

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
Національний університет «Запорізька політехніка»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ  
до виконання контрольних робіт  
і розрахунково-графічних завдань  
на тему «Кінематика точки»  
для студентів спеціальності G9 (131) « Прикладна механіка»  
для всіх форм навчання

Методичні вказівки до виконання контрольних робіт і розрахунково-графічних завдань на тему «Кінематика точки» для студентів спеціальності G9 (131) «Прикладна механіка» для всіх форм навчання / Укл.: В.І. Пожуєв, А.В. Пожуєв, В.Г. Шевченко, О.С. Омельченко — Запоріжжя, НУ «Запорізька політехніка», 2025. – 38 с.

Укладачі:

д-р ф-м. наук, професор  
к.т.н., доцент  
к.т.н., доцент  
ст. викладач

В.І. Пожуєв,  
А.В. Пожуєв,  
В.Г. Шевченко  
О.С. Омельченко

Рецензент,  
к.т.н., доцент

А.А. Скрєбцов

Відповідальний  
за випуск:,  
ст. викладач

О.С. Омельченко

Затверджено  
на засіданні кафедри  
«Теоретична та прикладна механіка»  
Протокол № 1 від 3.09.2025 р.

Рекомендовано до видання  
НМК ТФ  
Протокол № 1 від 11.09. 2025р.

**ЗМІСТ**

Загальні вказівки.....	С
1. Методика визначення і побудови векторів швидкості і прискорення точки.....	4
1.1 Просторовий рух точки.....	5
1.2. Плоский рух точки.....	7
2. Перехід від координатного способу завдання руху точки до натурального.....	10
2.1. Плоский рух точки .....	10
2.2. Особливості, які виникають у просторовому випадку.....	24
3. Приклади виконання розрахунково-графічних завдань на кінематичне дослідження руху матеріальної точки.....	26
3.1. Плоский рух точки.....	27
3.2. Просторовий рух точки .....	32
Перелік джерел посилань.....	38

## ЗАГАЛЬНІ ВКАЗІВКИ

Розділ «Кінематика», зокрема його перша частина, яка називається «Кінематика точки», відіграє надзвичайно важливу роль у побудові усього курсу «Теоретична механіка». Це викликано багатьма причинами, зокрема тим, що з математичної точки зору саме розв'язуючи задачу про визначення швидкості матеріальної точки І. Ньютон прийшов до одного з основних понять математичного аналізу, а саме до визначення похідної від функції. Загалом кажучи, при вивченні кінематики точки ми переходимо від мови векторної алгебри, яку застосовували в статистиці, до більш складної мови векторного аналізу. Саме це потребує розвитку цілого ряду нових практичних навичок, пов'язаних з визначенням функціональних залежностей для характеристик руху точки, побудовою графіків, розв'язанням найпростіших диференціальних рівнянь, чисельним інтегруванням та деякими іншими математичними питаннями, зокрема пов'язаних з аналізом кривих і поверхонь другого порядку для побудови траєкторій матеріальних точок.

Зазначимо, що більш детально теоретичні аспекти цих математичних проблем кінематики та динаміки викладені в підручниках [1-3], тому в даних методичних вказівках ми будемо, при необхідності, робити посилання на відповідні розділи даних книг. Змістом даних вказівок є розгляд певного комплексу питань, пов'язаних з визначенням кінематичних характеристик точки, у тому числі питань, що виникають при переході від координатного способу завдання руху точки до натурального, причому, як у випадку плоского, так і просторового руху. Труднощі інтегрування диференціальних рівнянь, які зустрічаються при такому переході для визначення закону руху вздовж траєкторії, пропонується долати як аналітичними, так і чисельними методами із застосуванням ЕОМ.

Наведені конкретні приклади виконання розрахунково-графічних робіт на дану тематику, де разом з методикою виконання проведено детальний аналіз результатів з механічної і математичної точок зору. Наведені приклади побудови в масштабі траєкторій руху точки і приведені графіки зміни у часі основних кінематичних характеристик.

# 1. МЕТОДИКА ВИЗНАЧЕННЯ І ПОБУДОВИ ВЕКТОРІВ ШВИДКОСТІ І ПРИСКОРЕННЯ ТОЧКИ

## 1.1 Просторовий рух точки.

Нехай рух точки задано координатним способом

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t). \quad (1)$$

Тоді проекції вектора швидкості на осі нерухомої декартової системи координат визначаються за формулами:

$$v_x = \dot{x}(t); \quad v_y = \dot{y}(t); \quad v_z = \dot{z}(t), \quad (2)$$

де точкою позначаємо похідну від заданих функцій за часом.

Таким чином, з математичної точки зору, знаходження швидкості у будь-який момент часу за відомим законом руху (1) зводиться до обчислення перших похідних від відомих функцій однієї змінної  $t$ , оскільки знаючи проекції, модуль вектора швидкості і його направляючі косинуси знаходимо за відомими формулами векторної алгебри:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}; \quad (3)$$

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{|\vec{v}|}; \quad \cos \beta = \frac{v_y}{|\vec{v}|}; \quad \cos \gamma = \frac{v_z}{|\vec{v}|}, \quad (4)$$

де  $\alpha, \beta, \gamma$  – кути між  $\vec{v}$  і осями координат (рис. 1.1).

І оскільки справедлива формула векторної алгебри про розкладання довільного вектора на складові вздовж осей координат:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}, \quad (5)$$

то, знаючи проекції, легко побудувати графічно вектор швидкості точки в довільний момент часу. Для цього спочатку треба підставити задане значення  $t$  у формули (1) і визначити положення точки у просторі, а потім, підставляючи значення часу у формули (2), знаходимо три числа  $v_x, v_y, v_z$  і тоді згідно з формулою (5) будемо на трьох векторах  $v_x \vec{i}, v_y \vec{j}, v_z \vec{k}$ , які відкладені з визначеного положення точки, як на сторонах, прямокутний паралелепіпед, діагональ якого і являється швидкістю точки у заданий (фіксований) момент часу (рис. 1.1).

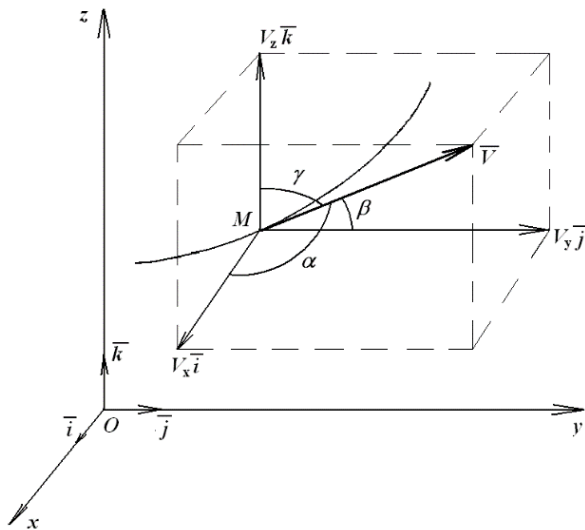


Рисунок 1.1 – Графічна побудова вектора швидкості точки в довільний момент часу

**Зауваження 1.** Зазначимо, що описані вище дії для побудови вектора  $\vec{v}$  не вимагають попередньої побудови траєкторії точки. Навпаки, ці графічні дії дозволяють нам, не знаючи кривої, вказати напрямок дотичної до траєкторії в даній точці, оскільки згідно з загальною теорією швидкість завжди спрямована за дотичною до траєкторії.

Аналогічні міркування справедливі і для вектору прискорення точки, проекції якого, як функції часу, а не числа, в довільний (не фіксований) момент часу  $t$  знаходяться за формулами:

$$w_x = v_x(t) = x(t); \quad w_y = v_y(t) = y(t); \quad w_z = v_z(t) = z(t). \quad (6)$$

Зауважимо тут, що формально з математичної точки зору проекції вектора прискорення можна розглядати як другі похідні за часом від відповідних координат точки, але якщо на попередньому етапі аналізу руху точки знаходилась швидкість, то доцільно використати функції з формул (2) і ще раз їх продиференціювати.

Модуль і напрямляючі косинуси вектора прискорення знаходимо за формулами:

$$|\bar{w}| = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}; \quad (7)$$

$$\cos \beta_1 = \frac{w_y}{|\bar{w}|}; \quad \cos \gamma_1 = \frac{w_z}{|\bar{w}|}. \quad (8)$$

Як і вище, використовуючи подання

$$\bar{w} = w_x \bar{i} + w_y \bar{j} + w_z \bar{k}, \quad (9)$$

графічно будемо прискорення точки в довільний, але фіксований момент часу (рис. 1.2).

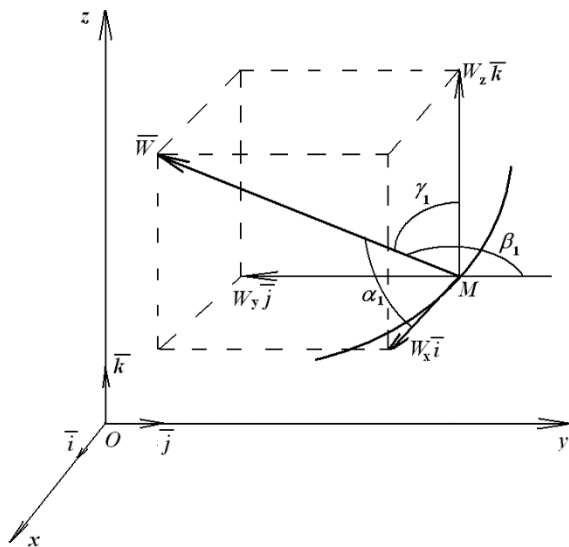


Рисунок 1.2 – Графічна побудова вектора прискорення точки в довільний, але фіксований момент часу

## 1.2 Плоский рух точки

У випадку руху точки на площині обчислення швидкості і прискорення, а також графічні побудови векторів  $\bar{v}$  і  $\bar{w}$  дещо спрощуються.

Нехай координатним способом рух точки задається формулами:

$$x = x(t); \quad y = y(t).$$

Проекції вектора швидкості знаходяться за формулами:

$$v_x = \dot{x}(t); \quad v_y = \dot{y}(t); \quad (11)$$

а вектора прискорення за формулами:

$$w_x = \dot{v}_x(t); \quad w_y = \dot{v}_y(t). \quad (12)$$

Як і у просторовому випадку, за формулами (11) і (12) можна графічно побудувати вектори швидкості (рис. 1.3) і прискорення (рис. 1.4).

При цьому, виконуючи вказані побудови у відповідних масштабах, можемо отримати не лише якісні, але і кількісні характеристики, оскільки модулі векторів і кути їх нахилу до осей координат можна безпосередньо виміряти з рисунків. Для перевірки правильності графічних побудов ті самі величини знайдемо аналітично за формулами:

$$|\bar{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}; \quad (13)$$

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{|\bar{v}|}; \quad \cos \beta = \frac{v_y}{|\bar{v}|}; \quad (14)$$

$$\bar{v} = v_x \bar{i} + v_y \bar{j}; \quad (15)$$

$$|\bar{w}| = \sqrt{w_x^2 + w_y^2}; \quad (16)$$

$$\cos \alpha = \frac{w_x}{|\bar{w}|}; \quad \cos \beta = \frac{w_y}{|\bar{w}|}; \quad (17)$$

$$\bar{w} = w_x \bar{i} + w_y \bar{j}. \quad (18)$$

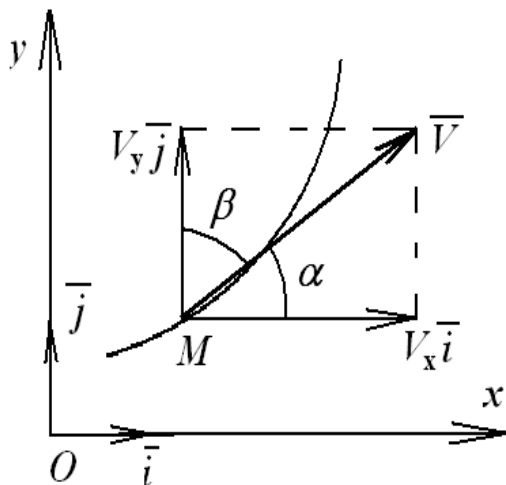


Рисунок 1.3 – Графічна побудова вектора швидкості у просторовому випадку

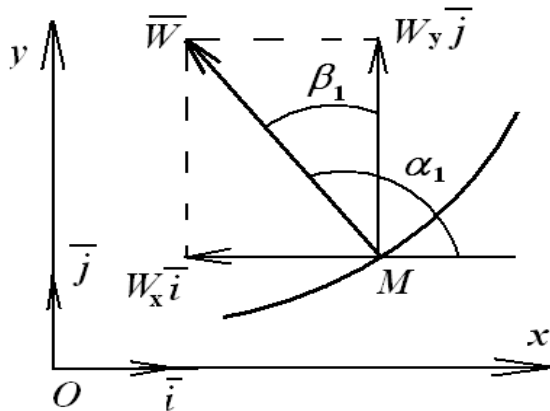


Рисунок 1.4 – Графічна побудова вектора прискорення у просторовому випадку

**Зауваження 2.** Звернемо увагу на те, що і у графічних побудовах статички, і у кінематиці аналітичні методи дають значно вищу точність, а геометричні – забезпечують наочність.

## 2. ПЕРЕХІД ВІД КООРДИНАТНОГО СПОСОБУ ЗАВДАННЯ РУХУ ТОЧКИ ДО НАТУРАЛЬНОГО

### 2.1 Плоский рух точки

Згідно з загальною теорією рух точки буде задано натуральним способом, якщо виконані наступні вимоги:

- 1) відома траєкторія точки;
- 2) обрана точка, яка є початком відліку на траєкторії;
- 3) вказано додатній напрямок на траєкторії;
- 4) зафіксований масштаб вздовж траєкторії;
- 5) відомий закон зміни дугової координати.

У зв'язку з цим, об'єднуючи перелічені вище пункти, можна сказати, що якщо закон руху точки на площині задано координатним способом у вигляді формул (10), то виходячи з цих формул нам треба розв'язати такі дві задачі: по-перше, знайти траєкторію точки і розмітити її (початок, напрямок, масштаб), по-друге, знайти закон руху точки вздовж траєкторії.

Значимо, що рівняння (10) вже є рівняннями траєкторії точки, заданої у так званому параметричному вигляді, де в якості параметра виступає час  $t$ . За допомогою цих рівнянь можна побудувати траєкторію за точками, попередньо склавши таблицю такого виду (табл. 2.1), де в першому стовпчику послідовно задаються з деяким кроком  $\Delta t$  значення  $t_0, t_1 = t_0 + \Delta t, t_2 = t_1 + \Delta t$  за формулами (10) знаходяться пари відповідних їм значень  $x$  та  $y$ , тобто координати точок траєкторії, що дозволяє побудувати необхідну нам криву.

Таблиця 2.1 – Координати для побудови траєкторії

$t$	$x$	$y$
$t_0$	$x_0$	$y_0$
$t_1$	$x_1$	$y_1$
$t_2$	$x_2$	$y_2$

Але, як правило, за виключенням деяких окремих видів траєкторій точки (зокрема, траєкторії точки ободу колеса, що котиться, де траєкторією є циклоїда) більш зручним є шлях, коли за допомогою математичних перетворень із рівнянь (10) виключається параметр  $t$  і

рівняння траєкторії записується у так званій координатній формі, зокрема у плоскому випадку це приведе до однієї з таких трьох форм:

$$y + f(x); \quad (19)$$

$$x = g(y); \quad (20)$$

$$F(x, y) = 0. \quad (21)$$

Після цього, для тих задач, які розглядаються у навчальному процесі, треба подивитись, до якого типу канонічних кривих, про які йшла мова в математичному розділі нашої книги, належить дана траєкторія і, якщо це необхідно, провести заміну змінних і побудувати криву, яка описується отриманим рівнянням.

**Зауваження 3.** Треба мати на увазі, що не вся побудована крива може бути траєкторією матеріальної точки, а лише та її частина, на яку потрапляє точка, коли  $t$  приймає лише додатні значення.

**Зауваження 4.** На жаль, в математиці відсутній єдиний спосіб виключення  $t$  навіть у плоскому випадку. Можна вказати лише два прийоми для таких операцій, які можна умовно розділити так.

**Перший прийом.** Якщо це можливо, треба з одного із рівнянь (10) визначити  $t$  через  $x$  або  $y$  і підставити цей вираз в друге рівняння.

**Другий прийом.** Якщо у формулах (10) у правій частині стоять тригонометричні функції, треба використовувати приведені в математичній частині даної книги тригонометричні тотожності, зокрема, найчастіше це основна тригонометрична тотожність.

Проілюструємо ці прийоми на конкретних прикладах.

### Приклад 1

Закон руху точки задано рівняннями:

$$x = 5t^2, \quad y = 2t.$$

З другого рівняння знаходимо  $t = \frac{y}{2}$  і підставляємо в перше рівняння:

$$x = \frac{5}{4}y^2.$$

Це рівняння параболи, яка приведена на рис. 2.1.

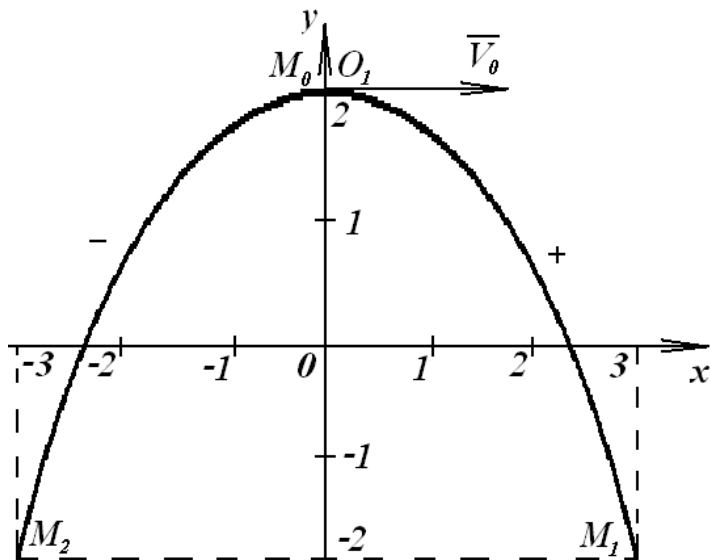


Рисунок 2.1 – Траєкторія руху точки

**Увага!** Згідно з зауваженням 3, оскільки при  $t \geq 0$   $y \geq 0$ , то траєкторією точки буде не вся парабола, а лише її верхня гілка.

### Приклад 2.

Закон руху точки записується так:

$$x = 3 \sin t; \quad y = 2 \cos 2t.$$

Скористаємося відомою формулою тригонометрії:

$$\cos 2t = 1 - 2 \sin^2 t;$$

тоді, оскільки з першого рівняння  $\sin t = \frac{x}{3}$  маємо

$$y = 2 - \frac{4}{9}x^2.$$

Це рівняння параболи, що наведена на рис. 2.2.

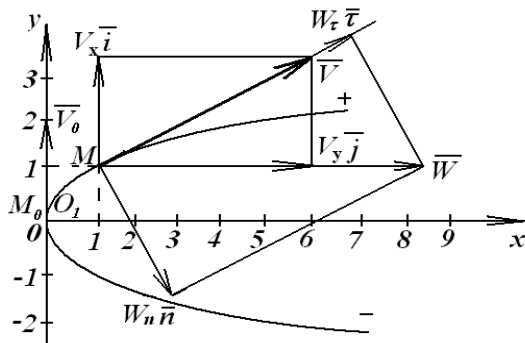


Рисунок 2.2 – Траєкторія руху точки

**Увага!** Як і у попередньому прикладі, траєкторією нашої точки буде не вся парабола, а лише її верхня частина, починаючи від точки  $M_2$   $(-3; -2)$  і до точки  $M_1$   $(3; -2)$ , причому шлях від  $M_0$  до  $M_1$  і у зворотному напрямку до  $M_2$  точка проходить нескінченно багато разів з періодом у часі  $t = 2\pi$  сек.

### Приклад 3.

Точка рухається площиною згідно з законом:

$$x = 2 - 6 \cos \frac{\pi}{2} t; \quad y = 2 \sin \frac{\pi}{2} t + 3.$$

Перепишемо рівняння так, щоб у правій частині залишилися синус і косинус з одиничними коефіцієнтами:

$$-\frac{x-2}{6} = \cos \frac{\pi}{2} t; \quad \frac{y-3}{2} = \sin \frac{\pi}{2} t.$$

Піднесемо обидві частини кожного рівняння до квадрату і додамо окремо отримані таким чином рівняння та використаємо першу тригонометричну тотожність:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Будемо мати:

$$\frac{(x-2)^2}{6^2} + \frac{(y-3)^2}{2^2} = 1.$$

Це еліпс з напіввісьями  $a = 6, b = 2$  і, якщо зробити відповідну заміну змінних за формулами  $x_1 = x - 2, y_1 = y - 3$ , то легко побудувати відповідну криву (рис. 2.3).

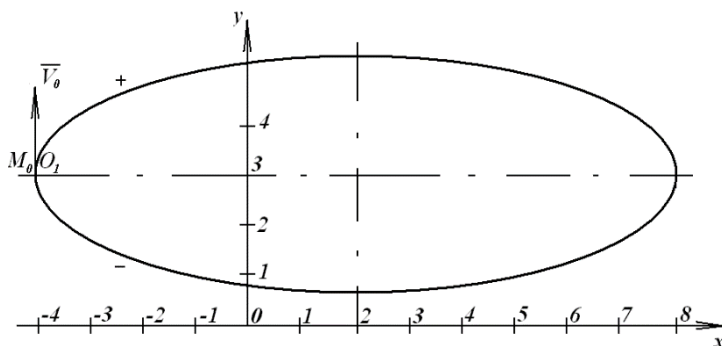


Рисунок 2.3 – Траєкторія руху точки

**Увага!** В даному випадку траєкторією точки буде уся побудована крива, яку матеріальна точка проходить нескінченно багато разів, розпочинаючи з точки  $M_0 (-4; 3)$  і рухаючись за годинниковою стрілкою.

Таким чином, в усіх випадках ми зможемо побудувати траєкторію точки і після її знаходження (на рисунку) необхідно виконати її розмітку, яка полягає у виборі на траєкторії початку відліку, а також завдання масштабу і додатного напрямку, тобто у перетворенні траєкторії у криволінійну координатну вісь (рис. 2.4).

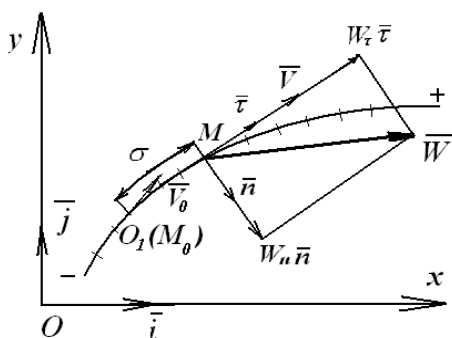


Рисунок 2.4 – Траєкторія руху точки з розміткою

Суворих правил виконання розмітки траєкторії не існує. Початок відліку, масштаб і додатний напрямок можна завдавати довільно і по-різному в кожній конкретній задачі. Але є можливість дати деякі рекомендації, які полегшують процес розмітки і якимось чином пов'язують його з характером руху точки вздовж траєкторії. Зазвичай рух точки розпочинається в деякий заданий момент часу  $t_0$ . Тому найчастіше, якщо відсутні якісь додаткові міркування, покладають  $t_0 = 0$ , хоча можливі і ненульові значення  $t_0$ . За формулами (10) знаходимо початкове положення точки з координатами:

$$x_0 = x(t_0); \quad y_0 = (t_0).$$

Знаючи точку  $M_0$ , зручно обрати початок відліку  $O_1$ , співпадаючим з цією точкою. Таким чином, рух матеріальної точки  $M$  вздовж своєї траєкторії розпочинається тепер із початку відліку дугової координати.

У розглянутих вище прикладах описаний вибір точки  $O_1$  виглядає так. У першому випадку (див. рис. 2.2) у момент часу  $t_0 = 0$  будемо мати  $x_0 = 0, y_0 = 0$ . Це означає, що на цьому рисунку початок відліку на параболі треба брати у точці  $M_0(0; 0)$  на вершині параболі. У другому випадку (див. рис. 2.3) в момент часу  $t_0 = 0: x_0 = 0, y_0 = 2$ . Тому тут початок відліку треба брати в точці  $M_0(0; 2)$ , знову ж таки на вершині відповідної (іншої) параболі. В третій задачі (див. рис. 2.4) при  $t_0 = 0$  будемо мати  $x_0 = -4, y_0 = 3$ . Це означає, що тут початок відліку на еліпсі треба брати в крайній лівій точці  $M_0(-4; 3)$ .

Масштаб уздовж траєкторії можна обирати таким самим, як і уздовж вихідних (початкових) координатних осей  $O_x$  і  $O_y$ . Залишається однозначно обрати додатний напрямок. Якщо точка рухається уздовж траєкторії в сталому напрямку, то зрозуміло, що цей напрямок і варто вважати додатнім. Якщо ж напрямок руху точки з часом змінюється, як у нас у другому прикладі (рис. 2.3), то в якості додатного можна обрати напрямок руху точки в початковий момент часу  $t_0$ . Таким чином, додатний напрямок руху уздовж траєкторії можна задавати вектором початкової швидкості точки  $\vec{v}_0$ , проекції якого знаходяться за формулами:

$$v_{x_0} = \dot{x}(t_0); \quad v_{y_0} = \dot{y}(t_0).$$

На рис. 2.2, 2.3, 2.4 показані вектори  $\bar{v}_0$  в кожній з трьох розглянутих нами задач і відповідно цим вказані додатні напрямки для усіх цих випадків. Дійсно, у першому випадку:

$$v_x = 10t; \quad v_y = 2;$$

тоді будемо мати,  $v_{x_0} = 0$ ,  $v_{y_0} = 2$ . Відповідний вектор  $\bar{v}_0$  показано на рис. 2.3.

У другій задачі:

$$v_x = 3 \cos t, \quad v_y = -4.$$

Звідси знаходимо  $v_{x_0} = 3$ ,  $v_{y_0} = 0$  і будуємо вектор  $\bar{v}_0$  (рис. 2.3).

У третьому випадку:

$$v_x = 3\pi \sin \frac{\pi}{2} t, \quad v_y = \pi \cos \frac{\pi}{2} t.$$

Тоді  $v_{x_0} = 0$ ,  $v_{y_0} = \pi$ . Відповідний вектор  $\bar{v}_0$  показано на рис. 2.4.

**Зуваження 5.** У тих порівняно рідких випадках, коли,  $v_0 = 0$ , напрямок початкового руху точки уздовж траєкторії треба визначати іншим способом на основі якісного аналізу закону руху. Цей спосіб є більш загальним ніж за допомогою  $\bar{v}_0$  і полягає в дослідженні зростання або спадання функцій  $x(t)$  і  $y(t)$  у часі.

Наприклад, у першому випадку (рис. 2.2) зі зростанням часу  $t$  зростають  $x$  і  $y$ , це означає, що вийшовши з початку відліку, точка рухається в напрямку праворуч і вгору верхньою гілкою параболи. Тоді цей напрямок і приймаємо як додатній.

Розглянемо детальніше другий приклад (рис. 2.3). Тут із зростанням  $t$  спочатку відбувається зростання функції  $x(t)$  і точка розпочинає рух з положення  $M_0$  праворуч донизу. Але в момент часу  $t = \frac{\pi}{2}$  функція  $x(t)$  досягає максимуму і точка зупиняється в крайньому правому положенні в точці  $M_1$  з координатами  $x_1 = 3$ ,  $y_1 = -2$ . Потім відбувається зворотній рух точки, вона проходить положення  $M_0$  в момент часу  $t = \pi$  і досягає крайнього лівого положення в точці  $M_2$  з координатами  $x_2 = -3$ ,  $y_2 = -2$  в момент часу.  $t = 3\pi/2$ . Після зупинки у цьому положенні точка знову рухається праворуч догори і досягає положення  $M_0$  в момент часу,  $t = 2\pi$ , закінчуючи тим самим один період коливань. Потім усе повторюється знову. У цій задачі за

додатній приймається початковий напрямок руху, тобто з т.  $M_0$  праворуч.

У третьому випадку (рис. 2.3) в околі початково  $t_0 = 0$  функція  $y(t)$  зростає. Точка починає рухатися уздовж еліпсу з положення  $M_0$  вгору і далі рухається за годинниковою стрілкою, обходячи еліпс з періодом  $t = 4c$ . Тому, природно, тут вважати додатнім напрямком рух за годинниковою стрілкою.

Після завершення розмітки траєкторії можна задавати положення точки за допомогою дугової координати  $\sigma$ , тобто взятої з відповідним знаком відстані, відміряної уздовж траєкторії від початку відліку  $M_0$  на траєкторії, а також побудувати в кожній точці траєкторії осі плоскої натуральної системи координат, а саме вісь дотичної і головної нормалі, які задаються одиничними направляючими векторами  $\bar{\tau}$  і  $\bar{n}$  (див. рис. 2.4). При цьому одиничний направляючий вектор дотичної  $\bar{\tau}$  направляється у бік додатного напрямку на траєкторії, а одиничний направляючий вектор головної нормалі  $\bar{n}$  направляється перпендикулярно до дотичної у бік увігнутості траєкторії.

**Зауваження 6.** У просторовому випадку вводиться ще третя вісь – біномаль, яка перпендикулярна до дотичної і головної нормалі, і одиничний направляючий вектор якої  $\bar{b}$  спрямовується так, щоб трійка векторів  $(\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b})$  була правою.

Закон руху точки уздовж траєкторії при натуральному способі завдання руху записується так:

$$\sigma = \sigma(t). \quad (22)$$

Вище ми показали як побудувати вектор швидкості у довільний момент часу при координатному способі завдання руху за формулою (5), яка у випадку плоского руху точки приймає такий вигляд:

$$\bar{v} = v_x \bar{i} + v_y \bar{j}, \quad (23)$$

де  $v_x$  і  $v_y$  знаходяться відповідно до (11).

Розкладемо вектор  $\bar{v}$  на складові вздовж натуральних осей координат, для цього виходимо з основної формули для швидкості, яку перетворимо так:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{d\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{dt}. \quad (24)$$

Легко показати справедливість такої формули:

$$\frac{d\bar{r}}{d\sigma} = \bar{r}; \quad (25)$$

і тоді формула (24) приймає такий вигляд:

$$\bar{v} = \frac{d\sigma}{dt} \cdot \bar{r}. \quad (26)$$

Звідси, зокрема, випливає, що швидкість проектується в натуральну величину з одним із двох можливих знаків лише на одну з трьох осей натуральної системи координат. Якщо ввести позначення:

$$v_\tau = \frac{d\sigma}{dt}, \quad (27)$$

де  $v_\tau$  – проекція швидкості на дотичну, то будемо мати наступну формулу:

$$\bar{v} = v_\tau \cdot \bar{r}. \quad (28)$$

Знак величини  $v_\tau$  залежить від напрямку руху точки уздовж розміченої траєкторії.

**Зауваження 7.** Якщо відомий закон руху точки в натуральній формі (22), то тоді величина і знак  $v_\tau$  знаходяться шляхом диференціювання заданої функції  $\sigma(t)$  згідно з формулою (27).

**Зауваження 8.** Якщо закон руху точки задається в координатній формі у вигляді (10), то в цьому випадку закон руху у вигляді (22) є шуканим і для завершення переходу від координатного способу до натурального його треба знайти через  $x(t)$  і  $y(t)$ . У цьому випадку спочатку треба визначити  $v_\tau$  із очевидного співвідношення:

$$|v_\tau| = |\bar{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \quad (29)$$

Для остаточного визначення  $v_\tau$  треба тут позбавитись від модуля за наступними правилами:

1. Якщо точка рухається в додатному напрямку, то:

$$v_\tau = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \quad (30)$$

а якщо у від'ємному, то:

$$v_\tau = -\sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \quad (31)$$

Тепер можемо повернутися до формули (27) і переписати її в такому вигляді:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \pm\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}. \quad (32)$$

Це диференціальне рівняння відносно  $\sigma$  завжди можна проінтегрувати хоча б у квадратурах і записати закон руху з урахуванням додатного напрямку на траєкторії і вибору початку відліку в такому вигляді:

$$\sigma = \sigma(t) = \int_0^t \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2} d\tau. \quad (33)$$

**Зауваження 9.** Формула (33) робить процес переходу від координатного способу завдання плоского руху точки до натурального завершеним. Зокрема, ця формула дозволяє побудувати важливий графік залежності дугової координати від часу. Якщо інтеграл в правій частині (33) виражається в елементарних функціях (або, як прийнято говорити в математиці, «береться»), то побудова вказаного графіка не викликає ніяких складнощів.

Наприклад, для нашого першого прикладу формула (33) запишеться так:

$$\sigma = \int_0^t \sqrt{100\tau^2 + 4d\tau}.$$

Використовуючи табличний інтеграл:

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C, \quad (34)$$

приходимо до такого закону руху:

$$\sigma = 5 \left( t\sqrt{t^2 + 0,04} + 0,04 \ln \left| t + \sqrt{t^2 + 0,04} \right| \right) + 0,32189.$$

Для другого випадку:

$$\sigma = \int_t^t \cos \tau \sqrt{9 + 64 \sin^2 \tau} d\tau.$$

Застосовуючи метод заміни змінної за формулами:

$$u = \sin \tau, \quad du = \cos \tau d\tau,$$

знову приходимо до табличного інтегралу (34) і остаточно закон зміни дугової координати у часі тут записується так:

$$\sigma = 4 \left( \sin t \sqrt{\frac{9}{64} + \sin^2 t} + \frac{9}{64} \ln \left| \sin t + \sqrt{\frac{9}{64} + \sin^2 t} \right| \right) + 0,55172.$$

Легко побачити, що у третьому прикладі ми приходимо до такого інтегралу:

$$\sigma = \pi \int_0^t \sqrt{1 + 8 \sin^2 \frac{\pi}{2} \tau} d\tau. \quad (35)$$

Цей інтеграл не обчислюється в елементарних функціях («не береться»). Тому, у цьому і подібних випадках необхідно використовувати сучасні персональні комп'ютери, де є відповідні процедури для наближеного знаходження **визначених інтегралів**. Нагадаємо, що три чисельні методи знаходження визначених інтегралів описані у другому розділі (підрозділ 2.4 книги [3]).

Як приклад, наведемо у вигляді таблиці (табл. 2.2) значення функції  $\sigma = \sigma(t)$  в кількох точках проміжку  $[0, 4]$  для інтеграла в (35), обчислені за методами прямокутників, трапецій і Сімпсона з точністю до третього знаку після коми.

Таблиця 2.2 – Значення функцій

$t$	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4	2,8	3,2	3,6	4,0
$\sigma$	0	1,726	4,825	8,540	11,639	13,365	15,091	18,190	21,905	25,004	26,730

За допомогою цієї таблиці легко будується графік функції

$$\sigma = \sigma(t).$$

**Знаходження прискорення при натуральному способі завдання руху точки.**

Вище ми вже показали, як знаходити швидкість при натуральному способі за формулою:

$$\bar{v} = v_{\tau} \cdot \tau; \quad v_{\tau} = \frac{d\sigma}{dt}. \quad (36)$$

Покажемо, як знайти проекції прискорення на натуральні осі координат у двох випадках: коли рух точки задано натуральним способом і коли рух задається координатним способом. Виходячи із формули  $\bar{w} = \frac{d\bar{v}}{dt}$ ; і враховуючи подання (36), будемо мати:

$$\bar{w} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{dv_{\tau}}{dt} \bar{\tau} + v_{\tau} \frac{d\bar{\tau}}{dt}. \quad (37)$$

В конспекті лекцій [1] показано, як виводиться формула

$$\frac{d\bar{\tau}}{dt} = \frac{v_{\tau}}{\rho} \cdot \bar{n}; \quad (38)$$

де  $\rho$  – радіус кривизни траєкторії в даному положенні точки  $M$  на траєкторії.

**Зауваження 10.** Величина  $\rho$  має наступний геометричний зміст – це радіус кола, дугою якого можна замінити нашу криву в околі точки  $M$ .

З урахуванням подання (38) формула (37) приймає такий остаточний вигляд:

$$\bar{w} = \frac{dv_{\tau}}{dt} \bar{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \cdot \bar{n}. \quad (39)$$

Тут враховано, що згідно з (29)  $v_{\tau}^2 = v^2$ .

**Зауваження 11.** Звернемо увагу на те, що при виведенні формули (39) виходячи з формули (36) ми не використовували умову, що точка рухається на площині. Але це означає, що при натуральному способі завдання руху і у плоскому, і у просторовому випадку формула (39) зберігає свій вигляд, чого не було при координатному способі (дивись формули (9) і (18)).

**Зауваження 12.** Із (39) також видно, що у випадку просторового руху вектор прискорення точки не проектується на бінормаль, тобто він завжди лежить у так званій стичній площині, що проходить через дотичну і головну нормаль, і яка у випадку плоского руху співпадає з площиною, в якій рухається точка.

**Зауваження 13.** Із (39) випливає, що і для плоского, і для просторового руху прискорення можна розкласти на дві складові, причому відповідні проекції в механіці мають спеціальні назви і відповідають за дві можливі причини зміни вектора швидкості точки. Відомо, що за визначенням прискорення виникає, якщо швидкість змінюється хоча б з однієї з двох причин, або з обох одночасно: 1) за величиною; 2) за напрямком.

#### **Визначення 1.**

Проекція вектора прискорення на дотичну, тобто

$$w_{\tau} = \frac{dv_{\tau}}{dt} \quad (40)$$

називається **дотичним або тангенціальним** прискоренням. Воно характеризує зміну вектора швидкості за величиною і дорівнює нулю у двох випадках:

- 1)  $v_{\tau} = const$  (швидкість не змінюється за модулем);
- 2) у ті моменти часу, коли швидкість досягає екстремального за модулем значення (*max* або *min*).

#### **Визначення 2.**

Проекція вектора прискорення на головну нормаль

$$w_n = \frac{v^2}{\rho}; \quad (41)$$

називається **нормальним** прискоренням. Воно характеризує зміну вектора швидкості за напрямком і дорівнює нулю у двох випадках:

1.  $v = 0$  – швидкість змінює напрямком на протилежний;
2.  $\rho = \infty$  – точка рухається уздовж прямої, або знаходиться у точці перегину траєкторії (рис. 2.5).

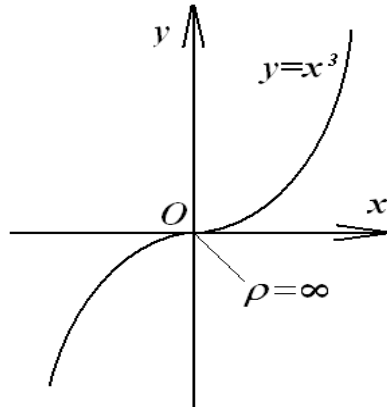


Рисунок 2.5 – Траєкторія руху точки

**Зауваження 13.** Таким чином, ми маємо дві можливості для побудови вектора прискорення у плоскому випадку, які, зрозуміло, повинні приводити до того самого результату, а саме, як ми вже показували вище при координатному способі (рис. 1.4) вектор  $\bar{w}$  – діагональ прямокутника, побудованого на векторах  $w_x \bar{i}$  і  $w_y \bar{j}$ , з іншого боку – при нормальному способі – це діагональ прямокутника, побудованого на векторах  $w_\tau \bar{t}$  і  $w_n \bar{n}$  (рис. 2.4) і, оскільки повинна виконуватися умова:

$$w_x \bar{i} + w_y \bar{j} = w_\tau \bar{t} + w_n \bar{n}, \quad (42)$$

то звідси випливає можливість графічної перевірки отриманих результатів (рис. 2.6).

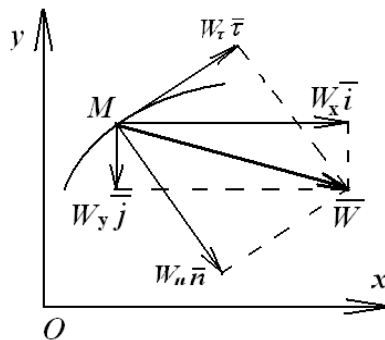


Рисунок 2.6 – Графічна перевірка результатів

При цьому аналітична перевірка виконується за допомогою формули:

$$|\overline{w}| = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2}. \quad (43)$$

**Зауваження 14.** У просторовому випадку аналогічні формули для перевірки мають наступний вигляд:

$$w_x \bar{i} + w_y \bar{j} + w_z \bar{k} = w_\tau \bar{\tau} + w_n \bar{n}, \quad (44)$$

$$\sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2} = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2}. \quad (45)$$

**Зауваження 15.** Щоб обчислити дотичне і нормальне прискорення у випадку, коли рух точки задається координатним способом, треба виконати наступний ланцюжок кроків:

$$v = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}; \quad (46)$$

$$w = \sqrt{(\ddot{x})^2 + (\ddot{y})^2 + (\ddot{z})^2}; \quad (47)$$

$$w_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = \frac{d}{dt}(\pm v) = \frac{x \ddot{x} + y \ddot{y} + z \ddot{z}}{\pm \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}}; \quad (48)$$

$$w_n = \sqrt{w^2 - w_\tau^2}; \quad (49)$$

$$\rho = \frac{v^2}{w_n}. \quad (50)$$

## 2.2 Особливості, які виникають у просторовому випадку

Послідовність дій при дослідженні просторового руху точки така сама, як і у плоскому випадку, зокрема рівняння:

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t); \quad (51)$$

можна розглядати як рівняння траєкторії у параметричній формі і за його допомогою за точками побудувати просторову криву. Якщо це можливо, то треба виключити із рівнянь (51) параметр  $t$  і записати рівняння траєкторії в координатній формі як лінію перетину двох поверхонь:

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases} \quad (52)$$

Розмітка траєкторії проводиться за тією самою схемою, що і у плоскому випадку (рис. 2.4), при цьому з точкою, що рухається, зв'язуємо рухому натуральну систему координат з наступними осями: дотичною, головною нормаллю і бінормаллю з одиничними векторами  $(\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b})$ .

Усі інші необхідні параметри руху знаходяться за тими самими формулами, що і у плоскому випадку, в яких при координатному способі завдання руху з'являється третя проекція.

**Увага!** При натуральному способі завдання руху вектор прискорення  $\bar{w}$ , як і у плоскому випадку, складається лише з двох компонент  $w_{\tau}\bar{\tau}$  і  $w_n\bar{n}$  і завжди лежить у стичній площині. Для перевірки побудований таким чином вектор  $\bar{w}$  повинен співпадати з діагоналлю прямокутного паралелепіпеда, побудованого на векторах,  $w_x\bar{i}, w_y\bar{j}, w_z\bar{k}$ ; (рис. 2.7).

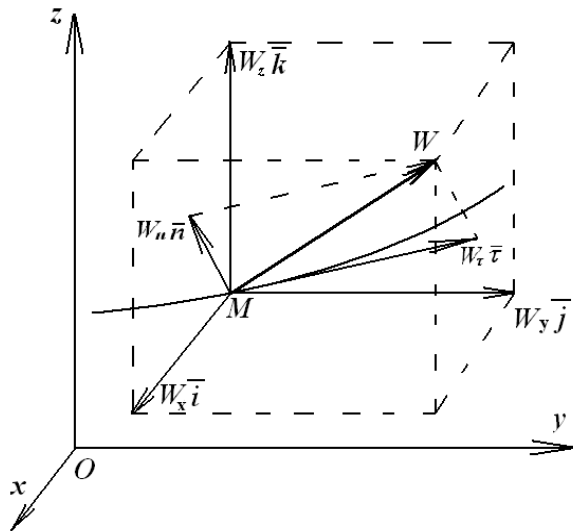


Рисунок 2.7 – Вектор прискорення при натуральному способі завдання руху

### 3. ПРИКЛАДИ ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНИХ ЗАВДАНЬ НА КІНЕМАТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

За заданим законом руху точки у плоскому або просторовому випадку необхідно знайти кінематичні характеристики в декартових координатах, перейти до натурального способу завдання руху і знайти кінематичні характеристики точки в натуральних осях. Для усіх характеристик знайти функціональну залежність від часу і конкретні значення для заданих моментів часу  $t_1$  і  $t_2$ .

У відповідності до наведеної вище теорії такі завдання рекомендується виконувати у наступному порядку.

1. Знайти рівняння траєкторії точки в координатній формі, якщо це можливо, і показати траєкторію графічно.

**Увага!** Якщо час  $t$  не вдається виключити, то траєкторія будується безпосередньо за точками, попередньо заповнивши таблицю (дивись наведений нижче приклад).

2. Обчислити координати і показати на траєкторії положення точки  $M$  у моменти часу  $t_1$  і  $t_2$ .

3. Знайти параметри вектора швидкості в декартових координатах як функції часу.

4. Обчислити ці ж параметри в моменти часу  $t_0$ ,  $t_1$ ,  $t_2$  і побудувати графічно в масштабі відповідні три вектори швидкості.

5. Виконати розмітку траєкторії.

6. Знайти проєкцію швидкості на дотичну як функцію часу.

7. Знайти закон руху точки вздовж траєкторії  $\sigma = \sigma(t)$  аналітично або за допомогою чисельного інтегрування з використанням ЕОМ.

8. Обчислити параметри вектора прискорення в декартових координатах як функції часу.

9. Знайти ці ж параметри в моменти часу  $t_1$ ,  $t_2$  і побудувати графічно відповідні два вектори прискорення.

10. Знайти дотичне і нормальне прискорення як функції часу.

11. Обчислити ці ж величини в моменти часу  $t_1$ ,  $t_2$  і показати графічно розкладення вектора прискорення на дотичну і нормальну складові.

12. Знайти радіус кривизни траєкторії як функцію часу.

13. Обчислити радіус кривизни в моменти часу  $t_1$ ,  $t_2$ .

14. Побудувати графіки функцій,  $\sigma = \sigma(t)$ ,  $v_\tau(t)$ ,  $w_\tau = w_\tau(t)$ ,  $w_n = w_n(t)$ .

### 3.1 Плоский рух точки

**Приклад 1.** Точка ободу колеса, що котиться без ковзання горизонтальною прямою, описує циклоїду згідно з наступним рівнянням:

$$x = 9t - 0,75 \sin(12t);$$

$$y = 0,75 - 0,75 \cos(12t).$$

Провести за описаною вище схемою кінематичний аналіз руху точки, якщо  $t_1 = 0,1$  с,  $t_2 = 0,3$  с.

Розв'язання.

1. Тут час  $t$  виключити не вдається, тому залишаємо рівняння траєкторії в параметричній формі, а для побудови траєкторії обчислимо значення  $x$  і  $y$  для ряду моментів часу. Результати обчислень подамо у вигляді таблиці (табл. 3.1).

Таблиця 3.1 – Значення для побудови траєкторії

$t$	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5	0,55
$x$	0	0,025	0,2	0,025	1,29	2,15	3,03	3,90	4,35	4,63	4,71	4,71
$y$	0	0,131	0,48	0,92	1,30	1,49	1,42	1,12	0,68	0,27	0,03	0,04

За цими даними на рис. 3.1 побудована траєкторія

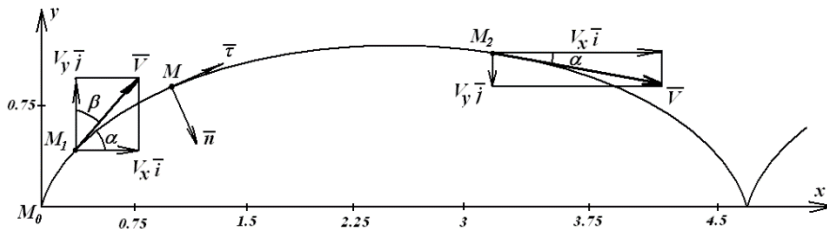


Рисунок 3.1 – Траєкторія руху точки

2. Координати точки для моментів часу  $t_0, t_1, t_2$  приведені в таблиці. Відмітимо їх на графіку як  $M_0, M_1, M_2$ .

3. Обчислимо проекції вектора швидкості:

$$v_x = \dot{x} = 9(1 - \cos(12t)) = 18 \sin^2(6t);$$

$$v_y = \dot{y} = 9 \sin(12t),$$

а потім модуль і направляючі косинуси:

$$|\vec{v}| = \sqrt{81(1 - \cos(12t))^2 + 81 \sin^2(12t)} = 18 \sin(6t);$$

$$\cos \alpha = \frac{18 \sin^2(6t)}{18 \sin(6t)}; \quad \cos \beta = \frac{18 \sin(6t) \cdot \cos(6t)}{18 \sin(6t)}.$$

Звідси

$$\beta = 6t, \alpha = \frac{\pi}{2} - 6t.$$

4. Знайдемо параметри швидкості для заданих моментів часу:

$$v_x(0) = 0; \quad v_y(0) = 0; \quad |\vec{v}(0)| = 0;$$

$$v_{x_1} = 5,74; \quad v_{y_1} = 8,39; \quad |\vec{v}_1| = 10,17;$$

$$\cos \alpha_1 = 0,56; \quad \cos \beta_1 = 0,83;$$

$$v_{x_2} = 17,07; \quad v_{y_2} = -3,98; \quad |\vec{v}_2| = 17,52;$$

$$\cos \alpha_2 = 0,97; \quad \cos \beta_2 = -0,23.$$

Графічно вектори  $\vec{v}_1$  і  $\vec{v}_2$  зображені на рис. 3.1.

5. В якості початку відліку обираємо точку  $M_0$ , масштаб вздовж траєкторії приймаємо таким самим, як і вздовж осей  $O_x$  і  $O_y$ . Оскільки  $v_0 = 0$ , то додатній напрямок визначаємо за характером зміни функцій  $x(t)$  і  $y(t)$ . Так як тут  $x(t)$  зростає зі зростанням часу, точка рухається траєкторією увесь час вправо; цей напрямок і будемо вважати додатнім.

6. У відповідності до розмітки будемо мати:

$$v_\tau = 18 \sin(6t).$$

7. Визначимо закон руху за траєкторією, інтегруючи рівняння:

$$\frac{d\sigma}{dt} = v_\tau. \quad (53)$$

**Увага!** При інтегруванні рівняння (53) можливі дві ситуації: 1) права частина інтегрується в елементарних функціях; 2) інтеграл від правої частини не береться. В останньому випадку можна застосувати два підходи: 1) застосувати метод Рунге-Кутта для чисельного інтегрування рівняння першого порядку (дивись розділ 2 книги [3]); 2) подати  $\sigma = \sigma(t)$ ; у вигляді інтегралу зі змінною верхньою границею, і для кожного обраного в таблиці значення  $t$  застосовувати один із трьох описаних у розділі 2 наближених методів знаходження визначених інтегралів.

В нашій задачі рівняння (53) запишеться так:

$$\frac{d\sigma}{dt} = 18 \sin(6t).$$

Звідси будемо мати  $\sigma = 18 \int \sin(6t) dt + C$ .

Якщо обмежитися першою аркою циклоїди (рис. 3.1), коли  $6t \leq \pi$ , і врахувати, що при  $t_0 = 0$ ,  $\sigma_0 = 0$ , то остаточно знаходимо такий закон:  $\sigma = 3(1 - \cos(6t))$ ;

8. Обчислимо параметри вектора прискорення:

$$w_x = \dot{v}_x = 108 \sin(12t); \quad w_y = \dot{v}_y = 108 \cos(12t);$$

$$|\bar{w}| = 108 \sqrt{\sin^2(12t) + \cos^2(12t)} = 108;$$

$$\cos \alpha_1 = \sin(12t) \quad \cos \beta_1 = \cos(12t).$$

Звідси

$$\beta_1 = 12t, \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{2} - 12t.$$

9. Для заданих моментів часу з цих формул знаходимо:

$$w_{x_1} = 100,68; \quad w_{y_1} = 39,07; \quad |\bar{w}_1| = 108;$$

$$w_{x_2} = -47,79; \quad w_{y_2} = -96,85; \quad |\bar{w}_2| = 108.$$

Графічно вектори  $\bar{w}_1$  і  $\bar{w}_2$  зображені на рис. 3.2.

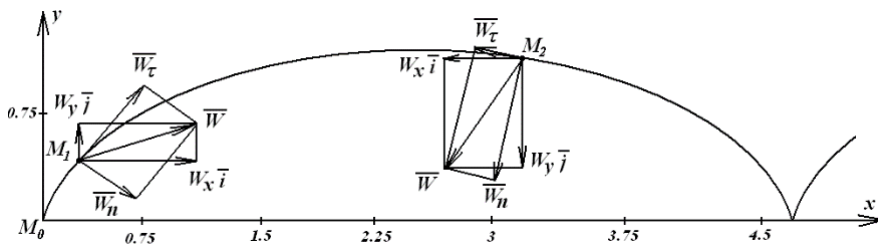


Рисунок 3.2 – Графічна побудова векторів прискорення

10. Дотичне прискорення знаходимо за формулою:

$$w_{\tau} = \frac{dv_{\tau}}{dt} = 108 \cos(6t),$$

а для нормального будемо мати:

$$w_n = \sqrt{|w|^2 - w_{\tau}^2} = 108\sqrt{1 - \cos^2(6t)} = 108 \sin(6t).$$

11. У задані моменти часу маємо:

$$w_{\tau_1} = 89,12; \quad w_{n_1} = 61;$$

$$w_{\tau_2} = -24,54; \quad w_{n_2} = 105,81.$$

Відповідні графічні побудови також наведені на рис. 3.2. Ще раз звернемо увагу на те, що у кожній точці маємо два прямокутники (на  $w_x \bar{i}, w_y \bar{j}$ , і на  $w_{\tau} \bar{\tau}, w_n \bar{n}$ ), у яких спільні діагоналі  $\bar{w}$ . Це є поточною перевіркою правильності знаходження компонент повного прискорення точки.

12. Знайдемо радіус кривизни траєкторії за формулою:

$$\rho = \frac{v_{\tau}^2}{w_n} = \frac{18^2 \sin^2(6t)}{108 \sin(6t)} = 3 \sin(6t).$$

13. Для моментів  $t_1$  і  $t_2$  звідси будемо мати:

$$\rho_1 = 1,69; \quad \rho_2 = 2,02.$$

14. Графіки функцій  $\sigma(t)$ ,  $v_{\tau}(t)$ ,  $w_{\tau}(t)$ ,  $w_n(t)$  показані на рис. 3.3.

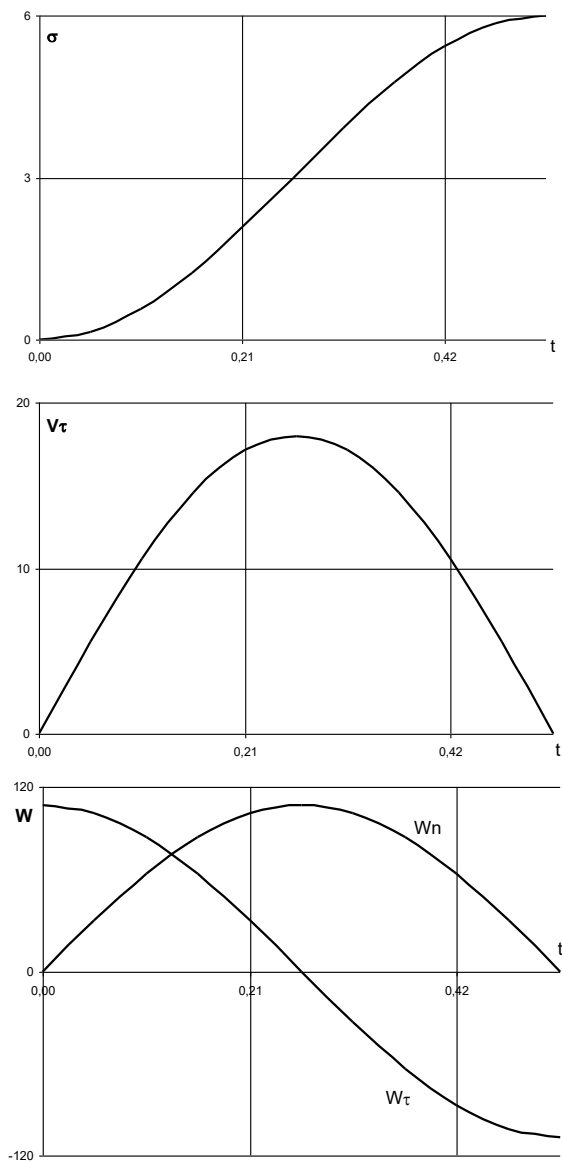


Рисунок 3.3 – Графіки функцій

### 3.2 Просторовий рух точки

**Приклад 2.** Точка рухається у просторі відповідно до наступного закону:

$$x = 2t; \quad y = 5t^2; \quad z = 3 \sin \frac{\pi}{2} t.$$

За описаною вище схемою провести повний кінематичний аналіз руху, якщо  $t_1 = 1$  і  $t_2 = 2$ .

Розв'язання.

1. У просторовому випадку запис траєкторії у координатній формі, як правило, зробити дуже складно, до того ж навіть якщо це вдається, то ми майже ніколи не отримаємо, на відміну від плоского руху, рівняння якоїсь відомої канонічної лінії, як перетину двох канонічних поверхонь. Тому найчастіше тут варто залишати рівняння траєкторії у параметричній формі і будувати криву у просторі за точками, попередньо склавши відповідну таблицю (табл. 3.2). В нашій задачі ця таблиця має наступний вигляд.

Таблиця 3.2 – Значення для побудови траєкторії

$t$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$x$	0	1,0	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y$	0	1,25	5	11,25	20	31,25	45	61,25	80	101,25	125
$z$	0	2,12	3	2,12	0	-2,12	-3	-2,12	0	2,12	3

За цими даними на рис. 3.4 побудована в осях  $O_{xyz}$  траєкторія точки. Нагадаємо, що для її побудови в аксонометричній проекції необхідно покласти кут  $xOy = 135^\circ$ , а масштаб вздовж осі  $O_x$  взяти вдвічі меншим ніж вздовж двох інших осей.

2. Координати точок  $M_0, M_1, M_2$ , які відмічені на траєкторії, взяті із наведеної таблиці.

3. Знаходимо параметри вектора швидкості:

$$v_x = \dot{x} = 2; \quad v_y = \dot{y} = 10t; \quad v_z = \dot{z} = \frac{3\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} t\right);$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{4 + 100t^2 + \frac{9\pi^2}{4} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} t\right)};$$

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{|\vec{v}|} = \frac{2}{|\vec{v}|}; \quad \cos \beta = \frac{v_y}{\vec{v}} = \frac{10t}{|\vec{v}|}; \quad \cos \gamma = \frac{3\pi \cos(\frac{\pi}{2}t)}{2|\vec{v}|}.$$

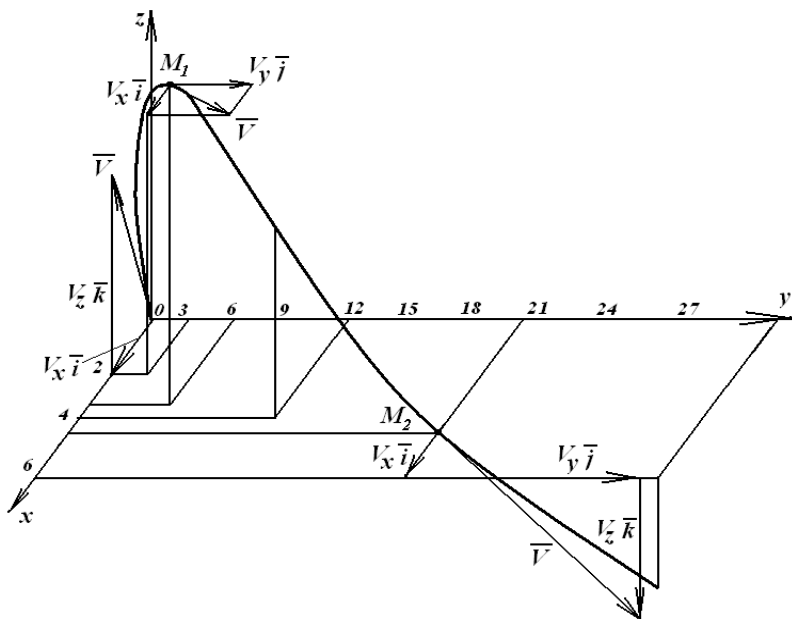


Рисунок 3.4 – Траєкторія руху точки

4. Дані параметри для моментів часу  $t_0, t_1, t_2$  приймають наступні значення:

$$v_{x_0} = 2; \quad v_{y_0} = 0; \quad v_{z_0} = 4,71; \quad |\vec{v}_0| = 5,12;$$

$$\cos \alpha_0 = 0,39; \quad \cos \beta_0 = 0; \quad \cos \gamma_0 = 0,92;$$

$$v_{x_1} = 2; \quad v_{y_1} = 10; \quad v_{z_1} = 0; \quad |\vec{v}_1| = 10,2;$$

$$\cos \alpha_1 = 0,2; \quad \cos \beta_1 = 0,98; \quad \cos \gamma_1 = 0;$$

$$v_{x_2} = 2; \quad v_{y_2} = 20; \quad v_{z_2} = -4,71; \quad |\vec{v}_2| = 20,64;$$

$$\cos \alpha_2 = 0,1; \quad \cos \beta_2 = 0,97; \quad \cos \gamma_2 = -0,23.$$

За даними значеннями на рис. 3.4 побудовані вектори швидкості у точках  $M_0, M_1, M_2$ . Ще раз нагадаємо, що на відміну від плоского

випадку тут вектор швидкості є діагоналлю не прямокутника, а прямокутного паралелепіпеда, побудованого на сторонах  $v_x\bar{i}$ ,  $v_y\bar{j}$ ,  $v_z\bar{k}$ . При побудові таких параметрів у кожній точці слід пам'ятати про відмінність масштабу вздовж  $O_x$  від двох інших осей. Звернемо також увагу на те, що в даній задачі у точці  $M_1$  швидкість лежить у площині, паралельній площині  $xu$  (оскільки  $v_{z_1} = 0$ ) і це видно із рис. 3.4.

5. Щоб розмітити нашу траєкторію обираємо в якості початку відліку точку  $M_0$ . Масштаб вздовж траєкторії беремо таким же, як і вздовж осей  $y$  і  $z$ . Додатній напрямок відліку дугової координати  $\sigma$  задаємо вектором  $\bar{v}_0$ .

6. У відповідності до проведеної розмітки будемо мати:

$$v_\tau = \sqrt{4 + 100t^2 + \frac{9\pi^2}{4} \cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)}.$$

7. Для визначення закону руху точки вздовж траєкторії необхідно про інтегрувати рівняння:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \sqrt{4 + 100t^2 + \frac{9\pi^2}{4} \cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)},$$

з такою початковою умовою: при  $t_0 = 0$ ,  $\sigma_0 = 0$ .

Це рівняння не інтегрується в елементарних функціях і вище (в прикладі 1) ми описали два можливих наближених підходів до його розв'язання. Зокрема на рис. 3.6 наведено графік функції  $\sigma(t)$ , отриманий за допомогою методу Рунге-Кутта.

8. Параметри вектора прискорення знаходимо за формулами:

$$w_x = \dot{v}_x = 0; \quad w_y = \dot{v}_y = 10; \quad w_z = \dot{v}_z = -\frac{3\pi^2}{4} \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right);$$

$$|\bar{w}| = \sqrt{100 + \frac{9\pi^4}{16} \sin^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)};$$

$$\cos \alpha = 0; \quad \cos \beta = \frac{10}{|\bar{w}|}; \quad \cos \gamma = -\frac{3\pi^2}{4} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)}{|\bar{w}|}.$$

Звідси бачимо, що у всіх точках траєкторії вектор повного прискорення точки лежить у площині, яка паралельна площині  $yz$ , тобто бінормаль у кожній точці траєкторії паралельно осі  $Ox$ , а стична площина, в якій завжди лежить вектор повного прискорення точки, у всіх точках траєкторії паралельна площині  $yz$ .

9. Для заданих моментів часу будемо мати:

$$w_{x_0} = 0; \quad w_{y_0} = 10; \quad w_{z_0} = 0; \quad |\bar{w}_0| = 10;$$

$$w_{x_1} = 0; \quad w_{y_1} = 10; \quad w_{z_1} = -7,4; \quad |\bar{w}_1| = 12,44;$$

$$\cos \alpha_1 = 0; \quad \cos \beta_1 = 0,8; \quad \cos \gamma = -0,6;$$

$$w_{x_2} = 0; \quad w_{y_2} = 10; \quad w_{z_2} = 0; \quad |\bar{w}_2| = 10.$$

Вектори прискорень на траєкторії за допомогою їх проекцій будуються, як і вектори швидкостей, і показані на рис. 3.5.

10. Дотичне і нормальне прискорення знаходимо за формулами:

$$w_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = \frac{200t - \frac{9\pi^2}{8} \sin(\pi t)}{\sqrt{4 + 100t^2 + \frac{9\pi^2}{4} \cos^2(\frac{\pi}{2} t)}};$$

$$w_n = \sqrt{w^2 - w_\tau^2}.$$

11. Для заданих моментів часу звідси знаходимо такі значення:

$$w_{\tau_1} = 9,81; \quad w_{n_1} = 7,65;$$

$$w_{\tau_2} = 9,67; \quad w_{n_2} = 2,48.$$

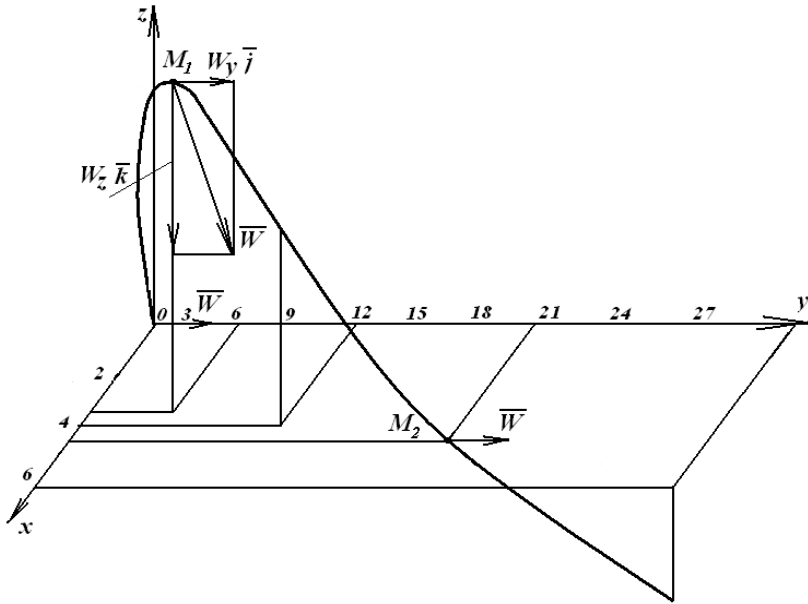


Рисунок 3.5 – Побудова векторів прискорень

12. Радіус кривизни знаходимо за формулою:

$$\rho = \frac{v_{\tau}^2}{w_n}$$

13. Для моментів часу  $t_1$  і  $t_2$  будемо мати

$$\rho_1 = 1,79; \quad \rho_2 = 69,3.$$

14. Графіки функцій  $\sigma(t)$ ,  $v_{\tau}(t)$ ,  $w_{\tau}(t)$ ,  $w_n(t)$  наведені на рис.

3.6.

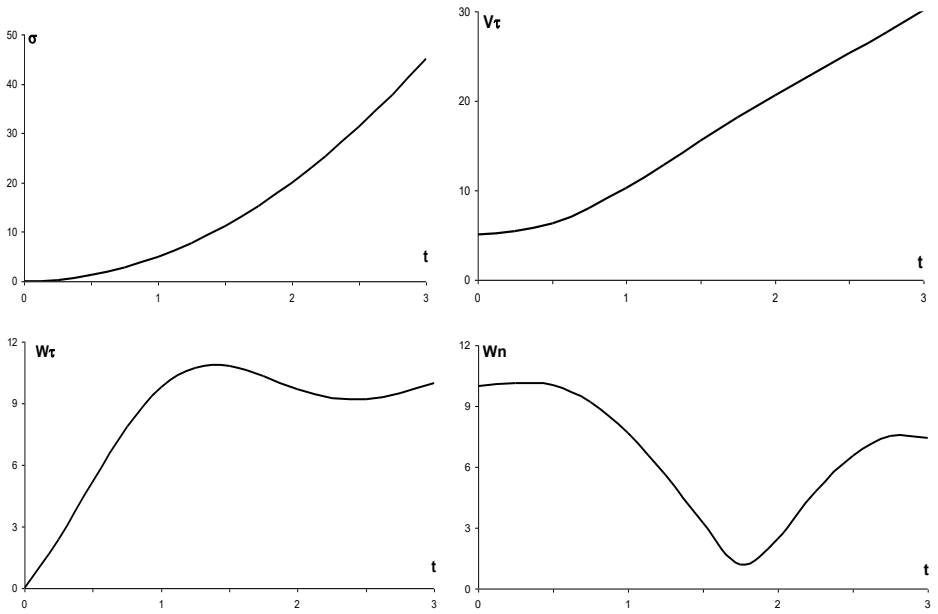


Рисунок 3.6 – Графік функції  $\sigma(t)$ , отриманий за допомогою методу Рунге-Кутта

## ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАНЬ

1. Пожуєв В.І. Конспект лекцій з теоретичної механіки. Ч.І. Запоріжжя, 2007. – 140 с.
2. Пожуєв В.І. Конспект лекцій з теоретичної механіки. Ч.ІІ. Запоріжжя, 2007. – 162 с.
3. Пожуєв А.В., Пожуєв В.І. Теоретична механіка .Ч.ІІІ. Додаткові матеріали до конспекту лекцій. Запоріжжя, Статус, 2020. – 236 с.