

Міністерство освіти і науки України
Національний університет Запорізька політехніка

Конспект лекцій
з дисципліни “Теорія електричних кіл та сигналів”

для спеціальності 172

“Телекомунікації та радіотехніка”
(частина 1)

Запоріжжя - 2024

Конспект лекцій з дисципліни “Теорія електричних кіл та сигналів” для студентів спеціальності 172 «Телекомунікації та радіотехніка» всіх форм навчання. Частина I. / Укл.: В.О. Костенко – Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2024. – 108 с

Навчання в режимі он-лайн вимагає конспекту лекцій в електронній формі. Ці лекції з дисципліни «Теорія електричних кіл та сигналів» складаються відповідно з двох частин: теорії електричних кіл та теорії електричних сигналів. Лекційний матеріал супроводжується курсом лабораторних робіт, який також доступний в режимі он-лайн. Для пояснення принципів роботи деяких електричних кіл використовуються віртуальні контрольні-вимірювальні прилади, які входять до програмного продукту “Electronics Workbench”.

Лекції призначені для студентів спеціальностей 172 :

“Радіотехніка”, “Інформаційні мережі зв’язку”, “Інженерія та програмування в радіоелектроніці” всіх форм навчання / Укладач: доцент кафедри радіотехніки Костенко В.О.,

Укладач: доцент кафедри радіотехніки Костенко В.О.,

Рецензент: доцент Чернобородов М.П.

Відповідальний за випуск: Костенко В.О.

Затверджено
на засіданні кафедри РТ

Протокол №4 від 15.02.2024 р.

Затверджено
на засіданні НМК факультету ФІБЕК

Протокол №5 від 15.02.2024 р.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА.....	5
1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І ВИЗНАЧЕННЯ ТЕОРІЇ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ	6
1.1 Елементи електричних ланцюгів.....	9
1.2 З'єднання елементів. Закони з'єднань. Закони Кирхгофа	15
2 ЛАНЦЮГИ СТАЛОГО СТРУМУ. МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ СТРУМІВ В ЛІНІЙНИХ КОЛАХ З ЗОСЕРЕДЖЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ	17
2.1 Заземлення однієї точки схеми.....	17
2.2 Розрахунок струмів за допомогою законів Киргофа.....	17
2.3 Метод контурних струмів (м.к.с.)	19
2.4 Метод вузлових потенціалів (м.в.п.).....	22
2.5 Метод еквівалентного генератора напруги (м.е.г.н.)	24
2.6. Принцип накладення і метод накладення	28
3 ЛАНЦЮГИ ЗМІННОГО СТРУМУ	30
3.1 Визначення понять ланцюгів змінного струму	31
3.2 Комплексний опір ділянки ланцюга	34
3.3 Аналіз найпростіших лінійних ланцюгів при гармонійному впливі	36
3.3.1 Розглянемо послідовний RL – ланцюг	37
3.3.2 Послідовний RC – ланцюг	41
3.3.3 Послідовний RLC – ланцюг	42
3.3.4 Паралельний RLC – ланцюг	45
3.4 Передача енергії від активного двополюсника до навантаження	47
3.5 Розрахунок електричних ланцюгів при наявності в них магнітно-пов'язаних катушок	50
3.5.1 Послідовне з'єднання двох магнітно-пов'язаних катушок	53
3.5.2 Визначення взаємної індуктивності дослідним шляхом	54
3.6 Узгоджувальний трансформатор	55
3.7 Ідеальний трансформатор і гират	56
4. ТРИФАЗНІ ЛАНЦЮГИ	57

4.1 Основна схема з'єднання трифазних ланцюгів, визначення лінійних і фазних величин	58
4.2 Формули перетворення зірки в трикутник і навпаки	60
5. МЕТОДИ АНАЛІЗУ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ В ЛІНІЙНИХ КОЛАХ З ЗОСЕРЕДЖЕНИМИ ПАРАМЕТ	61
5.1 Закони комутації	63
5.2 Початкові значення величин	65
5.3 Приведення завдання про перехідні процеси до вирішення лінійного диференціального рівняння з постійними коефіцієнтами	65
5.4 Складання характеристичного рівняння шляхом використання виразів для вхідного опору кола на змінному струмі	68
5.5 Властивості коренів характеристичного рівняння	70
5.6 Складання рівнянь для вільних струмів і напруг	73
5.7 Алгебраїзація системи рівнянь для вільних струмів	74
5.8 Визначення постійних інтегрування в класичному методі	76
5.9 Перехідна провідність та перехідна функція по напрузі	83
5.9.1 Поняття про перехідну провідність	83
5.9.2 Поняття про перехідну функцію по напрузі	85
5.10 Інтеграл Дюамеля	88
6. АНАЛІЗ ЛАНЦЮГІВ В ЧАСТОТНІЙ ОБЛАСТІ	90
6.1 Частотні характеристики послідовного коливального контуру	90
6.2 Частотні характеристики паралельного коливального контуру	96
6.3 Пов'язані коливальні контури	98
7. БИТТЯ	102
8. МОДУЛЬОВАНІ КОЛИВАННЯ	103
8.1 Амплітудно-модульоване (АМ) коливання	103
8.2 Сигнали з кутовою модуляцією	105
ЛІТЕРАТУРА	108

ПЕРЕДМОВА

Курс ТЕКС складається з двох частин. Перша частина присвячена теорії ланцюгів, друга – теорії сигналів.

Теорія електричних кіл (ланцюгів виходить з наближеної заміни реального електро- або радіотехнічного пристрою моделлю, що ідеалізується, – схемою заміщення. Ця схема містить ділянки ланцюгів, на яких визначаються шукані струми і напруг. Теорія ланцюгів дозволяє з достатньою для інженерної практики точністю визначати струми в вітках, не вдаючись до обчислення їх щільності в різних точках перетину провідника; напруги між кінцями даної ділянки ланцюга також знаходиться безпосередньо без обчислення між проміжними точками.

Предметом першої частини курсу ТЕКС є вивчення як з якісного, так і з кількісного боку сталих і перехідних процесів в різних електричних і електронних пристроях, лініях зв'язку. Цей курс містить спільну теорію ланцюгів і інженерні методи їх розрахунку, аналізу і синтезу. Моделювання ланцюгів, що вивчаються, на ПК здійснюється за допомогою програми Electronics Workbench, розрахунки пропонується робити за допомогою системи комп'ютерної математики Mathcad або Matlab.

У другій частині курсу розглянуті наступні питання теорії сигналів :

- основи загальної теорії детермінованих сигналів,
- спектральний та кореляційний аналізи детермінованих сигналів,
- модульовані радіосигнали,
- дискретні та цифрові сигнали і фільтри.

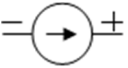
Моделювання процесів, що вивчаються в другій частині курсу, здійснюється на ПК за допомогою системи комп'ютерної математики Mathcad.

Запропонований курс покликаний сприяти формуванню кругозору фахівців-розробників систем передачі даних.

1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І ВИЗНАЧЕННЯ ТЕОРІЇ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

З шкільного курсу фізики відомо два постулати:

1. Струм тече від однієї точки ланцюга (з більшим потенціалом (φ)) до другої точки, що володіє меншим потенціалом. Цей процес аналогічний природному перебігу води з більшої висоти на меншу.

2. Джерело енергії, батарея або акумулятор, відображають наступним чином , на кінці стрілки мають потенціал $+$, який на E вольт більш ніж потенціал на «хвостику» стрілки.

Приклад.

Знайти потенціали точок наступного ланцюга (рис. 1.1), якщо струм I дорівнює 1А.

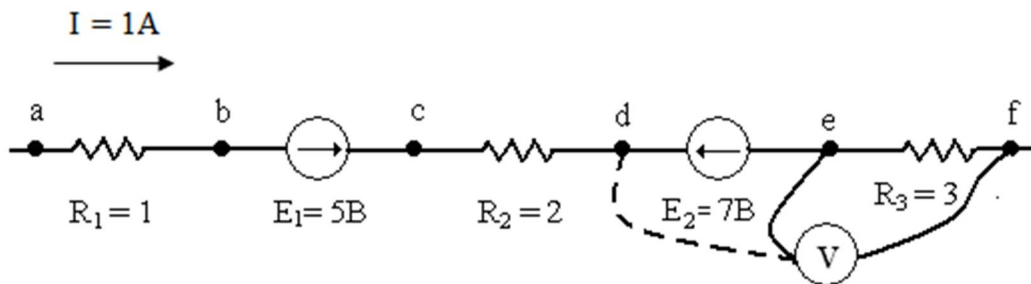


Рисунок 1.1 – Елементарний ланцюг сталого струму

Рішення.

Уявимо, що один кінець (-) тестера підключено до точки **f**, а другим кінцем «пройдемося» по точках. Нехай $\varphi_f = 0$. Тоді падіння напруги на R_3 буде

$$U_{R_3} = I \cdot R_3 = 1 \cdot 3 = 3 \text{ В.}$$

Струм тече від більшого потенціалу до меншого, отже $\varphi_e = + 3\text{В}$.

Точка **d**. Її потенціал буде на 7В більше ніж потенціал точки **e**. Отже

$$\varphi_d = \varphi_e + E_2 = 3 + 7 = 10 \text{ В.}$$

Точка **c**. Струм тече від точки **c** до точки **d**, тобто потенціал точки **c** вище ніж потенціал точки **d** на величину падіння напруги на опорі R_2 :

$$\varphi_c = \varphi_d + I * R_2 = 10 + 1*2 = 12 \text{ В.}$$

Точка **b**. Її потенціал (на «хвостіку») буде на 5В менше ніж потенціал точки **c**.

$$\varphi_b = \varphi_c - E_I = 12 - 5 = 7 \text{ В.}$$

Точка **a**. Струм тече від точки **a** до точки **b**, тобто потенціал точки **a** вище ніж потенціал точки **b** на величину падіння напруги на опорі R_1 :

$$\varphi_a = \varphi_b + I * R_1 = 7 + 1*1 = 8 \text{ В.}$$

А напруга на всьому ланцюзі визначиться як

$$U_{af} = \varphi_a - \varphi_f = 8 - 0 = 8 \text{ В.}$$

Відповідь: $\varphi_e = 3 \text{ В}$, $\varphi_d = 10 \text{ В}$, $\varphi_f = 0$, $\varphi_c = 12 \text{ В}$, $\varphi_b = 7 \text{ В}$, $\varphi_a = 8 \text{ В}$.

При роботі з елементарними ланцюгами використовують наступні еквівалентні перетворення двополюсників:

1. Два послідовно включених опори можна замінити одним еквівалентним:

$$R_E = R_1 + R_2. \quad (1.1)$$

2. Два паралельно включених опори можна замінити одним еквівалентним:

$$R_E = R_1 * R_2 / (R_1 + R_2). \quad (1.2)$$

3. Два послідовно включених джерела ЕРС (електрорушійної сили) можна замінити одним еквівалентним:

$$E = E_1 + E_2 \text{ (сума алгебраїчна)}. \quad (1.3)$$

4. Два паралельно включених джерела струму можна замінити одним еквівалентним:

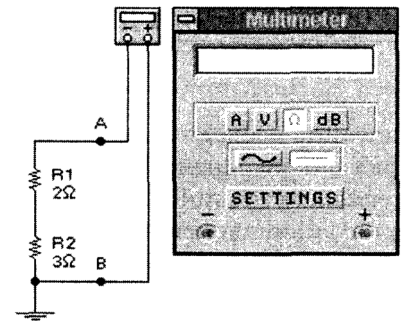
$$J = J_1 + J_2 \text{ (сума алгебраїчна)}. \quad (1.4)$$

Завдання:

За допомогою програми EWB провести наступні експерименти:

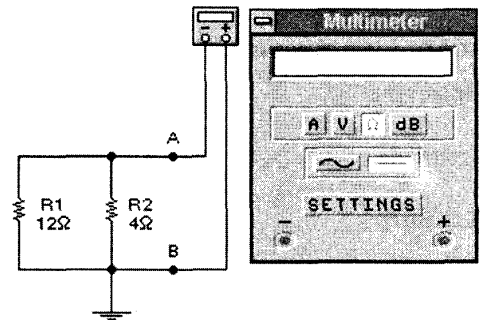
Експеримент 1. Заміна послідовного з'єднання резисторів одним еквівалентним.

Розрахуйте еквівалентний опір двополюсника, що складається з двох послідовно сполучених резисторів, щодо затисків А і В по формулі 1.1.



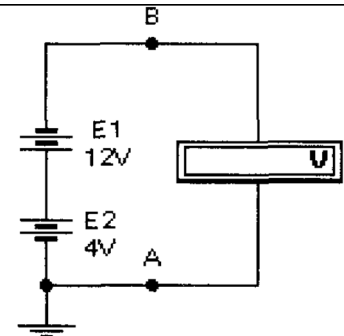
Експеримент 2. Заміна паралельного з'єднання резисторів одним еквівалентним.

Розрахуйте еквівалентний опір двополюсника, що складається з двох паралельних сполучених резисторів, щодо затисків А і В по формулі 1.2.



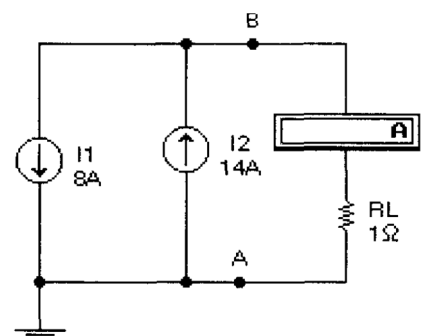
Експеримент 3. Заміна послідовного з'єднання ідеальних джерел ЕРС.

Розрахуйте значення еквівалентною ЕРС для послідовного з'єднання двох джерел ЕРС щодо затисків А і В по формулі 1.3.



Експеримент 4. Заміна паралельного з'єднання ідеальних джерел струму.

Двополюсник складається з двох ідеальних джерел струму, сполучених паралельно щодо затисків А і В. Розрахуйте струм еквівалентного джерела струму по формулі 1.4.



1.1 Елементи електричних ланцюгів

Електричним ланцюгом називають сукупність сполучених один з одним джерел електричної енергії і навантажень, по яких може протікати електричний струм.

Зображення електричного ланцюга за допомогою умовних знаків називається **електричною схемою**.

Сталий струм – струм, незмінний в часі.

Залежність $I=f(U)$ прийнято називати **вольтамперною характеристикою** (в.а.х.) елемента ланцюга.

В.а.х. елементів ланцюга бувають **лінійні** і **нелінійні** (рис.1.2 та 1.3).

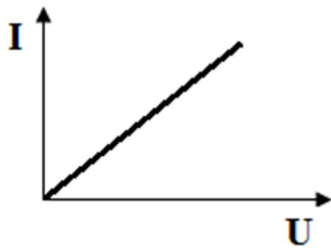


Рисунок 1.2 Лінійна в.а.х.
елементу ланцюга

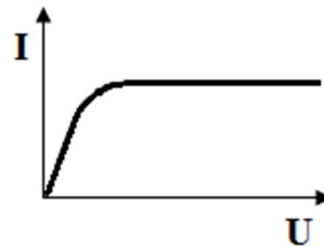


Рисунок 1.3 Нелінійна в.а.х.
елементу ланцюга

Якщо рахувати напругу $U_1(t)$ – дією на елемент ланцюга, то вихідна напруга:

$$U_2(t) = K \times U_1(t), \quad (1.5)$$

де $U_2(t)$ - реакція на дію. Якщо реакція пропорційна дії, то даний елемент **лінійний** (у математиці $y = k \cdot x$).

Елементи ланцюгів, в.а.х. яких не є прямими, називаються **нелінійними**. Реакцію таких елементів на дію записати у вигляді (1.5) вже не вдається.

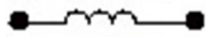
Елементи ланцюгів

Розгледимо R, L, C – елементи (лінійні елементи) і джерела.

Резистивний опір R. Для нього справедливий закон Ома: $i=U/R=G \cdot U$, де $G=1/R$ – провідність.

Індуктивність L – реактивний елемент, здатний запасати енергію у вигляді магнітного поля.

Напруга на ньому



$$U_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} , \quad i(t) = \frac{1}{L} \cdot \int_{-\infty}^t U(t) dt ,$$

пропорційна швидкості зміни струму і власній індуктивності L (коефіцієнт пропорційності).

Миттєва потужність електричних коливань

$$P = U \cdot i = Li \cdot \frac{di}{dt}$$

може набувати як позитивних, так і негативних значень. При $p>0$ в L накопичується енергія, при $p<0$ енергія, яка була накопичена раніше в L, віддається в зовнішній ланцюг.

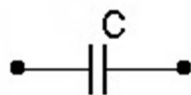
Енергія, яка накопичена в індуктивності до моменту t , дорівнює :

$$W_L = \int_0^t P dt = \int_0^t Li(t) \cdot \frac{di}{dt} dt = \frac{Li^2}{2} ,$$

де 0 – момент, в який струм через L дорівнював 0.

Остання формула показує, що запас енергії в L визначається миттєвим значенням струму в ній і не залежить від того, по якому закону струм змінювався в попередній час. Природно, W_L не може бути негативним.

Ємність C – реактивний елемент, здатний накопичувати енергію у вигляді електричного поля.



$$i_c(t) = C \cdot \frac{dU}{dt}, \quad U(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_{-\infty}^t i(t) dt.$$

Енергія, яка накопичена в ємності до моменту t , наступна

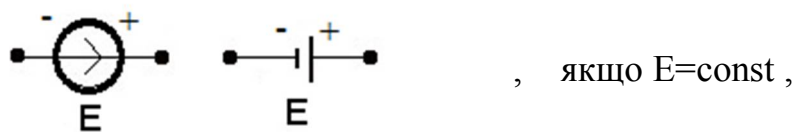
$$W_C = \int_{t_0}^t U i dt = \int_{t_0}^t C U(t) \cdot \frac{dU}{dt} dt = \frac{C U^2}{2}.$$

Зрозуміло, що $W_C \geq 0$.

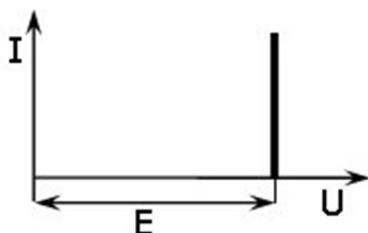
Джерела. Розрізняють незалежні і залежні.

Властивості *незалежних* джерел визначаються внутрішньою структурою і не залежать від зовнішніх дій. Ідеалізація властивостей реальних джерел (так легше рахувати) приводить до двох різновидів джерел: джерелам напруги і джерелам струмів.

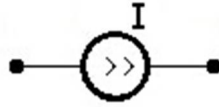
У *ідеального джерела напруги* напруга на зовнішніх затисках не залежить від властивостей навантаження



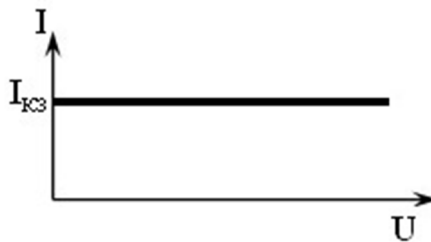
тобто його в.а.х. має вигляд:



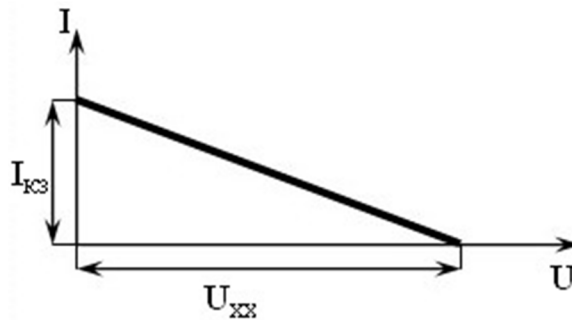
У *ідеального джерела струму* струм $i(t)$, що проходить через його затиски, не залежить від властивостей навантаження. Позначається таке джерело струму наступним чином



і має наступну в.а.х.



У *дійсних джерел* – враховують їх дійсні внутрішні опори $R_{вн}$ і в.а.х. мають вигляд:



де $U_{ХХ} = E$, яке завжди можна виміряти,

$I_{кз} = I = \frac{E}{R_{вн}}$, яке також - можна завжди виміряти.

Звідси

$$R_{вн} = \frac{E}{I_{кз}}$$

Застосовують дві рівноправні схеми заміщення реальних джерел (знаючи I , $I_{кз}$ і $R_{вн}$), тобто схему Тевенена (рис. 1.4) або схему Нортонна (рис.1.5):

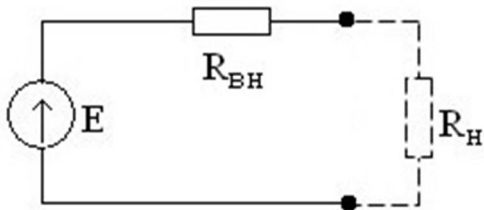


Рисунок 1.4 Схема джерела ЕРС з $R_{вн}$, включеним послідовно (схема Тевенена)

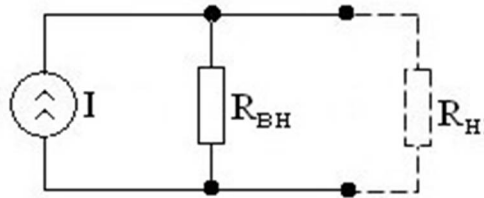


Рисунок 1.5 Схема джерела струму з паралельно включеним $R_{вн}$ (схема Нортонна)

Струм в навантаженні $R_{н}$ для цих схем однаковий і, отже, напруга на навантаженні однакова. Таким чином, навантаженню «байдуже» як ми представимо джерело по схемі рис.1.4 або по схемі рис.1.5. Дійсно, для рис.1.4.

$$I = \frac{E}{R_{н} + R_{вн}}$$

оскільки $R_{вн}$ і $R_{н}$ включені послідовно.

Для рис. 1.5:

$$R_{екв} = \frac{R_{вн} \cdot R_{н}}{R_{вн} + R_{н}},$$

оскільки опори включені паралельно.

Напруга на $R_{н}$:

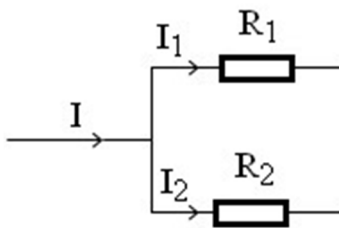
$$U_{R_{н}} = U_{R_{вн}} = I \cdot R_{екв} = I \cdot \frac{R_{вн} \cdot R_{н}}{R_{вн} + R_{н}}.$$

Струм в навантаженні

$$I = \frac{U_{RH}}{R_H} = \frac{I \cdot \frac{R_{BH} \cdot R_H}{R_{BH} + R_H}}{R_H} = I \cdot \frac{R_{BH}}{R_{BH} + R_H} = \frac{E}{R_{BH} + R_H},$$

тобто одержали теж саме.

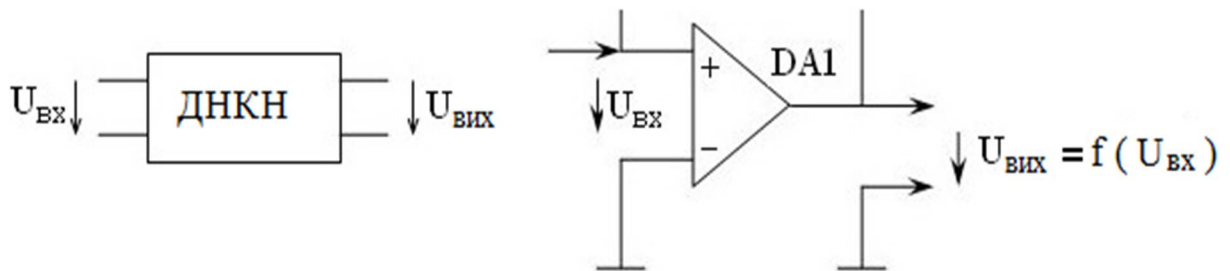
Останній запис дає корисну **формулу розкиду струмів** при паралельному з'єднанні R:



$$I_1 = I \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad I_2 = I \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}. \quad (1.6)$$

Тобто в знаменнику сума R, а в чисельнику записують «сусіда».

Залежні джерела: ДНКН, ДНКС, ДСКН, ДСКС – чотири типи, у яких вихідна напруга або струм залежать від вхідного струму або напруги. Наприклад, джерело напруги, яке керується напругою:

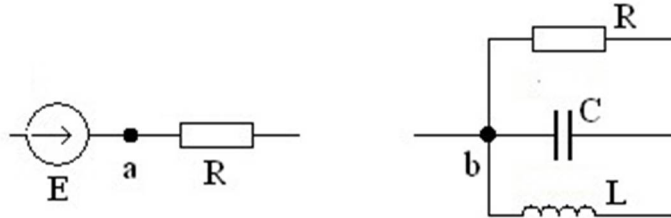


Усі чотири залежні джерела є по суті перетворювачами потужності. У середині них містяться активні елементи (лампи, транзистори, операційні підсилювачі і таке інше), які підсилюють вхідний сигнал за рахунок енергії джерела живлення.

1.2 З'єднання елементів. Закони з'єднань. Закони Кирхгофа

Основними структурними компонентами з'єднання елементів є **вузол** і **контур**.

Вузол. Якщо два або більше елементів ланцюга мають спільну точку, то вона називається вузлом.



Для будь-якого вузла справедливий **перший закон Кирхгофа**: *алгебраїчна сума струмів у вузлі дорівнює нулю*

$$\sum_k I_k = 0 . \quad (1.7)$$

Іншими словами: сума впадаючих у вузол струмів дорівнює сумі витікаючих з вузла струмів.

Контур. Послідовне з'єднання елементів утворює ланцюжок. Якщо в такому ланцюжку елемент має спільний вузол з першим, то утворюється контур (рис.1.6 та рис. 1.7).

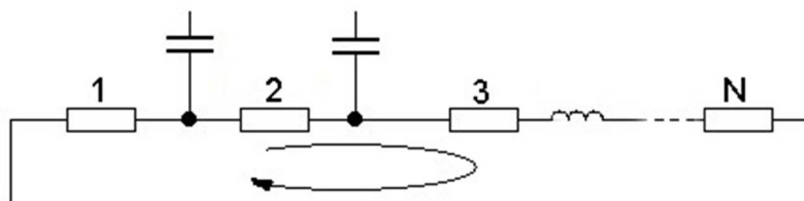


Рисунок 1.6 Елементи ланцюга утворюють контур

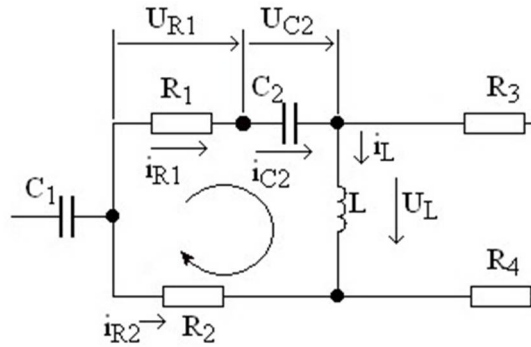


Рисунок 1.7 Елементи ланцюга утворюють контур

Для контура виконується **другий закон Кирхгофа: алгебраїчна сума напруг в контурі дорівнює 0** :

$$\sum_k U_k = 0 . \quad (1.8)$$

Під алгебраїчною сумою розуміють суму миттєвих значень напруги з урахуванням вибраного умовного напрямку обходу контура і напрямів напруги. Якщо напрям напруги збігається з напрямом обходу, то U входить в суму із знаком «+», в протилежному випадку - із знаком «-».

Наприклад, для рис. 1.7 запис рівняння по другому закону буде такий

$$U_{R_1} + U_{C_2} + U_L - U_{R_2} = 0 .$$

Друга форма запису цього закону має вигляд:

$$\sum_k U_k = \sum_i e_i ,$$

тобто в кожному контурі алгебраїчна сума напруг дорівнює алгебраїчній сумі е.р.с. з урахуванням довільного вибраного напрямку обходу.

Рівняння, складені для конкретної схеми по формулах (1.7), (1.8), визначаються тільки з'єднанням елементів і не залежать від того, які елементи включені в схему.

Говорять, що спосіб з'єднання задає топологію ланцюга, а рівняння, складені по законах Кирхгофа, називають топологічними рівняннями.

2 ЛАНЦЮГИ СТАЛОГО СТРУМУ. МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ СТРУМІВ В ЛІНІЙНИХ КОЛАХ З ЗОСЕРЕДЖЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

2.1 Заземлення однієї точки схеми

При заземленні однієї будь-якої точки схеми струморозподіл в схемі не змінюється, оскільки ніяких нових віток, по яких могли б протікати струми, при цьому не утворюється. Інакше буде, якщо заземлити дві або більше число точок схеми, що мають різні потенціали. Сама схема стає відмінною від початкової і струморозподіл в ній змінюється.

2.2 Розрахунок струмів за допомогою законів Кирхгофа

Закони Кирхгофа використовують для знаходження струмів в вітках схеми. Позначимо число всіх віток схеми через v ; число віток, що містять джерела струму - через v_{dc} і число вузлів - через y . У кожній вітці тече свій струм. Оскільки струми в вітках з джерелами струмів відомі, то число невідомих струмів дорівнює $v-v_{dc}$. Перш ніж скласти рівняння, треба:

- а) довільно вибрати позитивні напрями струмів в вітках і позначити їх на схемі;
- б) вибрати позитивні напрями обходу контурів для складання рівнянь по другому закону Кирхгофа.

З метою одноманітності рекомендується для всіх контурів позитивні напрями їх обходу вибирати однаковими; наприклад, все за годинниковою стрілкою.

Щоб отримати лінійно незалежні рівняння, по першому закону Кирхгофа складають число рівнянь, що дорівнює числу вузлів без одиниці, тобто $y-1$.

По другому закону Кирхгофа складають число рівнянь, що дорівнює числу віток без джерел струму ($v-v_{dc}$), за вирахуванням числа рівнянь, складених по першому закону Кирхгофа; тобто

$$(v-v_{dc})-(y-1)=v-v_{dc}-y+1.$$

Складаючи рівняння по другому закону Кирхгофа треба охопити всі вітки схеми, включаючи вітки з джерелами струму. При записі рівнянь по другому закону Кирхгофа прагнуть, щоб в кожен новий контур, для якого складається рівняння, входила хоч би одна нова вітка, що не увійшла до попередніх контурів, для яких вже записані рівняння по другому закону Кирхгофа. Такі рівняння умовимося називати **незалежними**.

Приклад: дано ланцюг (рис.2.1):

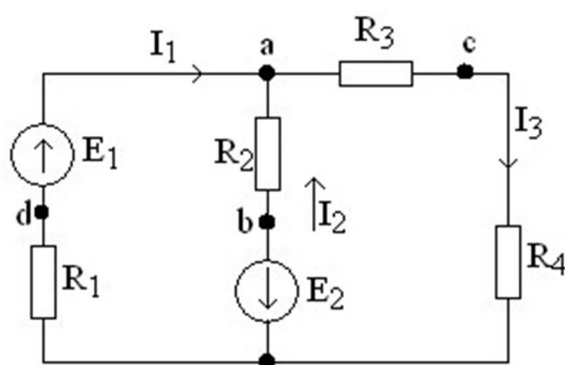


Рисунок 2.1. Приклад електричної схеми

Знайти струми в вітках заданої схеми, якщо $E_1=80$ В, $E_2=64$ В, $R_1=6$ Ом, $R_2=4$ Ом, $R_3=3$ Ом, $R_4=1$ Ом.

Рішення:

Довільно задаємося напрямками струмів в вітках. У схемі $\mathbf{v}=3$; $\mathbf{v}_{\text{дс}}=0$; $\mathbf{y}=2$. Отже, по першому закону Кирхгофа тільки одне рівняння:

$$I_1 + I_2 = I_3. \quad (\text{a})$$

По другому закону Кирхгофа треба скласти:

$$(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\text{дс}}) - (\mathbf{y} - 1) = (3 - 0) - (2 - 1) = 3 - 2 + 1 = 2$$

рівняння.

Виберемо позитивні напрями обходу контурів за годинниковою стрілкою.

Для контура R_1 E_1 R_2 E_2 :

$$I_1 R_1 - I_2 R_2 = E_1 + E_2. \quad (\text{б})$$

Знак плюс перед $I_1 R_1$ узятий тому, що напрям струму I_1 збігається з напрямом обходу контуру; знак мінус перед $I_2 R_2$ тому, що напрям I_2 зустрічний обходу контуру.

Для контура $E_2 R_2 R_3 R_4$:

$$I_2 R_2 + I_3 (R_3 + R_4) = -E_2. \quad (\text{в})$$

Відповідь:

Сумісне рішення рівнянь (а), (б), (в) дає:

$$I_1 = 14A; \quad I_2 = -15A; \quad I_3 = -1A.$$

Оскільки позитивні напрями струмів вибирають довільно, то можемо одержати один або декілька струмів з негативним знаком, що треба розуміти наступним чином: в дійсності ці струми течуть в зворотному напрямі (в нашому прикладі I_2 і I_3).

2.3 Метод контурних струмів (м.к.с.)

(другий метод аналізу складних електричних схем)

При розрахунку м.к.с. вважають, що в кожному незалежному контурі тече свій контурний струм. Рівняння складають щодо контурних струмів, після чого визначають реальні струми віток через контурні. Число невідомих в цьому методі дорівнює числу рівнянь, які необхідно було б скласти для схеми по другому закону Кирхгофа. Отже, цей метод економніший, ніж метод розрахунку струмів на основі законів Кирхгофа. (у нім менше число рівнянь).

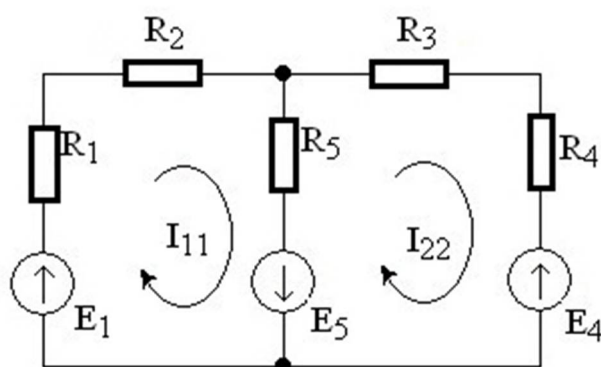


Рисунок 2.2 Другий приклад простої електричної схеми

Виведення рівнянь зробимо стосовно схеми рис. 2.2, в якій два незалежні контури. Виберемо напрями перебігу контурних струмів за годинниковою стрілкою і позначимо ці контурні струми як I_{11} і I_{22} .

Для кожного з контурів складемо рівняння по другому закону Кирхгофа.

Для першого контуру:

$$(R_1 + R_2 + R_5) I_{11} - R_5 I_{22} = E_1 + E_5 .$$

Для другого контуру:

$$(-R_5) I_{11} + (R_3 + R_4 + R_5) I_{22} = -E_4 - E_5 .$$

Отримаємо систему рівнянь:

$$R_{11} I_{11} + R_{12} I_{22} = E_{11} ;$$

$$R_{21} I_{11} + R_{22} I_{22} = E_{22} .$$

$$\text{де } R_{11} = R_1 + R_2 + R_5, \quad R_{12} = R_{21} = -R_5, \quad R_{22} = R_3 + R_4 + R_5 .$$

Назви R_{11} – повний або власний опір першого контуру;

R_{12} – опір суміжній вітки;

E_{11} – контурна ЕРС першого контуру.

У загальному випадку можна сказати, що опір суміжній вітці між k і m контурами (R_{km}) входить в рівняння із знаком мінус, якщо напрями контурних струмів I_{kk} і I_{mm} уздовж цієї вітки супротивні, і із знаком плюс, якщо напрями струмів згодні.

Якби в схемі були б більше двох контурів, наприклад, три, то система рівнянь виглядала б таким чином:

$$\begin{aligned} R_{11}I_{11} + R_{12}I_{22} + R_{13}I_{33} &= E_{11} ; \\ R_{21}I_{11} + R_{22}I_{22} + R_{23}I_{33} &= E_{22} ; \\ R_{31}I_{11} + R_{32}I_{22} + R_{33}I_{33} &= E_{33} . \end{aligned} \tag{2.1}$$

Або в матричній формі:

$$[R] \cdot [I] = [E],$$

де

$$(R) = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix},$$

$$(I) = \begin{pmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \end{pmatrix},$$

$$(E) = \begin{pmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \end{pmatrix}.$$

Вирішувати ж такі системи рівнянь за допомогою математичного процесора Mathcad уміють всі слухачі.

Якщо в наслідок вирішення системи рівнянь який-небудь контурний струм виявиться негативним, то це означатиме, що насправді напрям контурного струму протилежний прийнятому за позитивний.

У вітках, які не є суміжними (наприклад, з R_1 і R_2 в схемі рис .2.2), знайдений контурний струм буде дійсним струмом. У суміжних гілках дійсні струми знаходять через контурні (дійсний напрям визначає більший струм).

Якщо в схемі є джерело струму, то один з контурів буде з відомим струмом. Рівняння з відомим джерелом струму в систему рівнянь не включають, але як струм

суміжного контуру враховують. Через одне джерело струму може проходити тільки один контурний струм.

М.к.с. вигідно застосовувати в тих випадках, коли в схемі багато вузлів, але мало контурів.

2.4 Метод вузлових потенціалів (м.в.п.)

(третій метод розрахунку складних електричних ланцюгів)

Цей метод рекомендується застосовувати в тих випадках, коли число рівнянь буде менше, ніж при м.к.с. А це буває тоді, коли багато контурів, а вузлів мало.

У м.в.п. за невідомі приймають потенціали вузлів схеми. При цьому один з вузлів схеми завжди можна заземлити (без зміни струморозподілу в ланцюзі). Якщо число вузлів n , то число незалежних рівнянь в загальному випадку дорівнює $n-1$.

Розглянемо ланцюг на рис.2.3.

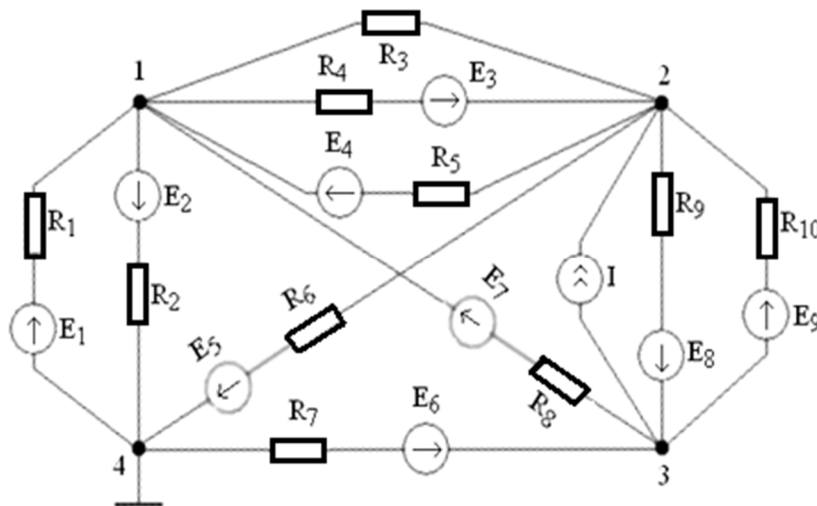


Рисунок 2.3. Третій приклад електричного ланцюга постійного струму

Якщо в схемі є вітки, що містять тільки ідеальне джерело ЕРС, то число рівнянь зменшується на їх кількість

$$K_{\text{рив}} = N_{\text{в}} - N_{\text{дж е.р.с.}} - 1.$$

Система рівнянь, що отримуються по м.в.п., має вигляд:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2.4 & -0.4 & -0.5 \\ -0.4 & 1.4 & -0.75 \\ -0.5 & -0.75 & 1.75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -1.5 \\ -5 \end{pmatrix} ,$$

або

$$[\varphi][g] = J ,$$

де J – матриця вузлових струмів.

Далі за допомогою Mathcad або уручну знаходимо вектор $[\varphi]$. Знаючи потенціали вузлів, розраховуємо струми в вітках.

2.5 Метод еквівалентного генератора напруги (м.е.г.н.)

(четвертий метод розрахунку складних електричних схем)

Цей метод дозволяє економно знаходити струм в одній вітці електричного кола при зміні опору в ній. Його ще називають методом активного двополюсника або методом холостого ходу і короткого замикання.

Якщо в думках укласти всю схему, що містить ЕРС і опори, в прямокутник і виділити з неї одну вітку **ab**, в якій потрібно знайти струм I, то отримаємо схему, яка зображена на рис. 2.4. Про двополюсник А говорить, що це активний двополюсник, який містить джерело живлення (Е або I).

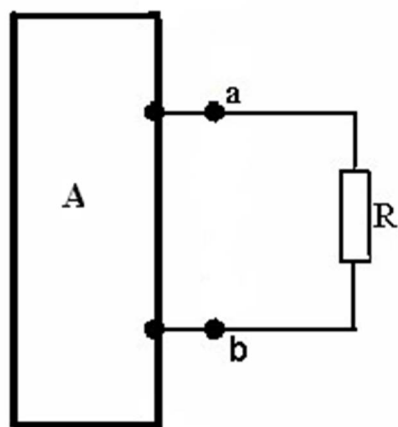


Рисунок 2.4 Активний двополюсник з виділеною віткою.

Раніше ми розглядували розділ **Джерела живлення** і говорили, що навантаженню все одно, як ми представимо джерело живлення, аби U_{ab} і струм I_H залишалися тими ж (рис.2.5 та 2.6).

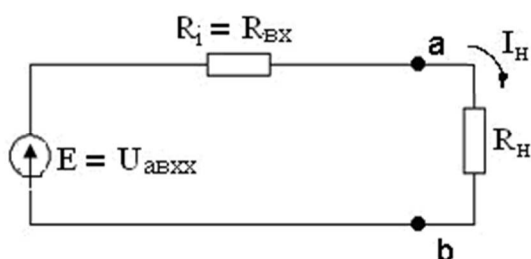


Рисунок 2.5

Схема Тевенена-Гельмгольца

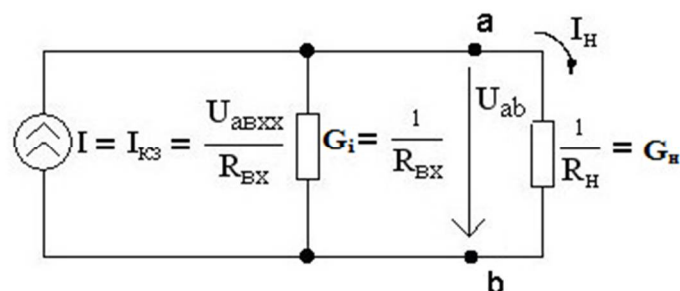


Рисунок 2.6

Схема Нортона

Активний двополюсник по відношенню до виділеної вітки можна замінити еквівалентним генератором, ЕРС якого дорівнює напрузі холостого ходу на затисках виділеної вітки, а внутрішній опір дорівнює входному опору двополюсника $R_{вх} = R_{ab}$.

Це можна зробити через лінійність характеристики активного двополюсника.

Принцип лінійності свідчить, що зміна одного параметру (R , струму або U) в одній вітці спричиняє собою зміну (R , I або U) в решті віток кола.

Обидва джерела енергії (рис.2.5, 2.6) мають одну і ту ж зовнішню характеристику (в.а.х.), показану на рис. 2.7.



Рисунок 2.7 - В.а.х. дійсного джерела ЕРС

Ця характеристика є прямою лінією, що проходить через дві точки з координатами $u = U_{xx}$ і $i = I_{k3}$. Для довільної точки на цій прямій справедливе рівняння (рівняння прямої у відрізках):

$$(u - U_{xx}) / (0 - U_{xx}) = (i - I_{k3}) / (0 - I_{k3}).$$

Отже

$$u = U_{xx} - (U_{xx}/I_{k3}) \times i.$$

Відношення (U_{xx}/I_{k3}) можна розглянути як R_i – внутрішній опір джерела.

Знання U_{xx} і I_{k3} або $R_{вх}$ по відношенню до затисків **ab** дозволяє знайти струм у виділеній вітці достатньо простим способом .

Послідовність розрахунку струму цим методом рекомендується наступна:

а) знайти напругу на затисках розімкненої вітки **ab** (U_{xx});

б) визначити $R_{вх}$ всієї схеми по відношенню до затисків **ab** при закорочених джерелах ЕРС і розімкнених джерелах струму;

в) розрахувати струм по формулі:

$$I = \frac{U_{xx}}{R_i + R_{ax}};$$

де $(R_i = R_{вх})$.

Приклад: знайти струм в діагоналі мостової схеми (рис. 2.8).

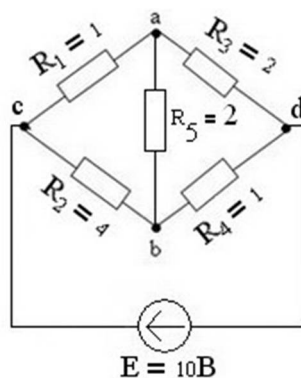


Рисунок 2.8 – Мостова схема

Рішення:

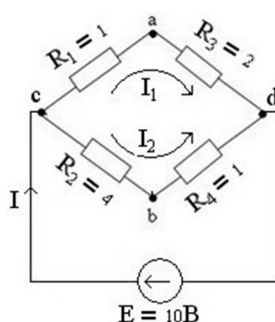
1) відключимо $R_5=R_5$. Схема прийме вигляд (рис.2.9)

Рисунок 2.9 – Мостова схема з відключеною діагоналлю

2) знайдемо напругу на затисках **ab**

$$U_{xx}=U_{ab}=\varphi_a - \varphi_b ,$$

$$R_{\text{верх}} = R_1 + R_3 = 1 + 2 = 3 \text{ Ом} ,$$

$$R_{\text{ниж}} = R_2 + R_4 = 4 + 1 = 5 \text{ Ом} ,$$

$$R_{\text{екв}} = \frac{R_{\text{верх}} \cdot R_{\text{ниж}}}{R_{\text{верх}} + R_{\text{ниж}}} = \frac{3 \cdot 5}{3 + 5} = 1,875 \text{ Ом},$$

$$I = \frac{E}{R_{\text{екв}}} = \frac{10}{1,875} = 5,333 \text{ А}.$$

По формулі розкиду струмів одержимо:

$$I_1 = I \cdot \frac{R_{\text{ниж}}}{R_{\text{ниж}} + R_{\text{верх}}} = 5,333 \cdot \frac{5}{5 + 3} = 3,333 \text{ А},$$

$$I_2 = 2 \text{ А}.$$

Нехай $\varphi_d = 0 \text{ В}$, тоді $\varphi_c = 10 \text{ В}$.

$$\varphi_a = I_1 \cdot R_3 = 3,333 \cdot 2 = 6,667 \text{ В} ,$$

$$\varphi_b = I_2 \cdot R_4 = 2 \cdot 1 = 2 \text{ В},$$

$$U_{ab\ xx}=6,667-2=4,667\text{ В.}$$

3) згідно пункту б) послідовності розрахунку знайдемо R_{bx} по відношенню до затисків **ab**. При цьому джерело ЕРС закоротим, схема набере вигляду рис. 2.10.

$$R_{abxx} = \frac{1 \cdot 2}{1+2} + \frac{4 \cdot 1}{4+1} = \frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{22}{15} = 1.466\ \hat{\text{н}}.$$

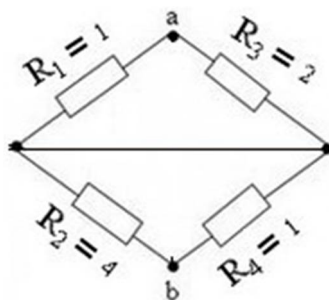


Рисунок 2.10 – Схема неврівноваженого мосту

4) визначимо струм у вітці (діагоналі моста)

$$I = \frac{U_{abxx}}{R_{bx} + R_i} = \frac{4,667}{1,466+2} = 1,346\text{ А.}$$

Відповідь: струм навантаження $I_n = 1.346\text{ А.}$

Якщо далі замінити R_n , то новий струм навантаження знайдемо за тим же виразом, замінивши тільки чисельне значення R_n .

2.6 Принцип накладення і метод накладення

(п'ятий метод розрахунку складних електричних схем)

Струм в k-ой вітці дорівнює алгеброїчній сумі струмів, що викликаються кожній з ЕРС схеми окремо. Принцип справедливий для всіх лінійних електричних ланцюгів.

На ньому заснований метод розрахунку, званий методом накладення: по черзі розраховують струми, що виникають від дії кожної ЕРС, в думках видаляючи з схеми останні, але залишаючи в схемі внутрішні опори джерел, а потім знаходять струми шляхом алгебраїчного складання часткових струмів.

Наприклад. Дана початкова схема (рис.2.11).

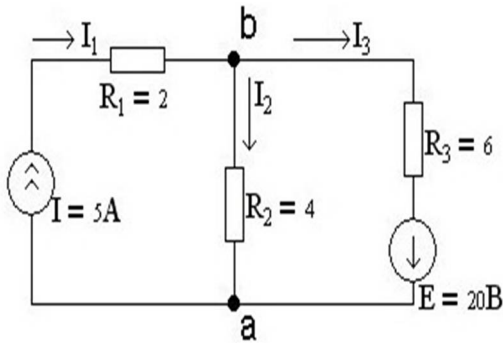


Рисунок 2.11 Початкова схема

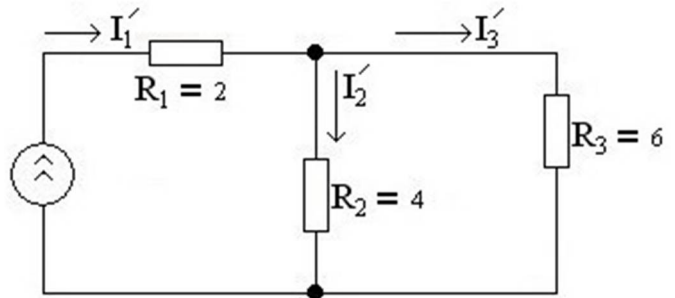


Рисунок 2.12 Схема з одним джерелом струму

а) для схеми на рисунку 2.12 знайдемо часткові струми:

$$I'_2 = I \cdot \frac{6}{4+6} = 5 \cdot \frac{6}{10} = 3 \text{ A},$$

$$I'_3 = I \cdot \frac{4}{4+6} = 5 \cdot \frac{4}{10} = 2 \text{ A}.$$

б) зараз видаляємо зі схеми на рис.2.11 джерело струму, але залишимо джерело ЕРС:

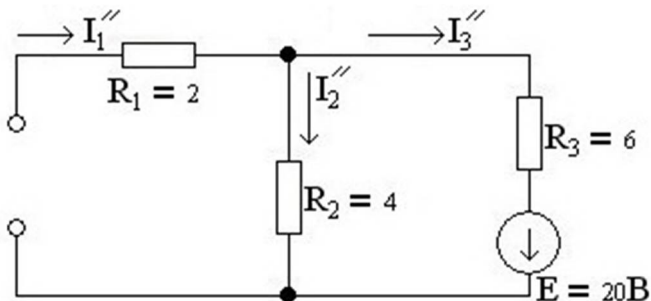


Рисунок 2.13 Схема з другим джерелом - джерелом напруги

Часткові струми:

$$I''_1 = 0,$$

$$I_3'' = \frac{E}{R_2 + R_3} = \frac{20}{6 + 4} = 2 \text{ A},$$

$$I_2'' = -2 \text{ A}.$$

Дійсні струми : $I_1 = I = 5 \text{ A}$; $I_2 = I_2' + I_2'' = 3 - 2 = 1 \text{ A}$,

$$I_3 = I_3' + I_3'' = 2 + 2 = 4 \text{ A},$$

Відповідь: $I_1 = 5 \text{ A}$, $I_2 = 1 \text{ A}$, $I_3 = 4 \text{ A}$.

Зауважимо, що метод накладення не можна використовувати для підрахунку потужностей, що виділяються в опорах, оскільки $P = R \cdot I^2$, тобто нелінійний зв'язок $P = R(I_1 + I_2)^2 \neq R I_1^2 + R I_2^2$.

3 ЛАНЦЮГИ ЗМІННОГО СТРУМУ

3.1 Визначення понять ланцюгів змінного струму

Синусоїдний струм і основні величини, які його характеризують. **Синусоїдний струм** - струм, що змінюється в часі за законом синуса:

$$i = I_m \sin\left(\frac{2\pi \cdot t}{T} + \varphi\right) = I_m \sin(\omega t + \varphi), \quad (3.1)$$

де I_m – амплітуда коливань, T – період ,

$$f = \frac{1}{T} - \text{частота (сек}^{-1} \text{ або Герц) ,}$$

φ - фаза, характеризує числове значення в даний момент t ,

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} - \text{кутова частота.}$$

Треба відзначити, що в мережі живлення Україні прийнята частота 50Гц, в США – 60Гц).

На рис.3.1 зображено хвилю синусоїдного струму в загальному вигляді.

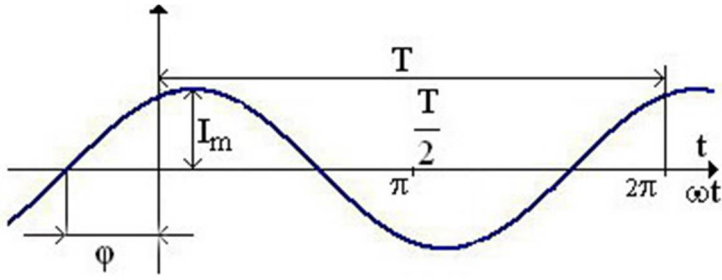


Рисунок 3.1 Загальний вигляд синусоїдного струму

Будь-яка функція, що змінюється синусоїдно, визначається трьома величинами: амплітудою, кутовою частотою і початковою фазою.

Генератор синусоїдної е.р.с. зображується наступним чином (рис.3.2):

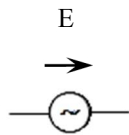


Рисунок 3.2 Прийняте умовне зображення джерела напруги синусоїдної форми

На рис. 3.2 стрілка показує напрямок, прийнятий за позитивний.

Середнє значення \sin -ної величини - це площа під кривою, отримана за полперіода, віднесена до періоду виміру $\left(\frac{T}{2}\right)$. На рис 3.3 показано геометрично, що

$$S_1=S_2$$

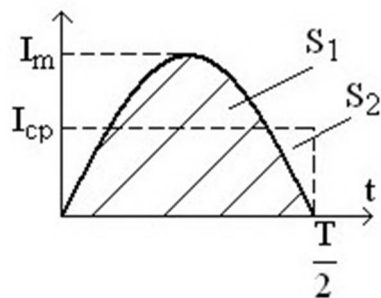
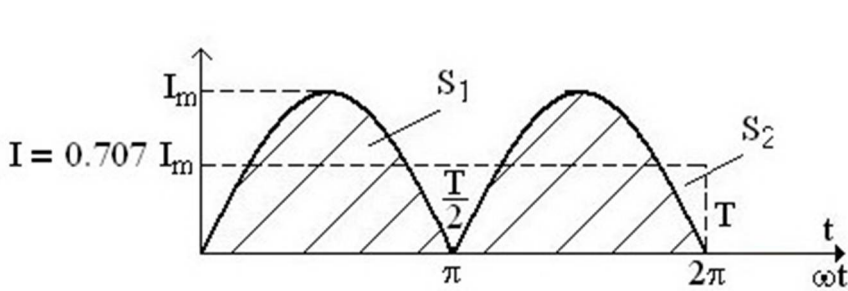


Рисунок 3.3 До визначення I_{cp}

тобто $I_{cp} = 0,638I_m$, аналогічно $U_{cp} = 0,638U_m$.

Діюче значення sin-ної величини (ефективне або середньоквадратичне)



$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707I_m,$$

аналогічно $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}};$

$$E = \frac{E}{\sqrt{2}}$$

Рисунок 3.4 До визначення діючого значення змінного струму

Чинне значення sin-ного струму I чисельно дорівнює значенню такого сталого струму, який за час, що дорівнює періоду sin-го струму, виділяє таку ж кількість теплоти, що і sin-й струм.

Діючі значення найпопулярніші в електротехніці. Більшість вимірювальних приладів показує діюче значення вимірюваної величини (це електромагнітної, електродинамічної і теплової систем).

Приклад: у нас в електричній мережі $U = 220$ В - це діюча напруга.

Обертання вектора струму або напруги можна представити наступним чином (рис.3.5) :

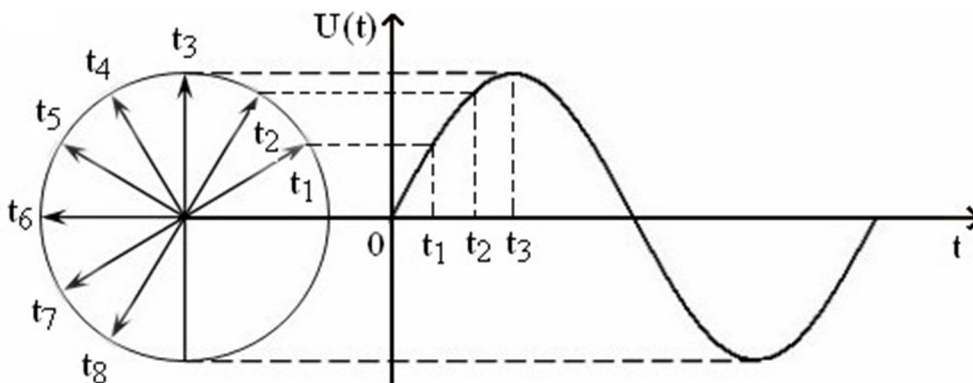


Рисунок 3.5 Ілюстрація зв'язку часової діаграми з кутом повороту вектору напруги або струму

На рис. 3.5 $t_1 < t_2 < t_3 < t_4 \dots$, тобто за позитивний напрямок обертання вектору обрано проти годинкової стрілки.

Комплексна амплітуда. З курсу математики відома формула Ейлера:

$$e^{j\alpha} = \cos\alpha + j \sin\alpha. \quad (3.2)$$

Проекція функції $e^{j\alpha}$ на вісь $+1$ дорівнює $\cos\alpha$, а на вісь $+j$ дорівнює $\sin\alpha$.

Якщо замість функції $e^{j\alpha}$ взяти функцію $I_m e^{j\alpha}$, то $I_m e^{j\alpha} = I_m \cos\alpha + j I_m \sin\alpha$. На рис.3.6 відображено процес формування вектору змінного струму.

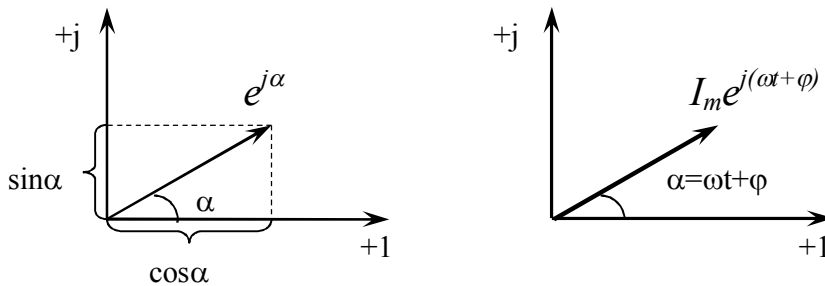


Рисунок 3.6 До формування математичного запису вектору змінного струму

Кут в формулі 3.2 може бути будь-яким. Покладемо, що $\alpha = \omega t + \varphi$, тобто що кут α змінюється прямо пропорційно до часу. Тоді

$$I_m e^{j(\omega t + \varphi)} = I_m \cos(\omega t + \varphi) + j I_m \sin(\omega t + \varphi). \quad (3.3)$$

Доданок $I_m \cos(\omega t + \varphi)$ представляє собою дійсну частину (R_e) виразу (3.3), а $I_m \sin(\omega t + \varphi)$ - це коефіцієнт при уявній частині виразу (3.3).

Історично склалося так, що в радіотехнічній літературі за основу беруть косінусоїду

$$i = I_m \cos(\omega t + \varphi) = R_e [I_m e^{j(\omega t + \varphi)}],$$

а в електротехнічній літературі для подання вектора струму використовують проекцію обертового вектора на вісь $+j$

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi) = R_{iman} [I_m e^{j(\omega t + \varphi)}].$$



З метою одноманітності прийнято на комплексній площині зображати векторні величини, що змінюються синусоїдно в часі, для моменту часу $\omega t = 0$. При цьому вектор $I_m e^{j\varphi} = \dot{I}_m$, де \dot{I}_m - комплексна величина, модуль її дорівнює I_m , а кут, під яким вектор \dot{I}_m проведено до осі +1 на комплексній площині, дорівнює початковій фазі φ .

Величину \dot{I}_m називають комплексною амплітудою струму.

Приклад. Представлення гармонійних коливань комплексних амплітуд рятує нас від необхідності враховувати часову залежність ($\frac{d...}{dt}$ та $\int ... dt$). Це полегшує аналіз ланцюгів. Запропонували цей метод в кінці 19^{го} століття американські вчені Ч.П. Штейнметц і А.Є. Кеннел. Розвинув і теоретично обґрунтував професор Петербурзького політехнічного інституту В.Ф. Миткевич, потім академік АН України Г.Є. Пухов.

3.2 Комплексний опір ділянки ланцюга

Якщо для струмів і напруг поставлені у відповідність комплекси

$$\begin{aligned} i &= \sqrt{2}I \cos(\omega t + \varphi_i) \Rightarrow \dot{I}_m, \\ u &= \sqrt{2}U \cos(\omega t + \varphi_u) \Rightarrow \dot{U}_m, \end{aligned}$$

то комплексним вхідним опором пасивної ділянки кола буде:

$$\underline{Z} = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m}. \quad (3.4)$$

Це комплексне число, тому воно може бути представлене в показовій

$$\underline{Z} = z e^{j\varphi}$$

або алгебраїчній

$$\underline{Z} = r + jx$$

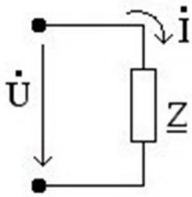
формах.

Величини $z = |Z|$ і φ - називаються відповідно модулем і аргументом комплексного опору, а величини r і x - його дійсною (резистивною) і уявною (реактивною) складовими.

Підставляючи в формулу (3.4) комплексні діючі значення напруг і струмів в показовій формі, одержимо :

$$\underline{Z} = \frac{U_m e^{j\varphi_u}}{I_m e^{j\varphi_i}} = \frac{U_m}{I_m} \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = \frac{U}{I} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}. \quad (3.5)$$

Порівнюючи (3.4) і (3.5) встановлюємо, що комплексний опір \underline{Z} дорівнює відношенню амплітуд миттєвих значень напруги і струму на затискачах розглядаємої ділянки



$$z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I}, \quad (3.6)$$

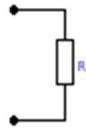

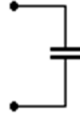
а аргумент дорівнює різниці фаз напруги і струму:

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i. \quad (3.7)$$

У залежності від фазових співвідношень φ може бути більше нуля (напруга випереджає струм за фазою), менше нуля (напруга відстає по фазі від струму) або дорівнює нулю (напруга і струм збігаються за фазою). Величина зворотна комплексного вхідного опору називається комплексною вхідною провідністю :

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = e^{-j\varphi/z} = y \cdot e^{j\psi}.$$

Таблиця 1. Елементи електричного кола змінного струму

Найменування елемента	Свойство елемента	Зображення і позначення	Опір при синусоїдному струмі	Запис опору в комплексній формі
Резистор	Електричний опір		R	R
Індуктивна котушка	Індуктивність		$X_L = \omega L$	$\underline{Z} = j\omega L$
Конденсатор	Ємність		$X_C = \frac{1}{\omega C}$	$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C}$

3.3 Аналіз найпростіших лінійних ланцюгів при гармонійному впливі

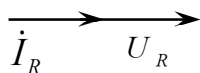
Якщо через елементи, надані в останній таблиці, пустити один і той же струм (наприклад, з'єднати послідовно), то згідно закону Ома

$$\dot{U} = \dot{I} \cdot \underline{Z}$$

можна прийти до висновку, що

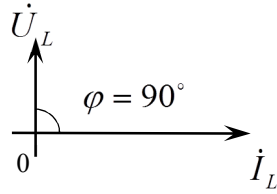
1) на активному опорі R напруга і струм синфазні

$$\underline{Z}_R = R, \quad \dot{U}_R = R \cdot \dot{I},$$



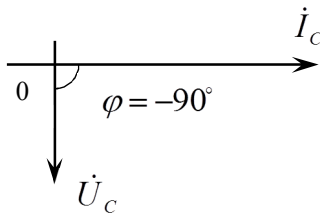
2) напруга на індуктивності випереджає струм за фазою на 90° і цей зсув по фазі не залежить від величини індуктивності.

$$\underline{Z}_L = j\omega L, \quad \dot{U}_L = j\omega L \cdot \dot{I},$$



3) напруга на ємності відстає від струму по фазі на 90° і цей зсув по фазі не залежить від величини ємності :

$$\underline{Z}_L = -j \frac{1}{\omega C}, \quad \dot{U}_C = -j \frac{1}{\omega C} \cdot \dot{I},$$



Для ланцюгів змінного струму, так само як і при сталому струмі, справедливі обидва закони Кірхгофа (якщо окремі ланцюга не пов'язані між собою магнітно):

I^й закон Кірхгофа: $\sum I_K = 0$;

II^й закон Кірхгофа: $\sum_{K=1}^n \dot{I}_K \underline{Z} = \sum_{K=1}^n E_K$.

3.3.1 Розглянемо послідовний RL – ланцюг (рис.3.7):

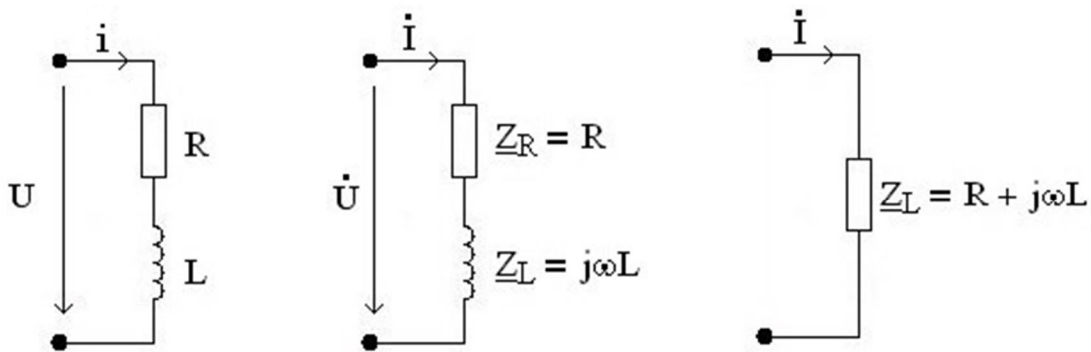


Рисунок 3.7 Подання RL – ланцюга комплексним опором

Нехай напруга U , прикладена до зовнішніх затискачів ланцюга, змінюється за гармонійним законом :

$$u = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \varphi_u),$$

де U, ω, φ_u - задані величини. Використовуючи метод комплексних амплітуд, знайдемо значення струму I в ланцюзі

Згідно законам Ома і Кірхгофа:

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L; & \dot{U}_R = \underline{Z}_R I; \\ \dot{I} = \dot{I}_R = \dot{I}_L; & \dot{U}_L = \underline{Z}_L I. \end{cases}$$

З цих рівнянь виходить, що

$$\dot{U} = (\underline{Z}_R + \underline{Z}_L) \cdot \dot{I} = \underline{Z} \cdot \dot{I}.$$

Тут комплексний опір $\underline{Z} = R + j\omega L$ представляє собою трикутник опорів, у якого гіпотенуза дорівнює модулю $|\underline{Z}|$

$$|\underline{Z}| = z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2},$$

а кут нахилу $\varphi = \arctg\left(\frac{\omega L}{R}\right)$, як показано на рис.3.8:

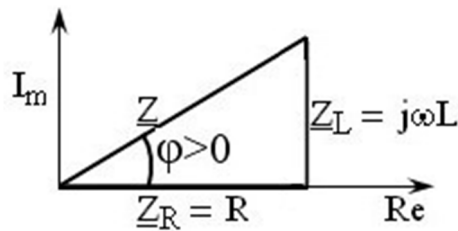


Рисунок 3.8 Трикутник опорів

За будь-яких значеннях R і ωL кут φ буде лежати в межах:

$$0 \leq \varphi \leq \pi/2.$$

Комплексне діюче (дійсне) начення шуканого струму дорівнює:

$$\dot{i} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}} = \frac{\dot{U}e^{j\varphi_u}}{ze^{j\varphi}} = \frac{U}{z} e^{j(\varphi_u - \varphi)}.$$

Переходячи від комплексного зображення до оригіналу, одержуємо:

$$i = \sqrt{2} \frac{U}{z} \cdot \cos(\omega t + \varphi_u - \varphi) = \sqrt{2} \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cdot \cos(\omega t + \varphi_u - \arctg \frac{\omega L}{R}).$$

Побудуємо векторну діаграму напруг і струмів для даного RL-ланцюга (рис.3.9):

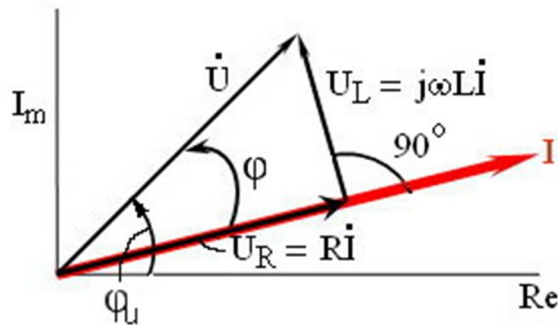


Рисунок 3.9 Діаграма струму і напруг послідовного RL-ланцюга

Далі міркуємо так: напруга \dot{U}_R на опорі збігається за напрямком зі струмом \dot{i} , вектор напруги на індуктивності \dot{U}_L треба повернути щодо вектора \dot{i} на кут $\frac{\pi}{2}$ проти годинникової стрілки (напруга на індуктивності випереджає струм за фазою на 90°). Утворився трикутник напруг ($\dot{U}, \dot{U}_R, \dot{U}_L$) подібний трикутнику опорів ($\underline{Z}, \underline{Z}_R, \underline{Z}_L$).

Приклад. Знайдемо комплексний вхідний опір і струм послідовного RL-ланцюга (рис. 3.7), до затискачів якого прикладена напруга $U = \sqrt{2} \cdot 50 \cdot \cos(6,28 \cdot 10^6 t + 60^\circ)$ В. Визначимо напруги на елементах ланцюга ($R = 5$ кОм, $L = 1$ мГн).

Рішення:

Комплексний вхідний опір

$$\underline{Z} = R + j\omega L = 5000 + j \cdot 6,28 \cdot 10^6 \cdot 10^{-3} = (5 + j \cdot 6,28) \cdot 10^3 \text{ Ом}.$$

Перейдемо від алгебраїчної форми запису до показової:

$$\underline{Z} = \sqrt{5^2 + 6,28^2} \cdot e^{j \cdot \arctg \frac{6,28}{5}} = 8,03 \cdot e^{j \cdot 51,5^\circ} \text{ кОм.}$$

Знайдемо комплексний струм ланцюга:

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}} = \frac{50 \cdot e^{j60^\circ}}{8,03 \cdot 10^3 \cdot e^{j51,5^\circ}} = 6,23 e^{j8,5^\circ} \text{ мА.}$$

Тоді комплексна напруга на R і L визначиться наступним чином:

$$\dot{U}_R = R \cdot \dot{I} = 5 \cdot 10^3 \cdot 6,23 \cdot 10^{-3} e^{j8,5^\circ} = 31,15 e^{j8,5^\circ} \hat{\text{А}},$$

$$\dot{U}_L = j\omega L \cdot \dot{I} = j6,28 \cdot 10^3 \cdot 6,23 \cdot e^{j8,5^\circ} \cdot 10^{-3} = e^{j90^\circ} \cdot 39,12 \cdot e^{j8,5^\circ} = 39,12 e^{j98,5^\circ} \hat{\text{А}}.$$

Миттєві значення відповідних величин:

$$i = \sqrt{2} \cdot 6,23 \cdot 10^{-3} \cos(6,28 \cdot 10^6 t + 8,5^\circ) \text{ А};$$

$$U_R = \sqrt{2} \cdot 31,15 \cos(6,28 \cdot 10^6 t + 8,5^\circ) \text{ В};$$

$$U_L = \sqrt{2} \cdot 39,12 \cos(6,28 \cdot 10^6 t + 98,5^\circ) \text{ В}.$$

Векторна діаграма для струмів і напруг показана на рис. 3.10:

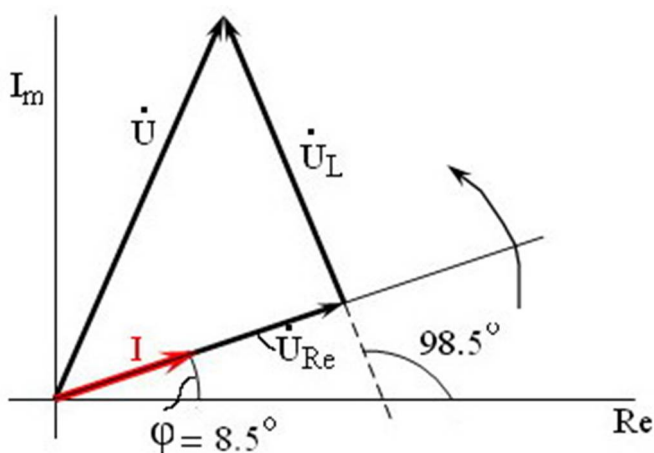


Рисунок 3.10 Векторна діаграма для струмів і напруг прикладу

Нагадаємо, що позитивний відлік кута φ здійснюється проти ходу годинникової стрілки.

3.3.2 Послідований RC-ланцюг

Послідований RC-ланцюг зображено на рис. 3.11.



Рисунок 3.11 Послідований RC-ланцюг

Хід міркувань аналогічний попередньому.

$$\underline{Z} = R + \frac{1}{j\omega C} = R - j\frac{1}{\omega C} = R - jX_C = R - j\left(\frac{1}{\omega C}\right) = ze^{j\varphi};$$

$$\text{де } z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}; \quad \varphi = -\arctg\left(\frac{1}{\omega CR}\right).$$

Трикутник опорів відображено на рис.3.12:

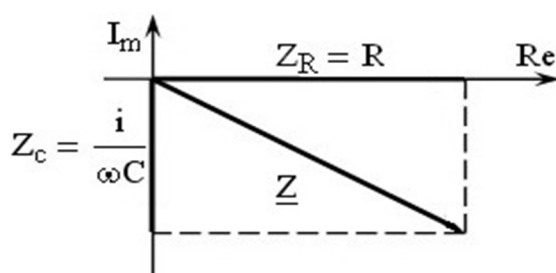


Рисунок 3.12 Трикутник опорів

Вхідний опір має резистивно-ємнісний характер (напруга на ділянці буде відставати від струму). Намалюємо векторну діаграму в загальному вигляді (рис.3.13):

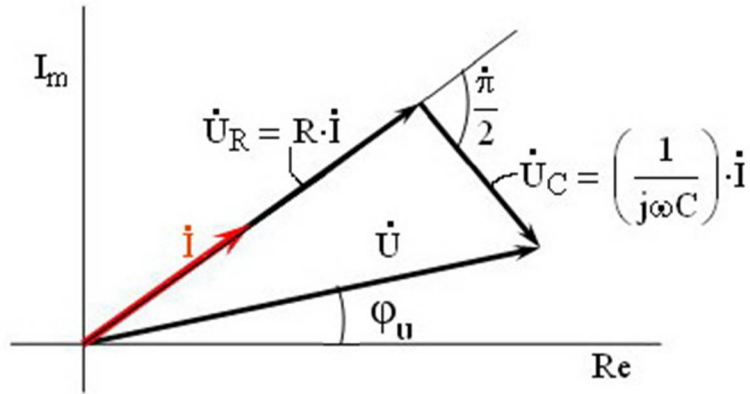


Рисунок 3.13 Векторна діаграма струму та напруг послідовного RC-ланцюга

3.3.3 Послідовний RLC-ланцюг.

Відповідний ланцюг відтворено на рис.3.14:

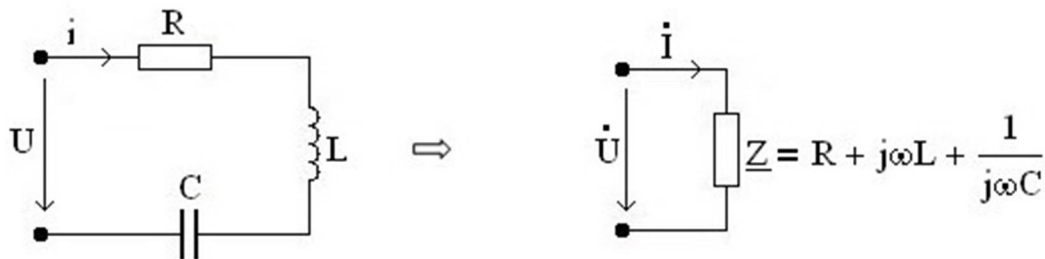


Рисунок 3.14 Послідовний RLC-ланцюг

Запишемо опір цієї вітки у комплексній формі:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = z e^{j\varphi},$$

$$\text{де } z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}; \quad \varphi = \text{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R};$$

$$X_L = \omega L,$$

$$X_C = -\frac{1}{\omega C}.$$

Векторні діаграми для опорів послідовного RLC-ланцюга. Їх зовнішній вигляд залежить від того, який з модулів опорів (ωL або $\frac{1}{\omega C}$) більше за величиною (довший вектор). Можливі 3 варіанти (рис.3.15):

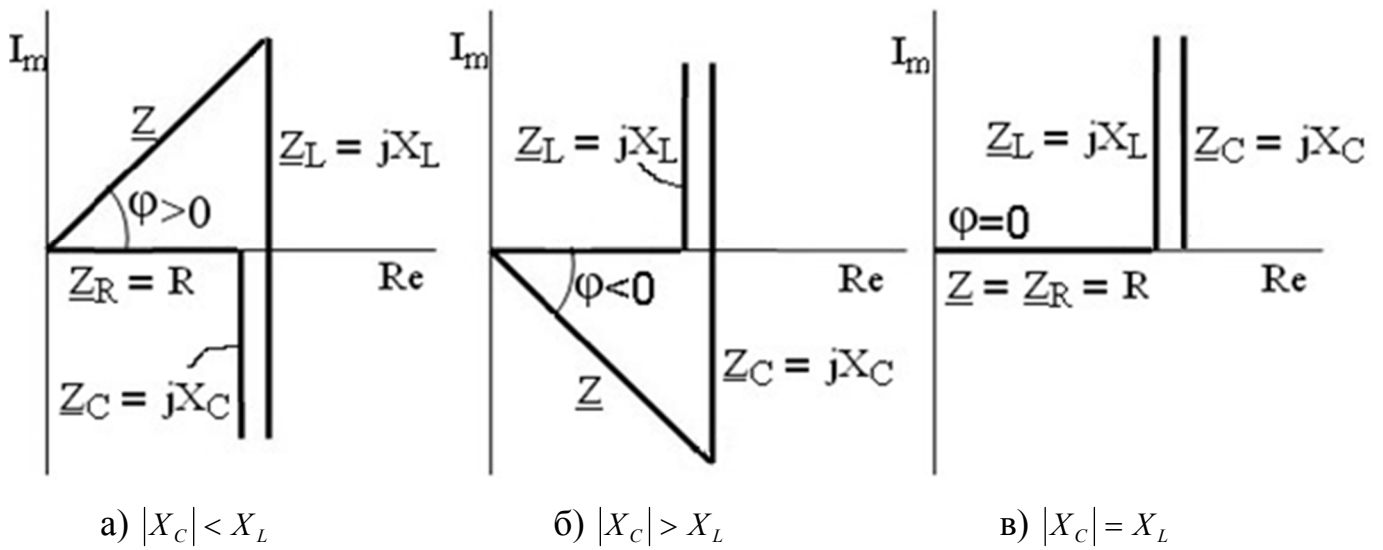


Рисунок 3.15 Варіанти побудови комплексного вхідного опору RLC-ланцюга

(Для наочності на рис. 3.15 опори \underline{Z}_C та \underline{Z}_L трохи зміщені відносно один одного). Якщо $|X_C| < X_L$, то говорять, що ланцюг має резистивно-індуктивний характер; якщо $|X_C| > X_L$ - то резистивно-ємнісний характер. При $|X_C| = X_L$ уявні складові вхідних опорів ємності й індуктивності взаємно компенсуються і вхідний опір ланцюга має чисто резистивний характер ($\varphi = 0$).

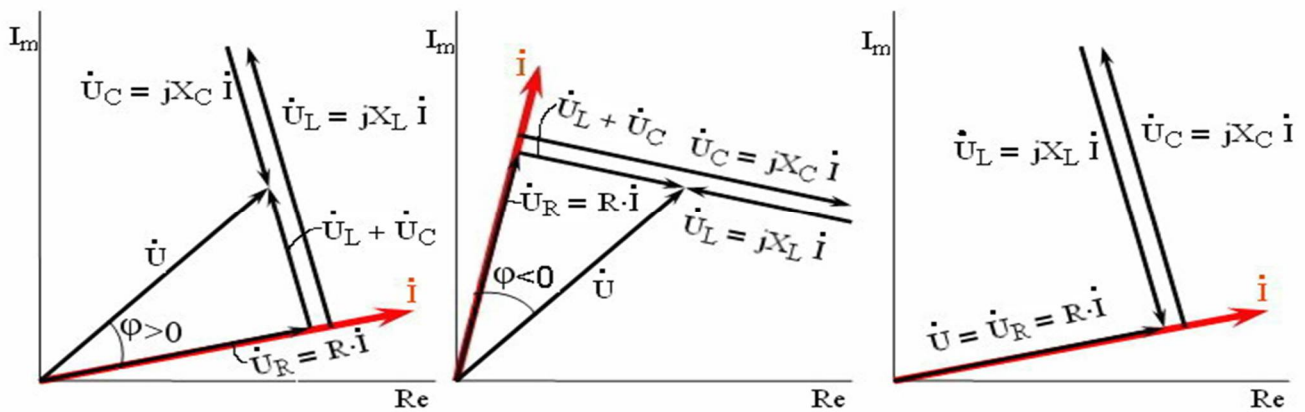
Струм у ланцюзі дорівнює

$$\dot{i} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C}.$$

Обчисливши струм в ланцюзі, знаходимо:

$$\dot{U}_R = \dot{i} \cdot \underline{Z}_R; \quad \dot{U}_L = \dot{i} \cdot \underline{Z}_L; \quad \dot{U}_C = \dot{i} \cdot \underline{Z}_C.$$

Узагальнені векторні діаграми для струмів і напруг послідовного RLC-ланцюга (рис.3.16) будуть відповідно мати три види (залежно від співвідношення між $|X_C|$ і X_L):



а) $|X_C| < X_L$

б) $|X_C| > X_L$

в) $|X_C| = X_L$

Рисунок 3.16 Векторні діаграми струму та напруг послідовного RLC -ланцюга

На рис. 3.16 на всіх діаграмах вектор $\dot{U}_R = IR$, який зображає падіння напруги на R, збігається за напрямком з вектором \dot{i} ; вектор $\dot{U}_L = jX_L \dot{i} = j\omega L \dot{i}$ треба повернути щодо \dot{i} на 90° проти годинникової стрілки; вектор $\dot{U}_C = jX_C \dot{i} = -j \frac{\dot{i}}{\omega C}$ спрямований протилежно вектору \dot{U}_L .

При $|X_C| < X_L$ вектор $\dot{U}_L + \dot{U}_C$ збігається за напрямком з вектором \dot{U}_L , струм в ланцюзі відстає по фазі від напруги ($\varphi > 0$).

При $|X_C| > X_L$ вектор $\dot{U}_L + \dot{U}_C$ збігається за напрямком з вектором \dot{U}_C , струм в ланцюзі випереджає по фазі напругу ($\varphi < 0$).

При $|X_C| = X_L$ вектор $\dot{U}_L + \dot{U}_C = 0$, напруга на затискачах ланцюга \dot{U} дорівнює напрузі на опорі \dot{U}_R , струм ланцюга збігається з доданою напругою ($\varphi = 0$).

В останньому випадку ми спостерігаємо цікаве явище - резонанс напруг у послідовному контурі. Справа в тому, що довжини векторів $|U_L|$ та $|U_C|$ можуть бути набагато більше довжини вектора $|U|$ (рис.3.16 в), тобто напруги на елементах кола можуть бути в багато разів більше, ніж прикладена напруга живлення. Більш детально ми розглянемо резонанс пізніше.

3.3.4 Паралельний RLC-ланцюг.

Відповідний ланцюг відтворено на рис.3.17:

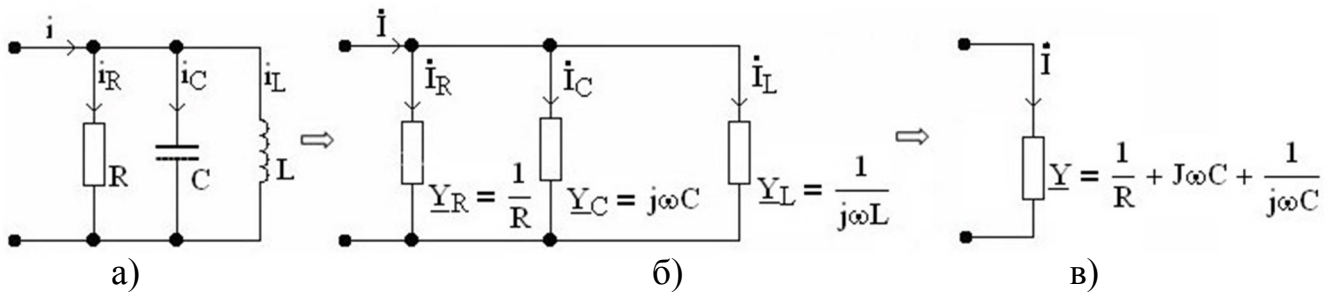


Рис. 3.17 Паралельний RLC-ланцюг

До зажимів ланцюга прикладена напруга, що змінюється за гармонійним законом.

Процес формування комплексної провідності ланцюга аналогічний процесу формування комплексного опору, відображеного на рис. 3.15.

Використовуючи закон Ома і Кірхгофа в комплексній формі, складемо систему рівнянь електричної рівноваги ланцюга:

$$\left. \begin{aligned} \dot{I} &= \dot{I}_R + \dot{I}_C + \dot{I}_L; \\ \dot{I}_R &= \underline{Y}_R \dot{U}_R; \dot{I}_C = \underline{Y}_C \dot{U}_C; \dot{I}_L = \underline{Y}_L \dot{U}_L; \\ \dot{U} &= \dot{U}_R = \dot{U}_C = \dot{U}_L \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

В цих формулах $\underline{Y}_R = \frac{1}{R}$; $\underline{Y}_C = j\omega C$; $\underline{Y}_L = \frac{1}{j\omega L}$ - комплексні провідності входять в ланцюг ідеалізованих пасивних елементів.

Вирішуючи систему (3.8) або згідно з рис. 3.17в щодо струму \dot{I} , знаходимо:

$$\dot{I} = (\underline{Y}_R + \underline{Y}_C + \underline{Y}_L) \cdot \dot{U} = \underline{Y} \dot{U};$$

де $\underline{Y} = \underline{Y}_R + \underline{Y}_C + \underline{Y}_L$ - комплексна провідність RLC-ланцюга.

Переходячи від алгебраїчної форми запису до показової, знайдемо модуль Y і аргумент φ комплексної вхідної провідності:

$$Y = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega c - \frac{1}{\omega L}\right)^2}; \quad \varphi = \arctg \frac{\left(\omega c - \frac{1}{\omega L}\right)}{\frac{1}{R}} = \arctg \left[R \cdot \left(\omega c - \frac{1}{\omega L}\right) \right]; \quad (3.9)$$

Очевидно, що в рівняннях (3.9) залежно від співвідношення між реактивними складовими $b_c = \omega c$ та $b_L = -\frac{1}{\omega L}$ дужка $\left(\omega c - \frac{1}{\omega L}\right)$ може приймати три значення: >0 , <0 , та $=0$.

На рис. 3.18 наведено три векторні діаграми для напруги і струмів паралельного RLC-ланцюга в цих трьох випадках:

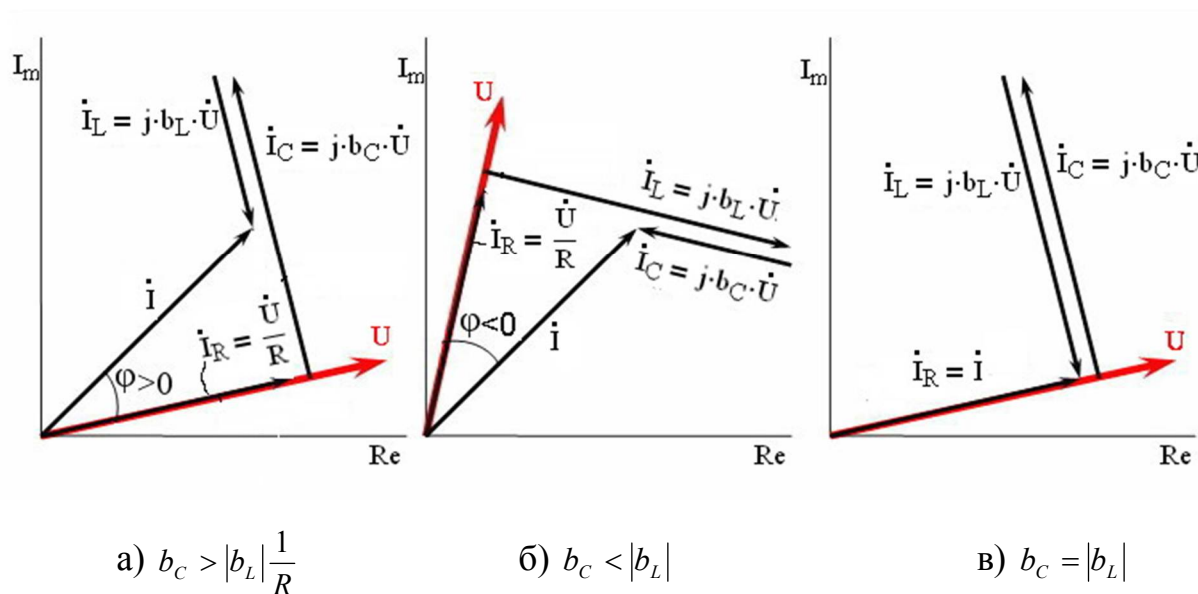


Рисунок 3.18 Векторна діаграма для напруги і струмів паралельного RLC-ланцюга

У випадку (а) - вхідна провідність ланцюга має резистивної-ємнісний характер; у випадку (б) - резистивної-індуктивний характер, у випадку (в) реактивні складові вхідної провідності взаємно компенсуються і Y_{bx} має чисто резистивний (дійсний) характер. У випадку (в) струм i і прикладена до ланцюга напруга U збігаються за напрямком. Зовні може здатися, що в ланцюзі зовсім немає реактивностей. Насправді всередині ланцюга (в L і в C) можуть бути струми, які у багато разів перевищують вхідний струм i . Це явище - резонанс струмів у паралельному контурі - знаходить саме широке застосування у виборчих ланцюгах в

радіотехніці і в каналній апаратурі зв'язку. Більш детально розглянемо резонансні властивості паралельних і послідовних контурів трохи пізніше.

Всі методи розрахунку кіл по сталому струму працюють і при синусоїдних струмах.

3.4 Передача енергії від активного двополюсника до навантаження

По постійному струму.

У випадку, коли треба знайти струм в одній вітці схеми, витягнемо цю вітку назовні, як показано на рис.3.19. Згідно методу розрахунку струму в одній вітці (метод еквівалентного генератора) струм в R_H дорівнює :

$$I = \frac{U_{\text{аа\text{д\text{д}}}}}{R_{\text{а\text{д}}} + R_i}.$$

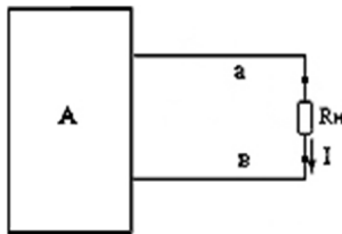


Рисунок 3.19. Виділення окремої вітки - R_H

У навантаженні буде виділятися потужність:

$$P = I^2 R = \frac{U_{\text{а\text{в\text{х\text{х}}}}^2}{(R_{\text{е\text{x}}} + R_H)^2} * R_H. \quad (3.10)$$

З'ясуємо, яке повинно бути співвідношення між R_H і вхідним опором двухполюсника $R_{\text{в\text{x}}}$, щоб в опорі навантаження виділялася максимальна потужність; чому вона буде дорівнювати і який при цьому буде к.к.д. передачі. З цією метою знайдемо першу похідну P за R_H і прирівняємо її нулю :

$$\frac{dp}{dR_H} = \frac{\left[U_{\text{а\text{в\text{х\text{х}}}}^2 \cdot R_H \right] \cdot (R_{\text{е\text{x}}} + R_H)^2 - (U_{\text{а\text{в\text{х\text{х}}}}^2 \cdot R_H) \cdot \left[(R_{\text{е\text{x}}} + R_H)^2 \right]}{(R_{\text{е\text{x}}} + R_H)^4},$$

$$U_{авхх}^2 \cdot (R_{\text{вх}} + R_{\text{н}})^2 - U_{авхх}^2 \cdot R_{\text{н}} \cdot 2 \cdot (R_{\text{вх}} + R_{\text{н}}) = 0,$$

$$R_{\text{вх}} + R_{\text{н}} - 2 \cdot R_{\text{н}} = 0,$$

Відкіля

$$R_{\hat{a}\hat{o}} = R_i, \quad (3.11)$$

Можна знайти другу похідну і переконатися, що вона негативна ($\frac{d^2 p}{dR_{\text{н}}^2} < 0$), тому співвідношенню (3.11) відповідає максимуму функції $P = f(R_{\text{н}})$.

Підставивши (3.11) в (3.10), знайдемо максимальну потужність, яка може бути виділена в навантаженні $R_{\text{н}}$:

$$P_{\text{max}} = \frac{U_{\text{абхх}}^2}{4R_{\text{вх}}}.$$

Далі визначимо к.к.д. передачі енергії до навантаження.

Корисна потужність, що виділяється в навантаженні, визначається рівнянням (3.10):

$$P = \frac{U_{\text{абхх}}^2}{(R_{\text{вх}} + R_{\text{н}})^2} \cdot R_{\text{н}};$$

Генератор (пасивний двополюсник) виділяє повну потужність:

$$P_{\hat{i}\hat{a}\hat{i}} = U_{\text{абхх}}^2 \cdot I = \frac{U_{\text{абхх}}^2}{R_{\hat{a}\hat{o}} + R_i}; \quad (3.12)$$

Коефіцієнт корисної дії визначимо наступним чином:

$$\eta = \frac{P}{P_{\hat{i}\hat{a}\hat{i}}} = \frac{R_i}{R_{\hat{a}\hat{o}} + R_i}.$$

Якщо $R_{\text{н}} = R_{\text{вх}}$, то $\eta = 0,5$.

Якщо потужність значна, то працювати з таким низьким ККД неприпустимо. Але, якщо P мала і становить кілька міліват (це датчики, це вхідні ланцюги

приймачів ...), то з таким низьким ККД можна не рахуватися, тому що в цьому режимі датчик віддає навантаженню максимально можливу потужність. Вибір величини опору навантаження R_n , рівного вхідному опору $R_{вх}$ активного двухполюсника (каскаду) називають узгодженням навантаження.

По змінному струму:

До зажимів *ав* активного двухполюсника підключено навантаження $Z_n = R_n + jX_n$ (рис.3.20).

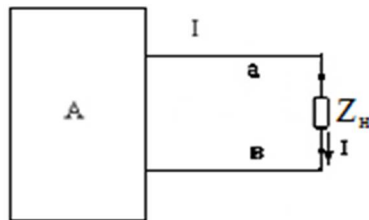


Рисунок 3.20. Виділення окремої вітки - Z_n

Необхідно з'ясувати, за дотримання яких умов у навантаженні буде виділятися максимальна активна потужність. За методом екв. генератора струм у навантаженні:

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_{abxx}}{\underline{Z}_{\hat{a}\hat{o}} + \underline{Z}_i},$$

де $\underline{Z}_{вх} = R_{вх} + jX_{вх}$ - вхідний опір двухполюсника по відношенню до затискачів *ав*.

Тому:

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_{abxx}}{R_{вх} + R_n + j(X_{вх} + X_n)}.$$

За умовою $R_{вх}$ і $X_{вх}$ задані і змінювати їх не можна. Змінювати можна R_n і X_n . Виберемо таке X_n , щоб струм в ланцюзі був максимальним. Це можливо, якщо $X_{вх} + X_n = 0$. При цьому двухполюсник працює в резонансному режимі: струм через навантаження по фазі збігається з напругою U_{abxx} :

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_{abxx}}{R_{\dot{a}\dot{o}} + R_i},$$

а якщо взяти як в ланцюзі сталого струму $R_H=R_{Bx}$, то потужність, що виділяється в навантаженні, буде максимальна і дорівнювати:

$$P = \frac{U_{abxx}^2}{4R_{Bx}}.$$

Висновок: для отримання максимальної потужності в навантаженні треба обирати: $X_H=-X_{Bx}$ та $R_H=R_{Bx}$.

3.5 Розрахунок електричних ланцюгів при наявності в них магнітно-пов'язаних котушок

При складанні рівнянь для магнітно-пов'язаних ланцюгів необхідно знати згідно або зустрічно направлені потоки самоіндукції і взаємоіндукції. Правильне рішення про це можна зробити, якщо відомо напрямок намотування котушок на сердечнику і вибрано позитивний напрям струмів в них. (Правило правої руки для Φ). На схемах початок котушок позначають * (однойменні затискачі). На рис.3.21 показано два можливих варіанти магнітного зв'язку двох котушок.

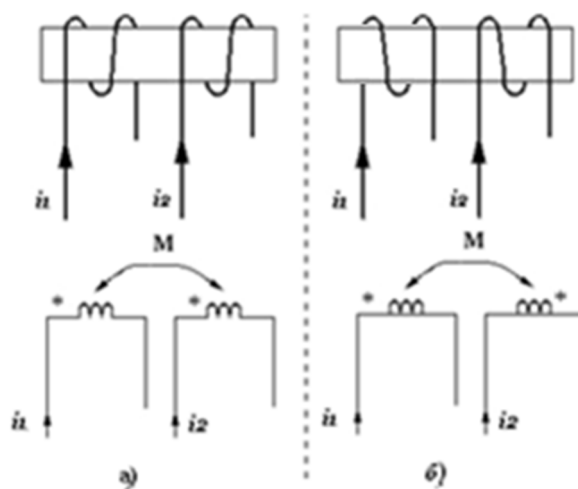


Рисунок 3.21 Два варіанти магнітного зв'язку двох котушок

а) – згідне включення, тому що струми входять в *, б) – зустрічне

Процедуру складання рівнянь за законами Кірхгофа для зазначених ланцюгів розглянемо на прикладі (рис.3.22):

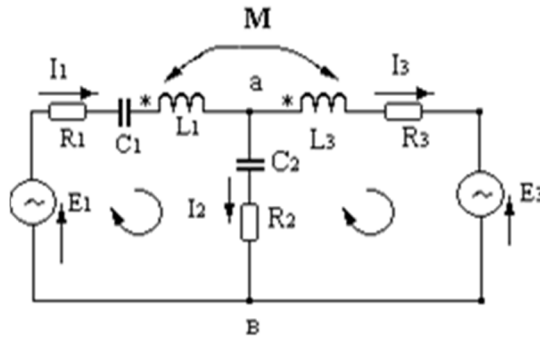


Рисунок 3.22 Приклад ланцюга з двома магнітно-зв'язаними котушками

По першому закону Кірхгофа для вузла **a** можна записати рівняння

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3.$$

Для формування рівнянь по другому закону Кірхгофа виберемо напрям обходу контурів за годинниковою стрілкою.

Для лівого контуру:

$$\dot{I}_1 \left(R_1 - \frac{j}{\omega C_1} + j\omega L_1 \right) + \dot{I}_2 \left(R_2 - \frac{j}{\omega C_2} \right) + \dot{I}_3 j\omega M = \dot{E}_1.$$

Для правого контуру:

$$\dot{I}_3 \left(R_3 + j\omega L_3 \right) - \dot{I}_2 \left(R_2 - \frac{j}{\omega C_2} \right) + \dot{I}_1 j\omega M = \dot{E}_3.$$

Знаки плюс перед членами $\dot{I}_3 j\omega M$ і $\dot{I}_1 j\omega M$ вибрані тому, що струми в них втікають в однолінійні затиски, тобто котушки включені погоджено. Магнітний зв'язок при згідному включенні дає до кожної з двох котушок ще по маленькій котушці, тобто збільшує індуктивності на величину M . При зустрічному включенні ці добавки будуть від'ємними.

У літературі часто зустрічається розрахунковий прийом, який називають розв'язуванням магнітно-пов'язаних ланцюгів. Суть його полягає у веденні додаткових індуктивностей таким чином, що магнітний зв'язок зникає, а струми, що

підтікають до перетвореної ділянки, не змінюються, тобто зовнішня схема "не помітить" проведеної заміни. (Аналогічно роблять при перетворенні $\Delta \rightarrow \text{Y}$ і навпаки).

Так для схеми, представленої на рис. 3.23, що має спільну точку (рогатка: основа- R_1 і дві гілки- L_0 та L_2),

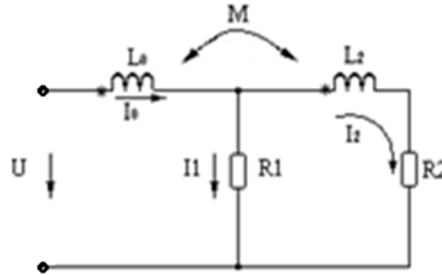


Рисунок 3.23 Ланцюг з двома магнітно-зв'язаними котушками

Для проведення розрахунків можна запропонувати наступну схему без магнітних зв'язків.

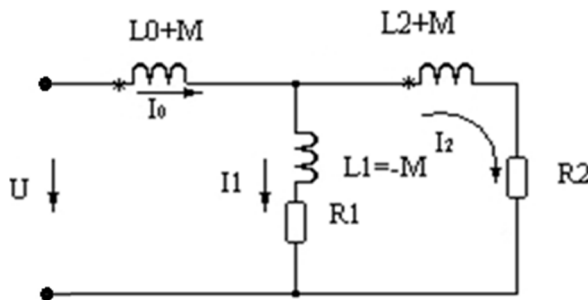


Рисунок 3.24 Еквівалентний ланцюг без магнітних зв'язків

Система рівнянь за Кирхгофом для ланцюга рис. 3.24 матиме наступний вигляд:

$$\left. \begin{aligned} I_0 &= I_1 + I_2, \\ I_0 * j\omega(L_0 + M) + I_1 * (R_1 - j\omega M) &= U, \\ I_2 * (R_2 + j\omega(L_2 + M)) - I_1 * (R_1 - j\omega M) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

В такому вигляді система рівнянь готова до вирішення за допомогою будь-якого математичного пакету прикладних програм.

А при користуванні системами автоматизованого проєктування розв'язування магнітно- пов'язаних ланцюгів заздалегідь передбачається на етапі підготовки ланцюга до моделювання.

3.5.1 Послідовне з'єднання двох магнітно-пов'язаних котушок

На рис.3.25 наведено два можливі варіанти включення котушок індуктивності в електричному ланцюзі:

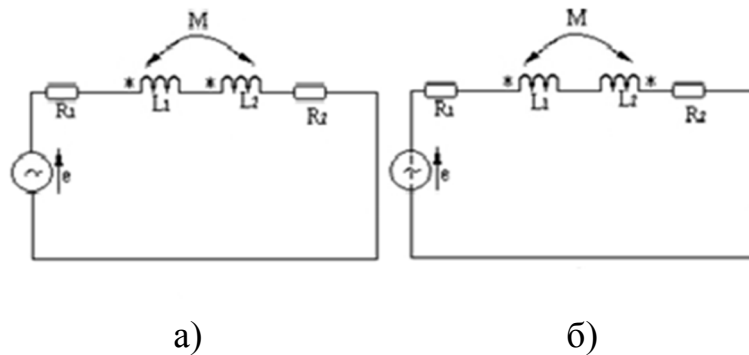


Рисунок 3.25 Послідовне з'єднання двох магнітно-пов'язаних котушок; а) при згодному включенні ; б) при зустрічному включенні

Система рівнянь за Киргофом при згодному (а) включенні котушок ідуктивності має наступний вигляд:

$$\left. \begin{aligned} \dot{I} [R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)] &= \dot{E}, \\ \dot{I} \cdot \underline{Z}_{\tilde{n}\tilde{i}\tilde{a}\tilde{e}} &= \dot{E}, \\ \underline{Z}_{\tilde{n}\tilde{i}\tilde{a}\tilde{e}} &= R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 + 2M). \end{aligned} \right\}$$

Векторна діаграма струмів і напруг при згодному (а) включенні котушок представлена на рис.3.26.

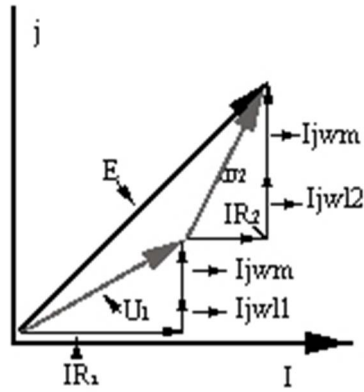


Рисунок 3.26 Векторна діаграма струмів і напруг при згодному (а) включенні котушок

При зустрічному включенні (рис.3.25б) векторна діаграма набуде вигляду, відображеному на рис.3.27.

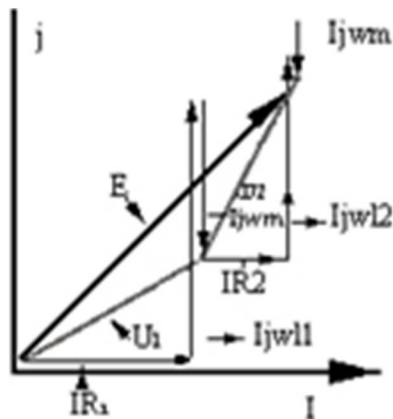


Рисунок 3.27 Векторна діаграма струмів і напруг при зустрічному (б) включенні котушок

3.5.2 Визначення взаємної індуктивності дослідним шляхом

Один із способів. Зробимо два дослідження. У першому з них включимо котушки послідовно і узгоджено. Виміряємо струм і напругу на вході, і активну потужність ланцюга. В іншому досліді котушки включимо послідовно і зустрічно, і також виміряємо I.U.P. За результатами вимірювань знайдемо :

$$X_{узг} = \omega (L_1 + L_2 + 2M);$$

$$X_{зустр} = \omega (L_1 + L_2 - 2M).$$

$$\text{Відкіля } X_{узг} - X_{зустр} = 4 \omega M.$$

$$\text{Отже: } M = \frac{X_{\text{оца}} - X_{\text{цонод}}}{4\omega}.$$

3.6 Узгоджувальний трансформатор

Можлива ситуація, коли навантаження Z_n і вхідний опір двополюсника $Z_{вх}$ не тільки не узгоджені між собою, але їх і змінювати не можна. А погоджувати треба. В такому випадку між затискачами двополюсника **ав** і навантаженням Z_n ставлять трансформатор, який називають узгоджувальним. На рис.3.28 відображена саме така ситуація.

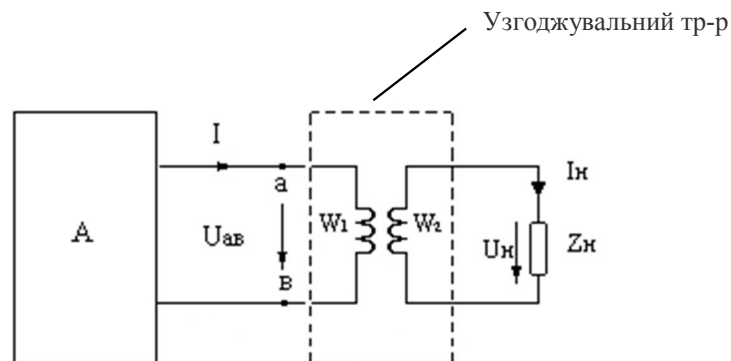


Рисунок 3.28 Застосування узгоджувального трансформатора

Для нього справедливі співвідношення:

$$\dot{I}w_1 - \dot{I}_i w_2 \approx 0, \quad \frac{\dot{U}_{\dot{a}\dot{a}}}{U_i} = \frac{w_1}{w_2}, \quad (3.14)$$

де w_1 і w_2 - кількість вітків первинної та вторинної обмоток трансформатора відповідно.

Вхідний опір зображеної пунктиром частині схеми по відношенню до затискачів **ав**:

$$\frac{\dot{U}_{ab}}{\dot{I}} = \frac{U_i \frac{w_1}{w_2}}{I_i \frac{w_2}{w_1}} = Z_i \cdot \frac{w_1^2}{w_2^2} = R_i \frac{w_1^2}{w_2^2} + jX_i \frac{w_1^2}{w_2^2}.$$

Отже узгоджувальний трансформатор змінює (трансформує) опір навантаження у $\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^2$ разів.

3.7 Ідеальний трансформатор і гиратор

Ідеальним трансформатором називають трансформатор без втрат, у якого вхідні і вихідні струми і напруги пов'язані співвідношеннями:

$$\dot{U}_1 = K\dot{U}_2; \quad \dot{I}_2 = KI_1;$$

де $K = \frac{w_1}{w_2}$ – коефіцієнт трансформації.

Ідеальний трансформатор трансформує напругу \dot{U}_1 у напругу \dot{U}_2 , струм \dot{I}_1 у струм \dot{I}_2 , опір навантаження Z в опір $K^2 Z$.

Гиратором називають чотирьохполюсник без втрат, у якого вхідні і вихідні величини пов'язані співвідношеннями:

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_2 \cdot G; \quad \dot{I}_2 = -\dot{U}_1 \cdot G; \quad \text{або} \quad \begin{vmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & G \\ -G & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{vmatrix};$$

де G - провідність гиратора.

Гиратор не поглинає і не накопичує енергію, він перетворює напругу \dot{U}_1 у струм \dot{I}_2 , струм \dot{I}_1 в напругу \dot{U}_2 , опір навантаження Z в опір $-\frac{1}{ZG^2}$. Назва "гиратор" пояснюється тим, що диференціальні рівняння двох контурів, пов'язаних через гиратор, еквівалентні рівнянням руху двох мас, пов'язаних через гіроскоп.

4. ТРИФАЗНІ ЛАНЦЮГИ

Якщо в рівномірне магнітне поле помістити три однакових жорстко скріплених одна з одною котушки і обертати їх з кутовою швидкістю ω , то в кожній з них буде наводитися синусоїдальна е.р.с. однакової амплітуди. Фаза ж кожної е.р.с. буде визначатися кутом розташування котушок одна щодо одної. При розташуванні котушок під кутом 120° одна до одної утворюється трифазна система (рис.4.1).

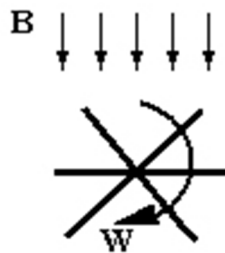


Рисунок 4.1 Три котушки в рівномірному магнітному полі

Аналогічно можна отримати двох-, чотирьох і більше фазні системи. Але найбільшого поширення набула трифазна система.

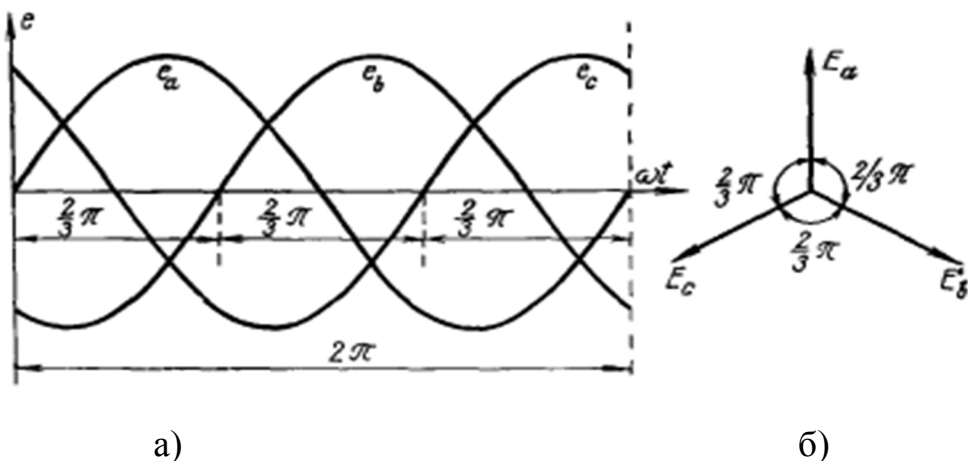


Рисунок 4.2 Трифазна система е.р.с.; а) графік миттєвих значень фазних напруг, б) векторна діаграма фазних напруг

Е.р.с. трифазного генератора позначають таким чином: одну з е.р.с. позначають \dot{E}_a ; ту, що відстає від неї на 120° позначають \dot{E}_b ; ту, що випереджає на 120° позначають \dot{E}_c . Послідовність проходження е.р.с. через однакові значення, наприклад, через нульове значення) називають **послідовністю фаз**.

Трифазним ланцюгом називають сукупність трифазної системи е.р.с., трифазного навантаження і сполучних проводів.

Струми, що протікають по окремих ділянках трифазних кіл, зрушені один щодо одного по фазі. Під **фазою трифазного ланцюга** розуміють ділянку, по якій протікає однаковий струм. Тобто фаза - це або ділянка ланцюга, або - аргумент синусоїдної функції, треба орієнтуватися по контексту.

4.1 Основна схема з'єднання трифазних ланцюгів, визначення лінійних і фазних величин

Самим некономним способом було б з'єднання кожної обмотки генератора з навантаженням двома проводами, що вимагало б шість з'єднувальних проводів. Тому з метою економії обмотки трифазного генератора з'єднують в зірку (\wedge) або в трикутник (\triangle), як показано на рис.4.3. При цьому число з'єднувальних проводів зменшується до 3-х або до 4-х.

При з'єднанні в \wedge однойменні кінці обмоток з'єднують в одну точку, яку називають нульовою точкою генератора 0. При з'єднанні обмоток генератора в \triangle кінець першої обмотки з'єднують з початком другої і далі аналогічно (рис.4.3).

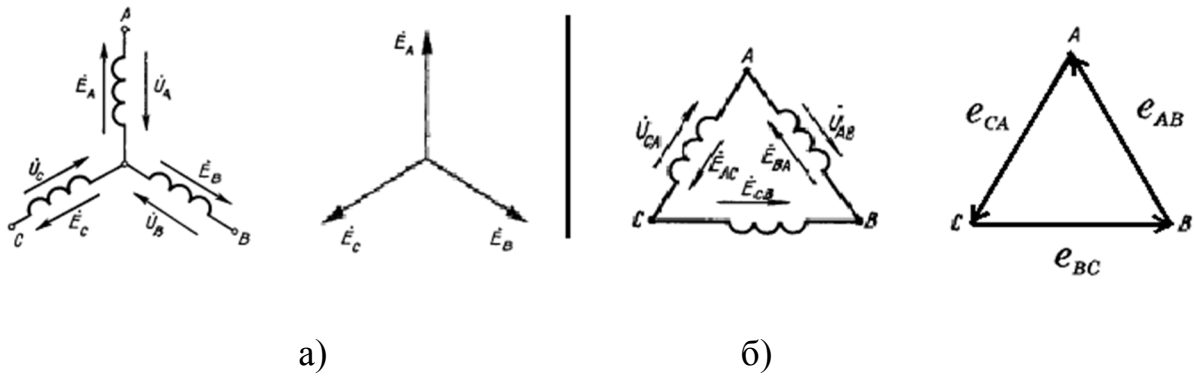


Рисунок 4.3 З'єднання обмоток генератора а) в зірку з відповідною діаграмою фазних напруг, б) в трикутник з відповідною діаграмою фазних напруг

При з'єднанні в Δ однойменні кінці обмоток з'єднують в одну точку, яку називають нульовою точкою генератора 0. При з'єднанні обмоток генератора в Δ кінець першої обмотки з'єднують з початком другої і далі аналогічно.

Геометрична сума е.р.с. (дивиться векторні діаграми на рис.4.3 а і б)) дорівнює 0. Тому, якщо до затискачів А, В, С не приєднане навантаження, струм в обмотках генератора протікати не буде.

Звичайно, навантаження теж можна з'єднувати в зірку або трикутник.

На рис.4.4 представлена схема з'єднання генератора з навантаженням $\Delta - \Delta$ (зірка-зірка) з нульовим проводом.

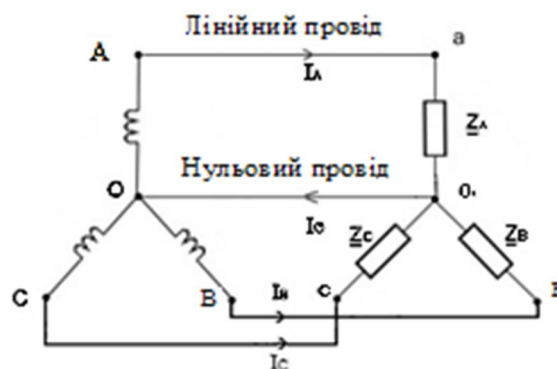


Рисунок 4.4 Трифазна система з нульовим проводом

Точку, в якій об'єднані три кінця 3-х фазного навантаження, називають **нульовою точкою навантаження** 0'. Провід, що з'єднує точки 0 і 0' називають нульовим проводом. Струм нульового проводу I_0 спрямований від 0' до 0. Провід, що

з'єднують точки А, В, С генератора з точками а, в, с навантаження називають **лінійними**, по ним течуть так звані **лінійні струми** I_a, I_b, I_c . Позитивний напрямок для них від генератора до навантаження.

Цікавий факт, що при симетричному навантаженні струм в нульовому проводі I_0 дорівнює нулю

Якщо ви були уважні на вулиці, то могли бачити, що на електричних стовпах найчастіше 4 дроти - верхній з них - це нульовий провід, потім йдуть лінійні проводи. Чому верхній нульовий - з міркувань техніки безпеки (наприклад, при роботі автокрана). Модулі лінійних проводів позначають I_l (без індексів), особливо тоді, коли всі лінійні струми по модулю однакові.

Напругу між лінійними проводами називають лінійною і позначають, наприклад, $-U_{ab}$. Модуль її - U_l .

Кожну обмотку генератора називають фазою генератора; струм, що протікає по обмотці, - I_f , а напругу - U_f . Тут теж треба розрізнявати, що стоїть за словами «фаза генератора» - обмотка генератора чи градуси кута синусоїдної величини (по контексту).

Аналогічно для навантаження.

4.2 Формули перетворення зірки в трикутник і навпаки

В деяких випадках з'являється потреба з'єднання трьох опорів, що має вигляд трипроменевої зірки замінити з'єднанням у вигляді трикутника (рис.4.5)

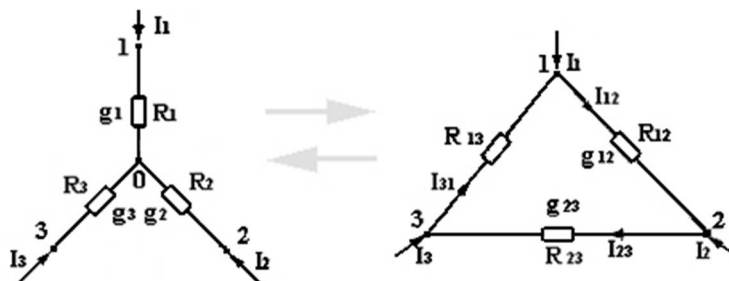


Рисунок 4.5 Еквівалентні перетворення \star в \triangle і навпаки

Перетворення \star в \triangle і навпаки проводиться таким чином, щоб потенціали точок 1,2,3 залишалися незмінними і струми, що підтікають до цих точок, не змінювалися, тобто зовнішній ланцюг «не помітить» зробленої заміни.

$\text{Y} \rightarrow \triangle \text{ через } g$ $g_{12} = \frac{g_1 \cdot g_2}{g_1 + g_2 + g_3} ;$ $g_{13} = \frac{g_1 \cdot g_3}{g_1 + g_2 + g_3} ;$ $g_{23} = \frac{g_2 \cdot g_3}{g_1 + g_2 + g_3} ;$	$\triangle \rightarrow \text{Y} \text{ через } R$ $R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{13}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} ;$ $R_2 = \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} ;$ $R_3 = \frac{R_{13} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} ;$
--	--

Доказ і висновок формул засновані на законах Кірхгофа, бажачі можуть вивести самі, ми ж наведемо формули перетворення без доказів:

5. МЕТОДИ АНАЛІЗУ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ В ЛІНІЙНИХ КОЛАХ З ЗОСЕРЕДЖЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Поняття про комутації. Перехідний процес (п.п.) - це короточасний процес переходу від одного сталого режиму роботи до іншого, що відрізняється хоча б одним з параметрів, наприклад, величиною амплітуди, фази і т.і. Будь-яку стрибкоподібну зміну в ланцюзі, що приводить до порушення встановленого режиму, будемо називати **комутацією**.

Сам процес комутації здійснюється миттєво (нехтуємо його тривалістю), а реакція ланцюга зазвичай займає частки секунди, тобто нескінченно-тривалий процес у порівнянні з часом комутації. При аналізі перехідних процесів через $t = 0_-$ позначають момент часу, що безпосередньо передує комутації, а через $t = 0_+$ або $t = 0$ - момент часу, наступний безпосередньо за комутацією.

Так відбувається, наприклад, у ланцюгу, який зображено на рис.5.1.

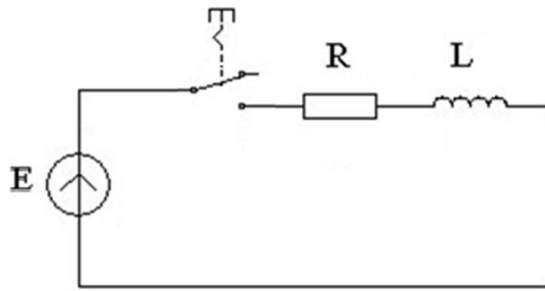


Рисунок 5.1 Електричний ланцюг з рубильником

Аналогічно відбувається при подачі на вхід ланцюга одиничної східчастої функції (одиничний стрибок чи функція Хевісайда, рис.5.2).

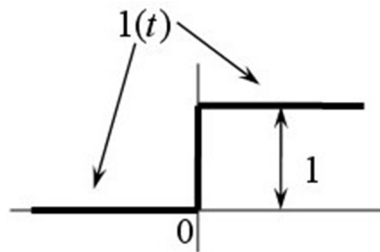


Рисунок 5.2 Графічне представлення функції Хевісайда

Математичний запис функції Хевісайда має вигляд :

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{ї дє } t < 0 \\ 1 & \text{ї дє } t \geq 0 \end{cases}$$

Будь-яка функція часу $f(t)$, дія якої починається в момент $t = 0$, може бути записана у вигляді добутку $1(t) * f(t)$. Так, наприклад, на рис.5.3 показаний процес одержання добутку двох функцій.

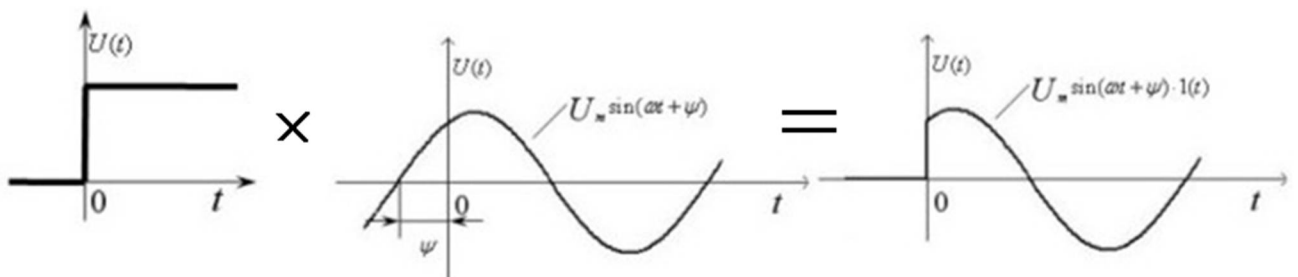


Рисунок 5.3 Добуток першої функції на другу – у результаті одержуємо третю функцію.

Фактично функція Хевісайда – це функція включення. Вона визначає момент включення якоїсь другої функції. Наприклад, момент включення світла в кімнаті. В математичному пакеті Mathcad функція Хевісайда прошиита під клавішою Ф англійської абетки.

В електротехніці перехідні процеси пов'язані найчастіше зі зміною топології ланцюга (комутаціями пасивних елементів). У радіотехніці і зв'язку частіше топологія ланцюга і параметри пасивних елементів залишаються незмінними в часі, а зовнішній вплив на ланцюг змінюється за довільному (найчастіше неперіодичному) закону. Однак для єдності термінології початок відліку часу неусталених процесів називають моментом комутації (приклад, рис.5.3).

5.1 Закони комутації

Перший закон (правило) комутації:

Струм через індуктивність L безпосередньо до комутації $i_L(0_-)$ дорівнює струму через ту ж індуктивність L безпосередньо після комутації $i_L(0_+)$:

$$i_L(0_-) = i_L(0_+) \quad (5.1)$$

Другий закон (правило) комутації:

Напруга на ємності безпосередньо до комутації $U_C(0_-)$ дорівнює напрузі на тій же ємності безпосередньо після комутації

$$U_C(0_-) = U_C(0_+) \quad (5.2)$$

Доказ. Для першого затвердження на прикладі схеми рис.5.1 складемо рівняння по другому закону Киргофа :

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E \quad (5.3)$$

Припустимо струм i може змінитися стрибком, тобто за нескінченно малий інтервал часу t , що прагне до 0. При цьому струм зміниться на кінцеву величину.

Оскільки $\frac{\Delta i}{\Delta t} = \infty$, то й $L \frac{di}{dt} = \infty$, отже в рівнянні (5.3) ліва частина не дорівнює правій і не буде виконуватися другий закон Киргофа. Висновок: струм через індуктивність L не може змінюватися стрибком. Напряга ж на індуктивності L дорівнює $L \frac{di}{dt}$ змінюватися стрибком може. Це суперечить другому закону Киргофа.

Включимо замість індуктивності L у ту ж схему ємність C (рис.5.4).

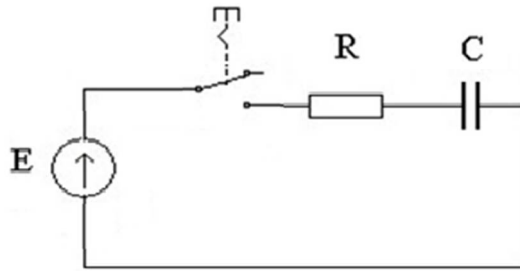


Рисунок 5.4 Електричний ланцюг з ємністю

Аналогічно складемо рівняння по другому закону Киргофа :

$$R i + U_c = E$$

А якщо $i = C \frac{dU_c}{dt}$, то:

$$R C \frac{dU_c}{dt} + U_c = E \quad (5.4)$$

Припустимо, напряга U може змінитися стрибком $\frac{\Delta U_c}{\Delta t} \approx \frac{dU_c}{dt} = \infty$. А це означає, що ліва частина рівняння (5.4) більше правої, а це неможливо. Висновок: напряга на ємності змінюватися стрибком не може.

Струм же через ємність змінюватися стрибком може.

5.2 Початкові значення величин

Струми через індуктивність L і напруга на ємності C післякомутаційні рівні докомутаційним, всі інші величини можуть змінюватися стрибком. Тому домовимося називати струми в індуктивностях L і напруги на ємностях C в розрахунках перехідних процесів - **незалежними початковими значеннями**.

Якщо до початку перехідного процесу безпосередньо перед комутацією всі струми і всі напруги були рівні 0, то в схемі має місце **нульові початкові умови**, якщо не рівні 0, то - **ненульові початкові умови**.

При нульових початкових умовах струми в індуктивностях L і напруги на ємностях C почнуть змінюватися з нульових значень, при ненульових умовах - з тих значень, які вони мали безпосередньо перед комутацією.

5.3 Приведення завдання про перехідні процеси до вирішення лінійного дифереціального рівняння з постійними коефіцієнтами

Рівняння (5.3) для схеми рис.5.1 і рівняння (5.4) для схеми рис.5.4 представляють собою типові дифереціальні рівняння з похідними. З курсу ВМ відомо, що рішення дифереціального рівняння - це пошук функції, що задовольняє дифереціальному рівнянню. Підстановка такої функції і її похідних перетворює дифереціальне рівняння в тотожність.

Рішення лінійних дифереціальних рівнянь зазвичай проводять одним із таких методів: класичним, операторним або методом з використанням інтеграла Дюамеля. Усі три методи мають загальний початковий алгоритм рішення (перші 3 етапи):

- 1) вибір позитивних напрямків струмів в гілках ланцюга;
- 2) визначення до комутації значень струмів і напруг на реактивних елементах згідно законам комутації;
- 3) складання характеристичного рівняння і визначення його коренів ;
і лише на четвертому етапі, найбільш трудомісткому, відбувається розгалуження алгоритму розрахунку;
- 4) отримання виразів для шуканих струмів і напруг як функцій часу.

У загальному випадку ми для конкретної електричної схеми складаємо одним з методів (за законами Кірхгофа, вузлових потенціалів або контурних струмів) систему

Рішення лінійних диференціальних рівнянь n -го порядку. Якщо провести процедуру послідовного виключення невідомих, крім однієї, то отримаємо одне диференціальне рівняння n -го порядку наступного вигляду:

$$\alpha_n \frac{d^n x}{dt^n} + \alpha_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + \alpha_1 \frac{dx}{dt} + \alpha_0 x = F(t) \quad , \quad (5.5)$$

де :

$x = x(t)$ – шуканий струм або напруга;

$\alpha_j (\alpha = 0, 1, 2, 3, \dots, n)$ – постійні коефіцієнти;

$F(t)$ – функція часу, що залежить від параметрів джерел.

Метод розрахунку, що полягає в інтегруванні диференціального рівняння n -го порядку називається класичним методом розрахунку перехідного процесу.

Рішення диференціального рівняння записується у вигляді суми загального рішення однорідного рівняння (вільна складова) і дійсного рішення неоднорідного рівняння (примушена складова):

$$x(t) = x_{\text{віль}}(t) + x_{\text{пр}}(t) \quad (5.6)$$

Для знаходження вільної складової необхідно знайти коріння характеристичного рівняння ланцюга (p) і n постійних інтегрування A .

Якщо характеристичне рівняння

$$\alpha_n p^n + \alpha_{n-1} p^{n-1} + \dots + \alpha_1 p + \alpha_0 = 0 \quad (5.7)$$

має n різних коренів $p_k (k = 1, 2, 3, \dots, n)$, то

$$x_{\text{віль}}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots + A_n e^{p_n t}. \quad (5.8)$$

Якщо ж є кратні корені, то $m_k \geq 1$ і

$$x_{k \text{ віль}}(t) = (A_1 + A_2 t + \dots + A_{m_k} t^{m_k-1}) \cdot e^{p_k t}. \quad (5.9)$$

Якщо корені комплексно зв'язані, наприклад, $p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_0$, то в ланцюзі виникають коливання. Відповідний їм доданок рішення може бути взято у вигляді

$$i_{\text{віль}}(t) = A e^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \nu), \quad (5.10)$$

де:

ω_0 - кутова частота вільних коливань;

ν - початкова фаза;

δ - коефіцієнт загасання.

Огибаюча коливання визначається кривою $A e^{-\delta t}$ (рис.5.5):

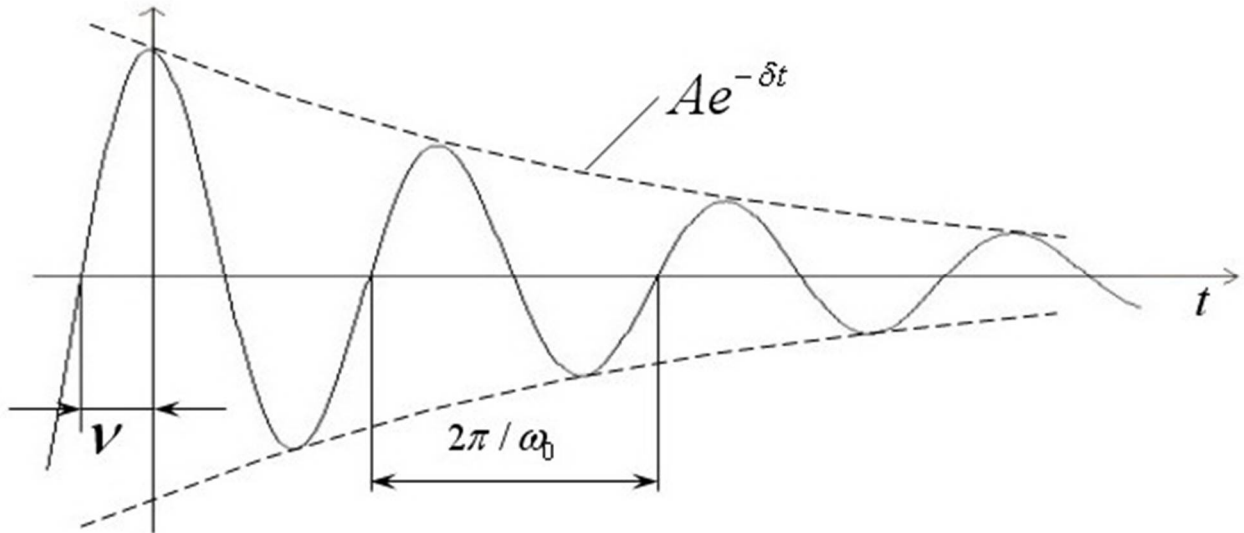


Рисунок 5.5 Загасання вільних коливань

Розрахунок примушеної складовою здійснюється звичайним способом для ланцюга після комутації в усталеному режимі.

Визначення постійних інтегрування A можливо лише у випадку, якщо значення шуканої величини відомо в початковий момент часу ($t = 0_+$), а також відомі всі її похідні до $(n-1)$ порядку включно [Задача Коші].

Початкові значення шуканих величин відомі завжди з розрахунку докомутаційного режиму в силу того, що за законами комутації струми в індуктивностях L і напруги на ємностях C змінюються тільки безперервно:

$$i_L(0_-) = i_L(0_+) \quad ; \quad U_C(0_-) = U_C(0_+).$$

Завдяки цим співвідношенням відомі струми в індуктивностях L і напруги на ємностях C у перший момент після комутації.

5.4 Складання характеристичного рівняння шляхом використання виразів для вхідного опору кола на змінному струмі

Для складання характеристичного рівняння зручно використовувати вираз для $\underline{Z}_{\text{вх}}(j\omega)$ відносно ключа, замінюючи в виразі $j\omega$ на p . Потім $\underline{Z}(p)$ прирівнюємо до нуля. В якості приклада розглянемо ланцюг на рис.5.6.

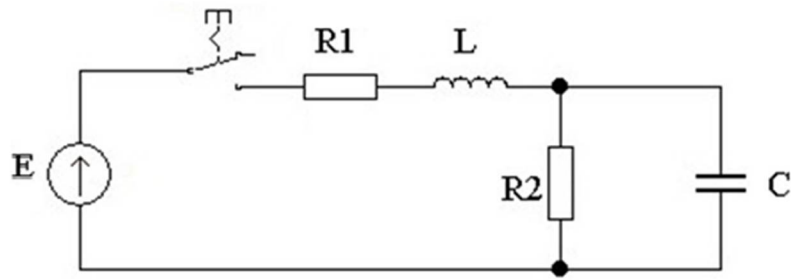


Рисунок 5.6 Приклад простої електричної схеми

Внутрішній опір джерела енергії E дорівнює нулю, тобто під час визначення $\underline{Z}(p)$ замість джерела живлення ставимо уявно закоротку. Отримуємо наступний вираз:

$$\underline{Z}(p) = R1 + pL + \frac{R2 \cdot \frac{1}{pC}}{R2 + \frac{1}{pC}} = 0$$

Дрїб розпишемо окремо, помноживши чїсельник і знаменник на pC :

$$\frac{R2 \cdot \frac{1}{pC} \cdot pC}{\left(R2 + \frac{1}{pC}\right) \cdot pC} = \frac{R2}{R2pC + 1} \quad ;$$

тоді

$$\underline{Z}(p) = R1 + pL + \frac{R2}{1 + R2pC} = \frac{R1 \cdot (1 + R2pC) + pL \cdot (1 + R2pC) + R2}{1 + R2pC} = 0 \quad ;$$

$$R1 + R1R2pC + pL + p^2R2LC + R2 = 0 \quad ;$$

Нагадаємо, що:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$p^2R2LC + p(L + R1R2C) + (R1 + R2) = 0 \quad ;$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Нехай: $R_1=R_2=100 \text{ Ом}$, $L_1=1 \text{ Гн}$,

Якщо: $C=10 \text{ мкФ}$	Якщо: $C=100 \text{ мкФ}$
$p_1 = -230 \text{ рад}^{-1}$	$p_1 = -100 + j100$
$p_2 = -870 \text{ рад}^{-1}$	$p_2 = -100 - j100$

При включенні в ланцюг конденсатора ємністю $C=10 \text{ мкФ}$ одержано два дійсних негативних кореня, що відповідає загасанню вільної складової перехідного процесу по експоненті. При включенні в ланцюг конденсатора ємністю $C=100 \text{ мкФ}$ одержано два комплексно-спряжених кореня з негативною дійсною частиною, що відповідає загасанню вільної складової перехідного процесу у вигляді коливань .

5.5 Властивості коренів характеристичного рівняння

Число коренів характеристичного рівняння визначається ступенем цього рівняння. Рівняння I ступеня має завжди один негативний дійсний корінь.

Рівняння II ступеня може мати:

- a) два дійсних негативних нерівних кореня;
- b) два дійсних негативних рівних кореня;
- c) два комплексно-спряжені кореня з негативною дійсною частиною.

Рівняння III ступеня може мати:

- a) три дійсних нерівних негативних кореня;
- b) три дійсних негативних кореня, два з котрих рівні друг другу;
- c) три дійсних негативних рівних кореня;
- d) один дійсний негативний корінь і два комплексно-спряжені кореня з негативною дійсною частиною .

Дійсна частина коренів рівнянь завжди негативна, тому що вільний процес описується рівнянням виду Ae^{pt} (p повинно бути менше нуля) і відповідає затухаючому в часі реальному процесу.

I Коли характеристичне рівняння має один корінь, вільний струм виражається

$$i_{\text{віль}} = Ae^{pt} = Ae^{at},$$

де $p = -a$ залежить тільки від параметрів ланцюга;

A – від параметрів ланцюга, е.р.с. і моменту включення

За інтервал часу $t = \tau = \frac{1}{a}$ функція Ae^{-at} зменшується у 2,71 рази (рис.5.7):

$$e^{-at} = e^{-a \frac{1}{a}} = e^{-1} = \frac{1}{2.71}$$

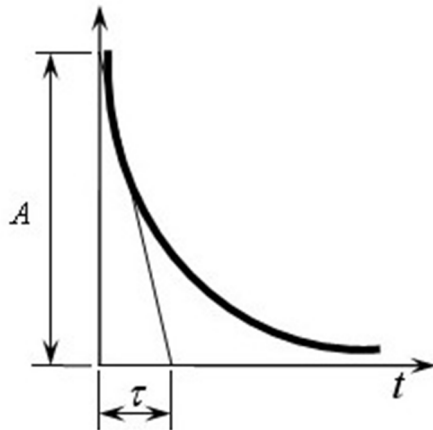


Рисунок 5.7 Ілюстрація до визначення постійної часу ланцюга

Величину $\tau = \frac{1}{a} = \frac{1}{|p|}$ називають **постійною часу ланцюга.**

II Коли характеристичне рівняння має 2 дійсних. нерівних кореня, то вільний струм виражається як

$$i_{\text{віль}} = \underbrace{A_1 e^{p_1 t}}_1 + \underbrace{A_2 e^{p_2 t}}_2 .$$

Результуюча «жирна» крива виходить підсумовуванням ординат кривих 1 і 2 (рис.5.8).

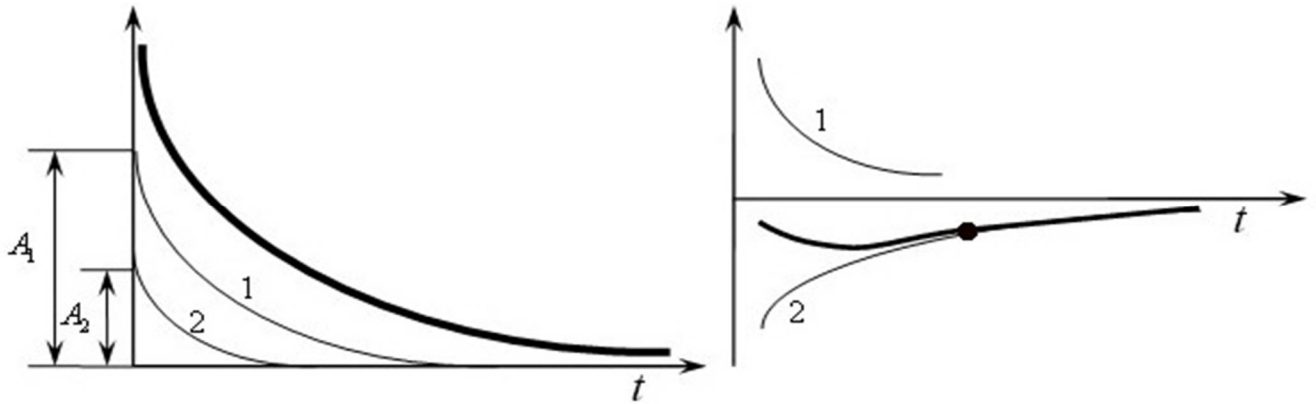


Рисунок 5.8 Ілюстрація формування кривої перехідного процесу у випадку двох дійсних нерівних коренів характеристичного рівняння

III Коли характеристичне рівняння має два рівних негативних кореня $p_1 = p_2 = -a$, відповідне рішення має бути взято у вигляді:

$$i_{\text{вкл}} = A_1 e^{pt} + A_2 t e^{pt} = (A_1 + A_2 t) \cdot e^{pt}.$$

На наступному рисунку (рис.5.9) показані можливі характери зміни функції $(A_1 + A_2 t) \cdot e^{pt}$ ($p < 0$) при різних знаках у A_1 і A_2 :

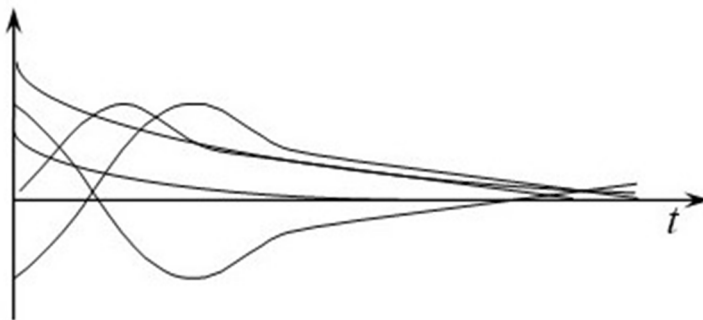


Рисунок 5.9 Можливі характери зміни функції $(A_1 + A_2 t) \cdot e^{pt}$ ($p < 0$) при різних знаках у A_1 і A_2 :

Зверніть увагу на те, що на рис. 5.9 всі криві експоненціального характеру, ні одна з них не стала кривою коливального процесу.

IV Коли вирішення характеристичного рівняння дає два комплексно-спряжених кореня $p_1 = -\delta + j\omega_0$ і $p_2 = -\delta - j\omega_0$, то рішення беремо у вигляді (5.10), а характер поведінки вільної складової відображений на рис.5.5.

5.6 Складання рівнянь для вільних струмів і напруг

Для послідовної схеми складають рівняння за законами Кірхгофа для повних струмів і напруг так само, як це робилось і раніше: спочатку позначають струми в вітках довільно вибирають для них позитивні спрямування; потім складають рівняння за першим та другим законами Кірхгофа. Так для наступної схеми (рис.5.10) після вибору позитивних напрямків для струмів одержимо систему рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} i_1 - i_2 - i_3 &= 0; \\ L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + i_2 R_2 &= E; \\ i_2 R_2 - \frac{1}{C} \int i_3 dt &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

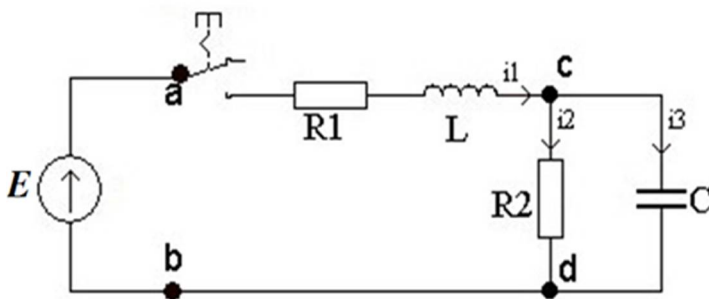


Рисунок 5.10 Приклад наведеної раніше схеми (рис.5.6) з обраними напрямками струмів

У цих рівняннях i_1 , i_2 і i_3 - повні струми. Кожен з них складається з вільного і примушеного струмів. Для того щоб від цієї системи рівнянь перейти до рівнянь для вільних струмів, «звільнимо» систему від змушуючих е.р.с. (у нашому випадку від е.р.с. Е) і замість i_1 запишемо $i_{1\text{віль}}$, замість i_2 - $i_{2\text{віль}}$ і так далі. Отримаємо :

$$\left. \begin{aligned} i_{1\text{віль}} - i_{2\text{віль}} - i_{3\text{віль}} &= 0; \\ L_1 \frac{di_{1\text{віль}}}{dt} + i_{1\text{віль}} R1 + i_{2\text{віль}} R2 &= 0; \\ i_{2\text{віль}} R2 - \frac{1}{C} \int i_{3\text{віль}} dt &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

Зауважимо, що для будь-якого контура будь-якого електричного ланцюга сума падінь напруг від вільних складових струмів дорівнює нулю.

5.7. Алгебраїзація системи рівнянь для вільних струмів

Як відомо з курсу ВМ, рішення однорідного диференційного рівняння записується у вигляді показових функцій Ae^{pt} , отже рівняння для кожного вільного струму можна представити у вигляді:

$$i_{\text{віль}} = Ae^{pt}.$$

Постійна інтегрування А для кожного вільного струму своя, а показник загасання p один для всіх вільних струмів. Фізично це пояснюється тим, що весь ланцюг охоплений єдиним (спільним) перехідним процесом.

Складемо похідну від $i_{\text{віль}}$ і знайдемо інтеграл від $i_{\text{віль}}$

$$\frac{di_{\text{вільн}}}{dt} = \frac{d}{dt}(Ae^{pt}) = pAe^{pt} = pi_{\text{вільн}}; \quad (5.13)$$

$$\int i_{\text{вільн}} dt = \int Ae^{pt} = \frac{1}{p} Ae^{pt} = \frac{i_{\text{вільн}}}{p}. \quad (5.14)$$

Постійна інтегрування в останньому рівнянні дорівнює нулю, тому що вільні складові не містять незалежних від часу доданків.

Рівняння (5.13, 5.14) дозволяють записати вільну напругу на індуктивності

$$L \frac{di_{\text{вільн}}}{dt} \rightarrow Lpi_{\text{вільн}};$$

вільна напруга на ємності

$$\frac{1}{C} \int i_{\text{вільн}} dt \rightarrow \frac{i_{\text{вільн}}}{pC};$$

і систему рівнянь (5.12) в наступному вигляді:

$$\left. \begin{aligned} i_{1 \text{ вільн}} - i_{2 \text{ вільн}} - i_{3 \text{ вільн}} &= 0; \\ (L_1 p + R1)i_{1 \text{ вільн}} + i_{2 \text{ вільн}} R2 &= 0; \\ i_{2 \text{ вільн}} R2 - \frac{i_{3 \text{ вільн}}}{pC} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

Рівняння (5.15) являють собою систему алгебраїчних рівнянь відносно $i_{1 \text{ вільн}}$, $i_{2 \text{ вільн}}$, $i_{3 \text{ вільн}}$ і на відміну від вихідної системи не містять похідних та інтегралів.

Перехід від системи лінійних диференціальних рівнянь до системи алгебраїчних рівнянь називають *алгебраїзацією системи диференціальних рівнянь*

для вільних струмів. Можна сказати, що система (5.15) є результат алгебраїзації системи диференціальних рівнянь (5.12).

5.8 Визначення постійних інтегрування в класичному методі.

Якщо характеристичне рівняння 1-го порядку, то $i_{\hat{a}^3\ddot{e}} = Ae^{pt}$. Тоді A визначається за значенням вільного струму:

$$A = i_{\hat{a}^3\ddot{e}}(0+).$$

Якщо характеристичне рівняння 2-го порядку, а коріння дійсні та нерівні:

$$i_{\hat{a}^3\ddot{e}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t};$$

Продиференціюємо по t :

$$i'_{\hat{a}^3\ddot{e}} = p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t};$$

При $t=0$

$$i'_{\hat{a}^3\ddot{e}} = p_1 A_1 + p_2 A_2$$

Отримуємо систему рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} i_{\hat{a}^3\ddot{e}}(0+) &= A_1 + A_2 \\ i'_{\hat{a}^3\ddot{e}}(0+) &= p_1 A_1 + p_2 A_2 \end{aligned} \right\}$$

Тут невідомі A_1 та A_2 . Спільне рішення останньої системи рівнянь дає їх значення.

Якщо характеристичне рівняння 2-го порядку, а коріння комплексно-спряжені, то рішення згідно (5.10) беруть у вигляді:

$$i_{\hat{a}^3\ddot{e}} = Ae^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \nu)$$

Тут кутова частота ω_0 і показник загасання δ відомі з рішення характеристичного рівняння. Невідомі A і ν так само знаходять із системи рівнянь [для $i_{\hat{a}^3\ddot{e}}(\hat{t}+)$ та $i'_{\hat{a}^3\ddot{e}}(\hat{t}+)$]. Доведемо:

Продиференціюємо вихідне рівняння (5.10):

$$i' a^3 \ddot{e} = -A\delta e^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \nu) + A\omega_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_0 t + \nu).$$

При $t=0+$:

$$i' a^3 \ddot{e}(0+) = -A\delta \sin \nu + A\omega_0 \cos \nu ;$$

Отримуємо систему рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} i' a^3 \ddot{e}(0+) &= A \sin \nu \\ i' a^3 \dot{e}(0+) &= -A\delta \sin \nu + A\omega_0 \cos \nu \end{aligned} \right\}$$

Тут невідомі лише A і ν . З двох рівнянь знайти дві невідомі величини не складає труднощів.

Розглянемо кілька числових прикладів на розрахунок перехідного процесу класичним методом у ланцюгах першого і другого порядків з джерелами постійної і синусоїдальної е.р.с. при ненульових початкових умовах.

Приклад 1. На рис. 5.11 наведено приклад простої електричної схеми з наступними параметрами: $R_1=R_1'=R_3=50\text{Ом}$; $C=100\text{ мкФ}$; $E=150\text{ В}$. До замикання ключа був сталий режим.

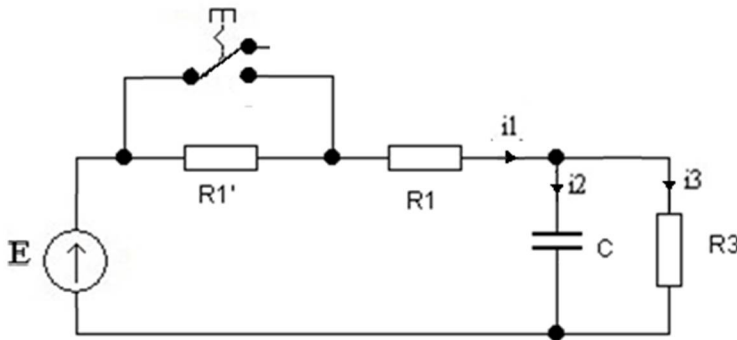


Рисунок 5.11 Приклад простої електричної схеми зі джерелом сталої напруги

Потрібно: 1) знайти повні, примушені і вільні складові струмів і напруг на конденсаторі, а також початкове значення похідної від вільної напруги на конденсаторі; 2) визначити струми i_1 , i_2 , i_3 і напругу U_c як функцію часу.

Рішення першої частини завдання.

До комутації:

$$i_{2(0-)} = 0 \quad \text{òà} \quad i_{1(0-)} = i_{3(0-)} = \frac{E}{R_1 + R_1 + R_3} = \frac{150}{50 + 50 + 50} = 1 \text{ A.}$$

Напруга на конденсаторі дорівнювала напрузі на опорі R_3 :

$$U_{c(0-)} = i_{3(0-)} * R_3 = 1 * 50 = 50 \text{ В.}$$

Після комутації.

Можна сказати, що пройшло багато часу, перехідний процес закінчився.

Знайдемо значення всіх примушених струмів і напруг.

$$i_{2np} = 0; \quad i_{1np} = i_{3np} = \frac{E}{R_1 + R_3} = \frac{150}{50 + 50} = 1.5 \text{ A}$$

$$U_{c_{np}} = i_{3np} * R_3 = 1.5 * 50 = 75 \text{ В.}$$

Бачимо, що в результаті комутації струм в ланцюзі виріс на $1.5 - 1.0 = 0.5 \text{ A}$, а напруга на конденсаторі виросла на $75 - 50 = 25 \text{ В}$.

Тепер можемо уточнити, яким чином здійснилися ці зміни, тобто сам перехідний процес.

Складемо рівняння по 2-му закону Кирхгофа для повних струмів і напруг для контура, який утворюють перша і друга вітки у момент $t_{(0+)}$ відразу після комутації.

$$i_{1(0+)} * R_1 + U_{c(0+)} = E \quad (1)$$

$$U_{c(0+)} = i_{3(0+)} * R_3 \quad (2).$$

Так як $U_{c(0+)} = U_{c(0-)}$ – згідно закону комутації, то з (1) отримуємо:

$$i_{1(0+)} * R_1 = E - U_{c(0-)}; \quad i_{1(0+)} = \frac{E - U_{c(0-)}}{R_1} = \frac{150 - 50}{50} = 2 \text{ A};$$

З рівняння (2) одержимо:

$$i_{3(0+)} = \frac{U_{c(0-)}}{R_3} = \frac{50}{50} = 1 \text{ A.}$$

По 1-му закону Кирхгофа: $i_1 = i_2 + i_3$, отже:

$$i_{2(0+)} = i_{1(0+)} - i_{3(0+)} = 2 - 1 = 1 \text{ А.}$$

Вільні складові знайдемо як різниці між повними і примушеними величинами для моменту часу $t_{(0+)}$:

$$U_{c_{\hat{a}^3\ddot{e}}(0+)} = U_{c(0+)} - U_{c_{i\ddot{\delta}}(0+)} = 50 - 75 = -25 \text{ В}$$

$$i_{1\hat{a}^3\ddot{e}}(0+) = i_{1(0+)} - i_{1i\ddot{\delta}}(0+) = 2 - 1.5 = 0.5 \text{ А}$$

$$i_{2\hat{a}^3\ddot{e}}(0+) = i_{2(0+)} - i_{2i\ddot{\delta}}(0+) = 1 - 0 = 1 \text{ А}$$

$$i_{3\hat{a}^3\ddot{e}}(0+) = i_{3(0+)} - i_{3i\ddot{\delta}}(0+) = 1 - 1.5 = -0.5 \text{ А}$$

Так як вільний струм через ємність дорівнює $i_{\hat{a}^3\ddot{e}} = C \frac{dU_{c_{\hat{a}^3\ddot{e}}}}{dt}$, то $\frac{dU_{c_{\hat{a}^3\ddot{e}}}}{dt} = \frac{i_{\hat{a}^3\ddot{e}}}{C}$,

$$\left(\frac{dU_{c_{\hat{a}^3\ddot{e}}}}{dt} \right)_{t=0+} = \frac{i_{2\hat{a}^3\ddot{e}}(0+)}{\tilde{N}} = \frac{1}{100 \cdot 10^{-6}} = 10^4 \text{ В/с.}$$

Отже початкове значення похідної від вільної напруги на конденсаторі складає 10^4 В/с .

Рішення другої частини завдання:

Схема після комутації. Характеристичне рівняння для післякомутаційної схеми має вигляд:

$$R_1 + \frac{R_3 * \frac{1}{pC}}{R_3 + \frac{1}{pC}} = 0; \quad \left[\frac{\frac{R_3}{pC}}{R_3 * pC + 1} = \frac{R_3}{R_3 pC + 1} \right]$$

$$R_1 + \frac{R_3}{pR_3 C + 1} = 0; \quad pR_1 R_3 C + R_1 + R_3 = 0$$

$$\text{Має один корінь } p = -\frac{R_1 + R_3}{R_1 R_3 C} = -400 \text{ с}^{-1};$$

Кожен струм дорівнює сумі примушеної і вільної складової Ae^{pt} , де A дорівнює значенню вільної складової при $t(0+)$:

$$i_1 = 1.5 + 0.5e^{-400t} \text{ A};$$

$$i_2 = e^{-400t} \text{ A};$$

$$i_3 = 1.5 - 0.5e^{-400t} \text{ A};$$

$$U_c = 75 - 25e^{-400t} \text{ V};$$

Часові графіки представлені на рис. 5.12

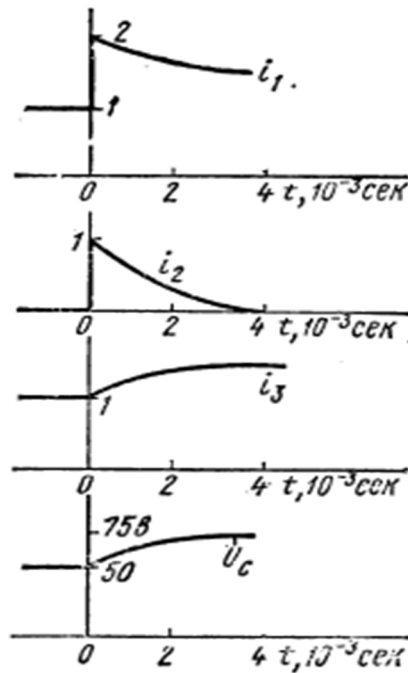


Рисунок 5.12 Часові графіки перехідного процесу в ланцюзі прикладу 1

Приклад 2. На рис.5.13 наведено приклад простої електричної схеми з джерелом змінної напруги

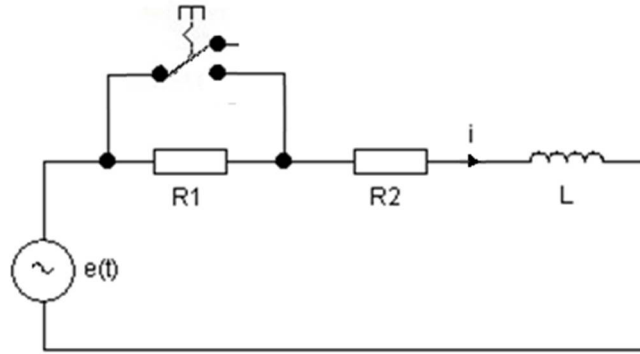


Рисунок 5.13 Приклад простої електричної схеми з джерелом змінної напруги та індуктивністю

У даній схемі до замикання ключа був сталий режим: $R_1 = R_2 = 2 \text{ Ом}$;

$$\omega L = 3 \hat{\Omega}; \quad e(t) = 127 \sin(\omega t + 50^\circ) \hat{\text{А}}; \quad \omega = 314 \text{ с}^{-1}.$$

Потрібно знайти: 1) $i_{\hat{\text{А}}}(0+)$; 2) визначити закон зміни струму в ланцюзі після комутації.

Рішення першої частини завдання.

Знайдемо комплексну амплітуду струму в ланцюзі до комутації:

$$\dot{I}_m = \frac{127 * e^{-j50^\circ}}{2 + 2 + j3} = \frac{127 \angle -50^\circ}{4 + j3} = \frac{127 \angle -50^\circ}{5 \angle 36^\circ 54'} = 25.4 \angle -86^\circ 54' \text{ А},$$

$$4 + j3 = \sqrt{4^2 + 3^2} e^{j \arctg 3/4} = 5 e^{j36^\circ 54'} = 5 \angle 36^\circ 54'.$$

Миттєве значення струму до комутації:

$$i = 25.4 \sin(\omega t - 86^\circ 54') \text{ А.} \quad (\text{крива 1 на рис 5.14}).$$

У момент часу перед комутацією (при $\omega t = 0$):

$$i_{(0-)} = 25.4 * \sin(-86^\circ 54') = -25.35 \text{ А.}$$

Примушений струм після комутації:

$$\dot{I}_m = \frac{127 \angle -50^\circ}{2 + j3} = \frac{127 \angle -50^\circ}{3.6 \angle 56^\circ 24'} = 35.2 \angle -106^\circ 24' \text{ А},$$

$$i_{np} = 35.2 * \sin(\omega t - 106^\circ 24') \text{ А} \quad (\text{крива 2 на рис 5.14}),$$

Миттєве значення примушеного струму:

$$i_{np} = 35,2 * \sin(\omega t - 106^\circ 24') \text{ А};$$

$$i_{np}(0+) = 35,2 * \sin(-106^\circ 24') = -33,8 \text{ А.}$$

За першим законом комутації:

$$i_{(0-)} = i_{(0+)} = -25,35 \text{ А},$$

але $i_{(0+)} = i_{i\delta}(0+) + i_{a^3\ddot{x}}(0+)$, звідки

$$i_{a^3\ddot{x}}(0+) = i_{(0+)} - i_{i\delta}(0+) = -25,35 - (-33,8) = 8,45 \text{ А.}$$

Рішення другої частини завдання.

Складемо характеристичне рівняння для післякомутаційного ланцюга (щодо ключа z(p)).

$$pL + R_2 = 0.$$

$$\text{Корінь рівняння: } p = -\frac{R_2}{L} = -\frac{R_2}{\frac{L\omega}{\omega}} = -\frac{2 * 314}{3} \approx -210 \text{ н}^{-1}.$$

Струм в ланцюзі (повний) дорівнює:

$$i = i_{i\delta} + i_{a^3\ddot{x}}$$

$$i_{a^3\ddot{x}} = 8,45e^{-210t} \quad (\text{крива 3 на рис 5.14}),$$

$$i = 35,2 * \sin(\omega t - 106^\circ 24') + 8,45e^{-210t} \text{ А.}$$

На рис.5.14 часові графіки перехідного процесу в ланцюзі прикладу 2.

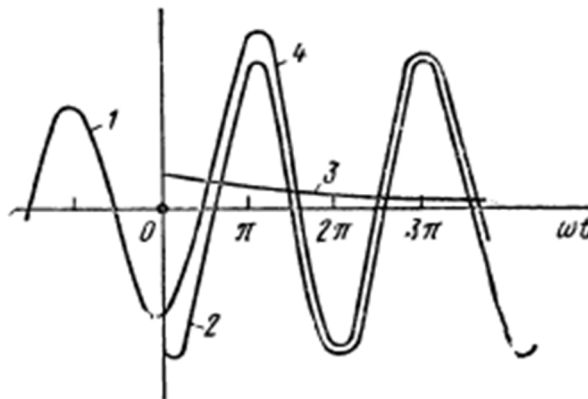


Рисунок 5.14 Часові графіки перехідного процесу в ланцюзі прикладу 2

Тут крива 1 - струм до комутації;

2 - примушений струм після комутації;

3 - вільний струм;

4 - повний струм після комутації.

Ординати кривої 4 при $\omega t \geq 0$ дорівнюють сумі ординат кривих 2 і 3.

5.9 Перехідна провідність та перехідна функція по напрузі

5.9.1 Поняття про перехідну провідність

Раніше говорилося про те, що струм в будь-якій вітці схеми може бути представлений у вигляді добутку напруги U на вході схеми на власну або взаємну провідність g :

$$I = U g.$$

При перехідних процесах це співвідношення також має силу. Якщо на вхід будь-якого ланцюга в момент $t = 0$ включається постійна напруга U (або е. р. с. E), то струм $I(t)$ у будь-якої гілці цієї схеми буде дорівнювати добутку постійної напруги U на провідність $g(t)$:

$$i(t) = U g(t). \quad (5.16)$$

При перехідному процесі провідність є функцією часу, тому в дужках вказується час t ; $g(t)$ називають *перехідною* провідністю. Вона вимірюється в тих же одиницях (сім), що звичайна провідність. На рис. 5.15 показано взаємний вплив однієї вітки ланцюга на другу: на рис.5.15а вітки m , в яку включено джерело живлення в 1 В, на вітку k ; на на рис.5.15б вітки k , в яку включено джерело живлення в 1 В, на вітку m .

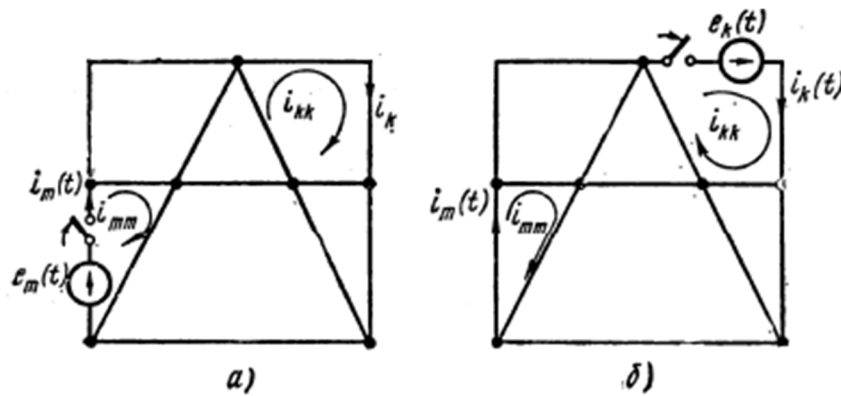


Рисунок 5.15 Скелетна схема деякого електричного ланцюга а) джерело живлення включено в контур m , б) джерело живлення включено в контур k

Якщо у формулі (5.16) прийняти U рівним 1 В, то при цьому $i(t) = g(t)$, тобто перехідна провідність будь-якої вітки схеми чисельно дорівнює струму $i(t)$ у цій вітці при підключенні ланцюга до постійній напрузі в 1 В. Індокси у $g(t)$ вказують, про яку саме перехідну провідність йде мова. Якщо індокси однакові, то мається на увазі власна перехідна провідність вітки, номер якої відповідає цифрі, вказаної в індокси; якщо індокси різні, то - провідність між тими вітками, номери яких вказані в індокси. Так, наприклад, якщо джерело постійної напруги U при нульових початкових умовах включається в першу вітку, то струм першої вітки $i_1(t) = Ug_{11}(t)$, а струм третьої гілки $i_3(t) = Ug_{31}(t)$.

Перехідну провідність можна визначити або розрахунковим, або дослідним шляхом. При розрахунковому визначенні $g_{kk}(t)$, наприклад, класичним методом знаходять струм k -вітці при включенні джерела постійної напруги в k -вітці. При визначенні $g_{km}(t)$ знаходять струм k -вітці при включенні постійної напруги U в m -вітці. Далі, в отриманих формулах вважають U рівним 1 В. При визначенні $g_{km}(t)$ дослідним шляхом струм $i(t)$ відповідної вітки знаходять за допомогою осцилографа.

Математично доказано, що для лінійних ланцюгів визначник симетричний відносно головної діагоналі, тобто $g_{km} = g_{mk}$. Для перехідних процесів це співвідношення залишається справедливим:

$$g_{km}(t) = g_{mk}(t),$$

і одержало назву *теорему взаємності*. Для перехідних процесів *теорему взаємності* можна сформулювати наступним чином: в будь-якому лінійному електричному ланцюзі струм перехідного процесу k -вітці $i_k(t)$, який спричиняє включення е.р.с. $e_m(t)$ в m -вітку (рис.5.15а), дорівнює струму перехідного процесу $i_m(t)$ в m -вітці, який спричинений включенням е.р.с. $e_k(t)$ в k -вітку (рис. 5.15б), при умові, що. $e_k(t) = e_m(t)$.

5.9.2 Поняття про перехідну функцію по напрузі

При підключенні лінійного електричного ланцюга з нульовими початковими умовами (приклад рис.5.16) до постійної напруги U між якимись двома точками a і b схеми виникає напруга $u_{ab}(t)$, що є функцією часу та пропорційна напрузі U , що впливає:

$$U_{ab}(t) = Uk(t) \quad (5.17)$$

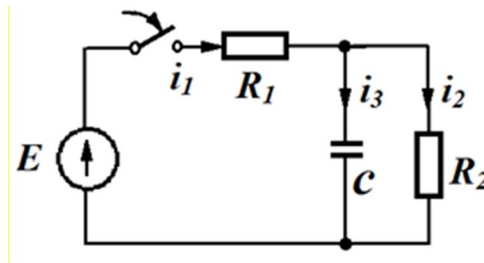


Рисунок 5.16 Підключення лінійного електричного ланцюга з нульовими початковими умовами

Коефіцієнт $k(t)$ називають *перехідною функцією по напрузі*. Це безрозмірна величина, чисельно рівна напрузі між точками a і b схеми, якщо на вхід схеми подати постійну напругу в 1 В; $k(t)$ так само, як і $g(t)$, можна визначити або розрахунковим, або дослідним шляхом.

Приклад 1. Для наступного ланцюга (рис.5.17) визначити перехідну провідність.

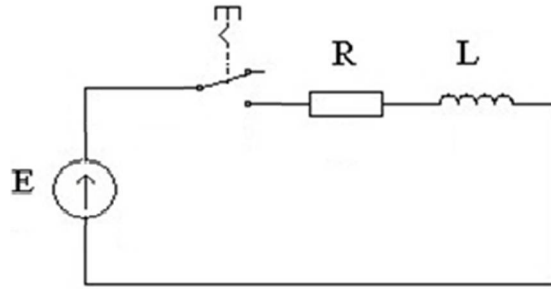


Рисунок 5.17 Електричний ланцюг з рубильником

Рішення.

При замиканні ключа виникає струм

$$i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

За визначенням перехідна провідність дорівнює струму в ланцюзі при $E = 1 \text{ В}$.

Таким чином,

$$g(t) = \frac{1}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

Приклад 2. Дано електричний ланцюг рис.5.18.

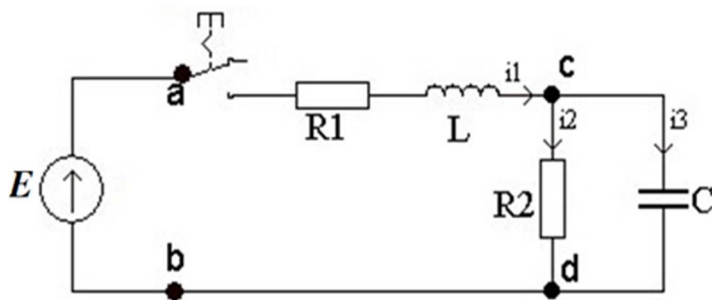


Рисунок 5.18 Приклад наведеної раніше схеми (рис.5.6) з обраними напрямками струмів

Треба знайти власну перехідну провідність першої вітки $g_{11}(t)$, взаємну перехідну провідність між третьою і першою вітками $g_{31}(t)$ і перехідну функцію напруги на конденсаторі $k_{U_C}(t)$ для схеми рис.5.18. Параметри схеми:

$$R_1 = 1000 \text{ Ом}; \quad R_2 = 2000 \text{ Ом}; \quad C = 50 \text{ мкФ}.$$

Рішення.

За визначенням,

$$i_1 = E g_{11}(t); \quad i_3 = E g_{31}; \quad U_C = E k_{U_C}(t).$$

За допомогою класичного методу отримуємо:

$$i_1 = \frac{E}{R_1 + R_2} + E \frac{R_2}{R_1(R_1 + R_2)} e^{pt};$$

$$i_3 = \frac{E}{R_1} e^{pt};$$

$$U_C = E \frac{R_2}{R_1 + R_2} (1 - e^{pt});$$

$$p = -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}.$$

Вважаючи в цих формулах $E=1 \text{ В}$, знаходимо:

$$g_{11}(t) = \frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{R_2}{R_1(R_1 + R_2)} e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t};$$

$$g_{31}(t) = \frac{1}{R_1} e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t};$$

$$k_{u_C}(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left(1 - e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t} \right).$$

Підстановка числових значень дає:

$$g_{11}(t) = 0.00033 + 0.00067 e^{-30t} \text{ см};$$

$$g_{31}(t) = 0.001 e^{-30t} \text{ см};$$

$$k_{u_C}(t) = \frac{2}{3} (1 - e^{-30t}).$$

5.10 Інтеграл Дюамеля

Познайомимося з другим методом розрахунку перехідних процесів в лінійних електричних ланцюгах - з розрахунком за допомогою інтегралу Дюамеля.

При використанні інтеграла Дюамеля домовимося змінну, по якій проводиться інтегрування, позначати через τ , а під t , як і раніше, будемо розуміти той момент часу, в який потрібно знайти струм в ланцюзі. Нехай у ланцюг з нульовими початковими умовами в момент часу $t = 0$ підключається напруга $u(\tau)$ (рис.5.19). Для того, щоб знайти струм в ланцюзі у момент часу t , замінимо плавну криву східчастою і підсумуємо струми від початкової напруги $u(0)$ і від всіх сходинок напруги, що набувають чинності з запізненням у часі.

Напруга $u(0)$ в момент часу t викличе в ланцюзі струм $u(0)g(t)$, де $g(t)$ — *перехідна провідність*.

В момент времени $\tau + \Delta\tau$ (рис.5.19) виникає стрибок напруги:

$$\Delta u \approx \left(\frac{du}{d\tau} \right) \Delta\tau = u'(\tau) \Delta\tau .$$

Для того, щоб знайти складову струму в момент часу t , яка з'являється через цей стрибок напруги Δu , необхідно величину $u'(\tau) \Delta\tau$ помножити на значення перехідної провідності з урахуванням часу дії стрибка до моменту часу t .

З рис. 5.19 видно, що цей час дорівнює $t - \tau - \Delta\tau$. Отже, збільшення струму дорівнює $u'(\tau) g(t - \tau - \Delta\tau) \Delta\tau$.

Повний струм у момент часу t отримаємо, якщо підсумуємо всі часткові струми від окремих стрибків і додамо їх до струму $u(0)g(t)$:

$$i(t) = u(0)g(t) + \sum u'(\tau)g(t - \tau - \Delta\tau) \Delta\tau /$$

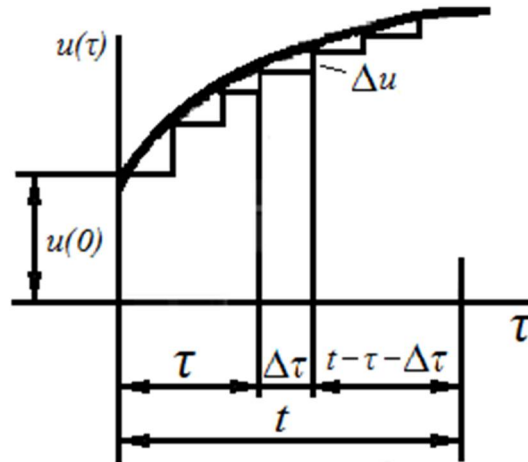


Рисунок 5.19 Заміна повільної кривої зростання напруги живлення ланцюга східчатою кривою

Кількість членів суми дорівнює числу сходинок напруги. Зрозуміло, що ступінчаста крива тим краще «буде замінювати плавну криву, чим більше буде число сходинок. З цією метою замінимо кінцевий інтервал часу $\Delta\tau$ на нескінченно малий $d\tau$, і перейдемо від суми до інтегралу:

$$i(t) = u(0)g(t) + \int_0^t u'(\tau)g(t-\tau)d\tau \quad (5.18)$$

За допомогою інтеграла Дюамеля можна знайти не тільки струм, але і будь-яку іншу величину, наприклад, напругу. У цьому випадку в формулу замість перехідної провідності $g(t)$ буде входити перехідна функція по напрузі $k(t)$.

Послідовність розрахунку за допомогою інтеграла Дюамеля

Розрахунок за допомогою інтеграла Дюамеля проводять у чотири етапи:

- 1) визначення перехідної провідності $g(t)$ для досліджуваного ланцюга;
- 2) визначення $g(t - \tau)$. З цією метою у формулі для $g(t)$ замінюють t на $(t - \tau)$;
- 3) визначення $u'(\tau)$. Для цього знаходять похідну від заданої напруги $u(t)$ за часом t і в отриманому виразі замінюють t на τ ;

4) підстановка знайдених на етапах 1,2,3 функцій у формулу (5.18), інтегрування по змінній τ і підстановка меж.

6. АНАЛІЗ ЛАНЦЮГІВ В ЧАСТОТНІЙ ОБЛАСТІ

6.1 Частотні характеристики послідовного коливального контуру

Подамо первісний ланцюг послідовного коливального контуру (рис.6.1а) в комплексній формі (рис.6.1б).

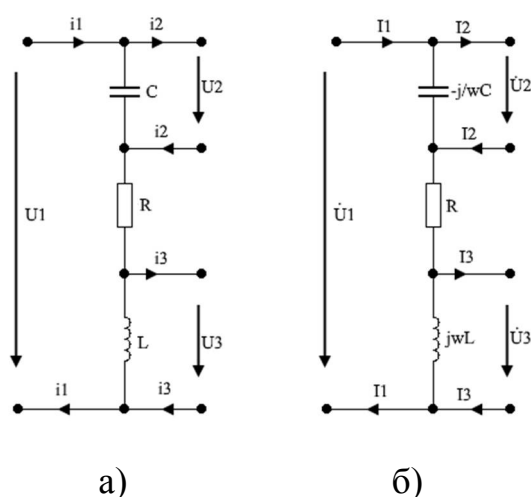


Рисунок 6.1 До визначення вхідних й передавальних характеристик послідовного коливального контуру

Введемо поняття добротності контуру й його характеристичного опору. За визначенням при резонансній частоті $\omega = \omega_0$ уявна частина опору дорівнює 0, тобто:

$$\text{Im}|Z| = \text{Im} \left\{ R + j \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right) \right\} = \omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} = X_L + X_C = 0;$$

тобто:

$$\omega_0 \cdot L = \frac{1}{\omega_0 \cdot C};$$

звідки

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}; \quad (6.1)$$

$$f_0 = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}}.$$

Характеристичний опір контуру:

$$\rho = \omega_0 \cdot L = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (6.2)$$

Відношення діючого значення напруги на реактивному елементі контуру до діючого значення напруги на контурі на резонансній частоті має назву добротності контуру:

$$Q = \frac{U_L}{U} \Big|_{\omega=\omega_0} = \frac{U_C}{U} \Big|_{\omega=\omega_0} = \frac{d}{R}.$$

Добротність коливального контуру можна виразити через параметри його елементів:

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (6.3)$$

Величина $d = \frac{1}{Q}$, яка є зворотною до добротності контуру, має назву затухання контуру.

Примітка. Добротність коливального контуру радіотехнічної апаратури лежить в межах від декількох десятків до декількох сотень і навіть тисяч (на надзвичайно високих частотах). Таким чином, у режимі резонансу напруга на реактивних елементах може у багато разів перевищувати прикладену до контуру напругу.

Введемо наступне поняття – узагальнене розстроєння, яке визначається наступним виразом (6.4):

$$\xi = \frac{x}{r} = \frac{\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}}{R} = Q \cdot \left[\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right]. \quad (6.4)$$

Доведемо:

$$\begin{aligned} \frac{\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}}{R} &= \frac{1}{R} \cdot \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega C} \right) = \\ \frac{1}{R} \cdot \left(\frac{\omega \cdot \sqrt{L} \cdot \sqrt{L} \cdot \sqrt{C}}{\sqrt{C}} - \frac{1}{\omega \cdot \sqrt{C} \cdot \sqrt{C} \cdot \sqrt{L}} \cdot \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{L}} \right) &= \\ \frac{1}{R} \cdot \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{C}} \cdot \left(\omega \cdot \sqrt{L} \cdot \sqrt{C} - \frac{1}{\omega \cdot \sqrt{C} \cdot \sqrt{L}} \right) &= Q \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right). \end{aligned}$$

Використовуючи нові поняття – добротності контуру й узагальнене розстроєння, запишемо вираз для вхідної провідності $Y(j\omega)$ для послідовного коливального контуру :

$$Y(j\omega) = \frac{1}{Z} = \frac{1}{\left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right]}; \quad (6.5)$$

або в показниковій формі:

$$Y(j\omega) = Y(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} * e^{-j \arctg\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)}.$$

Звідси знайдемо аналітичний вираз для АЧХ (рис.6.2а) й ФЧХ (рис.6.2б) вхідної провідності:

$$Y(\omega) = \frac{1}{R \cdot \sqrt{1 + \left[\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)/R\right]^2}} = \frac{1}{R \cdot \sqrt{1 + Q^2 \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}; \quad (6.6)$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg\left[\frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R}\right] = -\arctg\left[Q \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]. \quad (6.7)$$

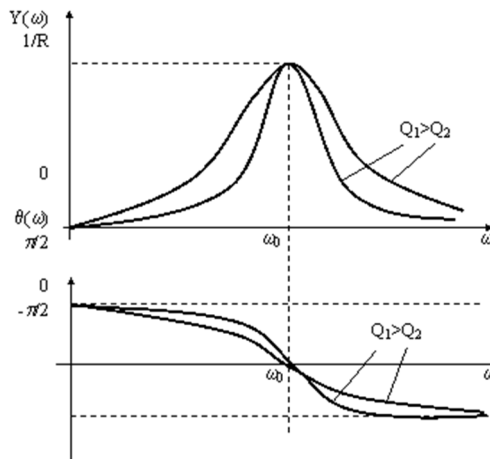


Рисунок 6.2 АЧХ(а) и ФЧХ(б) вхідної провідності послідовного коливального контуру

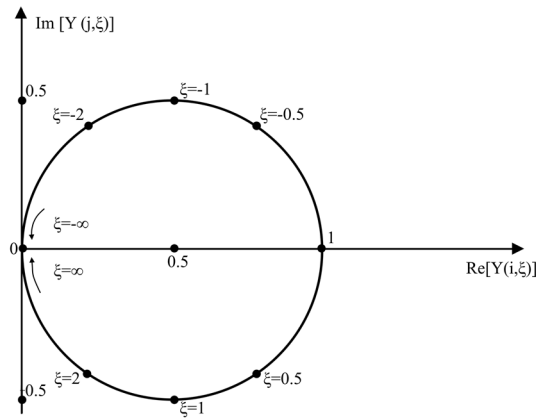


Рисунок 6.3 – Годограф нормованої комплексної провідності послідовного коливального контуру

На резонансній частоті $\xi = 0$, на частотах нижче резонансної $\xi < 0$, причому нульовому значенню ω відповідає значення $\xi = -\infty$. На частотах вище резонансної $\xi > 0$, при $\omega = \infty$ значення узагальненого розстроєння також дорівнює нескінченності.

У ряді випадків у якості аргументу нормованих частотних характеристик використовують абсолютне розстроєння $\Delta\omega = \omega - \omega_0$, відносне розстроєння $\delta = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$, або нормовану частоту $\bar{\omega} = \frac{\omega}{\omega_0}$.

Комплексна вхідна провідність $Y(j\omega)$ та її модуль $Y(\omega)$ зазвичай нормують за значенням, котре вони приймають на резонансній частоті:

$$\begin{aligned} \dot{Y}(j\omega_0) &= Y(\omega_0) = \frac{1}{R}; \\ \bar{Y}(j\omega) &= \frac{Y(j\omega)}{Y(j\omega_0)} = R \cdot Y(j\omega); \\ \bar{Y}(\omega) &= \frac{Y(\omega)}{Y(\omega_0)} = R \cdot Y(\omega). \end{aligned} \quad (6.8)$$

З використанням (6.4), (6.8) вирази (6.5), (6.6), (6.7) перетворюються до виду:

$$\bar{Y}(j\omega) = \bar{Y}(j\xi) = \bar{Y}(\xi) \cdot e^{j\varphi(\xi)} = 1/(1 + j\xi);$$

або

$$\begin{aligned} \bar{Y}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{1+Q^2 \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = \bar{Y}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}; \\ \bar{\varphi}(\omega) &= -\arctg \left[Q \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right] = \bar{\varphi}(\xi) = -\arctg \xi. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Вибірчі властивості послідовного коливального контуру

Цінність послідовного коливального контуру полягає в тому, що амплітуда реакції контуру на гармонійний вплив істотно залежить від частоти. Контур якби «пропускає» коливання одних частот й «не пропускає» коливань других частот. Здатність електричних кіл виділяти коливання окремих частот з суми коливань різних частот називається вибірковістю.

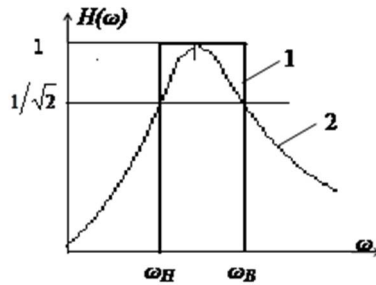


Рисунок 6.4 – Нормована АЧХ виборчого кола
1 – ідеального, 2 - реального

В ідеальному випадку відгук виборчого кола повинен мати постійне значення в межах визначеного діапазону частот, який має назву смуга пропускання ланцюга, й буде нульовим за межами цього діапазону. Нормована АЧХ ідеального виборчого кола повинна мати прямокутну форму (рис 6.4 крива 1). АЧХ реальних виборкових кіл, в тому числі і послідовного коливального контуру (рис. 6.4, крива 2) відрізняються від ідеальної характеристики відсутністю різкої границі між діапазонами пропускання та придушення частот. Зрозуміло, що вибіркові властивості реальних кіл будуть тим вищими, чим ближчою буде форма їх нормованої АЧХ до прямокутника.

Смуга пропускання $\omega_B - \omega_H$ реальних виборкових пристроїв умовно визначається як діапазон частот, в межах якого амплітуда відгуку кола не падає нижче рівня $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$ від максимального значення.

На резонансній частоті нормована вхідна провідність контуру дорівнює одиниці. Визначимо узагальнене розстроєння $\xi_{гр}$ та граничні частоти $\omega_{гр}$, які відповідають смузі пропускання.

Вважаючи що

$$\xi = \xi_{\text{гр}}, \quad \bar{Y}(\xi_{\text{гр}}) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

ми отримаємо:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

звідки $\xi^2 = 2 - 1 = 1$ або $\xi = \pm 1$; або $\xi_{\text{н}} = -1$; $\xi_{\text{в}} = 1$.

Аргумент вхідної провідності в межах смуги пропускання контуру (рис. 6.2) дорівнює $\pm \frac{\pi}{4}$.

Вважаючи, що у виразі (6.4) $\xi = -1, \omega = \omega_{\text{н}}, \xi = 1, \omega = \omega_{\text{в}}$, запишемо систему рівнянь для визначення нижньої $\omega_{\text{н}} = \omega_{\text{гр1}}$ та верхньої $\omega_{\text{в}} = \omega_{\text{гр2}}$ граничної частоти:

$$\begin{cases} Q \cdot \left[\frac{\omega_{\text{н}}}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_{\text{н}}} \right] = -1; \\ Q \cdot \left[\frac{\omega_{\text{в}}}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_{\text{в}}} \right] = 1. \end{cases}$$

Звідси знайдемо:

$$\omega_{\text{в}} = \omega_0 \left[(d/2) + \sqrt{1 + d^2/4} \right];$$

$$\omega_{\text{н}} = \omega_0 \left[(-d/2) + \sqrt{1 + d^2/4} \right];$$

де $d = \frac{1}{Q}$ - затухання контуру.

Ширина смуги пропускання пропорційна до резонансної частоти контуру:

$$2\Delta\omega_0 = \omega_{\text{в}} - \omega_{\text{н}} = \omega_0 \cdot d,$$

а відносна ширина смуги пропускання

$$\frac{2\Delta\omega_0}{\omega_0} = \frac{1}{Q} = d$$

дорівнює його затуханню.

Висновок: вибіркві властивості послідовного коливального контуру залежать від його добротності. Чим вища $Q_{\text{к}}$, тим менша ширина смуги пропускання.

6.2 Частотні характеристики паралельного коливального контуру

Наведена схема на рис. 6.5 є дуальною по відношенню до схеми (рис. 6.1) послідовного коливального контуру.

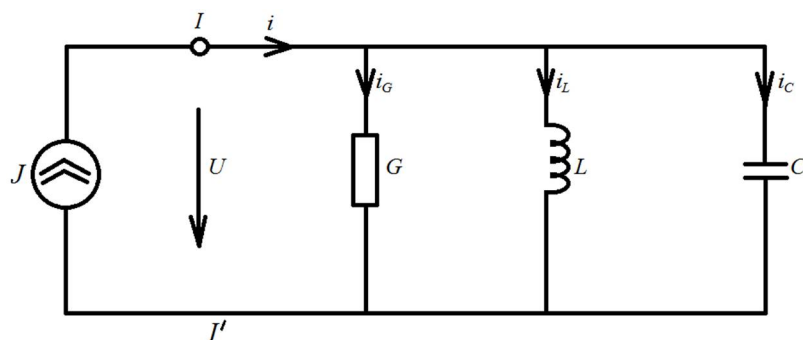


Рисунок 6.5 - Еквівалентна схема паралельного коливального контуру

Проведено взаємну заміну струмів та напруги, опорів та провідності, ємності та індуктивності й прийдемо до тих самих формул, які приведені для послідовного коливального контуру.

Резонансну частоту знайдемо з умови що, уявна складова вхідної провідності паралельної RLC - кола дорівнює нулю:

$$\text{Im} = [Y]_{\omega=\omega_p} = \text{Im} \left[G + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \right]_{\omega=\omega_p}; \quad (6.10)$$

$$\omega_p C - \frac{1}{\omega_p L} = 0.$$

Вирішуючи (6.10), з'ясуємо, що резонансна частота паралельного коливального контуру ω_p співпадає з резонансною частотою послідовного коливального контуру, якщо він складений з тих же елементів:

$$\omega_p = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}};$$

добротність контуру:

$$Q = \frac{I_C}{I} \Big|_{\omega=\omega_p} = \frac{I_L}{I} \Big|_{\omega=\omega_p} = \frac{\sigma}{G};$$

де σ - характеристична провідність контуру ,

а G - провідність втрат (дуальна ρ в послідовному коливальному контурі).

До вхідних характеристик паралельного коливального контуру відноситься його комплексний вхідний опір в режимі холостого ходу ($G_H = 0$, тобто $R_H = \infty$),

$$Z(j\omega) = \left. \frac{\dot{U}}{I} \right|_{G_H=0} = \frac{1}{G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)} = Z(\omega) e^{j\varphi(\omega)}. \quad (6.11)$$

Тоді вирази для нормованого модулю та аргументу комплексного вхідного опору паралельного коливального контуру будуть виглядати аналогічно (6.9):

$$\bar{Z}(\omega) = \bar{Z}(\xi) = GZ(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[Q\left(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega}\right)\right]^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}}; \quad (6.12)$$

$$\varphi(\omega) = \varphi(\xi) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega}\right) = -\operatorname{arctg}\xi.$$

Отже, нормовані АЧХ та ФЧХ вхідного опору паралельного коливального контуру співпадають з відповідними характеристиками вхідної провідності послідовного коливального контуру. Рис. 6.2 відображає їх вибіркові властивості.

І без висновку помітимо, що добротність паралельного коливального контуру основного виду співпадає з добротністю послідовного коливального контуру, складеного з тих самих елементів.

Окрім паралельного коливального контуру основного виду розрізняють паралельні коливальні контури другого та третього видів. Відміна полягає в тому, що паралельний коливальний контур дозволяє конструктивно вмикати котушки з відводами та ковзаючими контактами (рис. 6.6а) або частковим ввімкненням ємності (рис. 6.6б), тобто коли:

$$C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}.$$

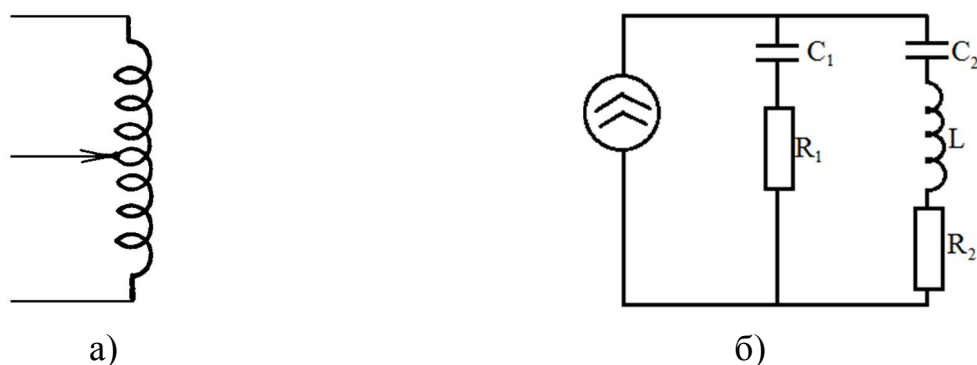


Рисунок 6.6 Способи організації складних коливальних контурів а) з поділеною індуктивністю, б) з поділеною ємністю

Таким чином можна впливати на значення резонансного опору контура та частоту резонанса в залежності від коефіцієнта включення. Вказана особливість паралельного коливального контуру широко використовується на практиці з метою узгодження його з джерелом енергії.

6.3 Пов'язані коливальні контури

В апаратурі зв'язку здатність електричних кіл виділяти коливання окремих частот з суми коливань різних частот забезпечують пов'язані коливальні контури.

Два контури називаються пов'язаними, якщо збудження коливань в одному з них призводить до виникнення коливань в іншому. Вибіркові властивості пов'язаних коливальних контурів кращі, ніж одиночних, тому до них є практичний інтерес.

На рис. 6.7 надані електричні схеми пов'язаних коливальних контурів деяких типів.

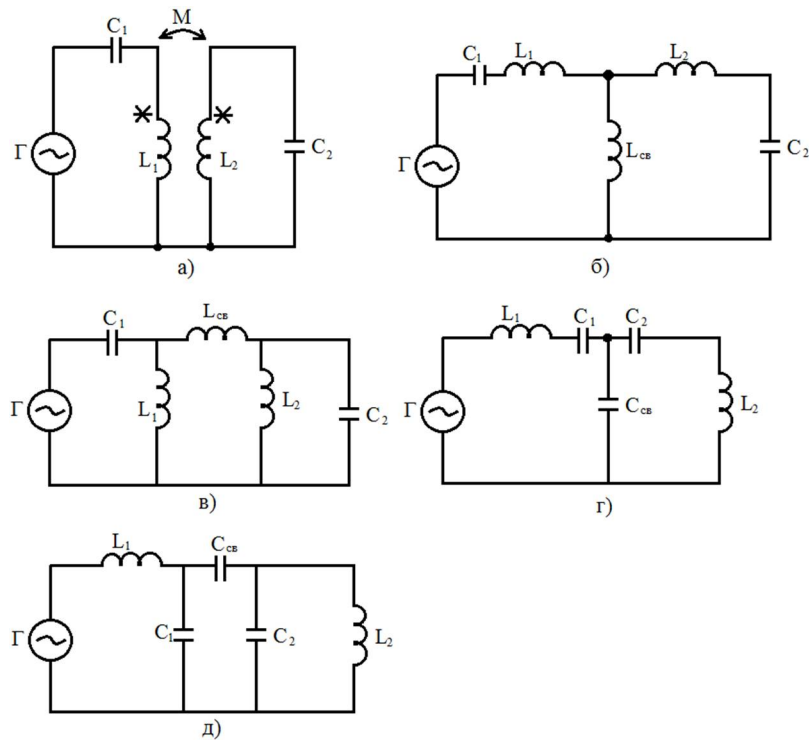


Рисунок 6.7 - принципів електричні схема пов'язаних коливальних контурів
 а) з трансформаторним зв'язком; б) з внутрішнім індуктивним зв'язком; в) з зовнішнім індуктивним зв'язком; г) з зовнішнім ємнісним зв'язком; д) з зовнішнім ємнісним зв'язком

Зовнішній вплив на пов'язані коливальні контури звичайно задають у вигляді напруги джерела напруги, яке включають до одного з контурів – первинного контуру. Реакцію на такий вплив спостерігають як струм або напругу на одному з елементів другого контуру – вторинного контуру.

Кожному типу пов'язаних коливальних контурів можна поставити у відповідність чотириполюсник зв'язку (рис.6.8):

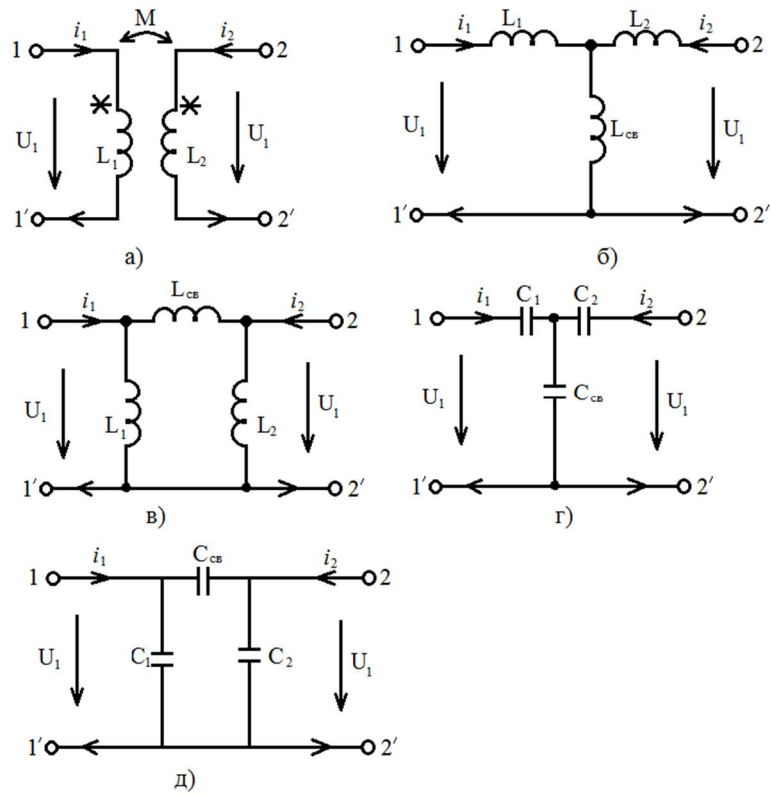


Рисунок 6.8 - Чотириполюсники зв'язку, які відповідають пов'язаним контурам, що наведені на рис. 6.7

Назвемо коефіцієнтом передачі з первинного контуру у вторинний K_{21} комплексний коефіцієнт передачі відповідного чотириполюсника зв'язку за напругою від затисків 1 – 1' до затисків 2 – 2' (за холостого ходу на затисках 2 – 2'):

$$K_{21} = \left. \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} \right|_{i_2=0} ;$$

а коефіцієнтом передачі зі вторинного контуру в первинний, відповідно:

$$K_{12} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right|_{i_1=0} .$$

Середнє геометричне значення коефіцієнтів передачі K_{21} та K_{12} називаються коефіцієнтом зв'язку між контурами:

$$k_{зв} = \sqrt{K_{21} \cdot K_{12}}. \quad (6.13)$$

Цей $k_{зв}$ є дійсним числом та не залежить від частоти, він використовується для кількісної оцінки ступені зв'язку між контурами.

Якщо первинний та вторинні контури мають однакову добротність $Q_1 = Q_2 = Q = \frac{1}{d}$, то оптимальний коефіцієнт зв'язку між контурами дорівнює затуханню контуру d :

$$k_{зв\ opt} = \frac{1}{Q} = d, \quad (6.14)$$

а величина

$$A = Q \cdot k_{зв}$$

отримала назву параметру зв'язку. Як видно з виразу (6.14), при налаштуванні пов'язаних контурів на повний резонанс $A=1$ (рис.6.9).

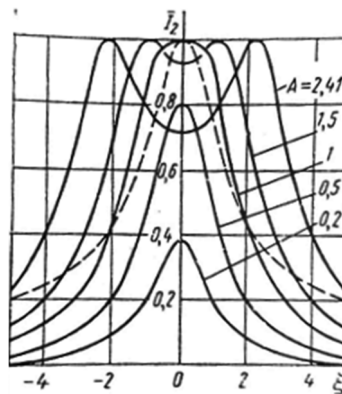


Рисунок 6.9 Залежність нормованого струму вторинного контуру від узагальненого розлаштування при різних значеннях параметру зв'язку:

пунктир - частотна характеристика одиночного коливального контуру

Висновок: у порівнянні з одиночним коливальним контуром, пов'язані контури мають значно кращі вибіркові властивості. Форма їх нормованих АЧХ набагато ближче до прямокутної та має більшу крутизну схилів на межах смуг пропускання.

7. БИТТЯ.

Коливальний процес, що виникає в результаті складання двох синусоїдних коливань з рівними амплітудами A і близькими, але не рівними частотами ω_1 і ω_2 , дає коливання, яке називають биттям. Нехай:

$$f(t) = A \sin \omega_1 t + A \sin \omega_2 t, \quad (7.1)$$

так як $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos \frac{(\alpha - \beta)}{2} \sin \frac{(\alpha + \beta)}{2}$, то

$$f(t) = 2A \cos \Omega t \sin \omega t; \quad (7.2)$$

де $\Omega = \frac{(\omega_1 - \omega_2)}{2}$ і $\omega = \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2}$.

Звичайно $\Omega \ll \omega$.

На рис.6.10 показано результат, тобто функція $f(t)$.



Рисунок 6.10 Графік результуючого коливання – биття

Згідно формули 7.2 побудовано графік синусоїди з частотою ω , амплітуда якої змінюється за законом $2A \cos \Omega t$. Обвідна нанесена пунктиром.

Треба відзначити, що амплітуда коливань є величина додатна, а величина

$\cos \frac{(\omega_1 - \omega_2)}{2} * t$ змінює знак під час переходу через нуль, то це відповідає

стрибокподібній зміні в ці моменти часу фази синусоїдних коливань з частотою

$\frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2}$ на кут π .

Явище биття коливань часто використовують для визначення відхилення

частоти ω_1 коливань в одній системі від частоти ω_2 коливань в другій системі. Вимірюючи частоту биття, ми одержуємо можливість визначити дуже маленькі відхилення $\Delta \omega = \omega_1 - \omega_2$ у порівнянні з самими величинами ω_1 і ω_2 .

8. МОДУЛЬОВАНІ КОЛИВАННЯ

У стандартного запису гармонійного сигналу

$$f(t) = A \cos(\omega t - \varphi) \text{ або } f(t) = A \sin(\omega t - \varphi)$$

є можливість змінювати в часі будь-який з трьох параметрів у правій частині: A , ω або φ .

Коливання, в якому змінюється тільки амплітуда A , а кутова частота ω і фаза φ незмінні, називають коливанням модульованим по амплітуді. Аналогічно, якщо A та φ постійні, а змінюється ω – модульованим по частоті. Відповідно: коли $A = \text{const}$, $\omega = \text{const}$, а φ – змінна, то – модульованим по фазі.

8.1 Амплітудно-модульоване (АМ) коливання.

Найпростішим амплітудно-модульованим (АМ) коливанням є коливання, в якому амплітуда модулюється за законом синуса:

$$f(t) = A(1 + m \sin \Omega t) \cdot \sin(\omega t + \varphi), \quad (8.1)$$

Якщо використати з тригонометрії тотожність:

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta),$$
 то формулу (8.1) можна представити у

вигляді суми трьох коливань:

$$f(t) = A \sin(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} mA \cos[(\omega - \Omega)t + \varphi] - \frac{1}{2} mA \cos[(\omega + \Omega)t + \varphi], \quad (8.2)$$

де Ω – частота модуляції, яка много менше несучої частоти ω ;

m – коефіцієнт модуляції, який змінюється в межах $0 < m < 1$.

В формулі (8.2) коливання з частотами $\omega - \Omega$ і $\omega + \Omega$ називають бічними частотами. Так як $\Omega \ll \omega$, то бічні частоти близькі до несучої.

На рис.6.11 наведено сигнали з амплітудною модуляцією; а) модулюючий $S(t)$, б) модульований $U(t)$.

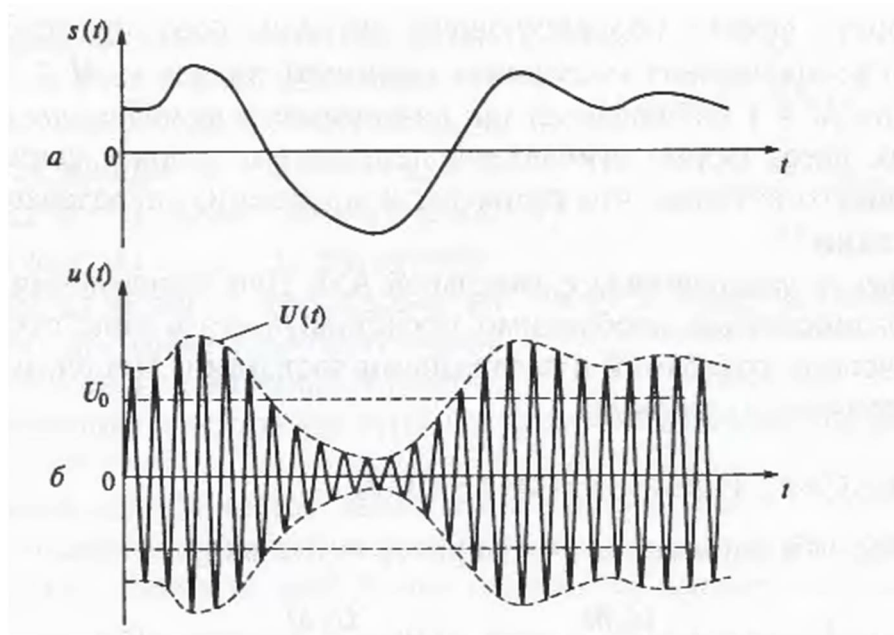


Рисунок 6.11 Сигнали з амплітудною модуляцією; а) модулюючий $S(t)$, б) модульований $U(t)$

Криву $U(t)$, яка наведена пунктиром на рис.6.11, називають обвідною АМ-радіосигнала. З рис. 6.11 видно, що обвідна повторює форму модулюючого сигналу $S(t)$. Звичайно, щоб обвідна АМ-сигналу досить точно повторювала форму модулюючого сигналу, функція $U(t)$ повинна мінятися повільно порівняно з $\sin(\omega t)$.

Спектр АМ-коливання зображений на рис. 6.12.

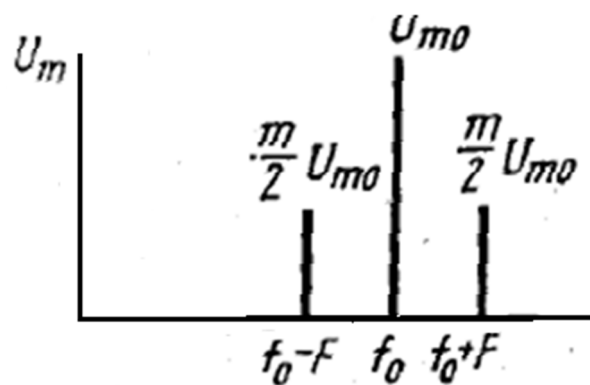


Рисунок 6.12 Спектр АМ-сигнала при гармонічній модуляції

Приклад:

$$f(t) = 20(1 + 0,6 \cdot \sin 10^3 t) \cdot \sin 10^5 t.$$

$$\text{Рішення: } \omega - \Omega = 10^5 - 10^3 = 99 \cdot 10^3; \quad \omega + \Omega = 101 \cdot 10^3; \quad mA/2 = 6;$$

$$\text{Отже: } f(t) = 20 \sin 10^5 t + 6 \cos(99 \cdot 10^3 t) - 6 \cos(101 \cdot 10^3 t);$$

Амплітуда коливань бічних частот залежить від глибини модуляції m , але не залежить від частоти модуляції Ω . Ширина смуги частот, займаної АМ-коливанням, також не залежить від m і дорівнює $(\omega + \Omega) - (\omega - \Omega) = 2\Omega$.

8.2 Сигнали з кутовою модуляцією

У несучому гармонійному коливанні $U_{HEC}(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ передане сполучення $S(t)$ може змінювати також або частоту ω , або початкову фазу φ , а амплітуда U_m буде залишатися незмінною. Оскільки аргумент гармонійного коливання $\Psi(t) = \omega t + \varphi$, який називається повною фазою, визначає поточне значення фазового кута. Такі сигнали отримали назву сигналів з кутовою модуляцією.

Загальний вигляд сигналів з кутовою модуляцією показано на наступному рисунку 6.13.



Рисунок 6.13 Осцилограма типового сигналу з кутовою модуляцією

Припустимо, що повна фаза $\Psi(t)$ пов'язана з сигналом $S(t)$ залежністю:

$$\Psi(t) = \omega_0 t + k \cdot S(t), \quad (8.3)$$

де ω_0 - значення частоти за відсутності корисного сигналу;

k - деякий коефіцієнт пропорційності.

Фазова модуляція (ФМ). Згідно співвідношенню (8.3) фазову модуляцію можна представити наступним чином :

$$U_{\text{ФМ}}(t) = U_M \cos [\omega_0 t + k \cdot s(t)]. \quad (8.4)$$

На рис. 6.14 відображено вплив керуючого низькочастотного сигналу $S(t)$ на несуче немодульоване коливання, тобто яким чином корисна інформація (сигнал $S(t)$) вкладається в несуче коливання перед відправкою в ефір.

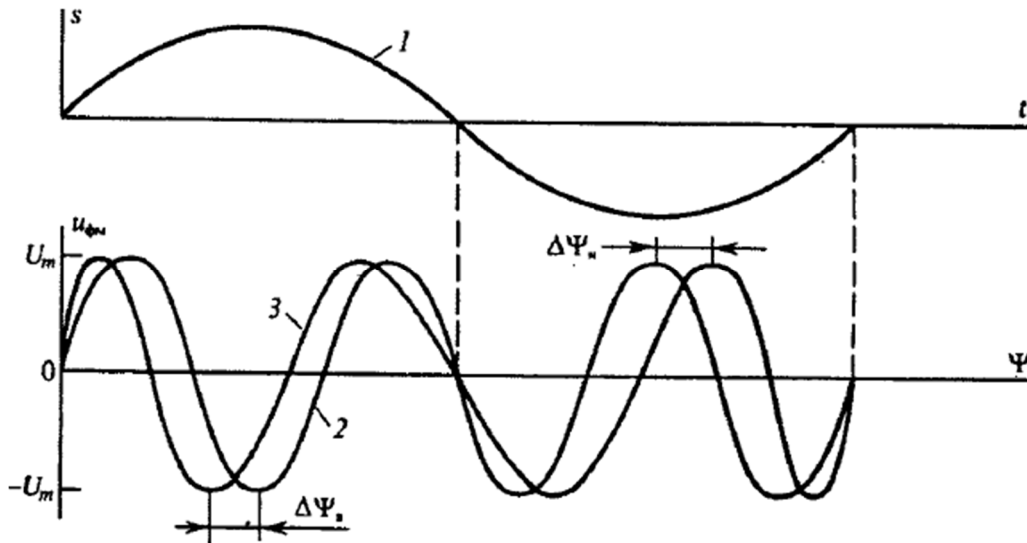


Рисунок 6.14 Фазова модуляція; 1 - модулюючий низькочастотний сигнал; 2 - немодульоване гармонійне коливання; 3 - сигнал з фазовою модуляцією.

Якщо сигнал $S(t)=0$, то ФМ-коливання є простим гармонійним коливанням. Зі збільшенням значень сигналу $S(t)$ повна фаза $\Psi(t)$ зростає в часі швидше, ніж за лінійним законом. При зменшенні значень $S(t)$ відбувається спад швидкості росту $\Psi(t)$ у часі. У моменти часу, коли сигнал $S(t)$ досягає екстримальних значень, абсолютний фазовий зсув між ФМ-сигналів і немодульованим гармонійним коливанням виявляється найбільшим. Граничне значення цього фазового зсуву називають **девіацією фази $\Delta\Psi$** . В загальному випадку, коли сигнал $S(t)$ змінює знак, прийнято розрізняти **девіацію фази вгору $\Delta\Psi_{\text{г}} = K S_{\text{max}}$** і **девіацію фази вниз $\Delta\Psi = K S_{\text{min}}$** .

На векторній діаграмі зображуючий вектор постійної довжини буде здійснювати обертання з непостійною кутовою швидкістю.

Миттєва частота $\omega(t)$ сигналу з кутовою модуляцією визначається як перша похідна від повної фази по часу:

$$\omega(t) = d\Psi/dt \quad (8.5)$$

так що

$$\Psi(t) = \int_{-\infty}^t \omega(\tau) d\tau + \text{const.} \quad (8.6)$$

Вираз (8.6) визначає значення повної фази сигналу в будь-який поточний момент часу t .

Частотна модуляція (ЧМ). При частотній модуляції (ЧМ) зв'язок між сигналом $S(t)$ і миттєвою частотою $\omega(t)$ описують наступним чином:

$$\omega(t) = \omega_0 + k \cdot S(t), \quad (8.7)$$

тому:

$$U_{чм} = U_m \cos[\omega_0 t + k \int_{-\infty}^t S(\tau) d\tau]. \quad (8.8)$$

Природними параметрами ЧМ-сигналу загального вигляду згідно з формулою (8.7) є девіація частоти вгору $\Delta\omega_b = k \cdot S_{\max}$ і девіація частоти вниз $\Delta\omega_h = k \cdot S_{\min}$

Якщо $S(t)$ - достатньо гладка функція, то зовні осцилограми ФМ-і ЧМ-сигналів не відрізняються.

Проте є принципова різниця: фазовий зсув між ФМ-сигналом і немодульованим коливанням пропорційний $S(t)$, в той час, як для ЧМ-сигналу цей зсув пропорційний інтегралу від переданого повідомлення.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Волощук Ю.І. Сигнали та процеси у радіотехніці. Підручник для студентів вищих навчальних закладів, том 1./ Волощук Ю.І. – Харків-. Компанія “Сміт”. – 2003.-580с.
2. Волощук Ю.І. Сигнали та процеси у радіотехніці. Підручник для студентів вищих навчальних закладів, том 2.-/ Волощук Ю.І. – Харків-. Компанія “Сміт”. – 2003.-444с.
3. Маляр В.С.Теоретичні основи електротехніки / Маляр В.С. – Л. Profbook-Львівська політехніка.-2018.-416с.
4. Карпов Ю.О.Теоретичні основи електротехніки. Комп’ютерні розрахунки та моделювання лінійних електричних кіл. / Ю.О. Карпов, С.Ш. Каців, В.В. Кухарчук Л.-2019.-210с.

ДОДАТКОВА ЛІТЕРАТУРА

1. Шегедин О.І. Теоретичні основи з електротехніки / О.І. Шегедин, В.С. Маляр.-К. Новий світ-2000.-2020-172с.
2. Методичні вказівки до самостійної роботи з дисципліни «Електроніка і мікросхемотехніка». (Електронне видання) / Уклад.: А.С. Торопов. – Северодонецьк: Вид-во СНУ ім. В.Даля, 2022. – 14 с.
E-mail: vidavnictvosnu.ua@gmail.com

У комп’ютерному класі кафедри є спеціальні оболонки САПР, за допомогою яких здійснюється аналіз і параметричний синтез будь-яких лінійних і деяких нелінійних ланцюгів: MAEC, ELCAD, PSPICE, Electronics Work Bench , універсальний математичний обчислювальний процесор Mathcad, пакет програм MATLAB.