

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Запорізький національний технічний університет

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання індивідуальних домашніх завдань
за темою "Дослідження систем масового обслуговування"
із дисципліни "**Моделювання систем**"

для студентів спеціальності 123 "Комп'ютерна інженерія"
всіх форм навчання

Методичні вказівки до виконання індивідуальних домашніх завдань за темою "Дослідження систем масового обслуговування" із дисципліни "Моделювання систем" для студентів спеціальності 123 "Комп'ютерна інженерія" всіх форм навчання / Укл.: Р.К. Кудерметов, Н.В. Луценко, О.В. Польська– Запоріжжя: ЗНТУ, 2019. – 14 с.

Укладачі:

Р.К. Кудерметов, к.т.н., доцент
Н.В. Луценко, ст. викладач
О.В. Польська, ст. викладач

Рецензент:

М.Ю. Тягунова, к.т.н., доцент

Відповідальний за випуск

О.В. Польська, ст. викладач

Затверджено
на засіданні кафедри КСМ
Протокол № 11 від 20.05.2019

Рекомендовано до видання
на засіданні НМК факультету КНТ
Протокол № 10 від 31.05.2019

ЗМІСТ

Порядок виконання індивідуальних домашніх завдань.....	4
Теоретичні відомості.....	5
Завдання 1 Дослідження одноканальної СМО	10
Завдання 2 Дослідження багатоканальної СМО.....	11
Рекомендована література	14

ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ДОМАШНІХ ЗАВДАНЬ

Перед виконанням індивідуального домашнього завдання (ІДЗ) студенти повинні ознайомитися з теоретичними відомостями за темою та виконати лабораторну роботу "Моделювання систем масового обслуговування" з курсу "Моделювання систем".

ІДЗ виконується у пакеті наукових програм для чисельних обчислень Scilab (/ˈsɑɪləb/), або Matlab.

В даному ІДЗ студенти моделюють та досліджують системи масового обслуговування (СМО) на прикладі найпростіших систем.

ІДЗ складається з двох завдань.

Перше завдання (загальне) складається з задач дослідження одноканальної СМО:

- з відмовами;
- з необмеженою чергою;
- з обмеженим часом очікування.

Друге завдання – дослідження багатоканальної СМО:

- з відмовами;
- з необмеженою чергою.

Для захисту ІДЗ студенти повинні скласти граф-схеми станів СМО, навести використані формули та виконати потрібні розрахунки згідно заданого варіанту.

Оформлене до захисту ІДЗ повинно бути виконане відповідно з СТП та містити:

- титульний лист з номером варіанту;
- тексти завдань згідно варіанту;
- граф-схеми станів, формули та розрахунки до завдання 1 та завдання 2, що виконані в математичних пакетах Scilab або Matlab.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Системи масового обслуговування (СМО) – це системи, функціонування яких можна представити як процес обслуговування деякого потоку вимог, подій, заявок одного типу.

Потік вимог – послідовність вимог, які необхідно обслужити.

Вхідний потік – потік вимог, які надходять до обслуговуючої системи. *Вихідний потік* – потік вимог, які виходять з обслуговуючої системи. *Джерело вимог* – першопричина виникнення вимог, незалежно від їх фізичної природи.

Інтенсивність потоку – це середнє число вимог, що виникають в одиницю часу.

При масовому надходженні вимог в систему обслуговування в СМО можуть виникнути *черги*.

Стаціонарний потік вимог – це потік, інтенсивність якого не залежить від часу.

Ординарний потік вимог – це потік, в якому вимоги виникають по одному.

Потік без післядії – це потік вимог, кількість вимог якого, за умови їх існування в інтервалах часу, що не перетинаються, не залежить одна від одної. Відсутність післядії значить що вимоги надходять до системи незалежно одна від одної.

Найпростіший потік вимог – це потік, що одночасно стаціонарний, ординарний та без післядії.

Рекурентний потік – це такий потік вимог, якщо він стаціонарний, ординарний, а інтервали часу між вимогами є випадковими величинами з однаковим (довільним) розподілом.

Окрім випадки рекурентного потоку: *найпростіший* потік, коли інтервали часу між подіями розподілені за експоненціальним законом, та *нормальний* потік, коли інтервали часу між подіями розподілені за нормальним (гаусовим) розподілом.

За числом обслуговуючих підсистем розрізняють *одноканальні* та *багатоканальні* СМО.

За характером джерела вимог розрізняють системи з кінцевою та нескінченною кількістю вимог.

В залежності від відсутності або наявності можливості очікування для вимог (заявок) відокремлюють *системи з відмовами* та *системи з очікуванням*.

В системі з відмовами вимога, що надходить в той час, коли всі канали обслуговуючої системи зайняті, отримує відмову, залишає систему та не приймає участі у подальшому процесі обслуговування.

В системі з очікуванням, вимога, що надходить в той час, коли всі канали обслуговуючої системи зайняті, стає в чергу та очікує поки не звільниться будь яка підсистема.

Системи з очікуванням розділяють на системи з необмеженим очікуванням та системи з обмеженим очікуванням.

В системі з необмеженим очікуванням, вимога, що надходить до системи, рано чи пізно буде обслугована.

В системі з обмеженим очікуванням можуть накладатися обмеження, наприклад, на довжину черги, на час перебування в черзі, на загальний час перебування вимоги в системі.

Отже СМО можна умовно поділити на:

- СМО з відмовами (якщо канали зайняті, то заявка не обслуговується);
- СМО з необмеженою чергою (якщо канали зайняті, то заявка чекає необмежений час звільнення каналу);
- СМО з чергами (якщо канали зайняті, то заявка чекає деякий час звільнення каналу).

Одноканальна СМО з обмеженим часом очікування

Ймовірність, що канал вільний:

$$p_0 = \left(1 + \rho + \rho \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{\prod_{j=1}^{i-1} (\mu + j\xi)} \right)^{-1}, \quad (1)$$

де $\rho = \lambda / \mu$ – приведена інтенсивність, відношення інтенсивностей вхідного потоку і обслуговування;

λ – інтенсивність потоку заявок;

μ – інтенсивність обслуговування;

ξ – інтенсивність очікування.

Ймовірність одночасного перебування r вимог в черзі при $r \geq 2$:

$$p_r = \rho \frac{\lambda^{r-1}}{\prod_{j=1}^{r-1} (\mu + j\xi)} p_0. \quad (2)$$

Відносна пропускна здатність (ймовірність зайнятості каналу):

$$Q = 1 - p_0. \quad (3)$$

СМО n -канальна з відмовами

Ймовірність, що всі канали будуть вільні:

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} \right)^{-1}, \quad (4)$$

де $\rho = \lambda / \mu$ – приведена інтенсивність;

n – кількість каналів в системі.

Ймовірність, що k каналів будуть зайняті

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0. \quad (5)$$

Ймовірність відмови дорівнює ймовірності того, що усі канали зайняті:

$$p_L = p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0. \quad (6)$$

Відносною пропускною спроможністю СМО називається середня частка заявок, яка буде обслугована. Вона визначається як:

$$Q = 1 - p_L. \quad (7)$$

Абсолютною пропускною спроможністю СМО називається середнє число заявок, що обслуговуються в одиницю часу. Вона визначається як:

$$A = \lambda Q. \quad (8)$$

Середнє число зайнятих каналів обчислюється за формулою:

$$k = A / \lambda. \quad (9)$$

Граф-схема станів для n -канальної СМО з відмовами наведена на рис. 1.

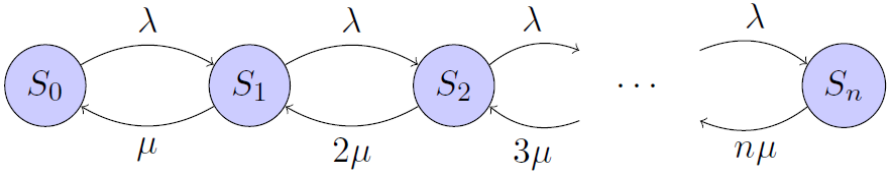


Рисунок 1 – Граф-схема станів n -канальної СМО з відмовами

Одноканальна СМО з необмеженою чергою

Ймовірність, що канал буде вільний:

$$p_0 = 1 - \rho, \quad (10)$$

де $\rho = \lambda / \mu$ – приведена інтенсивність.

Довжина черги:

$$L_q = \rho^2 / (1 - \rho). \quad (11)$$

Середня кількість заявок в системі:

$$L_s = \rho / (1 - \rho). \quad (12)$$

Середній час перебування заявки в системі:

$$W_s = L_s / \lambda. \quad (13)$$

Середній час перебування заявки в черзі:

$$W_q = L_q / \lambda. \quad (14)$$

Граф-схема станів для одноканальної СМО з необмеженою чергою наведена на рис. 2.

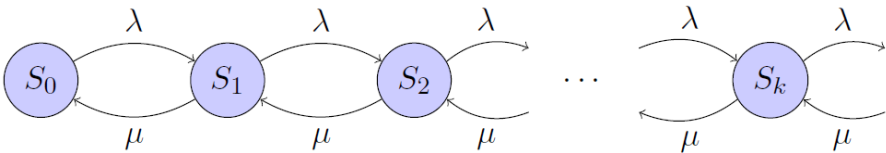


Рисунок 2 – Граф-схема одноканальної СМО з необмеженою чергою

СМО n -канальна з необмеженою чергою

Ймовірність, що всі канали будуть вільні:

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} \right)^{-1}, \quad (15)$$

де $\rho = \lambda / \mu$ – приведена інтенсивність;

n – кількість каналів в системі.

Ймовірність, що k каналів будуть зайняті:

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0. \quad (16)$$

Ймовірність, що k каналів будуть зайняті, а r заявок ($r > 0$) будуть знаходитися в черзі:

$$p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} p_0. \quad (17)$$

Довжина черги:

$$L_q = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!(1-\rho/n)^2} p_0. \quad (18)$$

Середня кількість заявок в системі:

$$L_s = L_q + \rho. \quad (19)$$

Середній час перебування заявки в системі див. формулу (13).

Середній час перебування заявки в черзі див. формулу (14).

Граф-схема станів для n -канальної СМО з необмеженою чергою наведена на рис. 3

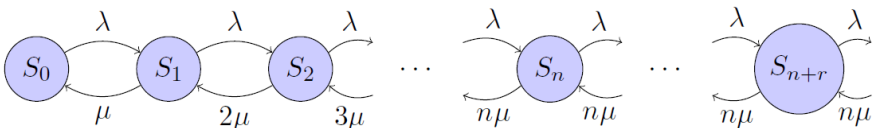


Рисунок 3 – Граф-схема станів n -канальної СМО з необмеженою чергою

ЗАВДАННЯ 1

Дослідження одноканальної СМО

1.1 Для одноканальної СМО з відмовами складіть граф-схему станів. Визначте ймовірність обслуговування заявки з інтенсивністю надходження заявок λ і інтенсивністю обслуговування заявки μ . Визначте середню кількість заявок, що надійшли в систему, середню кількість обслугованих заявок та середню кількість заявок, що отримали відмову в обслуговуванні для часу $T = 1000$.

1.2 Для одноканальної СМО з необмеженою чергою складіть граф-схему станів. Визначте ймовірність того, що канал буде вільний, з інтенсивністю надходження заявок λ і інтенсивністю обслуговування однієї заявки μ . Визначте середню кількість заявок в системі і середній час перебування заявки в системі, середню довжину черги заявок в системі і середній час перебування заявки в черзі.

1.3 Для одноканальної СМО з обмеженим часом очікування визначте ймовірність того, що канал буде вільний (для $i_{\max} = 4$), ймовірність зайнятості каналу та ймовірність одночасного перебування r заявок в черзі (для $r = 2, r = 3$), див. формули (1), (2).

Примітка. Значення інтенсивностей надходження заявок в систему λ , обслуговування однієї заявки μ , очікувань обслуговування заявки ξ оберіть з табл. 1 згідно з варіантом.

Таблиця 1 –Інтенсивності потоку для одноканальної СМО

№	λ	μ	ξ
1	0.2	0.25	1.3
2	0.5	0.7	1.4
3	0.6	0.8	1.6
4	0.7	1.0	2.0
5	0.8	1.1	1.6
6	0.3	0.5	1.0
7	0.25	0.4	0.8
8	0.75	1.5	3.0
9	0.1	0.15	0.3
10	0.16	0.2	0.5

ЗАВДАННЯ 2

Дослідження багатоканальної СМО

Варіант 1:

а) для 3-х каналної СМО з відмовами складіть граф-схему станів. Визначте ймовірність обслуговування, якщо в середньому в систему надходять 18 заявок за хвилину та кожна заявка обслуговується 8 с;

б) для 2-х каналної СМО з необмеженою чергою складіть граф-схему станів. Визначте ймовірність того, що під час появи заявки в черзі буде знаходитися 2 заявки, якщо в середньому в систему надходять 12 заявок за хвилину та кожна заявка обслуговується 6 с.

Варіант 2:

а) для 2-х каналної СМО з відмовами складіть граф-схему станів. Визначте ймовірність відмови в обслуговуванні, якщо в середньому в систему надходять 8 заявок за хвилину та кожна заявка обслуговується 10 с;

б) для 3-х каналної СМО з необмеженою чергою складіть граф-схему станів. Визначте ймовірність того, що під час появи заявки система буде зайнята, якщо в систему надходять в середньому 15 заявок за хвилину і кожна заявка обслуговується в середньому 6 с.

Варіант 3:

а) для 4-х каналної СМО з відмовами складіть граф-схему станів. Визначте ймовірність того, що буде зайнято два канали, якщо в середньому в систему надходять 20 заявок за хвилину та кожна заявка обслуговується 10 с;

б) для 2-х каналної СМО з необмеженою чергою складіть граф-схему станів. Визначте ймовірність того, що під час появи заявки в черзі буде знаходитися 1 заявка, якщо в середньому в систему надходять 8 заявок за хвилину, а кожна заявка обслуговується 10 с.

Варіант 4:

а) для 2-х каналної СМО з відмовами складіть граф-схему станів. Визначте ймовірність обслуговування, якщо в середньому в систему надходять 3 заявки за хвилину, а кожна заявка обслуговується 30 с;

б) для 4-х каналної СМО з необмеженою чергою складіть граф-схему станів. Визначте середню кількість заявок в системі та середній час перебування заявки в системі, якщо в середньому в систему надходять 4 заявки за хвилину, а кожна заявка обслуговується 40 с.

Варіант 5:

а) для 3-х каналної СМО з відмовами складіть граф-схему станів. Визначте ймовірність того, що будуть зайняті 2 канали, якщо інтенсивність вхідного потоку 1 заявка за 1 с, а кожна заявка обслуговується в середньому 2,5 с;

б) для 3-х каналної СМО з необмеженою чергою складіть граф-схему станів. Визначте середню кількість заявок в системі та середній час перебування заявки в системі, якщо в систему надходять в середньому 10 заявок за хвилину, а кожна заявка обслуговується в середньому 15 с.

Варіант 6:

а) для 4-х каналної СМО з відмовами складіть граф-схему станів. Визначте ймовірність того, що система буде вільною, якщо інтенсивність вхідного потоку 3 заявки за 2 с, а кожна заявка обслуговується в середньому 2 с;

б) для 2-х каналної СМО з необмеженою чергою складіть граф-схему станів. Визначте ймовірність того, що під час появи заявки в системі в черзі буде знаходитися 3 заявки, якщо в середньому в систему надходять 6 заявок за хвилину, а кожна заявка обслуговується 10 с.

Варіант 7:

а) для 2-х каналної СМО з відмовами складіть граф-схему станів. Визначте ймовірність відмови в обслуговуванні, якщо інтенсивність вхідного потоку 1 заявка за 12 с, а кожна заявка обслуговується в середньому 8 с;

б) для 4-х каналної СМО з необмеженою чергою складіть граф-схему станів. Визначте ймовірність того, що під час появи заявки в системі буде зайнято три канали, якщо в середньому в систему надходять 18 заявок за хвилину, а кожна заявка обслуговується 10 с.

Варіант 8:

а) для 2-х каналної СМО з відмовами складіть граф-схему станів. Визначте ймовірність відмови в обслуговуванні, якщо в середньому в систему надходять 10 заявок за хвилину, а кожна заявка обслуговується 8 с;

б) для 3-х каналної СМО з необмеженою чергою складіть граф-схему станів. Визначте ймовірність того, що під час появи поточної заявки система буде зайнята, якщо в середньому в систему надходять 10 заявок за хвилину, а кожна заявка обслуговується 12 с.

Варіант 9:

а) для 4-х каналної СМО з відмовами складіть граф-схему станів. Визначте ймовірність того, що система буде вільною, якщо в середньому в систему надходять 7 заявок за хвилину, а кожна заявка обслуговується 30 с;

б) для 2-х каналної СМО з необмеженою чергою складіть граф-схему станів. Визначте ймовірність того, що під час появи поточної заявки в черзі буде знаходитися 2 заявки, якщо в середньому в систему надходять 10 заявок за хвилину, а кожна заявка обслуговується 10 с.

Варіант 10:

а) для 3-х каналної СМО з відмовами складіть граф-схему станів. Визначте ймовірність того, що в системі буде зайнятий один канал, якщо в середньому в систему надходять 8 заявок за хвилину, а кожна заявка обслуговується 20 с;

б) для 4-х каналної СМО з необмеженою чергою складіть граф-схему станів. Визначте ймовірність того, що під час появи поточної заявки в системі буде зайнято 2 канали, якщо в середньому в систему надходять 16 заявок за хвилину, а кожна заявка обслуговується 12 с.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Алексеев, Е.Р., Чеснокова, О.В., Рудченко, Е.А. Scilab: Решение инженерных и математических задач / Е.Р. Алексеев, О.В. Чеснокова, Е.А. Рудченко. – М.: ALT Linux; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. – 260 с.
2. Campbell, S.L., Chancelier, J.-P., Nikoukhah, R. Modeling and Simulation in Scilab/Scicos / S.L. Campbell, J.-P. Chancelier, R. Nikoukhah. – New York: Springer, 2006. – 313 p.
3. Томашевський, В.М. Моделювання систем / В.М. Томашевський. - К.: Видавнича група ВНУ, 2005. – 352 с.
4. Клейнрок, Л. Теория массового обслуживания / Л. Клейнрок. – М.: Машиностроение, 1998. – 432 с.
5. Офіційний сайт Scilab [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://www.scilab.org/>
6. Згуровський, М.З., Панкратова, Н.Д. Основи системного аналізу / М.З. Згуровський, Н.Д. Панкратова. – К.: Видавнича група ВНУ, 2007. – 544 с.
7. Самойленко, Н.И., Скоков, Б.Г. Исследование операций (Математическое программирование. Теория массового обслуживания) / Н.И. Самойленко, Б.Г. Скоков: Уч. пособие. – Харьков: ХНАГХ, 2005. – 176 с.
8. Писарук, Н.Н. Исследование операций / Н.Н. Писарук. – Минск: БГУ, 2015. – 292 с.
9. Литвинов, А.Л. Теорія систем масового обслуговування / А.Л. Литвинов: навч. посібник. – Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О.М. Бекетова. – Харків: ХНУМГ ім. О.М. Бекетова, 2018. – 141 с.