x - 12}$
13.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + 3x}{x^3 + x - 2}$	14.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 - x^3}{12x^2 - 7x - 5}$

15.	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x}{2x^2 - 9x + 10}$	16.	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2}{x^2 + 2x}$
17.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 1}{x^3 - x^2 + x - 1}$	18.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - x^3}{3x^2 + 7x}$
19.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^4 + 5x^2 + 1}{x^3 - 1}$	20.	$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - x}{x^3 + 125}$
21.	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + 5x - 1}{x^2 - 5x + 6}$	22.	$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 2}{x^2 + 2x - 24}$
23.	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x + 28}{x^2 - 4x + 3}$	24.	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 10}{x^2 - 5x - 14}$
25.	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 6x - 1}{3x^2 + x - 10}$	26.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 - 5}{4x^2 - 5x - 14}$
27.	$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{6 - 11x}{3x^2 - 20x + 12}$	28.	$\lim_{x \rightarrow -6} \frac{x^3 + 4}{2x^2 + 6x - 36}$
29.	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x - 1}{x^2 - 11x + 18}$	30.	$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 8x - 1}{7x^2 - 27x - 4}$

1.3.8 Знайти границі

1.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x - 1}{x^3 + x - 1}$	2.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - x^3 + x^2}{3x^4 - 2}$
3.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 5}{2x^2 + 5}$	4.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x + 1}{x^4 + 4x - 1}$
5.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 7x^2}{x^3 + 7x^2}$	6.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x - 1}{2x^4 + x^2 - 1}$
7.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3}{7x^5 + x^3 + 2}$	8.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + x - 1}{x^6 + 4x + 1}$

9.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + x^3}{x^4 - 7x^2}$	10.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 7x + 5}{5x^3 - 7x^2 + 5}$
11.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 1}{4x^4 - 1}$	12.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 - 4x}{7x^3 - 4x^2}$
13.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + 5x^2 + x^3}{x^6 + 5x^3 + 3}$	14.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 4 - x^2}{x^3 - x^2 - 4}$
15.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 6x - 1}{2x^3 + 6x - 1}$	16.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 3x}{5x^4 - 4x}$
17.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4x - 3}{2x^4 + 3}$	18.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{x^3 + x}$
19.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 7x + 5}{5x^3 + 2x^2 + 7}$	20.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 5x^2}{5x^7 - 3x^4}$
21.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{x^3 + x}$	22.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{x^3 + x - x^4}$
23.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + 2x}{x^3 + x}$	24.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 - x^2}{6x^3 - x^2}$
25.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 + 4x - 1}{9x^4 + 5}$	26.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x - 7x^2}{7x^5 - 6x}$
27.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x - 3}{2x^5 + x^2 - 3}$	28.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + x^3}{8 - x^6}$
29.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x}{x^4 + 3x}$	30.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 5}{x^6 - 5x^2 + 2}$

1.3.9 Знайти границі

1.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6 + 2x}{x^3 + 4x - 1}$	2.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x + 2}{x^2 - 4}$
----	---	----	--

3.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x + 2}{5x - 7}$	4.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6 + 3x + 1}{x^2 + 1}$
5.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 3x - 2}{x^2 + 4x}$	6.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5 + 4x^2 - 3}{x^3 + 2x + 1}$
7.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 2x + 1}{3x^2 - 2}$	8.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^7 + 6x}{2 - x^3}$
9.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - 3x^2 + x^5}{x^2 + 4}$	10.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 - 2x + x^4}{x^3 + 2}$
11.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 4x^4}{3x^2 + 4x}$	12.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - 7x + 3}{4x + 5}$
13.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^7 - 7x^3}{7x^2 - 3x^6}$	14.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 4x^5}{3x^2 + x - 1}$
15.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6 + 1}{x^4 + 1}$	16.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5 - 3x^6}{3x^2 + 2x - 3}$
17.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 2x - 7}{x^2 + 4x - 2}$	18.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + 3x^2 - 4}{x^3 + 3x - 4}$
19.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 7x - 2}{7x - 5}$	20.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$
21.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + x^6 - 1}{x^5 + 2x}$	22.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - x^6}{1 - x^2}$
23.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 5x^3}{5x^2 - 3x}$	24.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 + 2x + x^4}{7x^2 + 2}$
25.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{3x^2 - 2x + 1}$	26.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2}{x^2 + 1}$
27.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6 - 3x^4}{x^5 - 3x^2}$	28.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 4x + 3}{3 - 2x^2}$

29.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 3x^2}{4x^2 + 1}$	30.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 2x^2 + 1}{4x^2 + 2x - 1}$
-----	--	-----	---

1.3.10 Знайти границі

1.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 2x - x^4}{3x^4 - 2x - 1}$	2.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + 4x + 1}{7x^2 - x + 4}$
3.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x}{2x^2 - x}$	4.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 4x^2 + 1}{3 - 4x^3}$
5.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x - 12}{x^2 + x - 12}$	6.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + 4x}{14x^2 - 2x + 3}$
7.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 5x - 7}{3x^2 + 5x - 12}$	8.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 2x - 1}{x^4 - 2x + 3}$
9.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 6x + 1}{4 - x^2 - 6x^3}$	10.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - x^2}{3x^2 - 2}$
11.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 2x - 1}{4 - x^2 - 6x^3}$	12.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 4x + 1}{5x^2 + 6x + 7}$
13.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 3x^2 - 1}{3x^4 + 2}$	14.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x^2 + 3}{3x - 5x^3 + 1}$
15.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + 4x + 1}{3x^2 - 4x - 1}$	16.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 3}{3x^4 - 2x^2 - 3}$
17.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + 4x + 3}{2x^2 - 7x + 5}$	18.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4}{2x^2 - 4x + 1}$
19.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x + 5}{5x^3 + 2}$	20.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + 2x^3 - x^2}{5x^2 + 3x^3 - 5x^5}$
21.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{5 - x^3}$	22.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 4x - 3}{3x^2 + 4x - 2}$

23.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 19x - 5}{2x^2 + 11x + 5}$	24.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 7}{7 - 2x^2 - x^4}$
25.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + 2x - x^3}{3x^3 + 4x}$	26.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 2x^2}{2x^3 - 3x^2}$
27.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + x^2 - x^4}{3x^2 + 4x^3 + 2x^4}$	28.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + 6x - x^7}{2x^7 - 5}$
29.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 4x + x^3}{3x^3 - 4x + 1}$	30.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 2x + 1}{1 - 2x - 3x^4}$

1.3.11 Знайти границі

1.	$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 11x + 15}{x^3 + 2x + 33}$	2.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 5x - 7}{x^3 + 2x - 3}$
3.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x + 5}{7x^2 - 4x - 3}$	4.	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x - 12}{2x^2 + 3x - 14}$
5.	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^2 + x - 4}{x^3 + 3x + 4}$	6.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^3 + 7x - 8}$
7.	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 7x + 6}{5x^2 + 3x - 26}$	8.	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x + 12}{3x^2 + 2x - 8}$
9.	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 5x - 4}{4x^2 - 3x - 7}$	10.	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - 2x - 5}{x^3 + 5x + 6}$
11.	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 7x + 6}{x^3 + x - 10}$	12.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 8x + 7}{5x^2 + 6x - 11}$
13.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 2x - 3}{x^3 + 9x - 10}$	14.	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 3x - 14}{2x^2 - 9x + 10}$
15.	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{9x^2 + 17x - 2}{x^3 + x + 10}$	16.	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 6x - 20}{3x^2 + 5x - 22}$

17.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 7x - 8}{7x^2 + 6x - 13}$	18.	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 4x - 16}{5x^2 + 4x - 28}$
19.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 - 5x + 1}{x^3 + 11x - 12}$	20.	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 + 5x - 42}{x^3 - 5x - 12}$
21.	$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 3x + 36}{3x^2 - 2x - 33}$	22.	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 7x + 8}{5x^2 + 3x - 2}$
23.	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + 2x - 16}{x^3 + 5x - 18}$	24.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2 + 3x - 9}{x^3 - 11x + 10}$
25.	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 12x + 13}{3x^2 - 7x - 10}$	26.	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 - 11x - 34}{x^3 + 5x + 18}$
27.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 12x - 13}{7x^2 + 7x - 14}$	28.	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 - 7x - 26}{x^3 + 3x + 14}$
29.	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x - 4}{4x^2 + 11x - 38}$	30.	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2x + 3}{3x^2 - 5x - 8}$

1.3.12 Знайти границі

1.	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}}$	2.	$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+12} - \sqrt{4-x}}{x^2 + 2x - 8}$
3.	$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+10} - \sqrt{4-x}}{2x^2 - x - 21}$	4.	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{x+6}}{x^2 - x - 6}$
5.	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+10} - \sqrt{8-x}}{2x^2 - 5x - 7}$	6.	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x+1}}$
7.	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 4x + 1}{\sqrt{x+3} - \sqrt{5+3x}}$	8.	$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x-3}}$
9.	$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+6}}{2x^2 - 7x - 15}$	10.	$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 8x + 15}{\sqrt{3x+17} - \sqrt{2x+12}}$

11.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{4-x}}{3x^2 + 4x - 7}$	12.	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{8-x} + 3x}{2x^2 - 5x - 7}$
13.	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4-x} - \sqrt{2}}{3x^2 - x - 10}$	14.	$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{3x^2 - 2x - 40}$
15.	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{5+x} - 2}{5x^2 - 4x - 9}$	16.	$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4} - 3}{x^2 + 2x - 35}$
17.	$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 + x - 36}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}}$	18.	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - 4x - 7}{\sqrt{8-x} - 3}$
19.	$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 4x - 5}{\sqrt{x-1} - 2}$	20.	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{4x-3} - 3}{x^2 + 2x - 15}$
21.	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{5x+1} - 4}{x^2 + 2x - 15}$	22.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{x^2 + 3}}{3x^2 + 5x - 8}$
23.	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x+5} - 3}{3x^2 - 4x - 4}$	24.	$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 2x - 24}{\sqrt{6x+1} - 5}$
25.	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x} - x}{2x^2 - 3x - 9}$	26.	$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+20} - 4}{2x^2 - 3x - 44}$
27.	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^2 - 7x - 15}{\sqrt{x+1} - 2}$	28.	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{3x^2 - 5x - 2}$
29.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{\sqrt{3+x} - 2}$	30.	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x + \sqrt{6-5x}}{3x^2 + 4x - 4}$

1.3.13 Знайти границі

1.	$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt[3]{x+3} - 2}{3x^2 - 9x - 30}$	2.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt[3]{x+7}}{2x^2 + 3x - 5}$
3.	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 - \sqrt[3]{7-x}}{4x^2 - 3x - 7}$	4.	$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2 + \sqrt[3]{x-5}}{x^2 - 4x - 21}$

5.	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + 4x - 20}{\sqrt[3]{x-1} - 1}$	6.	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x + x^2 + 2}{1 + \sqrt[3]{x+1}}$
7.	$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^2 - 6x - 16}{\sqrt[3]{x} - 2}$	8.	$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{5x - x^2 - 4}{2 - \sqrt[3]{2x+4}}$
9.	$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{4 - \sqrt[3]{x+59}}$	10.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{6x^2 + x - 7}$
11.	$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 3x - 18}{2 - \sqrt[3]{5-x}}$	12.	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{7-3x} - 1}{x^2 + 3x - 10}$
13.	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x^2 + 3x + 2}$	14.	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{9x} - 3}{2x^2 - 4x - 6}$
15.	$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{5x - 40}{2 - \sqrt[3]{x}}$	16.	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2 + \sqrt[3]{3x-2}}{x^2 + 3x + 2}$
17.	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1 - \sqrt[3]{2x-5}}{x^2 + x - 12}$	18.	$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt[3]{9x} + 3}{2x^2 + 3x - 9}$
19.	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{6+x} - 2}{4x^2 - 5x - 6}$	20.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - 2}{4x^2 + 5x - 9}$
21.	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 - 3x - 7}{1 - \sqrt[3]{2+x}}$	22.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt[3]{9-x}}{3x^2 + 4x - 7}$
23.	$\lim_{x \rightarrow -8} \frac{2 + \sqrt[3]{x}}{x^2 + 7x - 8}$	24.	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + x - 10}{\sqrt[3]{10-x} - 2}$
25.	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 - x - 10}{\sqrt[3]{x-6} + 2}$	26.	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 2x - 8}{\sqrt[3]{10+x} - 2}$
27.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 7x + 2}{1 - \sqrt[3]{x}}$	28.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{26+x} - 3}{3x^2 + 5x - 8}$
29.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 4x - 7}{\sqrt[3]{26+x} - 3}$	30.	$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{3x^2 - 8x - 128}{\sqrt[3]{x} - 2}$

1.3.14 Знайти границі

1.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 10x}{\operatorname{arctg}^2 3x}$	2.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^2 2x}{\cos 7x - \cos 2x}$
3.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2\pi(x+5))}{\operatorname{arctg} 3x}$	4.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 7x}{\sin(\pi(x+7))}$
5.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x+2,5\pi) \cdot \operatorname{tg} 3x}{\arcsin 2x^2}$	6.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 5x}{\operatorname{arctg}^2 3x}$
7.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x \cdot \arcsin^2 5x}$	8.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \operatorname{arctg} 2x}{1 - \cos x}$
9.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{\arcsin^2 7x}$	10.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^2 x}{\cos 5x - \cos 3x}$
11.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x - \sin 3x}{\operatorname{arctg} 5x}$	12.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 7x - \cos 3x}{x \cdot \arcsin 2x}$
13.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{arctg} 3x}{\cos 5x - \cos x}$	14.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x^3 - 2x}{\operatorname{tg} 4x - \sin 2x}$
15.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x \cdot \arcsin 2x}$	16.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}^2 2x}{\cos 3x - \cos x}$
17.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2 \sin x}{x \cdot \operatorname{arctg}^2 x}$	18.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + \sin 5x}{\arcsin 3x - \operatorname{arctg} 5x}$
19.	$\lim_{x \rightarrow 0} \arcsin^2 2x \cdot \operatorname{ctg}^2 5x$	20.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x^2 - 2x^3}{1 - \cos 4x}$
21.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos^3 3x}{\operatorname{arctg}^2 3x}$	22.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x \cdot \sin 4x}{\cos 3x - \cos x}$
23.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + \sin 2x}{\operatorname{arctg} x^2 + 2x}$	24.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 3x}{x \cdot \operatorname{arctg} 2x}$
25.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \arcsin 3x}{\cos^2 2x - 1}$	26.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \arcsin 5x}{1 - \sqrt{\cos x}}$

27.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x^2 - 3x}{\sin 5x + \sin 3x}$	28.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x - \sin x}{\operatorname{arctg} 3x}$
29.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{\operatorname{arctg}^2 3x}$	30.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{arctg} 2x}{\cos x - \cos 3x}$

1.3.15 Знайти границі

1.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-2} \right)^{2-3x}$	2.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+3} \right)^{3x-1}$
3.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{3x-1} \right)^{5x+2}$	4.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-1}{4x+2} \right)^{2-3x}$
5.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-3}{2x+1} \right)^{7x+1}$	6.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x-3} \right)^{2x-1}$
7.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{3x-3} \right)^{2-5x}$	8.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+1}{5x+3} \right)^{1-7x}$
9.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x-1} \right)^{7-4x}$	10.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-4}{x+2} \right)^{3x+2}$
11.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+3}{4x-1} \right)^{2-3x}$	12.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-3}{3x+2} \right)^{4x-3}$
13.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x+2}{7x-3} \right)^{5x+2}$	14.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+6}{2x-3} \right)^{2-7x}$
15.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x+2} \right)^{3-2x}$	16.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-5}{2x+1} \right)^{4x+3}$
17.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+8}{x+4} \right)^{8-3x}$	18.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-5}{3x+2} \right)^{2x-4}$
19.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{2-5x}$	20.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x-2} \right)^{2-3x}$

21.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x-1} \right)^{7-5x}$	22.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+2} \right)^{2x-1}$
23.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{3x-4} \right)^{4-2x}$	24.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+4}{2x-1} \right)^{3x-1}$
25.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-2}{3x-5} \right)^{5x+4}$	26.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-2}{3x+4} \right)^{7-4x}$
27.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-1}{5x+2} \right)^{1-3x}$	28.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x+1}{6x+2} \right)^{1-5x}$
29.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-6} \right)^{3-5x}$	30.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x-1}{7x+2} \right)^{5x+2}$

1.3.16 Знайти границі

1.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{3x-5} \right)^{2x+3}$	2.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{x+4} \right)^{1-2x}$
3.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-1}{3x+4} \right)^{2x+4}$	4.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{4x-1} \right)^{2x-3}$
5.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-5}{4x+2} \right)^{4-3x}$	6.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{9x-7} \right)^{2x+5}$
7.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{2+7x} \right)^{5x+1}$	8.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-5}{3x+1} \right)^{7-3x}$
9.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1-2x}{2-x} \right)^{3-4x}$	10.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2-x}{3-4x} \right)^{5-6x}$
11.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+4}{x+6} \right)^{2x-7}$	12.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{4x-5} \right)^{2x+9}$
13.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{3x-7} \right)^{3-4x}$	14.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{3x+1} \right)^{4+3x}$

15.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x-5}{x+4} \right)^{2x+1}$	16.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{3x+7} \right)^{4x-7}$
17.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{3x-1} \right)^{4-5x}$	18.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+4}{x-6} \right)^{4x-1}$
19.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{3x-4} \right)^{11-2x}$	20.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{4x+3} \right)^{2x+8}$
21.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x+4}{5x-4} \right)^{4x+3}$	22.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+3}{2x-5} \right)^{5x+1}$
23.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+4}{x-3} \right)^{2-4x}$	24.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{2x-1} \right)^{6x-1}$
25.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{x+1} \right)^{9-4x}$	26.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{2x+3} \right)^{7x+8}$
27.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+7}{3x-2} \right)^{7x+4}$	28.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{3x+2} \right)^{2x+1}$
29.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{4x-1} \right)^{1-3x}$	30.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8x-3}{5x-5} \right)^{2-3x}$

1.3.17 Знайти границі

1.	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + 2x^2 \right)^{\frac{2}{x^2}}$	2.	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - 3x^2 \right)^{\frac{4}{x^2}}$
3.	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + 2x^3 \right)^{\frac{1}{x^4+3x^3}}$	4.	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + 3x^3 \right)^{\frac{2}{x^5-2x^3}}$
5.	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x^2}{2} \right)^{\frac{1}{x^2}}$	6.	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x}{4} \right)^{\frac{2}{x^2+2x}}$

7.	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3+2x}{3} \right)^{\frac{2}{x}}$	8.	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4+x}{4} \right)^{-\frac{1}{x}}$
9.	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1+3x^2 \right)^{\frac{3}{2x^2}}$	10.	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+3x^2}{2} \right)^{\frac{1}{x^4+2x^2}}$
11.	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3-x^2}{3} \right)^{\frac{5}{x^4-3x^2}}$	12.	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4-5x}{4} \right)^{\frac{1}{x^2-x}}$
13.	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+3x^2}{2} \right)^{\frac{3}{5x^2}}$	14.	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{5+2x^2}{5} \right)^{\frac{4}{x^2}}$
15.	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1-3x^3 \right)^{\frac{5}{x^4+x^3}}$	16.	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+3x^3}{2} \right)^{\frac{1}{x^3}}$
17.	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4+2x}{4} \right)^{\frac{1}{x^2-x}}$	18.	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3+5x}{3} \right)^{\frac{2}{x}}$
19.	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2-3x^2}{2} \right)^{\frac{1}{x^2}}$	20.	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1+\frac{x^2}{3} \right)^{\frac{2}{x^3+x^2}}$
21.	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1-\frac{x^3}{3} \right)^{\frac{2}{x^3}}$	22.	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1+\frac{x^4}{4} \right)^{\frac{1}{x^4}}$
23.	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4+x^3}{4} \right)^{\frac{1}{x^3}}$	24.	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3-5x^2}{3} \right)^{\frac{4}{x^2}}$
25.	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{5-x^3}{5} \right)^{\frac{2}{x^3}}$	26.	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{7-2x^2}{7} \right)^{\frac{1}{x^2}}$

27.	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{7+x^3}{7} \right)^{\frac{3}{x^3}}$	28.	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{5+2x^2}{5} \right)^{-\frac{1}{x^2}}$
29.	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{5-2x^3}{5} \right)^{\frac{1}{x^3-x^4}}$	30.	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2-5x^3}{2} \right)^{-\frac{1}{x^3}}$

1.3.18 Знайти границі

1.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin 2x)}{\sqrt[3]{x+1}-1}$	2.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2}-1}{\ln(1+2x^2)}$
3.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-7x)}{2^{3x}-1}$	4.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x}-e^{-2x}}{\sqrt{1+2x}-1}$
5.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4x)}{e^{5x}-e^{3x}}$	6.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2}-e^x}{\ln(1+x^2-x)}$
7.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2}-e^x}{\ln(1+x^2-x)}$	8.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x-3^x}{\sqrt[5]{1+x}-1}$
9.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x^2)}{(1+x^2)^5-1}$	10.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2x)^4-1}{\ln(1+5x)}$
11.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-e^x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$	12.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\operatorname{tg} x)}{\sqrt[5]{1+x}-1}$
13.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[6]{1+x^2}-1}{\ln(1+\sin^2 x)}$	14.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{x^2}-1}{\sqrt[5]{1+x^2}-1}$
15.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2}-1}{\sqrt[3]{1+2x^2}-1}$	16.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-2^x}{\ln(1+2x)}$
17.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3}-1}{\ln(1+3x^3)}$	18.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+2x^3}-1}{e^{3x^3}-1}$

19.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \cdot \sin x} - 1}{1 - e^{x^2}}$	20.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\sin^2 x}$
21.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x \cdot \sin x)}{1 - 2^{x^2}}$	22.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[7]{1+2x^2} - 1}{\ln(1-3x^2)}$
23.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} - 1}{\sqrt[5]{1-x^2} - 1}$	24.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{1+x^2} - 1}{\ln(1+3x^2)}$
25.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin^2 x} - 1}{\ln(1 + \operatorname{arctg}^2 2x)}$	26.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 2^{2x}}{\operatorname{arctg} 2x - 7x}$
27.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\arcsin x} - 1}{\sqrt[5]{1+x} - 1}$	28.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{x^2} - 1}{\ln(1+3x^2)}$
29.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x^3}}{\sqrt[4]{1+2x} - 1}$	30.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x^3} - 1}{\arcsin x^3}$

1.2.19 Знайти границі

1.	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{\pi - 3x}$	2.	$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos 5x}{\sin^2 3x}$
3.	$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 4x}{\sin 5x}$	4.	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}}{x - \frac{\pi}{6}}$
5.	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$	6.	$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$
7.	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\pi - 2x}$	8.	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin 2x}{\pi - 4x}$

9.	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sin(x+2)}{x^3+8}$	10.	$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3-64}{\operatorname{tg}(x-4)}$
11.	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{tg}(x+2)}{x^2-4}$	12.	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x-3)}{x^3-27}$
13.	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin 3(x-2)}{x^2-3x+2}$	14.	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{6x-\pi}{\cos 3x}$
15.	$\lim_{x \rightarrow 1} (7-6x)^{\frac{x}{3x-3}}$	16.	$\lim_{x \rightarrow 2} (3x-5)^{\frac{2x}{x^2-4}}$
17.	$\lim_{x \rightarrow 3} (3x-8)^{\frac{2}{x-3}}$	18.	$\lim_{x \rightarrow 1} (1+\sin \pi x)^{\operatorname{ctg} \pi x}$
19.	$\lim_{x \rightarrow 1} (2x-1)^{\frac{1}{x-1}}$	20.	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{\operatorname{ctg} x} - \frac{\pi}{2 \cos x} \right)$
21.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{1-x}$	22.	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{1-\operatorname{tg} x}}$
23.	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x-3)}{x^2-4x+3}$	24.	$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1+\cos 3x}{\sin^2 7x}$
25.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+\cos \pi x}{\operatorname{tg}^2 \pi x}$	26.	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\operatorname{tg} \pi x}$
27.	$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos 5x - \cos 3x}{\sin^2 x}$	28.	$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2^x-16}{\sin \pi x}$
29.	$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 3x}$	30.	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{(\pi-2x)^2}$

2 НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

2.1 Короткий виклад теоретичного матеріалу

Означення 2.1. Функція $y=f(x)$ неперервна в точці x_0 , якщо вона визначена в ній, односторонні границі в точці існують і рівні між собою, тобто $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$, то точка x_0 є точкою розриву.

Означення 2.2. Точка x_0 є точкою усувного розриву, якщо функція в точці невизначена, а границя функції в точці x_0 існує.

Означення 2.3. Точка x_0 є точкою розриву першого роду, якщо функція в ній невизначена, односторонні границі в точці x_0 існують, але не рівні між собою.

У цьому випадку стрибок функції визначається формулою:

$$\delta = \left| \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) \right|. \quad (2.1)$$

Означення 2.4. Точка x_0 є точкою розриву другого роду, якщо хоча б одна з односторонніх границь не існує або дорівнює нескінченності.

2.2 Аудиторні завдання

1. Знайти область визначення функцій:

а) $y = \arcsin \frac{5x-3}{2} + \sqrt{4x^2-1}$	б) $y = \arccos \frac{x-3}{5} - \lg(3x+6)$
---	--

в) $y = \sqrt{4x^2 - 1} + \ln(3x + 6)$	г) $y = \sqrt{\frac{x+5}{4-2x}} + \arccos \frac{x-3}{4}$
--	--

Відповіді: а) $x \in [0,5; 1]$, б) $x \in (-2; 8]$,

в) $x \in (-2; -0,5] \cup [0,5; \infty)$, г) $x \in [-1; 2)$.

2. Дослідити на неперервність функції та зробити схематичне креслення їх графіків:

а) $y = \frac{x+2}{x-2}$	б) $y = \frac{x-3}{1+x}$	в) $y = 4^{\frac{1}{2-x}}$	г) $y = \frac{2}{1 + 2^{\frac{1}{x+1}}}$
д) $y = \begin{cases} -x^2, & x \leq -1 \\ x^2 - 2, & -1 < x < 2 \\ x + 2, & x \geq 2 \end{cases}$			

Відповіді: а) $x = 2$ – точка розриву другого роду (рис. 2.1);

б) $x = -1$ – точка розриву другого роду (рис. 2.2);

в) $x = 2$ – точка розриву другого роду (рис. 2.3);

г) $x = -1$ – точка розриву першого роду, величина стрибка $\delta = 2$ (рис 2.4);

д) функція неперервна в точці $x = -1$ і має розрив першого роду в точці $x = 2$, величина стрибка $\delta = 2$ (рис. 2.5).

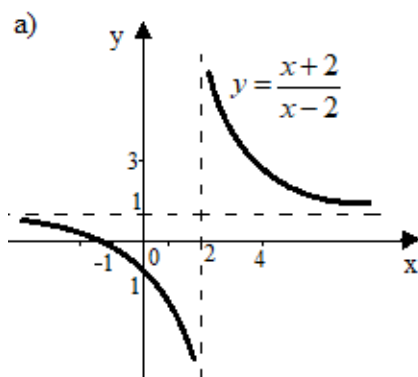


Рисунок 2.1

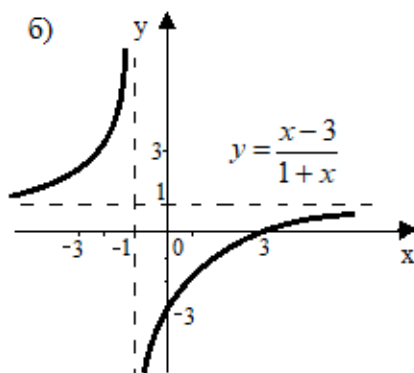


Рисунок 2.2

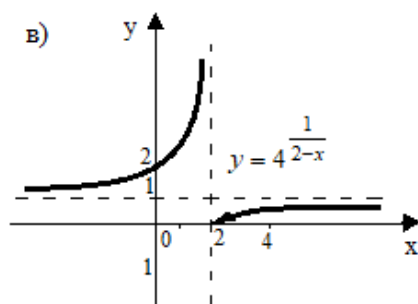


Рисунок 2.3

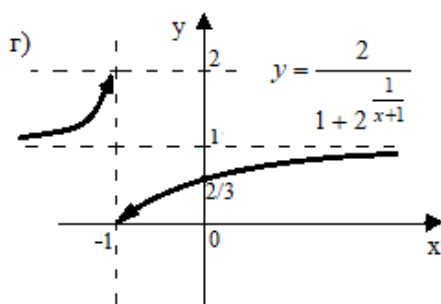


Рисунок 2.4

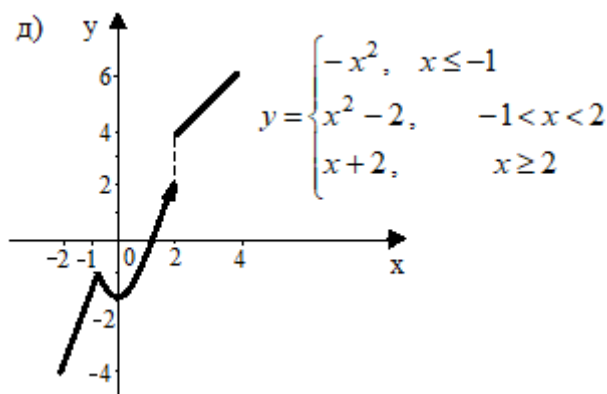


Рисунок 2.5

2.3 Індивідуальні завдання

2.3.1 Знайти область визначення функції

1. $y = \sqrt{x-1} + \frac{x+1}{\sqrt{x^2-5x+6}}$	2. $y = \sqrt{16-x^2} - 3\sqrt{x^2-4}$
3. $y = \sqrt{\frac{x-1}{x^2+3x+2}} + \ln(2x+1)$	4. $y = \arcsin \frac{x-1}{11} + \sqrt{3x^2+2x-1}$
5. $y = \sqrt{5-x} - \frac{6}{x} + \arccos \frac{2x+1}{6}$	6. $y = \arcsin \frac{x-1}{2} + \frac{x}{\sqrt{x^2-5x+6}}$
7. $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{81-x^2}$	8. $y = \sqrt{6-x-2x^2} + \arcsin \frac{x+1}{2}$
9. $y = \lg(25-x^2) + \arcsin \frac{2x-1}{10}$	10. $y = \lg(6x^2+x-1) - \arccos \frac{x-2}{3}$
11. $y = \frac{1}{\lg(x-1)} + \sqrt{x+3}$	12. $y = \ln(x^2+7x-30) - \arcsin \frac{2x+1}{7}$
13. $y = \sqrt{x^2-4x+3} - \frac{2}{x}$	14. $y = \frac{4}{\sqrt{x^2-5x+6}} - \arccos \frac{x-1}{7}$
15. $y = \ln \frac{5-x}{x-3} + \sqrt{49-x^2}$	16. $y = \sqrt{2+3x-5x^2} - \arccos \frac{x-2}{5}$
17. $y = \sqrt{x^2-9} + \sqrt{16-x^2}$	18. $y = \ln(6x^2-x-1) + \arcsin \frac{x-4}{7}$
19. $y = \sqrt{81-x^2} - 2\sqrt{x^2-4}$	20. $y = \arcsin \frac{x-6}{7} + \sqrt{2+3x+5x^2}$
21. $y = \sqrt{x} + \sqrt{4-x^2}$	22. $y = \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{x(x-4)}} + \arcsin \frac{2x-1}{2}$
23. $y = \frac{1}{\lg(1-x)} + \sqrt{x+2}$	24. $y = \lg \frac{x^2-6x+8}{x^2+9x+20} + \sqrt{3x+6}$

25. $y = \arccos \frac{x-2}{5} + \sqrt{\frac{x-1}{3-x}}$	26. $y = \ln \frac{x-2}{9-x} + \arcsin \frac{x-3}{5}$
27. $y = \sqrt{81-x^2} + \arcsin \frac{2x-1}{5}$	28. $y = \sqrt{x^2-36} - \arcsin \frac{2x-5}{9}$
29. $y = \sqrt{\frac{3-x}{x-5}} + \arccos \frac{x+3}{6}$	30. $y = \sqrt{\frac{5-x}{x+4}} + \arccos \frac{x+3}{3}$

2.3.2 Дослідити функцію на неперервність. Побудувати схематичний графік функції

1. $y = \frac{2x-3}{1-x}$	2. $y = \frac{x-2}{4-x}$	3. $y = \frac{x-1}{2x+1}$
4. $y = \frac{x-4}{2x+1}$	5. $y = \frac{x+4}{x+2}$	6. $y = \frac{x-3}{x+1}$
7. $y = \frac{x+4}{2x-1}$	8. $y = \frac{x+1}{2x-1}$	9. $y = \frac{2x-5}{x+1}$
10. $y = \frac{x+2}{2x-1}$	11. $y = \frac{x+3}{3x+1}$	12. $y = \frac{x-2}{x+1}$
13. $y = \frac{x+2}{x-1}$	14. $y = \frac{x-3}{2x-1}$	15. $y = \frac{2x+3}{x+1}$
16. $y = \frac{4-x}{x+2}$	17. $y = \frac{2x-1}{x+1}$	18. $y = \frac{5-x}{x+1}$
19. $y = \frac{x-9}{3x+1}$	20. $y = \frac{3x-1}{2x+1}$	21. $y = \frac{x-4}{2x-1}$
22. $y = \frac{x+1}{x-2}$	23. $y = \frac{2x+3}{2x+1}$	24. $y = \frac{2x-1}{x+1}$
25. $y = \frac{x-1}{x+2}$	26. $y = \frac{x+9}{x-3}$	27. $y = \frac{x+2}{x-4}$

28.	$y = \frac{3x-1}{x+2}$	29.	$y = \frac{x+1}{x+2}$	30.	$y = \frac{3x+1}{x-2}$
-----	------------------------	-----	-----------------------	-----	------------------------

2.3.3 Дослідити функцію на неперервність. Побудувати схематичний графік функції

1.	$y = 3^{\frac{1}{x-2}}$	2.	$y = 2^{\frac{1}{5+x}}$	3.	$y = 4^{\frac{1}{x+1}}$
4.	$y = 2^{\frac{1}{3-x}}$	5.	$y = 3^{\frac{1}{x-5}}$	6.	$y = 2^{\frac{1}{x-9}}$
7.	$y = 5^{\frac{1}{x-9}}$	8.	$y = 4^{\frac{1}{x+3}}$	9.	$y = e^{\frac{1}{2-x}}$
10.	$y = 9^{\frac{1}{x+9}}$	11.	$y = 5^{\frac{1}{x-4}}$	12.	$y = 4^{\frac{1}{3-x}}$
13.	$y = 2^{\frac{1}{3+x}}$	14.	$y = 3^{\frac{1}{7+x}}$	15.	$y = 2^{\frac{1}{x-8}}$
16.	$y = e^{\frac{1}{x+10}}$	17.	$y = 4^{\frac{1}{4-x}}$	18.	$y = 6^{\frac{1}{5-x}}$
19.	$y = 3^{\frac{1}{x-4}}$	20.	$y = 2^{\frac{1}{x+1}}$	21.	$y = e^{\frac{1}{x-2}}$
22.	$y = 2^{\frac{1}{x-2}}$	23.	$y = 3^{\frac{1}{x-3}}$	24.	$y = 4^{\frac{1}{x+4}}$
25.	$y = 5^{\frac{1}{x-5}}$	26.	$y = 6^{\frac{1}{x-6}}$	27.	$y = 7^{\frac{1}{x-7}}$
28.	$y = 2^{\frac{1}{2-x}}$	29.	$y = 4^{\frac{1}{x-4}}$	30.	$y = e^{\frac{1}{x+2}}$

2.3.4 Дослідити функцію на неперервність. Побудувати схематичний графік функції

1.	$y = \frac{1}{2 + 3^{\frac{1}{x-4}}};$	2.	$y = \frac{4}{6 + 7^{\frac{1}{x+2}}}$
3.	$y = \frac{1}{3 + 5^{\frac{1}{x+2}}}$	4.	$y = \frac{2}{3 + 4^{\frac{1}{x-2}}}$
5.	$y = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x-1}}}$	6.	$y = \frac{2}{3 + 5^{\frac{1}{x+1}}}$
7.	$y = \frac{1}{1 + 3^{\frac{1}{x-4}}}$	8.	$y = \frac{3}{2 + 2^{\frac{1}{x-3}}}$
9.	$y = \frac{5}{3 + 2^{\frac{1}{x+4}}}$	10.	$y = \frac{2}{4 + 5^{\frac{1}{x+3}}}$
11.	$y = \frac{4}{1 + 4^{\frac{1}{x-3}}}$	12.	$y = \frac{7}{1 + 3^{\frac{1}{x-5}}}$
13.	$y = \frac{5}{4 + 3^{\frac{1}{x+2}}}$	14.	$y = \frac{6}{2 + 4^{\frac{1}{x-1}}}$
15.	$y = \frac{1}{1 + 3^{\frac{1}{x+6}}}$	16.	$y = \frac{1}{3 + 2^{\frac{1}{x+7}}}$
17.	$y = \frac{1}{2 + 5^{\frac{1}{x-2}}}$	18.	$y = \frac{2}{1 + 3^{\frac{1}{x-4}}}$

19.	$y = \frac{3}{4 + 2^{\frac{1}{x-5}}}$	20.	$y = \frac{1}{1 + 3^{\frac{1}{x+1}}}$
21.	$y = \frac{6}{3 + 6^{\frac{1}{x-2}}}$	22.	$y = \frac{4}{5 + 2^{\frac{1}{x-5}}}$
23.	$y = \frac{1}{2 + 3^{\frac{1}{x-7}}}$	24.	$y = \frac{5}{1 + 4^{\frac{1}{x+3}}}$
25.	$y = \frac{3}{2 + 2^{\frac{1}{x-4}}}$	26.	$y = \frac{1}{3 + 5^{\frac{1}{x+1}}}$
27.	$y = \frac{2}{1 + 8^{\frac{1}{x-5}}}$	28.	$y = \frac{4}{4 + 2^{\frac{1}{x+3}}}$
29.	$y = \frac{9}{2 + 7^{\frac{1}{x-3}}}$	30.	$y = \frac{1}{3 + 2^{\frac{1}{x+2}}}$

2.3.5 Дослідити функцію на неперервність. Побудувати схематичний графік функції

1.	$y = \begin{cases} x + 2, & x < 0 \\ x^2 + 2, & 0 \leq x < 2 \\ -x, & x \geq 2 \end{cases}$	2.	$y = \begin{cases} 2, & x < -3 \\ x^2 - 1, & -3 \leq x < 1 \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$
3.	$y = \begin{cases} 2x + 1, & x < -1 \\ x^2 - 4, & -1 \leq x < 3 \\ x + 2, & x \geq 3 \end{cases}$	4.	$y = \begin{cases} 1 - 2x, & x \leq -1 \\ 2x^2 + 1, & -1 < x \leq 2 \\ 2^x, & x > 2 \end{cases}$

5.	$y = \begin{cases} x^3 + 1, & x \leq 0 \\ x + 3, & 0 < x < 1 \\ 5 - x, & x \geq 1 \end{cases}$	6.	$y = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ 1, & 0 < x \leq 2 \\ x - 3, & x > 2 \end{cases}$
7.	$y = \begin{cases} x^2 - 4, & x \leq 2 \\ 2 - x, & 2 < x \leq 6 \\ 2x - 7, & x > 6 \end{cases}$	8.	$y = \begin{cases} 3x - 2, & x \leq 0 \\ 2^x, & 0 < x < 2 \\ x^2, & x \geq 2 \end{cases}$
9.	$y = \begin{cases} x + 2, & x \leq 0 \\ \cos x, & 0 < x \leq \pi \\ -1, & x > \pi \end{cases}$	10.	$y = \begin{cases} x + 3, & x \leq 0 \\ \ln x, & 0 < x \leq e \\ 1, & x > e \end{cases}$
11.	$y = \begin{cases} \sin 2x, & x \leq \frac{\pi}{4} \\ 1, & \frac{\pi}{4} < x < 2\pi \\ x - 1, & x \geq 2\pi \end{cases}$	12.	$y = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ \operatorname{tg} x, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ x + 2, & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$
13.	$y = \begin{cases} 5^x, & x \leq 0 \\ x^2 + 1, & 0 < x \leq 2 \\ 3x - 2, & x > 2 \end{cases}$	14.	$y = \begin{cases} x, & x \leq 2 \\ 4 - x, & 2 < x < 4 \\ x^2 - 9, & x \geq 4 \end{cases}$
15.	$y = \begin{cases} 2x - 3, & x < 1 \\ x^2 - 2, & 1 \leq x < 3 \\ -x, & x \geq 3 \end{cases}$	16.	$y = \begin{cases} -2x, & x < -2 \\ x^2, & -2 \leq x < 2 \\ 3x - 5, & x \geq 2 \end{cases}$
17.	$y = \begin{cases} x^2 - 4, & x < -1 \\ 3x, & -1 \leq x \leq 2 \\ 4, & x > 2 \end{cases}$	18.	$y = \begin{cases} 3^x, & x \leq 0 \\ -2x + 1, & 0 < x < 3 \\ x + 2, & x \geq 3 \end{cases}$

19.	$y = \begin{cases} 2 - x, & x < -3 \\ -x^2, & -3 \leq x < 2 \\ 2 - 3x, & x \geq 2 \end{cases}$	20.	$y = \begin{cases} 1 - x, & x < -1 \\ 2x + 4, & -1 \leq x < 2 \\ x^2 - 1, & x \geq 2 \end{cases}$
21.	$y = \begin{cases} x - \frac{\pi}{4}, & x \leq \frac{\pi}{4} \\ \cos 2x, & \frac{\pi}{4} < x < \pi \\ 2, & x \geq \pi \end{cases}$	22.	$y = \begin{cases} 1, & x < \frac{\pi}{2} \\ \sin x, & \frac{\pi}{2} \leq x < 2\pi \\ x, & x \geq 2\pi \end{cases}$
23.	$y = \begin{cases} x - 1, & x \leq 1 \\ \ln x, & 1 < x < 3 \\ -x, & x \geq 3 \end{cases}$	24.	$y = \begin{cases} x + 3, & x < -1 \\ 2 - 2x, & -1 \leq x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$
25.	$y = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x + 1, & 0 < x < 2 \\ x^3 - 5, & x \geq 2 \end{cases}$	26.	$y = \begin{cases} x + 10, & x \leq -3 \\ x^2 + 4, & -3 < x < 2 \\ x^3, & x \geq 2 \end{cases}$
27.	$y = \begin{cases} \frac{6}{x}, & x < -3 \\ -x - 5, & -3 \leq x < 1 \\ 2^x, & x \geq 1 \end{cases}$	28.	$y = \begin{cases} -x^2 + 3, & x \leq 1 \\ \frac{2}{x}, & 1 < x < 3 \\ x - 3, & x \geq 3 \end{cases}$
29.	$y = \begin{cases} 4, & x < -2 \\ x^2, & -2 \leq x < 2 \\ 3 - x, & x > 2 \end{cases}$	30.	$y = \begin{cases} x^3, & x \leq -1 \\ x^2 - 2, & -1 < x < 3 \\ x + 2, & x \geq 3 \end{cases}$

3 ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

3.1 Короткий виклад теоретичного матеріалу

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Правила диференціювання

Маємо функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$, $C - \text{const}$. Тоді

$$(C \cdot u)' = C \cdot (u)' \quad (3.1)$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v' \quad (3.2)$$

$$(u \cdot v)' = u' v + u \cdot v' \quad (3.3)$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{(v)^2} \quad (3.4)$$

Таблиця 3.1 – Таблиця похідних

У таблиці $u = u(x)$ – функція

1. $(C)' = 0$	2. $(x)' = 1$
3. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$	3a). $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
4. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u', a - \text{const}$	4a). $(e^u)' = e^u \cdot u'$
5. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$	5a). $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
6. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$	7. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
8. $(\text{tg } u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$	9. $(\text{ctg } u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
10. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$	11. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
12. $(\text{arctg } u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$	13. $(\text{arcctg } u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Для степенєво-показникової функції $(u(x))^{v(x)} = u^v$:

$$(u^v)' = u^v \ln u \cdot v' + v u^{v-1} \cdot u'. \quad (3.5)$$

Розглянемо гіперболічні функції

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}.$$

Таблиця 3.2 – Таблиця похідних гіперболічних функцій

14. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$	15. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$
16. $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	17. $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

Правило диференціювання неявно заданої функції

Означення 3.1. Функція $y(x)$ є неявно заданою, якщо рівняння $F(x, y) = 0$ неможливо розв'язати відносно функції $y(x)$.

При знаходженні похідної неявно заданої функції необхідно рівняння $F(x, y) = 0$ продиференціювати, враховуючи, що $(y)' = y'$ і $(x)' = 1$. Отримане рівняння розв'язати відносно y' .

У деяких випадках при знаходженні похідної доцільно функцію спочатку прологарифмувати, а потім знайти похідну як від неявно заданої функції (логарифмічне диференціювання).

Якщо функція параметрично задана $\begin{cases} y = y(t), \\ x = x(t), \end{cases}$ то похідна знаходиться за формулою:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}. \quad (3.6)$$

Диференціал функції $y = f(x)$ знаходиться за формулою:

$$dy = f'(x) \cdot dx. \quad (3.7)$$

Нехай функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$, $C = \text{const}$.

Таблиця 3.3 – Таблиця властивостей диференціала функції

1. $d(C \cdot u) = C \cdot du$	1a) $dC = 0$
2. $d(u \pm v) = du \pm dv$	2a) $d(u \pm C) = du$
3. $d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv$	3a) $du = \frac{1}{C} \cdot d(C \cdot u)$
4. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{du \cdot v - u \cdot dv}{(v)^2}$	5. $df(u) = f'(u) \cdot u'_x dx$

Враховуючи, що перша похідна y' є функцією, то її можна диференціювати. Дістанемо $y'' = (y')'$ і так далі:

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right) = \left(y^{(n-1)} \right)'. \quad (3.8)$$

Друга похідна параметрично заданої функції знаходиться за формулою:

$$y''_{xx} = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{x'_t y''_{tt} - x''_{tt} y'_t}{(x'_t)^3}, \quad (3.9)$$

або

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}. \quad (3.10)$$

Похідна n -го порядку від параметрично заданої функції знаходиться за формулою:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right)' \cdot \frac{1}{x'_t} \quad (3.11)$$

Таблиця 3.4 – Формули для похідних вищих порядків від деяких функцій

$y = f(x)$	$y^{(n)}$
$y = x^m, \quad x > 0, m \in R$	$\begin{cases} m > n \Rightarrow y^{(n)} = m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-(n-1)) \cdot x^{m-n} \\ m = n \Rightarrow y^{(n)} = n! \\ m < n \Rightarrow y^{(n)} = 0 \end{cases}$
$y = \frac{1}{x}, x \neq 0$	$y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$
$y = a^x, \quad 0 < a \neq 1$	$y^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a$
$y = e^x$	$y^{(n)} = e^x$
$y = \log_a x, \quad 0 < a \neq 1, x > 0$	$y^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1} (n-1)!}{x^n \ln^n a}$
$y = \ln x, x > 0$	$y^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1} (n-1)!}{x^n}$
$y = \sin x$	$y^{(n)} = \sin \left(x + n \cdot \frac{\pi}{2} \right)$
$y = \cos x$	$y^{(n)} = \cos \left(x + n \cdot \frac{\pi}{2} \right)$

При знаходженні другої похідної неявно заданої функції необхідно рівняння $F(x, y) = 0$ двічі продиференціювати, враховуючи, що $(y)' = y'$, $(y')' = y''$ і $(x)' = 1$. Отримане рівняння розв'язати відносно y'' .

Означення 3.2. Диференціалом другого порядку від функції $y = f(x)$ називається диференціал від диференціала першого порядку

$$d^2 y = d(dy) = f''(x) \cdot dx^2. \quad (3.12)$$

Означення 3.3. Диференціалом n -го порядку від функції $y = f(x)$ називається диференціал від диференціала $(n-1)$ -го порядку

$$d^n y = d(d^{n-1} y) = f^{(n)}(x) \cdot dx^n. \quad (3.13)$$

3.2. Аудиторні завдання

1. Знайти похідну функції, користуючись означенням похідної:

а) $y = \sin \frac{5x}{2}$	б) $y = 5x^3 - 3x^2 + 2$
----------------------------	--------------------------

2. Знайти похідну функції, користуючись таблицею похідних та правилами диференціювання.

а) $y = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[3]{\sin^2 3} + (2x-3)^7$
б) $y = \ln \sqrt[3]{x^3 - 3x + 4} - \arcsin^4(2x^3),$
в) $y = e^{\cos^2(x+2)} \cdot \operatorname{tg}(3x^4 + 5x)$
г) $y = \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\sin^3 \frac{x}{2}}.$

Відповіді: а) $y' = x^3 + \frac{1}{3x\sqrt[3]{x^2}} + 14 \cdot (2x-3)^6,$

$$\text{б) } y' = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 3x + 4} - \frac{24x^2 \arcsin^3(2x^3)}{\sqrt{1 - 4x^6}},$$

$$\text{в) } y' = e^{\cos^2(x+2)} \left(\frac{12x^3 + 5}{\cos^2(3x^4 + 5x)} - \sin(2x + 4) \cdot \operatorname{tg}(3x^4 + 5x) \right),$$

$$\text{г) } y' = \frac{\frac{2 \sin \frac{x}{2}}{2} - 1,5 \cdot \cos \frac{x}{2} \cdot \operatorname{arctg} 2x}{\sin^4 \frac{x}{2}}.$$

3. Знайти похідну функції, застосовуючи логарифмічне диференціювання або формулу для диференціювання степеневопоказникової функції.

$\text{а) } y = (\cos \sqrt[3]{x})^{\ln(x^3+6)}$	$\text{б) } y = \frac{\sqrt[5]{x^2 + 5x}}{(6x - 4)^2 (x + 5)^3}.$
--	---

Відповіді: а) $y' = \ln(x^3 + 6) \cdot (\cos \sqrt[3]{x})^{\ln(x^3+6)-1} \cdot (-\sin \sqrt[3]{x}) \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} +$
 $+ (\cos \sqrt[3]{x})^{\ln(x^3+6)} \cdot \ln(\cos \sqrt[3]{x}) \cdot \frac{3x^2}{x^3 + 6},$

$$\text{б) } y' = \frac{\sqrt[5]{x^2 + 5x}}{(6x - 4)^2 (x + 5)^3} \cdot \left(\frac{2x + 5}{5(x^2 + 5x)} - \frac{1}{3x - 2} - \frac{3}{x + 5} \right).$$

4. Знайти першу похідну функції, заданої неявно.

$\text{а) } \sin(x + y) = 2e^{2x+y}$	$\text{б) } x^2 + xy^3 + y^2 = 0.$
--------------------------------------	------------------------------------

Відповіді: а) $y' = \frac{4e^{2x+y} - \cos(x+y)}{\cos(x+y) - 2e^{2x+y}},$ б) $y' = -\frac{2x + y^3}{3xy^2 + 2y}.$

5. Знайти похідні y'_x, y''_{xx} функції, заданої параметрично.

а) $\begin{cases} x = t^2 - 3t \\ y = 2t - 3t^2 \end{cases}$	б) $\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \ln(1 - t^2) \end{cases}$
в) $\begin{cases} x = \ln t \\ y = t^2 - 1 \end{cases}$	г) $\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin^2 t \end{cases}$
д) $\begin{cases} x = \ln t \\ y = \frac{1}{1-t} \end{cases}$	е) $\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \sin^2 t \end{cases}$

Відповіді: а) $y'_x = \frac{2-3t}{2t-3}, y''_{xx} = \frac{5}{(2t-3)^2};$

б) $y'_x = \frac{-2t}{\sqrt{1-t^2}}, y''_{xx} = \frac{2}{t^2-1};$

в) $y'_x = 2t^2, y''_{xx} = 4t^2;$

г) $y'_x = -0.5, y''_{xx} = 0;$

д) $y'_x = \frac{t}{(t-1)^2}, y''_{xx} = \frac{t(t+1)}{(1-t)^3};$

е) $y'_x = 0.5 \operatorname{tg} 2t, y''_{xx} = \frac{1}{2 \cos^3 2t}.$

6. Знайти другу похідну функції.

а) $y = x^2 \cdot e^{3x}$	б) $y = \ln(\operatorname{tg} 3x)$
в) $y = \ln(\sqrt{1+x^2} - x)$	г) $y = e^{-x} \sin 2x$

Відповіді: а) $y'' = e^{3x}(9x^2 + 12x + 2),$

$$\text{б) } y'' = \frac{-36 \cos 6x}{\sin^2 6x},$$

$$\text{в) } y'' = -\frac{x}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}},$$

$$\text{г) } y'' = -e^{-x}(3 \sin 2x + 4 \cos 2x).$$

7. Довести, що функція $y = f(x)$ є розв'язок заданого рівняння $F(x, y, y', y'') = 0$:

$y = f(x)$	$F(x, y, y', y'') = 0$
а) $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$	$(1-x^2)y' - xy = 1$
б) $y = x \cdot (1 - \ln x)$	$y'' = y/x - 1$
в) $y = x \cdot e^{-x^2/2}$	$y'' + 2y + x \cdot y' = 0$

8. Знайти похідну n -го порядку.

а) $y = x \cdot e^x$	б) $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$
в) $y = 5^{\frac{x}{2}}$	г) $y = \ln(2x - 1)$

Відповіді: а) $y^{(n)} = e^x \cdot (x + n)$,

$$\text{б) } y^{(n)} = (-1)^n n! \cdot \left(\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}} \right),$$

$$\text{в) } y^{(n)} = \left(\frac{1}{2} \ln 5 \right)^n \cdot 5^{\frac{x}{2}},$$

$$\text{г) } y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} 2^n (n-1)!}{(2x-1)^n}.$$

3.3 Індивідуальні завдання

3.3.1 Знайти похідну функції, користуючись означенням похідної

1.	$y = \sin 3x$	2.	$y = \operatorname{tg} 2x$	3.	$y = 2^{1-3x}$
4.	$y = 1 + x - x^2$	5.	$y = e^{3x+2}$	6.	$y = 2x - 3x^2$
7.	$y = \frac{2}{x+2}$	8.	$y = \frac{\cos 2x}{2}$	9.	$y = \frac{1}{1-x}$
10.	$y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$	11.	$y = \frac{\sin 2x}{3}$	12.	$y = 2 \cdot e^{\frac{x}{2}}$
13.	$y = 3x^2 + 5x - 6$	14.	$y = \sqrt{x-1}$	15.	$y = x^{-2}$
16.	$y = 4 \cos\left(\frac{x}{3} + 2\right)$	17.	$y = \cos \frac{x}{3}$	18.	$y = \frac{1}{x}$
19.	$y = x^2 + 2x$	20.	$y = \sqrt[3]{x^2}$	21.	$y = \sqrt{3x+1}$
22.	$y = \frac{1}{2x+5}$	23.	$y = \sin \frac{x}{4}$	24.	$y = 3^{x+1}$
25.	$y = \frac{3}{2}x^2$	26.	$y = 2 \cdot \sin \frac{x}{2}$	27.	$y = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$
28.	$y = 6 - 4x^2$	29.	$y = \operatorname{ctg} 4x$	30.	$y = (x+1)^2$

3.3.2 Знайти похідну функції, користуючись таблицею похідних та правилами диференціювання

1.	a) $y = \frac{\sqrt[5]{x^3}}{3} + 2\sin 3x - \cos\sqrt{2}$
	б) $y = 2^{\cos x - 5} - \sqrt[3]{x^4} + 1$

	в) $y = \sin^3 2x \cdot \ln(x^2 - 1)$	г) $y = \frac{e^{2x}}{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}$
2.	а) $y = \frac{\sqrt[6]{x^5}}{5} - 3 \cos 2x + \sin 4$	
	б) $y = 5 \operatorname{tg}(x^3 + 2x) + e^{\sqrt{3x-4}}$	
	в) $y = 3 \arcsin \sqrt{x} \cdot \sqrt{1-2x^2}$	г) $y = \frac{\sin 5x}{(x^3 + 2x)^2}$
3.	а) $y = 3 \operatorname{tg} 4x - \frac{\sqrt[4]{x^3}}{3} + \sqrt[3]{\pi}$	
	б) $y = \sin^3(x^2 + 2x) - e^{\operatorname{arctg} 4x}$	
	в) $y = 3^{\cos^2 x} \cdot \sqrt{x^4 + 2}$	г) $y = \frac{\ln^2(2x+1)}{\operatorname{arctg} 3x}$
4.	а) $y = \sqrt[3]{5} \operatorname{ctg} 5x - \frac{\sqrt[3]{x^2}}{2} + \sqrt[5]{\pi}$	
	б) $y = \sin^3(2^{\arccos x}) - e^{\operatorname{tg}^2 x}$	
	в) $y = \cos 3x \cdot \operatorname{arctg}^3 2x$	г) $y = \frac{\ln(1+x^5)}{\sqrt{5x+1}}$
5.	а) $y = \operatorname{tg} 2 \cdot \sin 3x + e^5 - \frac{\sqrt[7]{x^4}}{4}$	
	б) $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} + \ln(x^2 + 2x)$	
	в) $y = \log_6 5x \cdot \arccos(3x-3)$	г) $y = \frac{x^2 - 6}{\operatorname{tg} 2x}$
6.	а) $y = \frac{e^x}{3} - 2 \cdot \sqrt[3]{x^2} + \ln 3 \cdot \sin 2x$	
	б) $y = 3 \ln(1 + \sqrt{x}) - 2 \sqrt{1 + \cos x}$	

	в) $y = \operatorname{tg}^2 2x \cdot \operatorname{ctg} 3x$	г) $y = \frac{\arcsin^2 x}{(2x+1)^3}$
7.	а) $y = \frac{\operatorname{tg} 3x}{3} - \frac{\sqrt[6]{x^5}}{5} + \pi^2$	
	б) $y = \ln(1 + \sin^2 x) - \operatorname{arctg}(\sin x)$	
	в) $y = \arcsin^2 2x \cdot \cos^3 3x$	г) $y = \frac{2x^2+3x}{x^2-5x}$
8.	а) $y = \frac{3x^2}{2} + \sqrt{\pi} + 7 \cdot \sqrt[7]{x^5}$	
	б) $y = 2 \arcsin \frac{1+x}{\sqrt{2}} - \ln(\sqrt{1-x^2})$	
	в) $y = \sin^2 7x \cdot e^{x^2-3}$	г) $y = \frac{\operatorname{arctg} 4x}{x^2+3x+2}$
9.	а) $y = \sqrt[3]{\pi^2} - \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} + 5 \ln 4x$	
	б) $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{3} - \sin^3(2x^2+5)$	
	в) $y = (2x+3) \cdot \sqrt{2+3x-x^2}$	г) $y = \frac{\arccos^2 2x}{\sin^3 x}$
10.	а) $y = \frac{3}{\sqrt[5]{x^4}} + \sqrt{\sin 2} - 3 \operatorname{ctg} \frac{x}{4}$	
	б) $y = \arccos \sqrt{1-2x^2} + e^{\operatorname{ctg} x}$	
	в) $y = (3x-x^2) \cos^3 2x$	г) $y = \frac{\ln 5x}{x^2+2^x}$
11.	а) $y = 2x\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{\cos 1} + 5 \operatorname{tg} \frac{x}{5}$	
	б) $y = \ln^2(\sin 2x) - \sqrt{e^{x^2} - \cos 3x}$	

	в) $y = 5^{x^2+2x} \cdot \cos 2x$	г) $y = \frac{x^3 + 6x}{\sqrt{x^2 + 10}}$
12.	а) $y = \sin 3 + \frac{x^2 \cdot \sqrt[3]{x}}{3} + \frac{3 \cos 2x}{2}$	
	б) $y = (5x - 2)^4 - \ln^3(e^{x^2} + 5x)$	
	в) $y = (3 - 2x)^3 \cdot \operatorname{tg} 5x$	г) $y = \frac{\arcsin x^2}{x^4 - 3x}$
13.	а) $y = 3 \operatorname{tg} \frac{x}{3} + \sin \sqrt{3} - \frac{1}{2\sqrt[5]{x^2}}$	
	б) $y = 2\sqrt{e^{2x} + 1} - 3 \ln(1 + \operatorname{tg}^2 x)$	
	в) $y = 2^{x^2+3x} \cdot \arcsin(5x + 1)$	г) $y = \frac{\sin^2 x}{\cos \sqrt{x}}$
14.	а) $y = e^{\sqrt{3}} - 2 \cos \frac{x}{2} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x}}$	
	б) $y = \ln(x^3 + 3 \cos x) - 2^{\arcsin 5x}$	
	в) $y = (2x - 1) \cdot \sqrt{2 + x - x^2}$	г) $y = \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{x^2 + 5x^2}$
15.	а) $y = \ln 3 + 4 \operatorname{ctg} \frac{x}{4} - \frac{x}{2\sqrt[5]{x^3}}$	
	б) $y = \ln(x^2 + 3 \sin x) - 2^{\arcsin 3x}$	
	в) $y = 3^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}} \cdot (6x - x^2)$	г) $y = \frac{\operatorname{tg} 3x}{\sqrt{x^2 + 3}}$
16.	а) $y = 6^{2x-3} - \frac{4}{\sqrt[3]{x^2}} + \operatorname{tg} 2$	
	б) $y = \operatorname{arctg}(\sqrt{x^2 - 1}) - e^{2 \sin^3 x}$	

	в) $y = \ln(1 + 2x) \cdot (x^3 + 3x)$	г) $y = \frac{\cos^2 x}{\arccos 2x}$
17.	а) $y = \frac{1}{3\sqrt[5]{x}} + \sin \sqrt{2} + \ln(2x - 1)$	
	б) $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 5}\right) - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x^3 - 1}$	
	в) $y = 3^{x^2 + 5x} \cdot \arcsin \sqrt{x}$	г) $y = \frac{e^{2 \sin x}}{\operatorname{tg}^2 5x}$
18.	а) $y = \frac{\sqrt[3]{x^4}}{4} - \operatorname{arctg} 2x - \sqrt{\sin 1}$	
	б) $y = \ln(\cos^2 x + x^2) - 3\sqrt{2^{\sin 2x} + x^3}$	
	в) $y = \operatorname{arccotg}^2 5x \cdot \ln(x - 4)$	г) $y = \frac{\ln(x + 4)}{\cos^5 x}$
19.	а) $y = \frac{1}{3\sqrt{x^5}} - \cos \frac{x}{3} + 5 \sin 5$	
	б) $y = \sqrt{5x - x^2} - \ln^3(1 - \sin x^3)$	
	в) $y = \arccos^4 x \cdot \ln(x^2 + x - 1)$	г) $y = \frac{(x - 2)^2}{\operatorname{arctg}(x + 7)}$
20.	а) $y = \sin(\operatorname{tg} 2) - \frac{4}{3\sqrt[7]{x^5}} + 2 \ln(3x + 1)$	
	б) $y = \ln\left(\arccos \frac{1}{\sqrt{x}}\right) - 2 \operatorname{arctg}(e^x - e^{-x})$	
	в) $y = \sqrt{\arccos x} \cdot 3^{-x^2}$	г) $y = \frac{e^{\sin x}}{(x - 5x^3)^7}$
21.	а) $y = \sin \sqrt[8]{3} - \frac{3}{\sqrt[4]{x}} + \operatorname{tg}(2x + 3)$	

	$\text{б) } y = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1\right) - e^{\sin^2 3x}$	
	$\text{в) } y = \operatorname{tg}^4 3x \cdot \operatorname{arctg} 7x^2$	$\text{г) } y = \frac{4x - 5x^2}{\ln(3x + 7)}$
22.	$\text{а) } y = \frac{\sqrt[8]{x^5}}{5} - \sqrt{\sin 2} + \cos(2x - 1)$	
	$\text{б) } y = \arcsin \sqrt{1 - 2x^2} - (3x^2 + 4x)^5$	
	$\text{в) } y = 3^{-x^2} \cdot \arccos 3x^3$	$\text{г) } y = \frac{7 \ln(3x - 5)}{(x^4 - 2)^2}$
23.	$\text{а) } y = \frac{\sqrt[10]{x^9}}{9} - \ln \sin 3 + \operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} + 2\right)$	
	$\text{б) } y = \ln^2(x + \cos x) - 2^{\sin^3 2x}$	
	$\text{в) } y = \ln(2x + 3) \cdot e^{-x^2}$	$\text{г) } y = \frac{(2x + 5)^3}{\cos 5x}$
24.	$\text{а) } y = \ln \cos 1 - \arcsin \frac{x}{2} + \frac{1}{2\sqrt[8]{x^7}}$	
	$\text{б) } y = \arccos \sqrt{4 - 2x} + 2^{\sin^2 3x}$	
	$\text{в) } y = \operatorname{ctg}^3 4x \cdot \operatorname{arctg} 2x^2$	$\text{г) } y = \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{2x^2 + 3x}$
25.	$\text{а) } y = \frac{2}{3\sqrt[5]{x^3}} - \ln 3 + \sin(2x + 3)$	
	$\text{б) } y = \ln\left(\arcsin \sqrt{1 - e^x}\right) - 2^{2x^2 - 5x}$	
	$\text{в) } y = 3^{\cos x} \cdot \arcsin^2 3x$	$\text{г) } y = \frac{\operatorname{ctg}^2 5x}{3x^2 - 4}$
26.	$\text{а) } y = \frac{3}{2\sqrt[6]{x^5}} - \sqrt[3]{\pi^2} + \sin \frac{x}{3}$	

	$\text{б) } y = \arctg \sqrt{x^2 - 1} + 3^{5x-3x^2}$	
	$\text{в) } y = \ln(2x+4) \cdot \arctg^3 4x$	$\text{г) } y = \frac{e^{-\text{ctg} 2x}}{3x^2 + 4x + 2}$
27.	$\text{а) } y = \sqrt[5]{\sin 3} - \frac{3\sqrt[4]{x^5}}{4} - \text{tg} \frac{x}{2}$	
	$\text{б) } y = \ln(\sin^3 x + e^{2x}) - 3\sqrt{x^2 + 3x} + e^{\text{ctg} x}$	
	$\text{в) } y = 4^{-\sin 2x} \cdot \arctg 3x$	$\text{г) } y = \frac{\cos(7x+2)}{\text{ctg} 2x^3}.$
28.	$\text{а) } y = \sqrt[5]{\cos(\text{tg} 3)} - \frac{\sqrt[6]{x^5}}{5} + \text{ctg} \frac{x}{2}$	
	$\text{б) } y = 2 \arcsin \frac{x-2}{\sqrt{6}} - \sqrt{3+6x-x^2}$	
	$\text{в) } y = \ln \text{tg} \frac{x}{2} \cdot \arctg 2x$	$\text{г) } y = \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{1 + \sqrt{1+x^2}}.$
29.	$\text{а) } y = \text{tg} \ln 2 + \frac{3}{\sqrt[7]{x^4}} - \arccos 2x$	
	$\text{б) } y = \frac{1}{8} \ln(1-4x^2) - \sqrt{\arcsin 2x}$	
	$\text{в) } y = \text{ctg}(8\sqrt{x}) \cdot \arctg^2 x$	$\text{г) } y = \frac{2x^2 + 3x}{\sin 2x}.$
30.	$\text{а) } y = \text{tg} \sqrt[8]{4} - \frac{2}{\sqrt[3]{x^7}} + \text{ctg} 3x$	
	$\text{б) } y = \arcsin \sqrt{\frac{x}{2}} - 1 - \ln(2 + e^{x^3})$	
	$\text{в) } y = \text{tg}(2\sqrt{x}) \cdot e^{\arcsin \sqrt{1-x}}$	$\text{г) } y = \frac{\sin^2 3x}{\cos 6x}.$

3.3.3 Знайти похідну функції, застосовуючи логарифмічне диференціювання або формулу для диференціювання степеневопоказникової функції

1.	a) $y = (\sin \sqrt{x})^{\operatorname{tg} 2x}$	б) $y = \frac{\sqrt{x-2}}{(x+1)^3(x+5)^4}$
2.	a) $y = (\operatorname{arctg} x)^{x^3-2x^2}$	б) $y = \frac{\sqrt[3]{x-3}}{(x+5)^3(x+1)^2}$
3.	a) $y = (x^2 + 1)^{\operatorname{ctg} 8x}$	б) $y = \frac{(2x+1) \cdot \sqrt{x-1}}{x^3}$
4.	a) $y = (\sin 3x)^{\ln \operatorname{tg} x}$	б) $y = \sqrt[3]{\frac{x^5(x^2-4)}{x+1}}$
5.	a) $y = x^{\sin 2x}$	б) $y = (x-1) \cdot \sqrt[5]{\frac{4x+1}{x^3-4x^2}}$
6.	a) $y = (\cos x)^{\sin \sqrt{x}}$	б) $y = \frac{(5x+4)^4 \cdot \sqrt{x+1}}{6x^3}$
7.	a) $y = (2x)^{\sqrt{x}-3x}$	б) $y = \frac{(x-1)^2 \cdot \sqrt[3]{x^2+1}}{(x+5)^4}$
8.	a) $y = (\operatorname{arctg} 3x)^{2x}$	б) $y = \frac{(x+2)^2 \cdot \sqrt[4]{x-1}}{(x-3)^3}$
9.	a) $y = (x-4)^{\ln^2 x}$	б) $y = \frac{(x+1)^5 \cdot \sqrt[4]{x-3}}{\sqrt[6]{(x+3)^5}}$
10.	a) $y = (\sin 3x)^{\cos 2x}$	б) $y = \frac{\sqrt[5]{x+1} \cdot (x^2+1)^3}{(x+5)^2}$
11.	a) $y = (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{x}}$	б) $y = \frac{(x-2)^4}{\sqrt{(x+2)^5(x-3)^7}}$

12.	a) $y = (2x)^{\sin^2 x}$	б) $y = \frac{\sqrt{x-1}}{(x+2)^4 \cdot \sqrt[3]{(x-3)^2}}$
13.	a) $y = (x^2 + 1)^{\sin 2x}$	б) $y = \frac{\sqrt[5]{2x-3}}{(x+3)^3 \cdot (x+5)}$
14.	a) $y = (2x)^{\operatorname{arctg} 2x}$	б) $y = \frac{(x+4)^6 \cdot \sqrt[3]{x+5}}{(x-1)^4}$
15.	a) $y = (\operatorname{tg} x)^{\ln(\sqrt{x+1})}$	б) $y = (x+1) \cdot \sqrt[4]{\frac{x-5}{(x+3)^3}}$
16.	a) $y = (\operatorname{ctg} 2x)^{3x^2}$	б) $y = \frac{(x+1)^6}{\sqrt[3]{x-5} \cdot (3x+2)^3}$
17.	a) $y = (\operatorname{arctg} x)^{e^{2x}}$	б) $y = \frac{(x+1) \cdot \sqrt[3]{x-2}}{\sqrt[5]{3x+4}}$
18.	a) $y = (\arcsin \sqrt{x})^{\cos 8x}$	б) $y = \sqrt{\frac{(x+3) \cdot \sqrt[3]{2x+5}}{(3x+2)^5}}$
19.	a) $y = (\cos 6x)^{2-x}$	б) $y = \frac{(x+2) \cdot \sqrt{2x^2+3x}}{(x-5)^3}$
20.	a) $y = \left(\cos \frac{4}{x}\right)^{\sin \frac{x}{4}}$	б) $y = 4x^4 \cdot \sqrt[7]{\frac{(x+1)^3}{(2x-5)^4}}$
21.	a) $y = (\operatorname{arctg} \sqrt{x})^{\cos 2x}$	б) $y = \frac{(x-1)^5 \cdot \sqrt[3]{x-3}}{\sqrt[4]{(2x-1)^3}}$
22.	a) $y = (x + e^{2x})^{\sin 5x}$	б) $y = \frac{(x+4)^3 \cdot \sqrt{2x+5}}{(3x^2+2)^2}$
23.	a) $y = (1 - \cos 4x)^{\operatorname{arctg} 2x}$	б) $y = \sqrt[4]{\frac{x^3}{(2x-1)^5}} \cdot 4(x+1)^4$

24.	a) $y = (3^x + 4)^{\frac{2}{x}}$	б) $y = \frac{(x^2 + 1)^3 \sqrt[4]{(2x + 1)^3}}{(3x - 1)^5}$
25.	a) $y = (3x^2 + 5x)^{\cos \frac{x}{3}}$	б) $y = \sqrt[3]{\frac{(x^2 + 1) \cdot x}{(2x + 3)^5}}$
26.	a) $y = (\ln(x^2 + 1))^{\operatorname{tg} 2x}$	б) $y = \frac{(x^3 + 1)^3}{\sqrt[4]{(2x - 5)^3} \cdot (4x + 3)^2}$
27.	a) $y = (2x^2 + 3)^{\operatorname{ctg} 4x}$	б) $y = \frac{x \cdot \sqrt[4]{x^2 + 3x}}{\sqrt[3]{2x + 7}}$
28.	a) $y = (x^3 - 3)^{\cos 5x}$	б) $y = \frac{\sqrt[4]{x^3} \cdot (x - 1)}{(x^2 + 4)^5}$
29.	a) $y = (x^5 - 3x)^{\sin 2x}$	б) $y = \frac{\sqrt[3]{2x + 7}}{(x + 2)^4 \cdot (2x + 5)^3}$
30.	a) $y = (\arcsin 2x)^{\cos^2 x}$	б) $y = \frac{(x^2 - 3)^3 \cdot \sqrt[5]{2x + 9}}{(3x + 4)^4}$

3.3.4 Знайти першу похідну функції, заданої неявно

1.	$x^2 + y^3 - 3xy = 0$	2.	$y^3 - 3yx^2 + 2x = 0$
3.	$x^3 + 2x^2y + 3xy^2 + y^2 = 0$	4.	$2^x + 2^y = 2^{x+y}$
5.	$2y \ln x = x^2 + y^2$	6.	$x + y = xy^2 - x^2y$
7.	$y^2 - 2xy^3 - x^2 = 0$	8.	$y^2 = 2x^3 + xe^y$
9.	$y = x + \operatorname{arctg} y - x^3$	10.	$y = \cos(x + y) - x^4$
11.	$x^2y = xy^3 - 4$	12.	$y = \sin(x - y) + xy^2$
13.	$(x + y)^2 = 9(x - y)$	14.	$y = 3x^4 + xe^y$

15.	$y \cdot \sin x = \cos(x - y)$	16.	$x + y = e^y - x^4$
17.	$y^2 = 2x + \ln \frac{y}{x}$	18.	$ye^x = e^{y+1} + x$
19.	$(x + y)^3 = 27(x - y)$	20.	$xy - 0,5 \sin 2y = x^2$
21.	$e^{xy} = x + y$	22.	$xy = \arctg y + e^x$
23.	$\operatorname{tg} y = x^2 y - x$	24.	$y^2 = e^x + 3xy$
25.	$\cos y = xy^2 + 3x^4$	26.	$xy = e^y \sin x$
27.	$\operatorname{ctg} y = x^2 + xy$	28.	$x + \sin x = \cos y - y$
29.	$x^3 + 2xy = 3y^2$	30.	$x^4 - xy + y^4 = 1$

3.3.5 Знайти похідні y'_x , y''_{xx} функції, заданої параметрично

1.	$\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = t^3 \end{cases}$	2.	$\begin{cases} x = \frac{t+1}{t} \\ y = \frac{t-1}{t} \end{cases}$
3.	$\begin{cases} x = 2 \cos^2 t \\ y = 3 \sin^2 t \end{cases}$	4.	$\begin{cases} x = 2 \cos^3 t \\ y = 6 \sin^3 t \end{cases}$
5.	$\begin{cases} x = e^{-3t} \\ y = e^{6t} \end{cases}$	6.	$\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \sqrt[3]{t} \end{cases}$
7.	$\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 4(3 + \cos t) \end{cases}$	8.	$\begin{cases} x = \arctg t \\ y = \ln(1 + t^2) \end{cases}$
9.	$\begin{cases} x = \ln t \\ y = \frac{t-1}{t} \end{cases}$	10.	$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{tg}^2 t \end{cases}$

11.	$\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t \\ y = \ln(1 + t^2) \end{cases}$	12.	$\begin{cases} x = \ln t \\ y = \operatorname{arctg} t \end{cases}$
13.	$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 2 - \cos t \end{cases}$	14.	$\begin{cases} x = \sqrt{t-2} \\ y = \ln(t-2) \end{cases}$
15.	$\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$	16.	$\begin{cases} x = 2e^t \\ y = e^{t^2+t} \end{cases}$
17.	$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sec t \end{cases}$	18.	$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \operatorname{ctg} t \end{cases}$
19.	$\begin{cases} x = \sin t - t \cos t \\ y = \cos t + t \sin t \end{cases}$	20.	$\begin{cases} x = t^2 + 4t \\ y = 2t^3 - 3t^2 \end{cases}$
21.	$\begin{cases} x = t^3 \\ y = \ln t \end{cases}$	22.	$\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$
23.	$\begin{cases} x = e^t \cdot (t+1) \\ y = e^t \cdot (t-1) \end{cases}$	24.	$\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \operatorname{arctg} t \end{cases}$
25.	$\begin{cases} x = 2 - e^{-t} \\ y = 3t - e^{-2t} \end{cases}$	26.	$\begin{cases} x = \ln(\cos t) \\ y = \ln(\cos 2t) \end{cases}$
27.	$\begin{cases} x = \frac{1}{\cos t} \\ y = \operatorname{tg} t \end{cases}$	28.	$\begin{cases} x = \frac{1}{\sin t} \\ y = \operatorname{ctg} t \end{cases}$
29.	$\begin{cases} x = 2^{\sin^2 t} \\ y = 2^{\cos^2 t} \end{cases}$	30.	$\begin{cases} x = 2t^2 - 3 \\ y = \ln t \end{cases}$

3.3.6 Знайти другу похідну функції

1.	$y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$	2.	$y = (1+x^2)\operatorname{arctg} x$
3.	$y = \frac{\ln(3+x)}{3+x}$	4.	$y = (2x^3 + 1)\cos 3x$
5.	$y = x^2 \ln x$	6.	$y = \ln \operatorname{ctg} 4x$
7.	$y = \operatorname{arctg}(x^2)$	8.	$y = \sqrt[3]{(1-x)^2}$
9.	$y = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$	10.	$y = \ln \ln x$
11.	$y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	12.	$y = x^3 e^{5x}$
13.	$y = e^{-x} \cos 3x$	14.	$y = \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2}$
15.	$y = x e^{\sin x}$	16.	$y = \frac{x}{x^2 - 1}$
17.	$y = \operatorname{arctg} \sqrt{x}$	18.	$y = \ln(x + \sqrt{x})$
19.	$y = x \cdot \operatorname{arctg} x$	20.	$y = x - \operatorname{arctg} x$
21.	$y = \frac{\ln x}{x}$	22.	$y = (3x - 7) \cdot 3^{-x}$
23.	$y = (x^2 - 7) \cdot \ln(x + 1)$	24.	$y = e^{2x} \sin 4x$
25.	$y = e^{4x+3} \cdot (x^3 + 2)$	26.	$y = x e^{1+x} - e^{1+x}$
27.	$y = x^2 e^{-\frac{1}{x}}$	28.	$y = \ln \frac{1}{1+x}$

29.	$y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$	30.	$y = 2 + \sqrt{1-x^2}$
-----	--------------------------------------	-----	------------------------

3.3.7 Довести, що функція $y = f(x)$ є розв'язок заданого рівняння $F(x, y, y', y'') = 0$.

	$y = f(x)$	$F(x, y, y', y'') = 0$
1.	$y = 0,5(x^2 + 2x + 2)$	$(y')^2 + 1 = 2 \cdot y \cdot y''$
2.	$y = 0,5 \cdot x^2 \cdot e^x$	$y'' - 2y' + y = e^x$
3.	$y = 2e^{-x} + 3e^{-2x}$	$y'' + 3y' + 2y = 0$
4.	$y = x + \sin 2x$	$y'' + 4y = 4x$
5.	$y = \sqrt{2x - x^2}$	$y^3 y'' + 1 = 0$
6.	$y = \frac{x-3}{x+4}$	$2(y')^2 = (y-1)y''$
7.	$y = \ln \sqrt{x^2 + 4}$	$y''(x^2 + 4) + 2xy' = 1$
8.	$y = -\frac{1}{x}$	$yy'' = y'(y^2 + y')$
9.	$y = \frac{1}{2} \ln^2 x + \ln x + 2$	$x^2 y'' + xy' = 1$
10.	$y = \sqrt{\frac{4x^2 + 1}{2}}$	$y'' \cdot y^3 = 1$
11.	$y = \frac{1}{3} \sin^3 x - 2x + 1$	$y'' + \sin^3 x = 2 \sin x \cdot \cos^2 x$
12.	$y = (x-1)e^{x+1} + 2$	$xy'' = y' \cdot \ln \frac{y'}{x}$
13.	$y = (2x^2 - 3x)e^x - 2e^{-x} + e^{-3x}$	$y'' + 4y' + 3y = (16x^2 - 14)e^x$
14.	$y = 1 - 2e^{-3x} + x^3 + 3x^2 - 2x$	$y'' - 9x^2 = 24x - 3y'$

	$y = f(x)$	$F(x, y, y', y'') = 0$
15.	$y = 2 \cos 3x - 5 \sin 3x + 4x \sin 3x$	$y'' = 24 \cos 3x - 9y$
16.	$y = e^{-7x} \cdot 2x^3$	$y'' + 49y = 12x e^{-7x} - 14y'$
17.	$y = 3e^{-2x} + 2e^{\frac{x}{2}} - 5 \sin 2x - 3 \cos 2x$	$2y'' + 3y' = 2y + 68 \sin 2x$
18.	$y = -3e^{2x} + 2e^{-2x} - x(2x^2 + 3)$	$y'' - 8x^3 = 4y$
19.	$y = 5 - 2e^{-3x} + \frac{3}{2}x^2 - x$	$y'' + 3y' = 9x$
20.	$y = -3 \cos x + 5 \sin x + x + e^x$	$y'' - x = 2e^x - y$
21.	$y = \frac{x^3}{12} - \frac{x}{4} + 2 \operatorname{arctg} x - 5$	$(1 + x^2)y'' = x^3 - 2xy'$
22.	$y = 5x - 3 - \ln \cos x$	$y'' \cdot \cos^2 x = 1$
23.	$y = 2 \operatorname{ch} \frac{x+1}{2}$	$1 + (y')^2 = y \cdot y''$
24.	$y = e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}$	$xy'' + 0,5y' = 0,25y$
25.	$y = \cos e^x + \sin e^x$	$y'' + ye^{2x} = y'$
26.	$y = 2e^{3x} - 3e^{4x} - xe^{4x}$	$y'' + 12y = e^{4x} + 7y'$
27.	$y = (0,1x^2 - 0,04x + 2)e^{2x} - 4e^{-3x}$	$y'' + y' - xe^{2x} = 6y$
28.	$y = e^x(3 \sin x - 2(x+1)\cos x)$	$y'' - 4e^x \sin x = 2y' - 2y$
29.	$y = \sin x \cdot (3 + 0,5x) - 5 \cos x$	$y'' + y - \cos x = 0$
30.	$y = \cos 2x + \frac{1}{3}(\sin x + \sin 2x)$	$y'' + 4y = \sin x$

3.3.8 Знайти похідну n -го порядку

1.	$y = 7^{5x}$	2.	$y = \lg(5x + 1)$	3.	$y = \ln x$
4.	$y = \frac{4}{x}$	5.	$y = \sin^2 3x$	6.	$y = e^{-3x}$
7.	$y = 2^{3x+5}$	8.	$y = \cos 3x$	9.	$y = \frac{1}{x+1}$
10.	$y = 3^{3x+1}$	11.	$y = \ln(1+x)$	12.	$y = \cos(5x-3)$
13.	$y = \log_2(x-4)$	14.	$y = \sin(2x+1)$	15.	$y = \log_3(x+3)$
16.	$y = \cos \frac{x}{2}$	17.	$y = 3^{2x}$	18.	$y = \frac{x}{x+1}$
19.	$y = 5^{-2x+1}$	20.	$y = \cos^2 2x$	21.	$y = \frac{1+x}{1-x}$
22.	$y = \log_2(x-4)$	23.	$y = \frac{1}{1-x}$	24.	$y = \sqrt[3]{e^{2x+1}}$
25.	$y = \cos \frac{x}{3}$	26.	$y = \lg(2x+7)$	27.	$y = \sin \frac{x}{2}$
28.	$y = \frac{1-x}{1+x}$	29.	$y = \cos(3x+2)$	30.	$y = \lg(x+4)$

ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бубняк Т. І. Вища математика : навчальний посібник. 2-ге вид., стереотип. Львів : Новий Світ-2000, 2026. 396 с.
2. Вища математика : підручник : у 2 кн. / Г. Й. Призва, В. В. Плахотник, Л. Д. Гординський та ін.; за ред. Г. Л. Кулініча. – 2-ге вид., перероб. і доп. – К. : Либідь, 2003. Кн. 1. Основні розділи. 400 с.
3. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика : навчальний посібник. У трьох частинах. Ч. 1. Х. : Веста, 2008. 200 с., іл.
4. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика: Навчальний посібник. У трьох частинах. Ч.2. Х. : Веста, 2008. 240 с., іл.
5. Дюженкова Л. І., Дюженкова О. Ю. Вища математика. Математичний аналіз : навчальний посібник. Київ : НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2018. 312 с.
6. Лиман Ф. М., Власенко В. А., Петренко С. С. Вища математика : навчальний посібник : у 2 ч. Ч. 1. Суми : Університетська книга, 2018. 432 с.
7. Овчинников П. П. Вища математика : підручник : у 2 ч. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне і інтегральне числення / П. П. Овчинников, Ф. П. Яремчук, В. П. Михайленко; за заг. ред.. П. П. Овчинникова. К. : Техніка, 2003. 600 с.
8. Степахно І. В. Вища математика : підручник. Дніпро : КРКМ ДНУ, 2022. 245 с.
9. Турчанінова Л. О., Доля О. В. Вища математика в прикладах і задачах : навчальний посібник. Київ : Каравела, 2020. 348 с.