

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет "Запорізька політехніка"

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ ЗАВДАННЯ

з вищої математики за темою:

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ
для студентів комп'ютерних спеціальностей денної форми
навчання

Розрахунково-графічні завдання з вищої математики за темою:
лінійна алгебра та аналітична геометрія, для студентів комп'ютерних
спеціальностей денної форми навчання / Укл.: Т.І. Левицька,
І.С. Пожуєва – Запоріжжя: НУ "Запорізька політехніка", 2024. - 65с.

Експерт

спеціальності: М.М. Касьян, доцент, к.т.н.

Рецензент:

Н.О. Нечипоренко, доцент, ф.-м.н.

Відповідальний

за випуск: Т.І. Левицька, доцент, к.т.н.

Рекомендовано до видання НМК
факультету КНТ НУ «Запорізька
політехніка»,
Протокол № 1 від 04.09.2024

Затверджено на засіданні кафедри
«Математика» НУ «Запорізька
політехніка»,
Протокол № 1 від 28.08.2024

ЗМІСТ

ВСТУП	4
ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ	5
Варіант 1	5
Варіант 2.....	7
Варіант 3.....	9
Варіант 4.....	11
Варіант 5.....	13
Варіант 6.....	15
Варіант 7.....	17
Варіант 8.....	19
Варіант 9.....	21
Варіант 10.....	23
Варіант 11.....	25
Варіант 12.....	27
Варіант 13.....	29
Варіант 14.....	31
Варіант 15.....	33
Варіант 16.....	35
Варіант 17.....	37
Варіант 18.....	39
Варіант 19.....	41
Варіант 20.....	43
Варіант 21.....	45
Варіант 22.....	47
Варіант 23.....	49
Варіант 24.....	51
Варіант 25.....	53
Варіант 26.....	55
Варіант 27.....	57
Варіант 28.....	59
Варіант 29.....	61
Варіант 30.....	63
ЛІТЕРАТУРА.....	65

ВСТУП

Розрахунково-графічні завдання складені у відповідності до програми з курсу "Вища математика" багатоступеневої підготовки фахівців і використовуються при проведенні занять зі студентами 1-го курсу факультету комп'ютерних наук і технологій НУ «ЗП» в ході вивчення курсу.

Метою виконання розрахунково-графічних завдань є закріплення теоретичних знань по дисципліні «Вища математика» та придбання практичних навичок при розв'язанні задач, що відносяться до розділу "Лінійна алгебра та аналітична геометрія" .

Приведено 30 варіантів індивідуальних завдань. Номер варіанту визначається за порядковим номером студента в журналі відвідування занять.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Варіант 1

1. Розв'язати СЛАР трьома методами: 1) за формулами Крамера; 2) матричним методом; 3) методом Гауса.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 13 \\ -x + 3y - z = -8 \\ 5x - 7y + 2z = 26 \end{cases}$$

2. Розв'язати СЛАР будь-яким методом або довести її несумісність:

$$\text{а) } \begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ 2x + y - z = 5 \\ 3x + 3y - 5z = 3 \end{cases} \quad ; \quad \text{б) } \begin{cases} 2x - y + 2z = 6 \\ x + 5y - z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 13 \end{cases} .$$

3. Розв'язати однорідну СЛАР:

$$\begin{cases} 2x - 4y + 6z = 0 \\ x + 5y - z = 0 \\ 3x + y + 5z = 0 \end{cases}$$

4. Задачі на вектори.

4.1 Дано координати вершин піраміди: $A(-1; 2; 3)$, $B(-3; 5; -4)$, $C(5; -1; 6)$, $D(3; -2; 7)$. Знайти: 1) довжину ребра AB , 2) кут між ребрами AB і AD , 3) площу грані ABC , 4) об'єм піраміди.

4.2 Відомо, що $\vec{x} \perp \vec{a}$, $\vec{x} \perp \vec{b}$, $\vec{a} = (-1; 2; 3)$, $\vec{b} = (1; -2; 1)$, $\angle(\vec{x}, 0y)$ - тупий, $|\vec{x}| = 3$. Знайти вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

4.3 Знайти векторний добуток векторів $\vec{a} = 2\vec{q} + 3\vec{p}$ і $\vec{b} = \vec{q} - 2\vec{p}$, якщо $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 1$, $\angle(\vec{p}, \vec{q}) = \pi/3$.

4.4 При якому значенні α вектори $\vec{a} = (-\alpha; 2; 3)$, $\vec{b} = (4; 3; -1)$, $\vec{c} = (5; -2; 4)$ компланарні? При яких α трійка векторів є правою?

4.5 Обрати базис серед векторів $\vec{a} = (1; 5; 9)$, $\vec{b} = (2; 4; 5)$, $\vec{c} = (8; -5; 6)$, $\vec{d} = (5; 7; 6)$. Розкласти небазисний вектор за векторами базису.

5. Пряма на площині.

5.1 Дано вершини трикутника $A(5; 8)$, $B(-4; 6)$, $C(2; -4)$. Знайти рівняння та відобразити на рисунок: 1) сторони AB , 2) висоти AH , 3) медіани BE , 4) прямої CN , паралельної AB , 5) точку перетину N прямих BE і CN .

5.2 Визначити гострий кут між прямими $y = -3x + 7$ і $y = 2x + 1$.

5.3 Знайти проекцію точки $P(4, 9)$ на пряму, що проходить через точки $A(3, 1)$ і $B(5, 2)$.

6. Площина та пряма у просторі.

6.1 Дано тетраедр із вершинами $A(1; 3; 6)$, $B(2; 2; 1)$, $C(-1; 0; 1)$ і $D(-4; 6; -3)$. Знайти довжину висоти, проведеної з вершини A , і кут між гранями BCD і ACB . Скласти рівняння площини, що проходить через вершину A паралельно грані BCD .

6.2 Знайти точку перетину прямої $\begin{cases} 2x - 2y - z + 1 = 0, \\ 3x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$ із площиною $x + 2y + 3z - 29 = 0$ і кут між ними.

6.3 Дано трикутник з вершинами $A(7; 2; -6)$, $B(11; -3; 5)$, $C(-3; 4; -2)$. Скласти рівняння медіани, проведеної з вершини B .

При якому значенні m пряма $\frac{x-1}{m} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{1}$ буде перпендикулярна побудованій прямій?

7. Звести рівняння кривих другого порядку до канонічного вигляду. Знайти їх фокуси, вершини, директриси, ексцентриситет. Побудувати криві та відобразити на рисунок знайдені результати.

7.1 $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$

7.2 $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$

7.3 $x = 2y^2 - 12y + 14$

Варіант 2

1. Розв'язати СЛАР трьома методами: 1) за формулами Крамера; 2) матричним методом; 3) методом Гауса.

$$\begin{cases} 5x - 2y + 3z = -22 \\ -x + 3y - 4z = 1 \\ 3x - 8y + 2z = -13 \end{cases}$$

2. Розв'язати СЛАР будь-яким методом або довести її несумісність:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x - y + 2z = 6 \\ x + 5y - z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 10 \end{cases} \quad ; \quad \text{б) } \begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ 2x + y - z = 5 \\ 3x + 3y - 5z = 6 \end{cases} .$$

3. Розв'язати однорідну СЛАР:

$$\begin{cases} 5x + 11y + 3z = 0 \\ x + 5y - z = 0 \\ 3x + y + 5z = 0 \end{cases}$$

4. Задачі на вектори:

4.1 Дано координати вершин піраміди: $A(5; -2; 1)$, $B(-3; 1; -5)$, $C(4; -1; 8)$, $D(2; -3; -4)$. Знайти: 1) довжину ребра AD , 2) кут між ребрами AB і AD , 3) площу грані ADC , 4) об'єм піраміди.

4.2 Дано: $\vec{x} \perp Oz$, $\vec{x} \cdot \vec{a} = -1$, $\vec{x} \cdot \vec{b} = 1$, $\vec{a} = (-1; 2; 3)$, $\vec{b} = (1; -2; 1)$.

Знайти вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

4.3 Відомо, що $|\vec{p}| = 1$, $|\vec{q}| = 2$, $\angle(\vec{p}, \vec{q}) = \pi/4$. Знайти площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a} = \vec{p} - 2\vec{q}$ і $\vec{b} = 3\vec{p} + \vec{q}$.

4.4 З'ясувати, чи розташовані точки $A(1; 2; -1)$, $B(4; 1; 5)$, $C(-1; 2; 1)$ і $D(2; 1; 3)$ в одній площині?

4.5 Обрати базис серед векторів $\vec{a} = (2; 3; 1)$, $\vec{b} = (-6; 5; 4)$, $\vec{c} = (-4; 2; 1)$, $\vec{d} = (-3; 1; 1)$. Розкласти небазисний вектор за векторами базису.

5. Пряма на площині.

5.1 Дано вершини трикутника $A(2; 3)$, $B(4; -2)$, $C(-2; -1)$. Знайти рівняння та відобразити на рисунок: 1) сторони AB , 2) висоти AN , 3) медіани BE , 4) прямої CN , паралельної AB , 5) точку перетину N прямих BE і CN .

5.2 Пряма відтинає на координатних осях рівні додатні відрізки. Скласти рівняння прямої, якщо площа трикутника, утвореного цими відрізками дорівнює 32 см^2 .

5.3 Визначити відстань між двома паралельними прямими $4x - 3y - 8 = 0$ і $4x - 3y + 7 = 0$.

6. Площина та пряма у просторі.

6.1 Площина α проходить через точки $A(-1; 3; 4)$, $B(-1; 5; 0)$ і $C(2; 6; 1)$, площина β задана рівнянням $3x + y + z - 3 = 0$. Перевірити, чи перпендикулярні площини, і з'ясувати, яка з них розташована ближче до початку координат.

6.2 Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $A(1; -5; 3)$ і утворює із осями координат OX і OY кути, відповідно рівні 60° й 45° , а з віссю OZ – тупий кут.

6.3 При якому значенні A площина $Ax + 3y - 5z + 1 = 0$ буде

паралельна прямій $\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{1}$. При $A = 4$ знайти кут між ними.

7. Звести рівняння кривих другого порядку до канонічного вигляду. Знайти їх фокуси, вершини, директриси, ексцентриситет. Побудувати криві та відобразити на рисунку знайдені результати.

7.1 $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$

7.2 $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$

7.3 $x = -\frac{1}{4}y^2 + y$

Варіант 3

1. Розв'язати СЛАР трьома методами: 1) за формулами Крамера; 2) матричним методом; 3) методом Гауса.

$$\begin{cases} -x - y + 2z = -8 \\ 4x + 2y - z = 21 \\ 7x + 3y - 4z = 38 \end{cases}$$

2. Розв'язати СЛАР будь-яким методом або довести її несумісність:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x - 4y + 6z = 6 \\ x + 5y - z = 1 \\ 3x + y + 5z = 8 \end{cases} \quad ; \quad \text{б) } \begin{cases} 5x + 11y + 3z = 10 \\ x + 5y - z = 1 \\ 3x + y + 5z = 8 \end{cases}.$$

3. Розв'язати однорідну СЛАР:

$$\begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x + 3y - 5z = 0 \end{cases}$$

4. Задачі на вектори:

4.1 Дано координати вершин піраміди: A(3; -4; 6), B(-2; 8; 1), C(-2; 3; -5), D(1; 2; -6). Знайти: 1) довжину ребра AC, 2) кут між ребрами AC і AD, 3) площу грані ABC, 4) об'єм піраміди.

4.2 Дано: $\vec{x} \parallel \vec{a}$, $\vec{a} = (3; -1; 4)$, $\angle(\vec{x}, 0z)$ - гострий, $|\vec{x}| = 1$. Знайти вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

4.3. Дано паралелограм ABCD. Відомо, що $\overline{AC} = 2\vec{p} - \vec{q}$, $\overline{BD} = 4\vec{p} - 5\vec{q}$, $|\vec{p}| = |\vec{q}| = 1$, $\angle(\vec{p}, \vec{q}) = \pi/6$. Знайти площу паралелограма.

4.4 Спростити вираз мішаного добутку $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) \cdot (\vec{c} + \vec{a})$.

4.5 Обрати базис серед векторів $\vec{a} = (3; 5; -2)$, $\vec{b} = (4; 6; -2)$, $\vec{c} = (3; 7; -4)$, $\vec{d} = (-7; 5; 9)$. Розкласти небазисний вектор за векторами базису.

5. Пряма на площині.

5.1 Дано вершини трикутника $A(4; -1)$, $B(3; 2)$, $C(-5; 4)$. Знайти рівняння та відобразити на рисунок: 1) сторони AB , 2) висоти AH , 3) медіани BE , 4) прямої CN , паралельної AB , 5) точку перетину N прямих BE і CN .

5.2 Дано рівняння двох сторін паралелограма $8x + 3y + 1 = 0$, $2x + y - 1 = 0$ і рівняння однієї з діагоналей $3x + 2y + 3 = 0$. Визначити координати вершин цього паралелограма.

5.3 Знайти точку Q , симетричну точці $P(-5; 13)$ відносно прямої $2x - 3y - 3 = 0$.

6. Площина та пряма у просторі.

6.1 Площина α проходить через точки $A(-1; 10; -3)$, $B(1; 1; -5)$ і $C(5; 4; -2)$, площина β проходить через точку $M(2; -3; -9)$ і відтинає на осях OX і OY відрізки $a = 18$, $b = 27$. Показати, що площини паралельні, і знайти відстань між ними.

6.2 Написати рівняння площини, що проходить через точку $M(-3; 1; 2)$ паралельно векторам $\vec{a} = (2; 5; -1)$ і $\vec{b} = (4; 1; 2)$. Знайти кут між побудованою площиною й площиною $18x + 8y + 11z - 10 = 0$.

6.3 Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M(-4; -7; 1)$ і паралельна прямій
$$\begin{cases} 2x + 3y + z - 6 = 0, \\ 4x - 5y - z + 2 = 0. \end{cases}$$

7. Звести рівняння кривих другого порядку до канонічного вигляду. Знайти їх фокуси, вершини, директриси, ексцентриситет. Побудувати криві та відобразити на рисунок знайдені результати.

7.1 $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$

7.2 $16x^2 - 9y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$

7.3 $x = -y^2 + 2y - 1$

Варіант 4

1. Розв'язати СЛАР трьома методами: 1) за формулами Крамера; 2) матричним методом; 3) методом Гауса.

$$\begin{cases} 3x - 2y + 6z = 10 \\ -x + 5y - z = 4 \\ 2x - 3y + z = -4 \end{cases}$$

2. Розв'язати СЛАР будь-яким методом або довести її несумісність:

$$\text{а) } \begin{cases} 5x + 11y + 3z = 9 \\ x + 5y - z = 1 \\ 3x + y + 5z = 8 \end{cases} \quad ; \quad \text{б) } \begin{cases} 2x - 4y + 6z = 7 \\ x + 5y - z = 1 \\ 3x + y + 5z = 8 \end{cases} .$$

3. Розв'язати однорідну СЛАР:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ x + 5y - z = 0 \\ 5x + 3y + 3z = 0 \end{cases}$$

4. Задачі на вектори:

4.1 Дано координати вершин піраміди: A(-3; -1; 2), B(3; -3; 4), C(-5; 2; -6), D(-4; 2; -8). Знайти: 1) довжину ребра BC, 2) кут між ребрами BC і BD, 3) площу грані BSA, 4) об'єм піраміди.

4.2 Відомо, що $\vec{x} \perp \vec{a}$, $\vec{x} \perp \vec{b}$, $\vec{a} = (5; 1; 4)$, $\vec{b} = (-2; 2; -1)$, $\angle(\vec{x}, 0z)$ - гострий, $|\vec{x}| = 2$. Знайти вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

4.3 Дано вершини A(1; 2; 3), B(-1; 4; 5), C(2; -3; 1) трикутника. Знайти довжину висоти трикутника, що проведена з вершини B.

4.4 При якому значенні α вектори $\vec{a} = (5; -2; 6)$, $\vec{b} = (4; \alpha; -1)$, $\vec{c} = (3; -2; 4)$ компланарні? При яких α трійка векторів є лівою?

4.5 Обрати базис серед векторів $\vec{a} = (3; -1; 2)$, $\vec{b} = (5; -6; 4)$, $\vec{c} = (4; -5; 8)$, $\vec{d} = (9; 0; -4)$. Розкласти небазисний вектор за векторами базису.

5. Пряма на площині.

5.1 Дано вершини трикутника $A(-6; 2)$, $B(-2; -3)$, $C(4; 5)$. Знайти рівняння та відобразити на рисунку: 1) сторони AB , 2) висоти AN , 3) медіани BE , 4) прямої CN , паралельної AB , 5) точку перетину N прямих BE і CN .

5.2 Сторони трикутника лежать на прямих $x + 5y - 7 = 0$, $3x - 2y - 4 = 0$, $7x + y + 19 = 0$. Визначити його площу.

5.3 Знайти проекцію точки $P(-6, 4)$ на пряму $4x - 5y + 3 = 0$.

6. Площина та пряма у просторі.

6.1 При якому значенні l площини α і β будуть перпендикулярні? Площина α проходить через точки $K(-1; \frac{3}{2}; 0)$, $M(2; -1; 1)$, $N(8; 1; -1)$. Площина β задана рівнянням $3x + ly - 2z + 1 = 0$. При $l = 3$ знайти гострий кут між площинами α і β .

6.2 Написати канонічні рівняння прямої:
$$\begin{cases} x + y + z - 2 = 0, \\ x - y - 2z + 2 = 0. \end{cases}$$

6.3 Знайти значення m , при якому пряма
$$\begin{cases} x = 3 + mt, \\ y = -1 + 4t, \\ z = 5 - 9t \end{cases}$$

паралельна площини $7x - 3y + 8z - 10 = 0$. При $m = -2$ знайти точку перетину прямої із площиною.

7. Звести рівняння кривих другого порядку до канонічного вигляду. Знайти їх фокуси, вершини, директриси, ексцентриситет. Побудувати криві та відобразити на рисунку знайдені результати.

7.1 $4x^2 + y^2 + 40x - 6y + 105 = 0$

7.2 $x^2 - 4y^2 - 6x - 32y - 59 = 0$

7.3 $6x + 4y - y^2 + 2 = 0$

Варіант 5

1. Розв'язати СЛАР трьома методами: 1) за формулами Крамера; 2) матричним методом; 3) методом Гауса.

$$\begin{cases} x - 5y + z = 0 \\ 2x + 6y - z = 4 \\ -3x - y + 7z = 24 \end{cases}$$

2. Розв'язати СЛАР будь-яким методом або довести її несумісність:

$$\text{а) } \begin{cases} 7x - 4y + z = 0 \\ 2x + y - 3z = 4 \\ 3x - 6y + 7z = 6 \end{cases} \quad ; \quad \text{б) } \begin{cases} -4x + 13y - 17z = -5 \\ 2x + y - 3z = 1 \\ 3x - 6y + 7z = 3 \end{cases}.$$

3. Розв'язати однорідну СЛАР:

$$\begin{cases} -x + 3y - z = 0 \\ 3x + 2y - 4z = 0 \\ x + 8y - 6z = 0 \end{cases}$$

4. Задачі на вектори:

4.1 Дано координати вершин піраміди: A(1; 5; -3), B(-4; 2; -3), C(6; -2; 3), D(4; -1; 2). Знайти: 1) довжину ребра BD, 2) кут між ребрами BD і BA, 3) площу грані CBD, 4) об'єм піраміди.

4.2 Дано: $\vec{x} \perp 0y$, $\vec{x} \cdot \vec{a} = 6$, $\vec{x} \cdot \vec{b} = -1$, $\vec{a} = (-1; 2; 5)$, $\vec{b} = (4; -2; 3)$.

Знайти вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

4.3 Дано координати точок A(-4; 3; 2), B(1; -2; -3), C(5; 6; 1). Знайти векторний добуток $(\vec{AB} + 4\vec{BC}) \times (\vec{BA} - \vec{AC})$.

4.4 З'ясувати, при якому значенні α точки A(α ; 2; -1), B(4; 1; 5), C(-1; 2; 1) і D(2; 1; 3) розташовані в одній площині?

4.5 Обрати базис серед векторів $\vec{a} = (6; 4; 5)$, $\vec{b} = (2; 1; 2)$, $\vec{c} = (8; 3; 9)$, $\vec{d} = (5; 4; 2)$. Розкласти небазисний вектор за векторами базису.

5. Пряма на площині.

5.1 Дано вершини трикутника $A(5; -3)$, $B(-4; -2)$, $C(3; 4)$. Знайти рівняння та відобразити на рисунку: 1) сторони AB , 2) висоти AN , 3) медіани BE , 4) прямої CN , паралельної AB , 5) точку перетину N прямих BE і CN .

5.2 Площа трикутника дорівнює 8 кв.од. Дві його вершини знаходяться в точках $A(1; -2)$ і $B(2; 3)$, а третя вершина C лежить на прямій $2x + y - 2 = 0$. Визначити координати вершини C .

5.3 Скласти рівняння прямої, яка паралельна двом прямим $5x + y + 3 = 0$ і $5x + y - 17 = 0$ і знаходиться на рівній відстані від кожної прямої.

6. Площина та пряма у просторі.

6.1 На осі OX знайти точку, віддалену від площини, що проходить через точку $M(1; 8; -1)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (2; -1; -2)$, на відстань $d = \frac{2}{3}$.

6.2 Знайти кут між площинами α і β , де α проходить через точки $A(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, $B(2; 0; 1)$ паралельно осі Oz , а β - через точки $C(2; 2; 1)$, $D(6; 1; 0)$ і $E(-1; -1; 3)$.

6.3 Знайти проекцію точки $M(-6; 5; 7)$ на пряму
$$\begin{cases} x = 1 + 3t, \\ y = 7 - 2t, \\ z = 4 + t. \end{cases}$$

7. Звести рівняння кривих другого порядку до канонічного вигляду. Знайти їх фокуси, вершини, директриси, ексцентриситет. Побудувати криві та відобразити на рисунку знайдені результати.

7.1 $x^2 + 9y^2 + 3x - 27y + 13,5 = 0$

7.2 $y^2 - 9x^2 - 8y - 18x + 29 = 0$

7.3 $x + \frac{1}{4}y^2 - 2y = 0$

Варіант 6

1. Розв'язати СЛАР трьома методами: 1) за формулами Крамера; 2) матричним методом; 3) методом Гауса.

$$\begin{cases} -2x + y - z = -7 \\ -6x + y - 4z = -18 \\ 9x - 7y + 5z = 37 \end{cases}$$

2. Розв'язати СЛАР будь-яким методом або довести її несумісність:

$$\text{а) } \begin{cases} -4x + 13y - 17z = 7 \\ 2x + y - 3z = 1 \\ 3x - 6y + 7z = 3 \end{cases} \quad ; \quad \text{б) } \begin{cases} 7x - 4y + z = 0 \\ 2x + y - 3z = 4 \\ 3x - 6y + 7z = -8 \end{cases} .$$

3. Розв'язати однорідну СЛАР:

$$\begin{cases} -x + 3y - z = 0 \\ x + 4y - 2z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$$

4. Задачі на вектори:

4.1 Дано координати вершин піраміди: A(4; 2; -6), B(-1; 3; -4), C(-3; -2; 7), D(-5; 7; 3). Знайти: 1) довжину ребра CD, 2) кут між ребрами CD і CB, 3) площу грані ACD, 4) об'єм піраміди.

4.2 Дано: $\vec{x} \parallel \vec{a}$, $\vec{a} = (2; 1; -6)$, $\angle(\vec{x}, 0y)$ - тупий, $|\vec{x}| = 2$. Знайти вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

4.3 Знайти векторний добуток векторів $\vec{a} = \vec{q} - 2\vec{p}$ і $\vec{b} = \vec{3q} + \vec{p}$, якщо $|\vec{p}| = 1$, $|\vec{q}| = 1$, $\angle(\vec{p}, \vec{q}) = \pi/6$.

4.4 Спростити вираз мішаного добутку $(\vec{a} - \vec{c}) \cdot \vec{b} \cdot (\vec{c} + \vec{a})$.

4.5 Обрати базис серед векторів $\vec{a} = (4; 2; -5)$, $\vec{b} = (-6; -7; -7)$, $\vec{c} = (6; 7; 1)$, $\vec{d} = (4; 6; 2)$. Розкласти небазисний вектор за векторами базису.

5. Пряма на площині.

5.1 Дано вершини трикутника $A(5; 4)$, $B(-1; 2)$, $C(2; -4)$. Знайти рівняння та відобразити на рисунку: 1) сторони AB , 2) висоти AH , 3) медіани BE , 4) прямої CN , паралельної AB , 5) точку перетину N прямих BE і CN .

5.2 Дано рівняння двох сторін прямокутника $x - 2y = 0$, $x - 2y + 15 = 0$ і рівняння однієї з діагоналей $7x + y - 15 = 0$. Знайти вершини прямокутника.

5.3 Дано середини сторін трикутника $M_1(2; 1)$, $M_2(5; 3)$, $M_3(3; -4)$. Скласти рівняння його сторін.

6. Площина та пряма у просторі.

6.1 Нормаль до площини становить із координатними осями Oy і Oz кути $\beta = 60^\circ$ і $\gamma = 45^\circ$, а з віссю Ox - тупий кут. Скласти рівняння площини за умови, що відстань від початку координат до неї дорівнює 8 одиницям. Знайти відстань від точки $A(1; -1; 3\sqrt{2})$ до побудованої площини.

6.2 Написати канонічні рівняння прямої:
$$\begin{cases} 3x + y - z - 6 = 0, \\ 3x - y + 2z = 0. \end{cases}$$

6.3 Знайти точку перетину прямої
$$\begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = t + 2, \\ z = 1 - t \end{cases}$$
 із площиною

$3x - 2y + z - 3 = 0$ і кут між ними.

7. Звести рівняння кривих другого порядку до канонічного вигляду. Знайти їх фокуси, вершини, директриси, ексцентриситет. Побудувати криві та відобразити на рисунку знайдені результати.

7.1 $4x^2 + y^2 + 8x - 4y - 1 = 0$

7.2 $9y^2 - 4x^2 - 54y - 16x + 29 = 0$

7.3 $y^2 - 8y + 8x - 8 = 0$

Варіант 7

1. Розв'язати СЛАР трьома методами: 1) за формулами Крамера; 2) матричним методом; 3) методом Гауса.

$$\begin{cases} 8x - 7y + z = 52 \\ -3x + 4y - 2z = -23 \\ -x - 9y + 3z = -7 \end{cases}$$

2. Розв'язати СЛАР будь-яким методом або довести її несумісність:

$$\text{а) } \begin{cases} -x + 3y - z = 5 \\ 3x + 2y - 4z = 3 \\ x + 8y - 6z = 3 \end{cases} ; \quad \text{б) } \begin{cases} -x + 3y - z = 5 \\ x + 4y - 2z = 8 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}.$$

3. Розв'язати однорідну СЛАР:

$$\begin{cases} -4x + 13y - 17z = 0 \\ 2x + y - 3z = 0 \\ 3x - 6y + 7z = 0 \end{cases}$$

4. Задачі на вектори:

4.1 Дано координати вершин піраміди: A(8; -2; 5), B(-5; 9; -6), C(2; -4; -3), D(1; -7; 2). Знайти: 1) довжину ребра AD, 2) кут між ребрами AC і AD, 3) площу грані ACB, 4) об'єм піраміди.

4.2 Відомо, що $\vec{x} \perp \vec{a}$, $\vec{x} \perp \vec{b}$, $\vec{a} = (-2; 1; 4)$, $\vec{b} = (1; 2; -1)$, $\angle(\vec{x}, 0x)$ - тупий, $|\vec{x}| = 5$. Знайти вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

4.3 Відомо, що $|\vec{p}| = 4$, $|\vec{q}| = 1$, $\angle(\vec{p}, \vec{q}) = \pi/3$. Знайти площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a} = 2\vec{p} - \vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} + 3\vec{q}$.

4.4 Чи існують такі значення α , при яких вектори $\vec{a} = (\alpha; -1; 4)$, $\vec{b} = (3; \alpha; -2)$, $\vec{c} = (1; -5; 2)$ є компланарними? При яких α трійка векторів є правою?

4.5 Обрати базис серед векторів $\vec{a} = (2; -5; 4)$, $\vec{b} = (2; -3; 5)$, $\vec{c} = (9; -5; -7)$, $\vec{d} = (1; 4; -6)$. Розкласти небазисний вектор за векторами базису.

5. Пряма на площині.

5.1 Дано вершини трикутника $A(-4; 4)$, $B(3; 8)$, $C(-2; -3)$. Знайти рівняння та відобразити на рисунок: 1) сторони AB , 2) висоти AN , 3) медіани BE , 4) прямої CN , паралельної AB , 5) точку перетину N прямих BE і CN .

5.2 Скласти рівняння прямої, якщо точка $P(2; 3)$ є основою перпендикуляра, який опущено з початку координат на цю пряму.

5.3 Сторони трикутника задано рівняннями $4x - y - 7 = 0$, $x + 3y - 31 = 0$, $x + 5y - 7 = 0$. Визначити точку перетину його висот.

6. Площина та пряма у просторі.

6.1. Знайти кут між площиною $3x - 4y + 5z - 1 = 0$ і площиною, що проходить через точки $M(1; 1; 1)$ і $N(2; 3; -1)$ паралельно вектору $\vec{a} = (0; -1; 2)$.

6.2 Дві із граней куба розташовані на площинах $x + y + z - 1 = 0$ і $2x + 2y + 2z - 5 = 0$. Знайти його об'єм.

6.3 При якому значенні n прямі
$$\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = -2 + 3t, \\ z = -4t \end{cases}$$
 і

$\frac{x+2}{5} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-5}{n}$ будуть взаємно перпендикулярні?

7. Звести рівняння кривих другого порядку до канонічного вигляду. Знайти їх фокуси, вершини, директриси, ексцентриситет. Побудувати криві та відобразити на рисунок знайдені результати.

7.1 $6x^2 + 8y^2 + 3x - 4y + 1 = 0$

7.2 $y^2 - x^2 - x - y - 1 = 0$

7.3 $y^2 - 2y + 3x - 14 = 0$

Варіант 8

1. Розв'язати СЛАР трьома методами: 1) за формулами Крамера; 2) матричним методом; 3) методом Гауса.

$$\begin{cases} 5x - 2y + 4z = -27 \\ -2x + 7y - z = 30 \\ 11x - 2y + z = -60 \end{cases}$$

2. Розв'язати СЛАР будь-яким методом або довести її несумісність:

$$\text{а) } \begin{cases} -x + 3y - z = 5 \\ x + 4y - 2z = 6 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases} \quad ; \quad \text{б) } \begin{cases} -x + 3y - z = 5 \\ 3x + 2y - 4z = 3 \\ x + 8y - 6z = 13 \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідну СЛАР:

$$\begin{cases} 7x - 4y + z = 0 \\ 2x + y - 3z = 0 \\ 3x - 6y + 7z = 0 \end{cases}$$

4. Задачі на вектори:

4.1 Дано координати вершин піраміди: $A(3; -5; -8)$, $B(2; -6; 4)$, $C(-3; 1; -7)$, $D(-4; 2; 5)$. Знайти: 1) довжину ребра BD , 2) кут між ребрами BD і BC , 3) площу грані BCA , 4) об'єм піраміди.

4.2 Дано: $\vec{x} \perp 0x$, $\vec{x} \cdot \vec{a} = 2$, $\vec{x} \cdot \vec{b} = 1$, $\vec{a} = (7; 8; -3)$, $\vec{b} = (4; -3; 2)$.

Знайти вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

4.3. Дано паралелограм $ABCD$. Відомо, що $\overline{AC} = \overline{p} - \overline{q}$, $\overline{BD} = \overline{p} + 2\overline{q}$, $|\overline{p}| = 2$, $|\overline{q}| = 1$, $\angle(\overline{p}, \overline{q}) = \pi/3$. Знайти площу паралелограма.

4.4 З'ясувати, при яких значеннях α точки $A(3; 2; -1)$, $B(\alpha; 1; 5)$, $C(-1; 2; \alpha)$ і $D(\alpha; 1; 3)$ розташовані в одній площині?

4.5 Обрати базис серед векторів $\vec{a} = (-3; 1; -5)$, $\vec{b} = (1; -2; 1)$, $\vec{c} = (2; -6; 3)$, $\vec{d} = (-4; -1; -4)$. Розкласти небазисний вектор за векторами базису.

5. Пряма на площині.

5.1 Дано вершини трикутника $A(-2; -3)$, $B(-1; 4)$, $C(5; -2)$. Знайти рівняння та відобразити на рисунок: 1) сторони AB , 2) висоти AH , 3) медіани BE , 4) прямої CN , паралельної AB , 5) точку перетину N прямих BE і CN .

5.2 Дано дві суміжні вершини $A(-3; -1)$ і $B(2; 2)$ паралелограма $ABCD$ і точка $Q(3; 0)$ перетину його діагоналей. Скласти рівняння сторін цього паралелограма.

5.3 Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $P(3; 5)$ на однакових відстанях від точок $A(-7; 3)$ і $B(11; -15)$.

6. Площина та пряма у просторі.

6.1 Скласти рівняння площин, які паралельні площині $2x - y - 4z + 5 = 0$ і віддалені від точки $A(1; 2; 0)$ на відстані $\sqrt{21}$.

6.2 Скласти рівняння прямої, що проходить через точки перетину площини $2x + y - 3z + 1 = 0$ із прямими $\frac{x-5}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+4}{-6}$ і $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-5} = \frac{z+1}{2}$.

6.3 Написати рівняння площини, що проходить через точку $M(3; 1; -2)$ і пряму $\frac{x-4}{5} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$.

7. Звести рівняння кривих другого порядку до канонічного вигляду. Знайти їх фокуси, вершини, директриси, ексцентриситет. Побудувати криві та відобразити на рисунку знайдені результати.

7.1 $9x^2 + 16y^2 - 18x = 0$

7.2 $y^2 - x^2 - 6x + 4y - 4 = 0$

7.3 $y^2 + 8y - 9x - 29 = 0$

Варіант 9

1. Розв'язати СЛАР трьома методами: 1) за формулами Крамера; 2) матричним методом; 3) методом Гауса.

$$\begin{cases} -4x + y - 2z = 1 \\ 3x + y - 5z = -11 \\ x - 6y + 7z = -26 \end{cases}$$

2. Розв'язати СЛАР будь-яким методом або довести її несумісність:

$$\text{а) } \begin{cases} -x + 3y - z = 5 \\ 3x + 4y - z = 4 \\ x + 10y - 3z = 13 \end{cases} ; \quad \text{б) } \begin{cases} -x + 3y - z = 4 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 9y + 8z = 7 \end{cases} .$$

3. Розв'язати однорідну СЛАР:

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 5x + 5y - 4z = 0 \end{cases}$$

4. Задачі на вектори:

4.1 Дано координати вершин піраміди: A(7; -2; 4), B(3; -5; 6), C(-4; 8; 5), D(-3; 2; 1). Знайти: 1) довжину ребра АВ, 2) кут між ребрами АВ і АС, 3) площу грані ABD, 4) об'єм піраміди.

4.2 Дано: $\vec{x} \parallel \vec{a}$, $\vec{a} = (-5; 2; 1)$, $\angle(\vec{x}, 0x)$ - гострий, $|\vec{x}| = 3$. Знайти вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

4.3 Дано вершини A(-1; 3; 2), B(-2; -4; 1), C(3; -1; 1) трикутника. Знайти довжину висоти трикутника, що проведена з вершини А.

4.4 Спростити вираз мішаного добутку $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{b} \cdot (\vec{c} + \vec{a})$.

4.5 Обрати базис серед векторів $\vec{a} = (0; -8; -4)$, $\vec{b} = (5; 4; 7)$, $\vec{c} = (3; 4; 5)$, $\vec{d} = (-4; 8; -9)$. Розкласти небазисний вектор за векторами базису.

5. Пряма на площині.

5.1 Дано вершини трикутника $A(7; -1)$, $B(2; 5)$, $C(-2; -4)$. Знайти рівняння та відобразити на рисунку: 1) сторони AB , 2) висоти AN , 3) медіани BE , 4) прямої CN , паралельної AB , 5) точку перетину N прямих BE і CN .

5.2 Дано рівняння двох сторін прямокутника $5x + 2y - 7 = 0$, $5x + 2y - 36 = 0$ і рівняння його діагоналі $3x + 7y - 10 = 0$. Скласти рівняння інших сторін та другої діагоналі.

5.3 Знайти точку M_1 , симетричну точці $M_2(8; -9)$ відносно прямої, що проходить через точки $A(3; -4)$ і $B(-1; -2)$.

6. Площина та пряма у просторі.

6.1 Дано тетраедр із вершинами $A(1; -2; 2)$, $B(2; -3; -6)$, $C(5; 1; 4)$ і $D(0; -4; 4)$. Знайти кут між гранями ABD і BCD .

6.2 Площина α проходить через точку $M(-5; 4; 13)$ і відтинає на осях координат рівні відрізки. Площина β задана рівнянням, $mx + 3y - 4z + 1 = 0$. При якому значенні m площини α і β будуть перпендикулярні?

6.3 При яких значеннях A і C пряма $\frac{x+3}{7} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-1}{3}$ лежить у площині $Ax - 5y + Cz + 6 = 0$?

7. Звести рівняння кривих другого порядку до канонічного вигляду. Знайти їх фокуси, вершини, директриси, ексцентриситет. Побудувати криві та відобразити на рисунку знайдені результати.

7.1 $4x^2 + y^2 - 8x = 0$

7.2 $9x^2 - 15y^2 - 36x + 32y + 20 = 0$

7.3 $y^2 + 6y - 5x + 11 = 0$

Варіант 10

1. Розв'язати СЛАР трьома методами: 1) за формулами Крамера; 2) матричним методом; 3) методом Гауса.

$$\begin{cases} -2x - 6y - 3z = 5 \\ 4x - 3y - 2z = -4 \\ -5x + 3y + z = 2 \end{cases}$$

2. Розв'язати СЛАР будь-яким методом або довести її несумісність:

$$\text{а) } \begin{cases} -x + 3y - z = 4 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 9y + 8z = 5 \end{cases} \quad ; \quad \text{б) } \begin{cases} -x + 3y - z = 5 \\ 3x + 4y - z = 4 \\ x + 10y - 3z = 14 \end{cases} .$$

3. Розв'язати однорідну СЛАР:

$$\begin{cases} 7x + 3y - z = 0 \\ 3x - 2y + z = 0 \\ 4x + 5y - 2z = 0 \end{cases}$$

4. Задачі на вектори:

4.1 Дано координати вершин піраміди: A(4; -3; 6), B(-2; 7; -3), C(-4; -2; 9), D(-3; -1; 5). Знайти: 1) довжину ребра AC, 2) кут між ребрами AB і AD, 3) площу грані ABC, 4) об'єм піраміди.

4.2 Відомо, що $\vec{x} \perp \vec{a}$, $\vec{x} \perp \vec{b}$, $\vec{a} = (3; -2; 1)$, $\vec{b} = (1; 2; 3)$, $\angle(\vec{x}, 0z)$ - гострий, $|\vec{x}| = 1$. Знайти вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

4.3 Дано координати точок A(2; 1; 4), B(-3; 5; 4), C(-5; 4; -1). Знайти векторний добуток $(\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC}) \times (2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$.

4.4 Чи існують такі значення α , при яких вектори $\vec{a} = (\alpha; -1; 4)$, $\vec{b} = (3; 4; -2\alpha)$, $\vec{c} = (1; -5; 2)$ є компланарними? При яких α трійка векторів є лівою?

4.5 Обрати базис серед векторів $\vec{a} = (1; 2; -2)$, $\vec{b} = (9; -1; -5)$, $\vec{c} = (-3; 6; 5)$, $\vec{d} = (2; -3; 8)$. Розкласти небазисний вектор за векторами базису.

5. Пряма на площині.

5.1 Дано вершини трикутника $A(5; 6)$, $B(-4; 3)$, $C(-2; -5)$. Знайти рівняння та відобразити на рисунку: 1) сторони AB , 2) висоти AH , 3) медіани BE , 4) прямої CN , паралельної AB , 5) точку перетину N прямих BE і CN .

5.2 Скласти рівняння прямої, яка паралельна двом прямим $5x + 7y + 15 = 0$ і $5x + 7y + 3 = 0$ і знаходиться на рівній відстані від кожної прямої.

5.3 Дана пряма $2x + 3y + 4 = 0$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(2; 1)$ під кутом 45° до даної прямої.

6. Площина та пряма у просторі.

6.1 При якому значенні m кут між площинами α і β дорівнює $\frac{\pi}{3}$? Площина α проходить через точки $A(0; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$, $B(-3; 1; 1)$ і $C(2; 4; -7)$, площина β задана рівнянням $x - y - mz - 1 = 0$.

6.2 Скласти канонічні і параметричні рівняння прямої, що проходить через точку $M(1; 2; 3)$, якщо напрямний вектор $\vec{S}$ прямої утворює із координатними осями Ox і Oz кути $\alpha = 120^\circ$, $\gamma = 45^\circ$, а з віссю Oy - гострий кут.

6.3 При якому значенні C площина $2x + 3y + Cz - 3 = 0$ буде паралельна прямій $\begin{cases} 2x + 3y + z - 10 = 0, \\ 4x - 5y - z + 24 = 0 \end{cases}$. При $C = -2$ знайти кут між ними.

7. Звести рівняння кривих другого порядку до канонічного вигляду. Знайти їх фокуси, вершини, директриси, ексцентриситет. Побудувати криві та відобразити на рисунку знайдені результати.

7.1 $2x^2 + 5y^2 + 4x + 10y = 0$

7.2 $x^2 - 4y^2 - 16x - 16y - 32 = 0$

7.3 $x^2 + 10x + 8y + 41 = 0$

Варіант 11

1. Розв'язати СЛАР трьома методами: 1) за формулами Крамера; 2) матричним методом; 3) методом Гауса.

$$\begin{cases} -7x + y - 4z = -45 \\ 10x + y - z = 41 \\ 8x - 3y + 12z = 83 \end{cases}$$

2. Розв'язати СЛАР будь-яким методом або довести її несумісність:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x + y - 2z = 5 \\ x + 2y - z = 4 \\ 5x + 5y - 4z = 3 \end{cases} \quad ; \quad \text{б) } \begin{cases} 7x + 3y - z = 7 \\ 3x - 2y + z = 4 \\ 4x + 5y - 2z = 3 \end{cases} .$$

3. Розв'язати однорідну СЛАР:

$$\begin{cases} -x + 3y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 9y + 8z = 0 \end{cases}$$

4. Задачі на вектори:

4.1 Дано координати вершин піраміди: $A(4; -2; 5)$, $B(-1; 2; 4)$, $C(-3; 1; 2)$, $D(-3; 2; 8)$. Знайти: 1) довжину ребра AD , 2) кут між ребрами AC і AD , 3) площу грані ABD , 4) об'єм піраміди.

4.2 Дано: $\vec{x} \perp Oz$, $\vec{x} \cdot \vec{a} = -3$, $\vec{x} \cdot \vec{b} = -19$, $\vec{a} = (-3; 6; 3)$, $\vec{b} = (4; -7; 5)$. Знайти вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

4.3 Знайти векторний добуток векторів $\vec{a} = 4\vec{q} + \vec{p}$ і $\vec{b} = 2\vec{q} - \vec{p}$, якщо $|\vec{p}| = 3$, $|\vec{q}| = 2$, $\angle(\vec{p}, \vec{q}) = \pi/4$.

4.4 З'ясувати, при яких значеннях α точки $A(3; 2; -1)$, $B(\alpha; 1; 5)$, $C(-1; 4; \alpha)$ і $D(\alpha; 1; 3)$ розташовані в одній площині?

4.5 Обрати базис серед векторів $\vec{a} = (-3; 4; 5)$, $\vec{b} = (-2; 1; 3)$, $\vec{c} = (-3; 8; 4)$, $\vec{d} = (-4; -2; 7)$. Розкласти небазисний вектор за векторами базису.

5. Пряма на площині.

5.1 Дано вершини трикутника $A(-8; 7)$, $B(-4; -1)$, $C(5; 6)$. Знайти рівняння та відобразити на рисунок: 1) сторони AB , 2) висоти AN , 3) медіани BE , 4) прямої CN , паралельної AB , 5) точку перетину N прямих BE і CN .

5.2 Точка $A(-4; 5)$ є вершиною квадрата, діагональ якого лежить на прямій $7x - y + 8 = 0$. Скласти рівняння сторін і другої діагоналі цього квадрата.

5.3 Пряма відтинає на координатних осях рівні додатні відрізки. Скласти рівняння прямої, якщо площа трикутника, утвореного цими відрізками дорівнює 18 см^2 .

6. Площина та пряма у просторі.

6.1 Знайти лінії перетину координатних площин із площиною α , що проходить через точки $A(1; 1; -1)$, $B(3; -1; 1)$ і $C(2; 3; 2)$. Знайти кут між площиною α і площиною xOz .

6.2 Знайти таке число α , щоб площина $\alpha x + 2\alpha y + 10z - 2 = 0$ була паралельна площині $x + 2y + 5z - 7 = 0$, і визначити відстань між ними.

6.3 Написати канонічні рівняння прямої:
$$\begin{cases} 4x + y - 3z + 2 = 0, \\ 2x - y + z - 8 = 0. \end{cases}$$

7. Звести рівняння кривих другого порядку до канонічного вигляду. Знайти їх фокуси, вершини, директриси, ексцентриситет. Побудувати криві та відобразити на рисунку знайдені результати.

7.1 $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y + 16 = 0$

7.2 $x^2 - y^2 + 12x - 14y + 85 = 0$

7.3 $x = -\frac{1}{2}y^2 + y + 1$

Варіант 12

1. Розв'язати СЛАР трьома методами: 1) за формулами Крамера; 2) матричним методом; 3) методом Гауса.

$$\begin{cases} 11x - y + 13z = -23 \\ 2x + 3y - 4z = -1 \\ -5x - 6y + 2z = 4 \end{cases}$$

2. Розв'язати СЛАР будь-яким методом або довести її несумісність:

$$\text{а) } \begin{cases} 7x + 3y - z = 5 \\ 3x - 2y + z = 4 \\ 4x + 5y - 2z = 3 \end{cases} \quad ; \quad \text{б) } \begin{cases} 3x + y - 2z = 5 \\ x + 2y - z = 4 \\ 5x + 5y - 4z = 13 \end{cases} .$$

3. Розв'язати однорідну СЛАР:

$$\begin{cases} -x + 3y - z = 0 \\ 3x + 4y - z = 0 \\ x + 10y - 3z = 0 \end{cases}$$

4. Задачі на вектори:

4.1 Дано координати вершин піраміди: A(6; -1; 3), B(-1; 2; -5), C(2; -3; 6), D(4; 5; 2). Знайти: 1) довжину ребра BC, 2) кут між ребрами AC і AD, 3) площу грані ABC, 4) об'єм піраміди.

4.2 Дано: $\vec{x} \parallel \vec{a}$, $\vec{a} = (-4; 3; 2)$, $\angle(\vec{x}, 0z)$ - тупий, $|\vec{x}| = 1$. Знайти вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

4.3 Відомо, що $|\vec{p}| = 3$, $|\vec{q}| = 2$, $\angle(\vec{p}, \vec{q}) = \pi/4$. Знайти площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a} = \vec{p} + 4\vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} - \vec{q}$.

4.4 Спростити вираз мішаного добутку $(\vec{c} - \vec{b}) \cdot \vec{a} \cdot (\vec{c} + \vec{a})$.

4.5 Обрати базис серед векторів $\vec{a} = (-2; 7; 3)$, $\vec{b} = (1; -4; 5)$, $\vec{c} = (3; -5; -2)$, $\vec{d} = (-4; -3; 5)$. Розкласти небазисний вектор за векторами базису.

5. Пряма на площині.

5.1 Дано вершини трикутника $A(-5; -6)$, $B(6; 4)$, $C(-3; 5)$. Знайти рівняння та відобразити на рисунку: 1) сторони AB , 2) висоти AH , 3) медіани BE , 4) прямої CN , паралельної AB , 5) точку перетину N прямих BE і CN .

5.2 Дано дві протилежні вершини квадрата $A(-1; 3)$ і $C(6; 2)$. Скласти рівняння його сторін.

5.3 Серед прямих, що проходять через точку $P(3; 0)$ знайти таку, відрізок якої, що розташований між прямими $2x - y - 2 = 0$ і $x + y + 3 = 0$, поділено в точці P навпіл.

6. Площина та пряма у просторі.

6.1 Площина α проходить через проекції точки $M(2; 1; 2)$ на осі координат, а площина β через точки $A(1; 2; 3)$, $B(-2; 0; -1)$ і $C(0; 1; 2)$. Знайти кут між площинами α і β .

6.2 Написати рівняння площини, що проходить через точки $M(1; 2; 0)$ і $N(2; 1; 1)$ паралельно вектору $\vec{a} = (3; 0; 1)$. Отримане рівняння привести до загального виду.

6.3 З початку координат опустити перпендикуляр на пряму $\frac{x-5}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-2}$. Записати його рівняння.

7. Звести рівняння кривих другого порядку до канонічного вигляду. Знайти їх фокуси, вершини, директриси, ексцентриситет. Побудувати криві та відобразити на рисунку знайдені результати.

$$7.1 \quad x^2 + 9y^2 + 4x + 54y + 49 = 0$$

$$7.2 \quad 5y^2 - 4x^2 + 16x - 36 = 0$$

$$7.3 \quad y = 2y^2 + 8x + 1$$

Варіант 13

1. Розв'язати СЛАР трьома методами: 1) за формулами Крамера; 2) матричним методом; 3) методом Гауса.

$$\begin{cases} 8x - 9y + 12z = 109 \\ -x + 2y - 3z = -19 \\ 10x - 3y + 5z = 98 \end{cases}$$

2. Розв'язати СЛАР будь-яким методом або довести її несумісність:

$$\text{а) } \begin{cases} 6x + 5y - z = 3 \\ 2x - 2y + 3z = 2 \\ 2x + 9y - 7z = 1 \end{cases} ; \quad \text{б) } \begin{cases} 7x + 5y - z = 6 \\ 3x - y + 8z = 9 \\ x + 7y - 17z = -12 \end{cases} .$$

3. Розв'язати однорідну СЛАР:

$$\begin{cases} 6x + 2y + 5z = 0 \\ 3x - y + 8z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

4. Задачі на вектори:

4.1 Дано координати вершин піраміди: A(-5; 7; 4), B(-2; 3; -1), C(1; -1; 5), D(-3; 2; 9). Знайти: 1) довжину ребра AD, 2) кут між ребрами AC і AD, 3) площу грані ADB, 4) об'єм піраміди.

4.2 Відомо, що $\vec{x} \perp \vec{a}$, $\vec{x} \perp \vec{b}$, $\vec{a} = (-1; 2; -2)$, $\vec{b} = (2; -1; 2)$, $\angle(\vec{x}, 0y) - \text{тупий}$, $|\vec{x}| = 4$. Знайти вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

4.3. Дано паралелограм ABCD. Відомо, що $\overline{AC} = \overline{p} - 3\overline{q}$, $\overline{BD} = 2\overline{p} - \overline{q}$, $|\overline{p}| = 1$, $|\overline{q}| = 5$, $\angle(\overline{p}, \overline{q}) = \pi/4$. Знайти площу паралелограма.

4.4 Чи існують такі значення α , при яких вектори $\vec{a} = (\alpha; 2; 1)$, $\vec{b} = (5; 2\alpha; -1)$, $\vec{c} = (2; 4; -1)$ є компланарними? При яких α трійка векторів є правою?

4.5 Обрати базис серед векторів $\vec{a} = (-5; -1; 2)$, $\vec{b} = (2; -1; 3)$, $\vec{c} = (6; -8; 5)$, $\vec{d} = (7; -4; 6)$. Розкласти небазисний вектор за векторами базису.

5. Пряма на площині.

5.1 Дано вершини трикутника $A(8; -2)$, $B(4; 5)$, $C(-1; -1)$. Знайти рівняння та відобразити на рисунок: 1) сторони AB , 2) висоти AH , 3) медіани BE , 4) прямої CN , паралельної AB , 5) точку перетину N прямих BE і CN .

5.2 Дано дві вершини $A(3; -1)$ і $B(5; 7)$ трикутника ABC і точка $N(4; -1)$ перетину його висот. Скласти рівняння сторін цього трикутника.

5.3 Скласти рівняння прямої, яка проходить через початок координат і разом з прямими $x - y + 12 = 0$, $2x + y + 9 = 0$ утворює трикутник, площа якого дорівнює 1,5 кв.од.

6. Площина та пряма у просторі.

6.1 Знайти відстань від точки $M(0; -1; 1)$ до площини, що проходить через точки $A(1; 4; -5)$ і $B(4; 2; -3)$ і перпендикулярна площини $3x + 5y - 6z - 8 = 0$.

6.2 Знайти точку перетину прямої $\frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$ із площиною $3x + 5y - z - 2 = 0$ і кут між ними.

6.3 При якому значенні m прямі
$$\begin{cases} x + 3z - 5 = 0, \\ 2x + my + 3 = 0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x = 1 + 3t, \\ y = 2 + 5t, \\ z = -1 - 6t \end{cases}$$

будуть взаємно перпендикулярні?

7. Звести рівняння кривих другого порядку до канонічного вигляду. Знайти їх фокуси, вершини, директриси, ексцентриситет. Побудувати криві та відобразити на рисунку знайдені результати.

7.1 $9x^2 + y^2 - 36x + 8y + 43 = 0$

7.2 $5x^2 - 4y^2 + 8y - 36 = 0$

7.3 $2y^2 - 4y - x - 1 = 0$

Варіант 14

1. Розв'язати СЛАР трьома методами: 1) за формулами Крамера; 2) матричним методом; 3) методом Гауса.

$$\begin{cases} -5x + 4y - 3z = -27 \\ -x + 2y - 10z = -63 \\ 3x - 7y + z = 16 \end{cases}$$

2. Розв'язати СЛАР будь-яким методом або довести її несутимісність:

$$\text{а) } \begin{cases} 7x + 5y - z = 6 \\ 3x - y + 8z = 9 \\ x + 7y - 17z = 10 \end{cases} \quad ; \quad \text{б) } \begin{cases} 6x + 5y - z = 3 \\ 2x - 2y + 3z = 2 \\ 2x + 9y - 7z = -1 \end{cases} .$$

3. Розв'язати однорідну СЛАР:

$$\begin{cases} x + 5y - 3z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \\ 2x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

4. Задачі на вектори:

4.1 Дано координати вершин піраміди: $A(4; -6; 8)$, $B(-2; 3; -5)$, $C(-7; -8; 4)$, $D(1; 2; 7)$. Знайти: 1) довжину ребра AC , 2) кут між ребрами AB і AD , 3) площу грані ACD , 4) об'єм піраміди.

4.2 Дано: $\vec{x} \perp 0y$, $\vec{x} \cdot \vec{a} = 1$, $\vec{x} \cdot \vec{b} = -6$, $\vec{a} = (-5; 2; 8)$, $\vec{b} = (-4; -2; 3)$.

Знайти вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

4.3 Дано вершини $A(4; -1; 3)$, $B(5; -2; -1)$, $C(7; 4; 1)$ трикутника. Знайти довжину висоти трикутника, що проведена з вершини C .

4.4 З'ясувати, при яких значеннях α точки $A(-1; 2; \alpha)$, $B(2; 4; 3)$, $C(5; -2; \alpha)$ і $D(4; 1; 2)$ розташовані в одній площині?

4.5 Обрати базис серед векторів $\vec{a} = (3; 7; 4)$, $\vec{b} = (-8; -3; -4)$, $\vec{c} = (-4; 5; 6)$, $\vec{d} = (-1; 2; 4)$. Розкласти небазисний вектор за векторами базису.

5. Пряма на площині.

5.1 Дано вершини трикутника $A(7; 5)$, $B(-6; 2)$, $C(4; -1)$. Знайти рівняння та відобразити на рисунку: 1) сторони AB , 2) висоти AN , 3) медіани BE , 4) прямої CN , паралельної AB , 5) точку перетину N прямих BE і CN .

5.2 Точка $E(1; -1)$ є центром квадрата, одна із сторін якого лежить на прямій $x - 2y + 12 = 0$. Скласти рівняння прямих, на яких лежать інші сторони цього квадрата.

5.3 Визначити при яких значеннях m і n дві прямі $mx + 8y + n = 0$ і $2x + my - 1 = 0$: 1) паралельні, 2) співпадають, 3) перпендикулярні.

6. Площина та пряма у просторі.

6.1 Написати рівняння площин, паралельних площині, що проходить через точки $M(3; 3; -4)$, $N(5; 0; -2)$, $P(4; 0; 0)$ і віддалених від неї на відстань $d = 4$.

6.2 Написати рівняння площини, що проходить через вісь OX і складає кут 60° із площиною $Y = X$.

6.3 Знайти гострий кут між прямими:
$$\begin{cases} x = t, \\ y = -7 + 2t, \\ z = 5 + 2t \end{cases} \text{ і } \begin{cases} 3x - 2y + 8 = 0, \\ z = 3x. \end{cases}$$

7. Звести рівняння кривих другого порядку до канонічного вигляду. Знайти їх фокуси, вершини, директриси, ексцентриситет. Побудувати криві та відобразити на рисунку знайдені результати.

$$7.1 \quad x^2 + 4y^2 - 6x + 8y - 3 = 0$$

$$7.2 \quad 9y^2 - 16x^2 + 18y - 135 = 0$$

$$7.3 \quad 4y^2 - 8y - 21x - 1 = 0$$

Варіант 15

1. Розв'язати СЛАР трьома методами: 1) за формулами Крамера; 2) матричним методом; 3) методом Гауса.

$$\begin{cases} 12x - y + 4z = 35 \\ -x + 7y - 6z = 21 \\ -3x - 5y + 2z = -23 \end{cases}$$

2. Розв'язати СЛАР будь-яким методом або довести її несумісність:

$$\text{а) } \begin{cases} 6x + 2y + 5z = 7 \\ 3x - y + 8z = 5 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \quad ; \quad \text{б) } \begin{cases} x + 5y - 3z = 5 \\ 3x - y + z = 3 \\ 2x + 2y - z = 4 \end{cases} .$$

3. Розв'язати однорідну СЛАР:

$$\begin{cases} 7x + 5y - z = 0 \\ 3x - y + 8z = 0 \\ x + 7y - 17z = 0 \end{cases}$$

4. Задачі на вектори:

4.1 Дано координати вершин піраміди: A(5; -2; 9), B(3; 6; -1), C(8; -2; 3), D(4; -3; 2). Знайти: 1) довжину ребра BD, 2) кут між ребрами BA і BD, 3) площу грані BDC, 4) об'єм піраміди.

4.2 Дано: $\vec{x} \parallel \vec{a}$, $\vec{a} = (-2; 5; -4)$, $\angle(\vec{x}, 0y)$ - гострий, $|\vec{x}| = 2$. Знайти

вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

4.3 Дано координати точок A(-2; 3; -4), B(5; 2; 1), C(3; -2; 6). Знайти векторний добуток $(3\vec{AB} + \vec{BC}) \times (\vec{BA} - 5\vec{AC})$.

4.4 Спростити вираз мішаного добутку $(\vec{a} + \vec{c}) \cdot \vec{b} \cdot (\vec{a} - \vec{b})$.

4.5 Обрати базис серед векторів $\vec{a} = (5; 3; 1)$, $\vec{b} = (4; 2; 6)$, $\vec{c} = (7; 9; -1)$, $\vec{d} = (-5; 1; 7)$. Розкласти небазисний вектор за векторами базису.

5. Пряма на площині.

5.1 Дано вершини трикутника $A(-6; 8)$, $B(5; 2)$, $C(-1; -4)$. Знайти рівняння та відобразити на рисунку: 1) сторони AB , 2) висоти AN , 3) медіани BE , 4) прямої CN , паралельної AB , 5) точку перетину N прямих BE і CN .

5.2 В трикутнику ABC дано рівняння сторони $AB: 5x - 3y + 2 = 0$, рівняння висот $AN: 4x - 3y + 1 = 0$ і $BN: 7x + 2y - 22 = 0$. Скласти рівняння двох інших сторін і третьої висоти цього трикутника.

5.3 Скласти рівняння прямої, яка паралельна двом прямим $2x + 3y - 6 = 0$ і $4x + 6y + 17 = 0$ і знаходиться на рівній відстані від кожної прямої.

6. Площина та пряма у просторі.

6.1 Через точку $N(3; 9; -4)$ проведені дві площини: одна з них містить вісь Oy , інша - Oz . Обчислити кут між цими площинами.

6.2 Трикутник ABC утворений перетином площини $x + 2y + 4z - 8 = 0$ з координатними осями. Знайти рівняння середньої лінії трикутника, паралельної площини xOy , і кут, що

утворить вона із прямою $\frac{x+1}{3} = \frac{y}{-5} = \frac{z+1}{4}$.

6.3 При яких значеннях m і n прямі $\begin{cases} mx - 3z + 8 = 0, \\ x + 2y - 5 = 0 \end{cases}$ і $\frac{x-2}{n} = \frac{y}{-6} = \frac{z+2}{4}$ будуть паралельні?

7. Звести рівняння кривих другого порядку до канонічного вигляду. Знайти їх фокуси, вершини, директриси, ексцентриситет. Побудувати криві та відобразити на рисунку знайдені результати.

7.1 $4x^2 + 5y^2 + 8x + 10y = 0$

7.2 $4x^2 - y^2 - 8x - 6y - 4 = 0$

7.3 $y = 2x^2 - 12x - 9$

Варіант 16

1. Розв'язати СЛАР трьома методами: 1) за формулами Крамера; 2) матричним методом; 3) методом Гауса.

$$\begin{cases} -5x + y - 2z = 1 \\ 4x + 9y - 12z = -59 \\ 3x - 2y + z = -3 \end{cases}$$

2. Розв'язати СЛАР будь-яким методом або довести її несумісність:

$$\text{а) } \begin{cases} x + 5y - 3z = 7 \\ 3x - y + z = 3 \\ 2x + 2y - z = 4 \end{cases} \quad ; \quad \text{б) } \begin{cases} 6x + 2y + 5z = 8 \\ 3x - y + 8z = 5 \\ x + y - z = 1 \end{cases} .$$

3. Розв'язати однорідну СЛАР:

$$\begin{cases} 6x + 5y - z = 0 \\ 2x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + 9y - 7z = 0 \end{cases}$$

4. Задачі на вектори:

4.1 Дано координати вершин піраміди: A(-7; 1; 9), B(-2; 7; -8), C(4; -3; 6), D(1; -2; 5). Знайти: 1) довжину ребра AD, 2) кут між ребрами AC і AD, 3) площу грані ABC, 4) об'єм піраміди.

4.2 Відомо, що $\vec{x} \perp \vec{a}$, $\vec{x} \perp \vec{b}$, $\vec{a} = (4; -1; 5)$, $\vec{b} = (1; 2; -1)$, $\angle(\vec{x}, 0x)$ - гострий, $|\vec{x}| = 2$. Знайти вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

4.3 Знайти векторний добуток векторів $\vec{a} = \vec{q} - 4\vec{p}$ і $\vec{b} = 2\vec{q} + \vec{p}$, якщо $|\vec{p}| = 1$, $|\vec{q}| = 2$, $\angle(\vec{p}, \vec{q}) = \pi/6$.

4.4 Чи існують такі значення α , при яких вектори $\vec{a} = (1; 1; \alpha)$, $\vec{b} = (2\alpha; 1; -6)$, $\vec{c} = (0; \alpha; 8)$ є компланарними? При яких α трійка векторів є лівою?

4.5 Обрати базис серед векторів $\vec{a} = (4; -2; 6)$, $\vec{b} = (5; -3; 8)$, $\vec{c} = (7; 5; 4)$, $\vec{d} = (0; -8; 6)$. Розкласти небазисний вектор за векторами базису.

5. Пряма на площині.

5.1 Дано вершини трикутника $A(-1; -5)$, $B(2; -3)$, $C(-3; 4)$. Знайти рівняння та відобразити на рисунку: 1) сторони AB , 2) висоти AH , 3) медіани BE , 4) прямої CN , паралельної AB , 5) точку перетину N прямих BE і CN .

5.2 Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $C(-5; 4)$, якщо відомо, що довжина її відрізка, який знаходиться між прямими $x + 2y + 1 = 0$ і $x + 2y - 1 = 0$, дорівнює 5.

5.3 Визначити при якому значенні m дві прямі $(m - 1)x + my - 5 = 0$ і $mx + (2m - 1)y + 7 = 0$ перетинаються в точці, розташованій на осі абсцис.

6. Площина та пряма у просторі.

6.1 На осі Oy знайти точку, рівновіддалену від точки $A(2; 0; 1)$ і від площини, що проходить через точку $B(1; 1; 1)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (1; 2; 2)$.

6.2 При яких значеннях a , b , c площини $ax - y + 2z - 7 = 0$, $3x + by - 3z + 6 = 0$, $x + 2y + cz - 2 = 0$ будуть взаємно перпендикулярними?

6.3 Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M(3; -1; -4)$, перетинає вісь Oy і паралельна площині $y + 2z = 0$.

7. Звести рівняння кривих другого порядку до канонічного вигляду. Знайти їх фокуси, вершини, директриси, ексцентриситет. Побудувати криві та відобразити на рисунку знайдені результати.

7.1 $2x^2 + 5y^2 - 12x + 10y + 13 = 0$

7.2 $x^2 - y^2 - 2x + 4y - 7 = 0$

7.3 $y^2 + 2y - 4x + 9 = 0$

Варіант 17

1. Розв'язати СЛАР трьома методами: 1) за формулами Крамера; 2) матричним методом; 3) методом Гауса.

$$\begin{cases} 11x - 2y + z = -8 \\ 5x - 3y + 8z = -17 \\ x - 6y + 5z = -54 \end{cases}$$

2. Розв'язати СЛАР будь-яким методом або довести її несумісність:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x + y - 5z = 6 \\ x - 2y + 3z = 3 \\ x + 3y - 8z = 4 \end{cases} ; \quad \text{б) } \begin{cases} 5x - 2y + 2z = 13 \\ x - y + z = 3 \\ 2x + y - z = 4 \end{cases} .$$

3. Розв'язати однорідну СЛАР:

$$\begin{cases} 7x - 4y + 3z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ 3x - 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

4. Задачі на вектори:

4.1 Дано координати вершин піраміди: $A(4; -5; 3)$, $B(-1; 7; 2)$, $C(-5; 3; -2)$, $D(9; -1; 4)$. Знайти: 1) довжину ребра BD , 2) кут між ребрами BA і BD , 3) площу грані BAC , 4) об'єм піраміди.

4.2 Дано: $\vec{x} \perp 0y$, $\vec{x} \cdot \vec{a} = 3$, $\vec{x} \cdot \vec{b} = 5$, $\vec{a} = (-1; 8; 2)$, $\vec{b} = (-3; -2; 4)$.

Знайти вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

4.3 Відомо, що $|\vec{p}| = 1$, $|\vec{q}| = 3$, $\angle(\vec{p}, \vec{q}) = \pi/3$. Знайти площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a} = \vec{p} - 3\vec{q}$ і $\vec{b} = 2\vec{p} + \vec{q}$.

4.4 З'ясувати, при яких значеннях α точки $A(1; \alpha; 2)$, $B(\alpha; 3; 4)$, $C(5; \alpha; 6)$ і $D(7; 8; \alpha)$ розташовані в одній площині?

4.5 Обрати базис серед векторів $\vec{a} = (5; 6; -2)$, $\vec{b} = (1; 4; -3)$, $\vec{c} = (2; 1; 2)$, $\vec{d} = (3; 5; -2)$. Розкласти небазисний вектор за векторами базису.

5. Пряма на площині.

5.1 Дано вершини трикутника $A(7; -1)$, $B(2; 5)$, $C(-3; -4)$. Знайти рівняння та відобразити на рисунок: 1) сторони AB , 2) висоти AH , 3) медіани BE , 4) прямої CN , паралельної AB , 5) точку перетину N прямих BE і CN .

5.2 Визначити при якому значенні α три прямі $2x - y + 3 = 0$, $x + y + 3 = 0$, $\alpha x + y - 13 = 0$ будуть перетинатись в одній точці.

5.3 Через точку $M(4; 3)$ проведена пряма, яка відтинає від координатного кута трикутник, площа якого дорівнює 3 кв.од. Визначити точки перетину цієї прямої з осями координат.

6. Площина та пряма у просторі.

6.1 Дано тетраедр із вершинами: $K(1; 1; 2)$, $L(-1; 1; 3)$, $M(2; -2; 4)$, $N(-1; 0; -2)$. Знайти довжину висоти, проведеної з вершини N , і кут між гранями KLM і LMN .

6.2 Скласти рівняння площини, що проходить через вісь Oz перпендикулярно площині, що проходить через точку $A(6; -1; 2)$ і відтинає на осі абсцис відрізок $a = -3$, а на осі аплікат - відрізок $c = 4$.

6.3 Написати канонічні рівняння прямої:
$$\begin{cases} 2x - 3y + z + 6 = 0, \\ x - 3y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$$

7. Звести рівняння кривих другого порядку до канонічного вигляду. Знайти їх фокуси, вершини, директриси, ексцентриситет. Побудувати криві та відобразити на рисунку знайдені результати.

7.1 $9x^2 + 4y^2 + 30x - 12y - 2 = 0$

7.2 $36y^2 - 4x^2 + 144y + 24x - 36 = 0$

7.3 $x = -2y^2 + 4y + 3$

Варіант 18

1. Розв'язати СЛАР трьома методами: 1) за формулами Крамера; 2) матричним методом; 3) методом Гауса.

$$\begin{cases} -7x + y + 8z = -25 \\ -5x + 2y - z = -14 \\ 3x - 13y + 2z = -27 \end{cases}$$

2. Розв'язати СЛАР будь-яким методом або довести її несумісність:

$$\text{а) } \begin{cases} 5x - 2y + 2z = 10 \\ x - y + z = 3 \\ 2x + y - z = 4 \end{cases} \quad ; \quad \text{б) } \begin{cases} 2x + y - 5z = 6 \\ x - 2y + 3z = 3 \\ x + 3y - 8z = 3 \end{cases}.$$

3. Розв'язати однорідну СЛАР:

$$\begin{cases} 4x + 2y - 4z = 0 \\ -3x - 4y + z = 0 \\ x - 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

4. Задачі на вектори:

4.1 Дано координати вершин піраміди: A(1; 2; -3), B(-4; 3; -5), C(4; -1; 4), D(-1; -3; 8). Знайти: 1) довжину ребра AD, 2) кут між ребрами AB і AD, 3) площу грані ABC, 4) об'єм піраміди.

4.2 Дано: $\vec{x} \parallel \vec{a}$, $\vec{a} = (5; 3; -1)$, $\angle(\vec{x}, 0x)$ - тупий, $|\vec{x}| = 4$. Знайти вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

4.3. Дано паралелограм ABCD. Відомо, що $\overline{AC} = 2\vec{p} - \vec{q}$, $\overline{BD} = \vec{p} + 4\vec{q}$, $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 1$, $\angle(\vec{p}, \vec{q}) = \pi/6$. Знайти площу паралелограма.

4.4 Спростити вираз мішаного добутку $(\vec{c} + \vec{b}) \cdot (\vec{c} + \vec{a}) \cdot \vec{a}$.

4.5 Обрати базис серед векторів $\vec{a} = (8; -3; 1)$, $\vec{b} = (4; -4; -5)$, $\vec{c} = (4; 5; -2)$, $\vec{d} = (4; 3; 2)$. Розкласти небазисний вектор за векторами базису.

5. Пряма на площині.

5.1 Дано вершини трикутника $A(5; 6)$, $B(-8; -2)$, $C(1; -5)$. Знайти рівняння та відобразити на рисунок: 1) сторони AB , 2) висоти AN , 3) медіани BE , 4) прямої CN , паралельної AB , 5) точку перетину N прямих BE і CN .

5.2 Визначити при яких значеннях a і b дві прямі $ax - y - 1 = 0$ і $3x - 2y - b = 0$ 1) мають одну спільну точку, 2) паралельні, 3) співпадають.

5.3 Площа трикутника ABC дорівнює 4 кв.од. Дві його вершини є точки $A(2; 1)$ і $B(3; -2)$, а третя вершина C лежить на осі Ox . Визначити координати вершини C .

6. Площина та пряма у просторі.

6.1 Визначити, при яких значеннях m і n площини $3x + my + 2z - 7 = 0$ и $nx - 4y - 4z + 3 = 0$ будуть паралельні, і знайти відстань між ними.

6.2 Перевірити, чи можна провести площину через наступні чотири точки: $A(1; -1; 1)$, $B(0; 2; 4)$, $C(1; 3; 3)$ і $D(4; 0; -3)$.

6.3 Знайти кут між прямими, одна з яких задана рівнянням $\frac{x-7}{5} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{4}$, інша проходить через точку $A(1; 2; 3)$ і точку перетину зазначеної прямої із площиною $3x - y + 2z - 5 = 0$.

7. Звести рівняння кривих другого порядку до канонічного вигляду. Знайти їх фокуси, вершини, директриси, ексцентриситет. Побудувати криві та відобразити на рисунку знайдені результати.

7.1 $2x^2 + y^2 - 4x - 10y + 15 = 0$

7.2 $x^2 - y^2 + 6x + 12y - 23 = 0$

7.3 $x = -y^2 + 6y + 1$

Варіант 19

1. Розв'язати СЛАР трьома методами: 1) за формулами Крамера; 2) матричним методом; 3) методом Гауса.

$$\begin{cases} -5x - 11y + 3z = -47 \\ 2x - y - z = -8 \\ 3x - 7y + 2z = -36 \end{cases}$$

2. Розв'язати СЛАР будь-яким методом або довести її несумісність:

$$\text{а) } \begin{cases} 7x - 4y + 3z = 8 \\ 2x - y + 3z = 5 \\ 3x - 2y - 3z = 4 \end{cases} \quad ; \quad \text{б) } \begin{cases} 4x + 2y - 4z = -5 \\ -3x - 4y + z = 6 \\ x - 2y - 3z = 1 \end{cases} .$$

3. Розв'язати однорідну СЛАР:

$$\begin{cases} 5x - 2y + 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} .$$

4. Задачі на вектори:

4.1 Дано координати вершин піраміди: A(4; -2; 6), B(-1; 7; -2), C(3; -2; 5), D(-3; 4; 6). Знайти: 1) довжину ребра CB, 2) кут між ребрами CA і CD, 3) площу грані CDB, 4) об'єм піраміди.

4.2 Відомо, що $\vec{x} \perp \vec{a}$, $\vec{x} \perp \vec{b}$, $\vec{a} = (-1; 3; -2)$, $\vec{b} = (4; -1; 1)$, $\angle(\vec{x}, 0z)$ - тупий, $|\vec{x}| = 6$. Знайти вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

4.3 Дано вершини A(-3; 2; 3), B(5; 2; 1), C(6; -2; 4) трикутника. Знайти довжину висоти трикутника, що проведена з вершини A.

4.4 При яких значеннях α вектори $\vec{a} = (0; 2\alpha; 3)$, $\vec{b} = (\alpha; 3; -2,5)$, $\vec{c} = (2; -2; \alpha)$ компланарні? При яких α трійка векторів є правою?

4.5 Обрати базис серед векторів $\vec{a} = (-6; -7; -2)$, $\vec{b} = (9; -8; -4)$, $\vec{c} = (4; 1; 6)$, $\vec{d} = (5; 4; 4)$. Розкласти небазисний вектор за векторами базису.

5. Пряма на площині.

5.1 Дано вершини трикутника $A(-1; 2)$, $B(3; 4)$, $C(1; -2)$. Знайти рівняння та відобразити на рисунку: 1) сторони AB , 2) висоти AH , 3) медіани BE , 4) прямої CN , паралельної AB , 5) точку перетину N прямих BE і CN .

5.2 Визначити гострий кут, утворений двома прямими $x\sqrt{3} + y\sqrt{2} - 2 = 0$ і $x\sqrt{6} - 3y + 3 = 0$.

5.3 Визначити, при якому значенні m дві прямі $mx + (2m + 3)y + m + 6 = 0$ і $(2m + 1)x + (m - 1)y + m - 2 = 0$ перетинаються в точці, яка лежить на осі ординат.

6. Площина та пряма у просторі.

6.1 Скласти рівняння площини, що проходить через точки $A(4; 6; -3)$, $B(-2; -1; 7)$ і відтинає рівні відрізки на осях Ox і Oz . Знайти відстань від точки $C(5; -7; 8)$ до побудованої площини.

6.2 Знайти кут між площинами α і β , де α проходить через точку $A(5; -1; 3)$ паралельно площини yOz , а β - через точки $B(0; 1; 1)$, $C(1; 0; -2)$, $D(4; -2; -3)$.

6.3 Провести через точку перетину площини $x + y + z - 1 = 0$ із

прямою $\begin{cases} y = 1, \\ z + 1 = 0 \end{cases}$ пряму, що лежить у цій площині й

перпендикулярну до даної прямої.

7. Звести рівняння кривих другого порядку до канонічного вигляду. Знайти їх фокуси, вершини, директриси, ексцентриситет. Побудувати криві та відобразити на рисунку знайдені результати.

$$7.1 \quad 2x^2 + y^2 + 4x - 4 = 0$$

$$7.2 \quad 16y^2 - 9x^2 - 32y - 72x - 272 = 0$$

$$7.3 \quad 4x^2 + 4x + 2y - 1 = 0$$

Варіант 20

1. Розв'язати СЛАР трьома методами: 1) за формулами Крамера; 2) матричним методом; 3) методом Гауса.

$$\begin{cases} -8x + y - 3z = -29 \\ 4x - 3y - 2z = 5 \\ 6x - 7y + 8z = 27 \end{cases}$$

2. Розв'язати СЛАР будь-яким методом або довести її несумісність:

$$\text{а) } \begin{cases} 4x + 2y - 4z = 7 \\ -3x - 4y + z = 6 \\ x - 2y - 3z = 1 \end{cases} ; \quad \text{б) } \begin{cases} 7x - 4y + 3z = 8 \\ 2x - y + 3z = 5 \\ 3x - 2y - 3z = -2 \end{cases} .$$

3. Розв'язати однорідну СЛАР:

$$\begin{cases} 2x + y - 5z = 0 \\ x - 2y + 3z = 0 \\ x + 3y - 8z = 0 \end{cases} .$$

4. Задачі на вектори:

4.1 Дано координати вершин піраміди: $A(8; -2; 5)$, $B(7; -1; 3)$, $C(1; -3; 7)$, $D(-3; 2; 6)$. Знайти: 1) довжину ребра AB , 2) кут між ребрами AB і AD , 3) площу грані ABC , 4) об'єм піраміди.

4.2 Дано: $\vec{x} \perp 0x$, $\vec{x} \cdot \vec{a} = 10$, $\vec{x} \cdot \vec{b} = -9$, $\vec{a} = (-10; 7; -3)$, $\vec{b} = (6; -4; 5)$. Знайти вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

4.3 Дано координати точок $A(1; 8; -3)$, $B(4; -5; 6)$, $C(5; -4; 9)$. Знайти векторний добуток $(3\vec{AB} + \vec{BC}) \times (\vec{BA} - 5\vec{AC})$.

4.4 З'ясувати, при яких значеннях α точки $A(1; 2; 3)$, $B(3; 1; \alpha)$, $C(2; \alpha; 3)$ і $D(\alpha; 1; 2)$ розташовані в одній площині?

4.5 Обрати базис серед векторів $\vec{a} = (-4; 5; 7)$, $\vec{b} = (-6; 3; 8)$, $\vec{c} = (9; -7; -4)$, $\vec{d} = (3; 5; 9)$. Розкласти небазисний вектор за векторами базису.

5. Пряма на площині.

5.1 Дано вершини трикутника $A(-4; -3)$, $B(-1; 5)$, $C(6; -2)$. Знайти рівняння та відобразити на рисунку: 1) сторони AB , 2) висоти AH , 3) медіани BE , 4) прямої CN , паралельної AB , 5) точку перетину N прямих BE і CN .

5.2 Скласти рівняння прямої, яка паралельна двом прямим $3x - 15y - 1 = 0$ і $x - 5y - 2 = 0$ і знаходиться на рівній відстані від кожної прямої.

5.3 Скласти рівняння сторін трикутника, якщо відома одна з його вершин $B(-4; -5)$ і рівняння двох висот $5x + 3y - 4 = 0$ і $3x + 8y + 13 = 0$.

6. Площина та пряма у просторі.

6.1 Знайти кут між площинами α і β , де α проходить через точку $M(3; -1; -2)$ паралельно площини xOz , а β відтинає на осях координат відрізки $a = 2$, $b = -4$, $c = \frac{1}{2}$.

6.2 Написати канонічні рівняння прямої:
$$\begin{cases} 2x + y - 3z - 2 = 0, \\ 2x - y + z + 6 = 0. \end{cases}$$

6.3 Трикутник утворений перетином площини $3x - y + 4z - 12 = 0$ з координатними площинами. Знайти кут нахилу медіани трикутника, проведеної з вершини, що лежить на осі Oz , до площини xOy .

7. Звести рівняння кривих другого порядку до канонічного вигляду. Знайти їх фокуси, вершини, директриси, ексцентриситет. Побудувати криві та відобразити на рисунку знайдені результати.

7.1 $2x^2 + y^2 + 4x - 4y = 0$

7.2 $2x^2 - 2y^2 + 2x = 0$

7.3 $y = 2x^2 - 12x + 4 = 0$

Варіант 21

1. Розв'язати СЛАР трьома методами: 1) за формулами Крамера; 2) матричним методом; 3) методом Гауса.

$$\begin{cases} -4x + y - 9z = 44 \\ x + 7y - 10z = 33 \\ -2x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

2. Розв'язати СЛАР будь-яким методом або довести її несумісність:

$$\text{а) } \begin{cases} 5x + y - 3z = 2 \\ -3x - 4y + z = 6 \\ -x - 7y - z = 10 \end{cases} ; \quad \text{б) } \begin{cases} 3x + 5y - 2z = 8 \\ x - 3y + z = 5 \\ x - 17y + 6z = 12 \end{cases} .$$

3. Розв'язати однорідну СЛАР:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ 3x - y + 3z = 0 \\ x - 2y + 6z = 0 \end{cases}$$

4. Задачі на вектори:

4.1 Дано координати вершин піраміди: A(9; -2; 4), B(-7; 3; -1), C(-3; 5; -2), D(4; -3; 6). Знайти: 1) довжину ребра AC, 2) кут між ребрами AC і AD, 3) площу грані ABC, 4) об'єм піраміди.

4.2 Дано: $\vec{x} \parallel \vec{a}$, $\vec{a} = (-1; 2; 8)$, $\angle(\vec{x}, 0z)$ - гострий, $|\vec{x}| = 5$. Знайти вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

4.3 Знайти векторний добуток векторів $\vec{a} = 3\vec{q} - 2\vec{p}$ і $\vec{b} = 2\vec{q} + 3\vec{p}$, якщо $|\vec{p}| = 1$, $|\vec{q}| = 1$, $\angle(\vec{p}, \vec{q}) = \pi/3$.

4.4 Спростити вираз мішаного добутку $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{c} + \vec{a}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$.

4.5 Обрати базис серед векторів $\vec{a} = (5; -1; -4)$, $\vec{b} = (-4; -3; 1)$, $\vec{c} = (2; 7; -3)$, $\vec{d} = (5; 4; -3)$. Розкласти небазисний вектор за векторами базису.

5. Пряма на площині.

5.1 Дано вершини трикутника $A(8; -2)$, $B(2; 6)$, $C(-4; -1)$. Знайти рівняння та відобразити на рисунку: 1) сторони AB , 2) висоти AN , 3) медіани BE , 4) прямої CN , паралельної AB , 5) точку перетину N прямих BE і CN .

5.2 Дана пряма $x + 2y + 3 = 0$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(1; -1)$ під кутом 30° до даної прямої.

5.3 Відомі рівняння сторін чотирикутника $x - 2y + 2 = 0$, $x - 2y - 10 = 0$, $x - 4y - 8 = 0$, $x - 4y + 8 = 0$. Знайти його площу.

6. Площина та пряма у просторі.

6.1 Нормаль до площини становить із координатними осями Ox і Oz кути $\alpha = \gamma = 60^\circ$, а з віссю Oy - гострий кут. Скласти рівняння площини за умови, що вона проходить через точку $M(1; 1; -1)$. Перевірити, чи буде шукана площина паралельна площини $3x + \sqrt{18}y + 3z + \sqrt{6} = 0$.

6.2 Написати канонічні рівняння прямої:
$$\begin{cases} x + y - 2z - 2 = 0, \\ x - y + z + 2 = 0. \end{cases}$$

6.3 Скласти рівняння площини, що проходить через пряму
$$\begin{cases} 3x + 2y + 5z + 6 = 0, \\ x + 4y + 3z + 4 = 0 \end{cases}$$
 паралельно прямій $\frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+1}{-3}$.

7. Звести рівняння кривих другого порядку до канонічного вигляду. Знайти їх фокуси, вершини, директриси, ексцентриситет. Побудувати криві та відобразити на рисунку знайдені результати.

7.1 $4x^2 + y^2 - 40x + 2y + 97 = 0$

7.2 $3x^2 - 4y^2 + 16y - 36 = 0$

7.3 $y^2 + 4x - 2y + 2 = 0$

Варіант 22

1. Розв'язати СЛАР трьома методами: 1) за формулами Крамера; 2) матричним методом; 3) методом Гауса.

$$\begin{cases} x - 13y + 3z = -18 \\ -4x + 5y - z = 3 \\ 11x - 5y + 2z = 2 \end{cases}$$

2. Розв'язати СЛАР будь-яким методом або довести її несумісність:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x + 5y - 2z = 8 \\ x - 3y + z = 5 \\ x - 17y + 6z = 10 \end{cases} \quad ; \quad \text{б) } \begin{cases} 5x + y - 3z = 2 \\ -3x - 4y + z = 6 \\ -x - 7y - z = 14 \end{cases}.$$

3. Розв'язати однорідну СЛАР:

$$\begin{cases} 4x + y - 3z = 0 \\ x - 2y + 2z = 0 \\ x + 7y - 9z = 0 \end{cases}$$

4. Задачі на вектори:

4.1 Дано координати вершин піраміди: $A(-4; 8; 7)$, $B(2; -5; 1)$, $C(-3; 4; -5)$, $D(5; -1; 6)$. Знайти: 1) довжину ребра AD , 2) кут між ребрами AB і AD , 3) площу грані ABC , 4) об'єм піраміди.

4.2 Відомо, що $\vec{x} \perp \vec{a}$, $\vec{x} \perp \vec{b}$, $\vec{a} = (-1; 4; 1)$, $\vec{b} = (3; 2; -1)$, $\angle(\vec{x}, 0y)$ - гострий, $|\vec{x}| = 2$. Знайти вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

4.3 Відомо, що $|\vec{p}| = 4$, $|\vec{q}| = 3$, $\angle(\vec{p}, \vec{q}) = \pi/4$. Знайти площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a} = 5\vec{p} - 2\vec{q}$ і $\vec{b} = 3\vec{p} - 2\vec{q}$.

4.4 При яких значеннях α вектори $\vec{a} = (1; 2\alpha; 3)$, $\vec{b} = (\alpha; 2; 0)$, $\vec{c} = (2; 4; 1)$ компланарні? При яких α трійка векторів є лівою?

4.5 Обрати базис серед векторів $\vec{a} = (6; 4; 2)$, $\vec{b} = (-5; -4; 1)$, $\vec{c} = (5; 3; 8)$, $\vec{d} = (3; 2; 3)$. Розкласти небазисний вектор за векторами базису.

5. Пряма на площині.

5.1 Дано вершини трикутника $A(2; 4)$, $B(-5; -6)$, $C(8; -2)$. Знайти рівняння та відобразити на рисунок: 1) сторони AB , 2) висоти AH , 3) медіани BE , 4) прямої CN , паралельної AB , 5) точку перетину N прямих BE і CN .

5.2 Дано 3 вершини паралелограма $ABCD$: $A(2; 3)$, $B(4; -1)$, $C(0; 5)$. Знайти його четверту вершину D .

5.3 Знайти проекцію точки $P(-8; 12)$ на пряму, що проходить через точки $A(2; -3)$ і $B(-5; 1)$.

6. Площина та пряма у просторі.

6.1 Скласти рівняння площини, що відтинає на осі Oy відрізок $b = -3$ і перпендикулярної до вектора $\vec{n} = (5; -1; 2)$. Знайти відстань від точки $A(-2; -4; 3)$ до побудованої площини.

6.2 Через точку $A(-2; 4; 8)$ проведені дві площини: одна з них містить вісь Ox , інша - Oz . Обчислити кут між цими площинами.

6.3 Знайти відстань від точки $M(1; 3; 5)$ до прямої, по якій перетинаються площини $2x + y + z - 1 = 0$, $3x + y + 2z = 0$.

7. Звести рівняння кривих другого порядку до канонічного вигляду. Знайти їх фокуси, вершини, директриси, ексцентриситет. Побудувати криві та відобразити на рисунок знайдені результати.

7.1 $4x^2 + 5y^2 + 8x + 10y + 1 = 0$

7.2 $x^2 - 9y^2 - 2x + 36y - 44 = 0$

7.3 $4x + y^2 - 4y = 0$

Варіант 23

1. Розв'язати СЛАР трьома методами: 1) за формулами Крамера; 2) матричним методом; 3) методом Гауса.

$$\begin{cases} 3x - 12y + 4z = 71 \\ -5x + 2y - z = -18 \\ 7x - y + 2z = 21 \end{cases}$$

2. Розв'язати СЛАР будь-яким методом або довести її несумісність:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x + y - 3z = 9 \\ 3x - y + 3z = 4 \\ x - 2y + 6z = 4 \end{cases} ; \quad \text{б) } \begin{cases} 4x + y - 3z = 3 \\ x - 2y + 2z = 2 \\ x + 7y - 9z = -3 \end{cases} .$$

3. Розв'язати однорідну СЛАР:

$$\begin{cases} 3x + 5y - 2z = 0 \\ x - 3y + z = 0 \\ x - 17y + 6z = 0 \end{cases} .$$

4. Задачі на вектори:

4.1 Дано координати вершин піраміди: $A(3; -1; 2)$, $B(-8; 9; -2)$, $C(1; -1; 3)$, $D(4; -2; 5)$. Знайти: 1) довжину ребра BD , 2) кут між ребрами BC і BD , 3) площу грані ABD , 4) об'єм піраміди.

4.2 Дано: $\vec{x} \perp 0z$, $\vec{x} \cdot \vec{a} = 7$, $\vec{x} \cdot \vec{b} = 28$, $\vec{a} = (8; 3; -2)$, $\vec{b} = (5; -6; 1)$.

Знайти вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

4.3. Дано паралелограм $ABCD$. Відомо, що $\overline{AC} = \overline{p} - 3\overline{q}$, $\overline{BD} = 2\overline{p} + \overline{q}$, $|\overline{p}| = 2$, $|\overline{q}| = 3$, $\angle(\overline{p}, \overline{q}) = \pi/4$. Знайти площу паралелограма.

4.4 З'ясувати, при яких значеннях α точки $A(1; 1; 1)$, $B(\alpha; 1; 2)$, $C(1; \alpha; 2)$ і $D(1; 2; \alpha)$ розташовані в одній площині?

4.5 Обрати базис серед векторів $\vec{a} = (2; -3; 1)$, $\vec{b} = (7; -8; -2)$, $\vec{c} = (-6; 9; -3)$, $\vec{d} = (5; -3; 6)$. Розкласти небазисний вектор за векторами базису.

5. Пряма на площині.

5.1 Дано вершини трикутника $A(-6; 1)$, $B(8; 7)$, $C(2; -5)$. Знайти рівняння та відобразити на рисунку: 1) сторони AB , 2) висоти AH , 3) медіани BE , 4) прямої CN , паралельної AB , 5) точку перетину N прямих BE і CN .

5.2 Точка $A(5; -1)$ є вершиною квадрата, одна зі сторін якого лежить на прямій $4x - 3y - 7 = 0$. Скласти рівняння прямих, на яких лежать інші сторони квадрата.

5.3 Знайти вершини прямокутного рівнобедреного трикутника, якщо відома вершина прямого кута $C(3; -1)$ і рівняння гіпотенузи $3x - y + 2 = 0$.

6. Площина та пряма у просторі.

6.1 На осі Oz знайти точку, рівновіддалену від точки $A(2; 3; 4)$ і від площини, що проходить через точку $B(1; 5; 0)$ паралельно площини $2x + 3y + z + 15 = 0$.

6.2 Нормаль до площини α становить із координатними осями рівні гострі кути. Скласти рівняння площини за умови, що відстань від початку координат до неї дорівнює 4 од. Визначити, при якому значенні m площина α буде перпендикулярна площини β : $2x - my + 4z + 3 = 0$.

6.3 Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M(-4; 3; -8)$ перпендикулярно двом прямим: $\frac{x+1}{-3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z}{-4}$ і

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y+2}{-6} = \frac{z-1}{5}.$$

7. Звести рівняння кривих другого порядку до канонічного вигляду. Знайти їх фокуси, вершини, директриси, ексцентриситет. Побудувати криві та відобразити на рисунку знайдені результати.

7.1 $25x^2 + 9y^2 + 150x - 36y + 36 = 0$

7.2 $4y^2 - x^2 - 32y - 4x + 56 = 0$

7.3 $x^2 - 2y + 4x + 2 = 0$

Варіант 24

1. Розв'язати СЛАР трьома методами: 1) за формулами Крамера; 2) матричним методом; 3) методом Гауса.

$$\begin{cases} -6x - 5y + z = -41 \\ 7x + 2y - z = 44 \\ 3x - 8y + 2z = 10 \end{cases}$$

2. Розв'язати СЛАР будь-яким методом або довести її несумісність:

$$\text{а) } \begin{cases} 4x + y - 3z = 3 \\ x - 2y + 2z = 7 \\ x + 7y - 9z = 4 \end{cases} ; \quad \text{б) } \begin{cases} 2x + y - 3z = 9 \\ 3x - y + 3z = 4 \\ x - 2y + 6z = -5 \end{cases} .$$

3. Розв'язати однорідну СЛАР:

$$\begin{cases} 5x + y - 3z = 0 \\ -3x - 4y + z = 0 \\ -x - 7y - z = 0 \end{cases} .$$

4. Задачі на вектори:

4.1 Дано координати вершин піраміди: A(4; -3; 3), B(-2; 1; -1), C(7; -1; 8), D(9; -2; 4). Знайти: 1) довжину ребра AD, 2) кут між ребрами AC і AD, 3) площу грані ADB, 4) об'єм піраміди.

4.2 Дано: $\vec{x} \parallel \vec{a}$, $\vec{a} = (-3; 1; 2)$, $\angle(\vec{x}, 0y)$ - тупий, $|\vec{x}| = 5$. Знайти вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

4.3 Дано вершини A(7; 1; -3), B(6; -2; 4), C(8; -2; 5) трикутника. Знайти довжину висоти трикутника, що проведена з вершини B.

4.4 Спростити вираз мішаного добутку $(\vec{b} - \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{c}) \cdot \vec{c}$.

4.5 Обрати базис серед векторів $\vec{a} = (1; -2; 3)$, $\vec{b} = (2; -1; 4)$, $\vec{c} = (3; 8; -5)$, $\vec{d} = (1; 3; -5)$. Розкласти небазисний вектор за векторами базису.

5. Пряма на площині.

5.1 Дано вершини трикутника $A(-4; -5)$, $B(-2; 6)$, $C(8; -1)$. Знайти рівняння та відобразити на рисунку: 1) сторони AB , 2) висоти AH , 3) медіани BE , 4) прямої CN , паралельної AB , 5) точку перетину N прямих BE і CN .

5.2 Знайти параметричні рівняння і канонічне рівняння прямої, яка задана загальним рівнянням $2x + 5y - 8 = 0$.

5.3 На площині дано дві прямі $11x + 2y - 7 = 0$ і $2x - y + 3 = 0$. Знайти рівняння бісектрис кутів, утворених цими прямими.

6. Площина та пряма у просторі.

6.1 Площина α проходить через точки $A(0; 0; z)$, $B(3; -2; 0)$, $C(3; 0; 1)$. Площина β задана рівнянням $x + 2y + 2z - 7 = 0$. Визначити аплікату точки A за умови, що кут між площинами α і β дорівнює $\arccos \frac{8}{21}$.

6.2 Написати рівняння прямої, що проходить через початок координат і складає рівні кути із площинами $4y = 3x$, $y = 0$, $z = 0$. Знайти ці кути.

6.3 Довести, що прямі
$$\begin{cases} x = 2 + 2t, \\ y = 3 - 4t, \\ z = -3 - 5t \end{cases} \text{ і } \begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0, \\ x + 3y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

паралельні й написати рівняння прямої, що проходить посередині між ними.

7. Звести рівняння кривих другого порядку до канонічного вигляду. Знайти їх фокуси, вершини, директриси, ексцентриситет. Побудувати криві та відобразити на рисунку знайдені результати.

7.1 $9x^2 + 4y^2 + 18y + 8x = 0$

7.2 $16x^2 - 25y^2 - 64x - 50y - 361 = 0$

7.3 $x = 2y^2 - 4y + 3$

Варіант 25

1. Розв'язати СЛАР трьома методами: 1) за формулами Крамера; 2) матричним методом; 3) методом Гауса.

$$\begin{cases} 7x + y - 2z = -12 \\ -6x + 8y + z = 17 \\ 5x - 4y + 9z = 18 \end{cases}$$

2. Розв'язати СЛАР будь-яким методом або довести її несумісність:

$$\text{а) } \begin{cases} 5x + 2y - z = 4 \\ x - 3y + 4z = 1 \\ 3x + 8y - 9z = 4 \end{cases} \quad ; \quad \text{б) } \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 4x - y + 3z = 5 \\ 2x - 5y + 5z = 3 \end{cases} .$$

3. Розв'язати однорідну СЛАР:

$$\begin{cases} 7x + 6y - 5z = 0 \\ 4x - 2y + z = 0 \\ -x + 10y - 7z = 0 \end{cases} .$$

4. Задачі на вектори:

4.1 Дано координати вершин піраміди: A(5; 2; -3), B(-6; 1; -4), C(8; -1; 1), D(-3; -2; 6). Знайти: 1) довжину ребра AC, 2) кут між ребрами AB і AD, 3) площу грані ABC, 4) об'єм піраміди.

4.2 Відомо, що $\vec{x} \perp \vec{a}$, $\vec{x} \perp \vec{b}$, $\vec{a} = (1; -2; 5)$, $\vec{b} = (4; 2; -1)$, $\angle(\vec{x}, 0x)$ - тупий, $|\vec{x}| = 4$. Знайти вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

4.3 Дано координати точок A(4; -3; 2), B(-5; 1; 7), C(8; -2; 6). Знайти векторний добуток $(2\vec{AB} + 5\vec{BC}) \times (3\vec{BA} - \vec{AC})$.

4.4 При яких значеннях α вектори $\vec{a} = (0; \alpha; 2)$, $\vec{b} = (-\alpha; 3; 1)$, $\vec{c} = (0; 4; \alpha)$ компланарні? При яких α трійка векторів є правою?

4.5 Обрати базис серед векторів $\vec{a} = (1; 8; -7)$, $\vec{b} = (2; -7; 0)$, $\vec{c} = (3; 2; -4)$, $\vec{d} = (-6; -5; 5)$. Розкласти небазисний вектор за векторами базису.

5. Пряма на площині

5.1 Дано вершини трикутника $A(1; -4)$, $B(-5; -1)$, $C(2; 5)$. Знайти рівняння та відобразити на рисунку: 1) сторони AB , 2) висоти AH , 3) медіани BE , 4) прямої CN , паралельної AB , 5) точку перетину N прямих BE і CN .

5.2 Знайти координати точки B - проекції точки $A(8; 2)$ на пряму $2x + 4y - 13 = 0$ паралельно прямій $x - 3y + 7 = 0$.

5.3 В рівнобедреному трикутнику ABC з основою AB відомі координати вершин $A(4; -3)$ і $B(-4; 1)$, а вершина C лежить на прямій $x - 4y + 24 = 0$. Знайти координати вершини C .

6. Площина та пряма у просторі.

6.1 Визначити, при яких значеннях m і n площини $mx - 3y + 6z + 5 = 0$ і $6x + 9y - nz - 4 = 0$ будуть паралельні. При $m = n = 2$ знайти кут між зазначеними площинами.

6.2 Знайти кут між прямими, одна з яких задана рівнянням $\begin{cases} x - y - 2z - 1 = 0, \\ 2x + 2y + z + 3 = 0, \end{cases}$ а інша проходить через точки $M(1; 0; 3)$ і $N(5; -2; 7)$.

6.3 Провести через точку перетину площини $x + y + z - 10 = 0$ із

прямою $\begin{cases} x = 2t, \\ y = 1 - t, \\ z = 3 + t \end{cases}$ пряму, що лежить у цій площині і

перпендикулярна до даної прямої

7. Звести рівняння кривих другого порядку до канонічного вигляду. Знайти їх фокуси, вершини, директриси, ексцентриситет. Побудувати криві та відобразити на рисунку знайдені результати.

7.1 $x^2 + 2y^2 + 2x - 8y + 5 = 0$

7.2 $3x^2 - 4y^2 - 12x + 24 = 0$

7.3 $x^2 - 2x - y - 8 = 0$

Варіант 26

1. Розв'язати СЛАР трьома методами: 1) за формулами Крамера; 2) матричним методом; 3) методом Гауса.

$$\begin{cases} -6x + 2y - 5z = 10 \\ 12x + 3y - z = -35 \\ 5x + 7y - 4z = -16 \end{cases}$$

2. Розв'язати СЛАР будь-яким методом або довести її несумісність:

$$\text{а) } \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 4x - y + 3z = 5 \\ 2x - 5y + 5z = 4 \end{cases} \quad ; \quad \text{б) } \begin{cases} 5x + 2y - z = 4 \\ x - 3y + 4z = 1 \\ 3x + 8y - 9z = 2 \end{cases} .$$

3. Розв'язати однорідну СЛАР:

$$\begin{cases} -2x + 3y - 4z = 0 \\ x - 4y + 7z = 0 \\ -3x + 7y - 11z = 0 \end{cases} .$$

4. Задачі на вектори:

4.1 Дано координати вершин піраміди: $A(-7; -3; 3)$, $B(-3; 5; -4)$, $C(5; -1; 6)$, $D(8; -1; 6)$. Знайти: 1) довжину ребра BD , 2) кут між ребрами AB і AD , 3) площу грані BDA , 4) об'єм піраміди.

4.2 Дано: $\vec{x} \perp 0y$, $\vec{x} \cdot \vec{a} = 19$, $\vec{x} \cdot \vec{b} = -1$, $\vec{a} = (-5; 7; 2)$, $\vec{b} = (3; -8; 4)$. Знайти вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

4.3 Знайти векторний добуток векторів $\vec{a} = 4\vec{q} - 3\vec{p}$ і $\vec{b} = 3\vec{q} + \vec{p}$, якщо $|\vec{p}| = 4$, $|\vec{q}| = 3$, $\angle(\vec{p}, \vec{q}) = \pi/6$.

4.4 З'ясувати, при яких значеннях α точки $A(4; 2; \alpha)$, $B(3; \alpha; 0)$, $C(2; 5; 1)$ і $D(5; 1; 3)$ розташовані в одній площині?

4.5 Обрати базис серед векторів $\vec{a} = (1; -2; 4)$, $\vec{b} = (-2; 4; -8)$, $\vec{c} = (8; 1; 7)$, $\vec{d} = (-9; 2; 6)$. Розкласти небазисний вектор за векторами базису.

5. Пряма на площині.

5.1 Дано вершини трикутника $A(2; 8)$, $B(-6; 3)$, $C(4; -3)$. Знайти рівняння та відобразити на рисунку: 1) сторони AB , 2) висоти AH , 3) медіани BE , 4) прямої CN , паралельної AB , 5) точку перетину N прямих BE і CN .

5.2 В прямокутному трикутнику ABC з гіпотенузою AC відомі координати вершин $A(-2; 6)$ і $B(-4; 3)$, а вершина C лежить на прямій $x + y - 2 = 0$. Знайти координати вершини C .

5.3 На площині розташований паралелограм з кутом 45° при вершині A . Відома координата вершини $C(4; 2)$, а також відомо, що сторона AB лежить на прямій $2x - 3y + 11 = 0$. Знайти координати вершин A , B і D .

6. Площина та пряма у просторі.

6.1 Площина α проходить через точку $M_1(1; 3; 1)$ паралельно площини $2x - 4y + 3z - 1 = 0$. Площина β проходить через точку $M_2(5; -1; 2)$ і містить вісь ox . Знайти кут між площинами α і β .

6.2 Площина α проходить через точку $P(3; -1; 2)$ і відтинає на осі $0x$ відрізок удвічі більше, ніж на осі $0y$ і утворює більше, ніж на осі $0z$. Площина β задана рівнянням $3x + my - z + 1 = 0$. При якому m площини будуть перпендикулярні?

6.3 Знайти відстань від точки $P(1; 3; 5)$ до прямої $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{2}$.

7. Звести рівняння кривих другого порядку до канонічного вигляду. Знайти їх фокуси, вершини, директриси, ексцентриситет. Побудувати криві та відобразити на рисунку знайдені результати.

7.1 $6x^2 + 4y^2 - 6y + 9 = 0$

7.2 $4x^2 - 25y^2 - 24x + 50y + 89 = 0$

7.3 $y^2 - 6x + 9 = 0$

Варіант 27

1. Розв'язати СЛАР трьома методами: 1) за формулами Крамера; 2) матричним методом; 3) методом Гауса.

$$\begin{cases} x - 8y + 3z = -12 \\ -7x + 5y - 9z = 21 \\ 5x - y + 2z = -8 \end{cases}$$

2. Розв'язати СЛАР будь-яким методом або довести її несумісність:

$$\text{а) } \begin{cases} 7x + 6y - 5z = 2 \\ 4x - 2y + z = 1 \\ -x + 10y - 7z = 4 \end{cases} \quad ; \quad \text{б) } \begin{cases} -2x + 3y - 4z = 7 \\ x - 4y + 7z = 10 \\ -3x + 7y - 11z = -3 \end{cases} .$$

3. Розв'язати однорідну СЛАР:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 4x - y + 3z = 0 \\ 2x - 5y + 5z = 0 \end{cases} .$$

4. Задачі на вектори:

4.1 Дано координати вершин піраміди: A(-1; -2; 2), B(3; -4; 5), C(-4; 3; -5), D(4; -6; 3). Знайти: 1) довжину ребра AD, 2) кут між ребрами AC і AB, 3) площу грані ABD, 4) об'єм піраміди.

4.2 Дано: $\vec{x} \parallel \vec{a}$, $\vec{a} = (8; 2; -1)$, $\angle(\vec{x}, 0x)$ - гострий, $|\vec{x}| = 2$. Знайти вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

4.3 Відомо, що $|\vec{p}| = 3$, $|\vec{q}| = 5$, $\angle(\vec{p}, \vec{q}) = \pi/6$. Знайти площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a} = 4\vec{p} - \vec{q}$ і $\vec{b} = 5\vec{p} - 2\vec{q}$.

4.4 Спростити вираз мішаного добутку $(\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{c} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{c})$.

4.5 Обрати базис серед векторів $\vec{a} = (-1; 2; 4)$, $\vec{b} = (3; 2; 1)$, $\vec{c} = (-2; 0; 7)$, $\vec{d} = (1; 4; 3)$. Розкласти небазисний вектор за векторами базису.

5. Пряма на площині.

5.1 Дано вершини трикутника $A(-4; 6)$, $B(-1; -1)$, $C(5; 4)$. Знайти рівняння та відобразити на рисунку: 1) сторони AB , 2) висоти AH , 3) медіани BE , 4) прямої CN , паралельної AB , 5) точку перетину N прямих BE і CN .

5.2 В рівнобедреному трикутнику ABC з основою BC відомі координати вершин $A(-2; 7)$ і $B(-3; -1)$, а вершина C лежить на прямій $2x - y - 7 = 0$. Знайти координати вершини C .

5.3 Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $N(6; -4)$ і площа трикутника, обмеженого цією прямою і координатними осями, дорівнює 50 кв.од.

6. Площина та пряма у просторі.

6.1 Скласти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(3; 5; 1)$ і $M_2(4; 2; 3)$ і паралельної вектору $\vec{a} = (3; -1; -2)$. Знайти відстань від точки $P(5; -2; 4)$ до побудованої площини.

6.2 Написати канонічне рівняння прямої
$$\begin{cases} 8x - 5y - z - 1 = 0, \\ x + 3y + 2z + 3 = 0. \end{cases}$$

6.3 Знайти проекцію точки $M(-1; -1; 0)$ на площину $3x + 3y - z - 9 = 0$.

7. Звести рівняння кривих другого порядку до канонічного вигляду. Знайти їх фокуси, вершини, директриси, ексцентриситет. Побудувати криві та відобразити на рисунку знайдені результати.

7.1 $3x^2 + 2y^2 - 6x + 4y = 0$

7.2 $x^2 - y^2 + 6x + 4y - 4 = 0$

7.3 $x^2 - 4x - 16y + 68 = 0$

Варіант 28

1. Розв'язати СЛАР трьома методами: 1) за формулами Крамера; 2) матричним методом; 3) методом Гауса.

$$\begin{cases} 3x - 7y + 3z = 34 \\ -2x + 3y - 5z = -27 \\ 5x - 9y + 2z = 48 \end{cases}$$

2. Розв'язати СЛАР будь-яким методом або довести її несумісність:

$$\text{а) } \begin{cases} -2x + 3y - 4z = 7 \\ x - 4y + 7z = 10 \\ -3x + 7y - 11z = 4 \end{cases} \quad ; \quad \text{б) } \begin{cases} 7x + 6y - 5z = 2 \\ 4x - 2y + z = 1 \\ -x + 10y - 7z = 0 \end{cases} .$$

3. Розв'язати однорідну СЛАР:

$$\begin{cases} 5x + 2y - z = 0 \\ x - 3y + 4z = 0 \\ 3x + 8y - 9z = 0 \end{cases} .$$

4. Задачі на вектори:

4.1 Дано координати вершин піраміди: $A(-1; 2; -3)$, $B(2; -7; -3)$, $C(4; -2; 5)$, $D(-3; 1; 6)$. Знайти: 1) довжину ребра AB , 2) кут між ребрами AB і AC , 3) площу грані ABD , 4) об'єм піраміди.

4.2 Відомо, що $\vec{x} \perp \vec{a}$, $\vec{x} \perp \vec{b}$, $\vec{a} = (-1; 6; 2)$, $\vec{b} = (1; 5; 3)$, $\angle(\vec{x}, 0y)$ - гострий, $|\vec{x}| = 3$. Знайти вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

4.3. Дано паралелограм $ABCD$. Відомо, що $\overline{AC} = 4\vec{p} - 5\vec{q}$, $\overline{BD} = \vec{p} + \vec{q}$, $|\vec{p}| = 5$, $|\vec{q}| = 1$, $\angle(\vec{p}, \vec{q}) = \pi/3$. Знайти площу паралелограма.

4.4 При яких значеннях α вектори $\vec{a} = (\alpha; 2; -1)$, $\vec{b} = (3; 4; -2)$, $\vec{c} = (1; -\alpha; 0)$ компланарні? При яких α трійка векторів є лівою?

4.5 Обрати базис серед векторів $\vec{a} = (-3; 2; 3)$, $\vec{b} = (4; -2; -3)$, $\vec{c} = (-8; 6; -7)$, $\vec{d} = (-7; 6; 9)$. Розкласти небазисний вектор за векторами базису.

5. Пряма на площині.

5.1 Дано вершини трикутника $A(-5; -2)$, $B(1; 7)$, $C(6; -3)$. Знайти рівняння та відобразити на рисунок: 1) сторони AB , 2) висоти AH , 3) медіани BE , 4) прямої CN , паралельної AB , 5) точку перетину N прямих BE і CN .

5.2 В квадраті $ABCD$ відомі координати вершини $A(4; -3)$ і рівняння прямої $BD: x - 2y = 0$. Знайти координати вершин B і C .

5.3 Знайти точку M , симетричну точці $N(7; -4)$ відносно прямої, яка проходить через точки $A(3; -2)$ і $B(1; 4)$.

6. Площина та пряма у просторі.

6.1 Площина α проходить через точку $P(2; 1; 1)$ і відтинає на осях Ox і Oy відрізки, відповідно рівні 4 і -6. Площина β задана рівнянням $mx + 3y + nz - 6 = 0$. При яких m і n площини будуть паралельні?

6.2 Площина α проходить через точку $M_1(5; 3; 2)$ і паралельна двом векторам $\vec{a} = (4; 1; 2)$ і $\vec{b} = (5; 3; 1)$. Площина β проходить через точки $P_1(1; 1; 1)$, $P_2(2; 3; 2)$ і $P_3(3; 4; 2)$. Знайти кут між площинами α і β .

6.3 Знайти точку симетричну точці $3(-1; 2; 0)$ відносно прямої $x = t - 1$, $y = -2t + 3$, $z = 2t - 4$.

7. Звести рівняння кривих другого порядку до канонічного вигляду. Знайти їх фокуси, вершини, директриси, ексцентриситет. Побудувати криві та відобразити на рисунок знайдені результати.

7.1 $2x^2 + y^2 + 4x - 4 = 0$

7.2 $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$

7.3 $y^2 - 10y - 10x + 5 = 0$

Варіант 29

1. Розв'язати СЛАР трьома методами: 1) за формулами Крамера; 2) матричним методом; 3) методом Гауса.

$$\begin{cases} -2x - 3y + z = -3 \\ -11x + 2y - 3z = -22 \\ x - 7y + 12z = 47 \end{cases}$$

2. Розв'язати СЛАР будь-яким методом або довести її несумісність:

$$\text{а) } \begin{cases} 6x - 3y - 2z = 9 \\ x - 2y + z = 1 \\ 3x + 3y - 5z = 4 \end{cases} \quad ; \quad \text{б) } \begin{cases} 4x - 3y - z = 7 \\ x - 5y + 3z = 2 \\ 2x + 7y - 7z = 3 \end{cases} .$$

3. Розв'язати однорідну СЛАР:

$$\begin{cases} 4x + 5y - 3z = 0 \\ 3x - y + 4z = 0 \\ x + 6y - 7z = 0 \end{cases} .$$

4. Задачі на вектори:

4.1 Дано координати вершин піраміди: $A(2; 2; -3)$, $B(4; -5; 3)$, $C(-1; 1; 4)$, $D(-4; 2; -6)$. Знайти: 1) довжину ребра AD , 2) кут між ребрами AB і AD , 3) площу грані ABC , 4) об'єм піраміди.

4.2 Дано: $\vec{x} \perp 0x$, $\vec{x} \cdot \vec{a} = 1$, $\vec{x} \cdot \vec{b} = -10$, $\vec{a} = (9; -2; 5)$, $\vec{b} = (4; -3; -4)$. Знайти вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

4.3 Дано вершини $A(5; 4; -2)$, $B(3; 2; 1)$, $C(6; -3; 4)$ трикутника. Знайти довжину висоти трикутника, що проведена з вершини C .

4.4 З'ясувати, при яких значеннях α точки $A(3; 4; 5)$, $B(\alpha; 3; 4)$, $C(5; 3; \alpha)$ і $D(4; \alpha; 5)$ розташовані в одній площині?

4.5 Обрати базис серед векторів $\vec{a} = (4; -3; -7)$, $\vec{b} = (4; 3; -2)$, $\vec{c} = (1; 5; 4)$, $\vec{d} = (-6; -2; 7)$. Розкласти небазисний вектор за векторами базису.

5. Пряма на площині.

5.1 Дано вершини трикутника $A(8; -3)$, $B(2; 4)$, $C(-5; -2)$. Знайти рівняння та відобразити на рисунку: 1) сторони AB , 2) висоти AH , 3) медіани BE , 4) прямої CN , паралельної AB , 5) точку перетину N прямих BE і CN .

5.2 В паралелограмі $ABCD$ відомі координати вершини $A(-2; -1)$, рівняння прямої BD : $x + 3y - 8 = 0$ і прямої BC : $2x - 7y + 23 = 0$. Знайти координати вершини C і площу паралелограма.

5.3 Скласти рівняння прямих, що проходять через початок координат і утворюють з прямою $3x - y + 5 = 0$ кут $\pi/4$.

6. Площина та пряма у просторі.

6.1 Площина проходить через точки $M_1(0; 1; 2)$, $M_2(2; 8; 3)$, $M_3(3; -2; -1)$. Знайти відстань точки $P(5; -8; 6)$ до площини.

6.2 Пряма α проходить через точку $A(1; -3; 6)$ паралельно осі Oy . Пряма β проходить через точку $B(2; 1; -1)$ паралельно прямій $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{-1}$. Знайти кут між прямими.

6.3 Пряма проходить через точки $M_1(-1; 3; 0)$, $M_2(1; 7; 3)$. Площина задана рівнянням $3x + By + 2z + D = 0$. При яких B і D пряма лежить у площині?

7. Звести рівняння кривих другого порядку до канонічного вигляду. Знайти їх фокуси, вершини, директриси, ексцентриситет. Побудувати криві та відобразити на рисунку знайдені результати.

$$7.1 \quad 2x^2 + y^2 + 6x - 3y - 2,25 = 0$$

$$7.2 \quad 4x^2 - y^2 + 16x + 18y - 49 = 0$$

$$7.3 \quad y^2 - 4y - 20x + 24 = 0$$

Варіант 30

1. Розв'язати СЛАР трьома методами: 1) за формулами Крамера; 2) матричним методом; 3) методом Гауса.

$$\begin{cases} -x - 4y + 3z = 6 \\ 10x + 3y - z = -10 \\ 15x - y + 3z = -7 \end{cases}$$

2. Розв'язати СЛАР будь-яким методом або довести її несумісність:

$$\text{а) } \begin{cases} 4x - 3y - z = 7 \\ x - 5y + 3z = 2 \\ 2x + 7y - 7z = 4 \end{cases} ; \quad \text{б) } \begin{cases} 6x - 3y - 2z = 9 \\ x - 2y + z = 1 \\ 3x + 3y - 5z = 6 \end{cases} .$$

3. Розв'язати однорідну СЛАР:

$$\begin{cases} x + 14y - 17z = 0 \\ x - 3y + 4z = 0 \\ 3x + 8y - 9z = 0 \end{cases} .$$

4. Задачі на вектори:

4.1 Дано координати вершин піраміди: A(-2; 3; -1), B(4; -5; 1), C(2; -4; 5), D(-3; 1; 8). Знайти: 1) довжину ребра BD, 2) кут між ребрами BA і BD, 3) площу грані BAC, 4) об'єм піраміди.

4.2 Дано: $\vec{x} \parallel \vec{a}$, $\vec{a} = (-2; 1; 4)$, $\angle(\vec{x}, 0z)$ - тупий, $|\vec{x}| = 3$. Знайти

вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

4.3 Дано координати точок A(6; 2; -2), B(-4; 3; -1), C(7; -4; 5). Знайти векторний добуток $(3\vec{AB} - 4\vec{BC}) \times (2\vec{BA} - 5\vec{AC})$.

4.4 Спростити вираз мішаного добутку $(\vec{b} - \vec{c}) \cdot (\vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{a}$.

4.5 Обрати базис серед векторів $\vec{a} = (1; -2; 4)$, $\vec{b} = (-2; 4; -8)$, $\vec{c} = (3; 1; -2)$, $\vec{d} = (5; -1; 8)$. Розкласти небазисний вектор за векторами базису.

5. Пряма на площині.

5.1 Дано вершини трикутника $A(2; 6)$, $B(-4; 3)$, $C(5; -1)$. Знайти рівняння та відобразити на рисунку: 1) сторони AB , 2) висоти AH , 3) медіани BE , 4) прямої CN , паралельної AB , 5) точку перетину N прямих BE і CN .

5.2 Відомо загальне рівняння прямої $4x + y - 12 = 0$. Записати параметричні і канонічне рівняння цієї прямої.

5.3 В прямокутному трикутнику ABC з гіпотенузою AB відомі координати вершин $A(-5; 3)$ і $B(4; 1)$, а вершина C лежить на прямій $x + 2y + 6 = 0$. Знайти координати вершини C .

6. Площина та пряма у просторі.

6.1 Площина α проходить через точки $M_1(1; 1; -4)$, $M_2(0; -1; -1)$, $M_3(-1; 2; 12)$. Площина β задана рівнянням $x + 2y - 3z + 2 = 0$. Показати, що площини паралельні, і з'ясувати, яка з них розташована ближче до точки $P(0; -7; 3)$.

6.2 Пряма α проходить через точку $A(-1; 2; 4)$, перпендикулярно площини $2x + y - 6z + 10 = 0$. Пряма β проходить через точки $B(2; 3; -5)$ і $C(-4; 0; 3)$. Знайти кут між прямими α і β .

6.3 Знайти точку M симетричну точці $P(-1; 2; 4)$ відносно площини $3x + 2y + z + 9 = 0$.

7. Звести рівняння кривих другого порядку до канонічного вигляду. Знайти їх фокуси, вершини, директриси, ексцентриситет. Побудувати криві та відобразити на рисунку знайдені результати.

7.1 $2x^2 + y^2 + 6x - 3y - 2,25 = 0$

7.2 $9x^2 - y^2 + 18x + 8y + 29 = 0$

7.3 $x + \frac{1}{4}y^2 - 2y = 0$

ЛІТЕРАТУРА

1. Мастиновский Ю.В. Основы лінійної алгебри та аналітичної геометрії: навчальний посібник / Ю.В. Мастиновский, В.С. Левада, Д.І. Анпілогов. – Запоріжжя: СТАТУС, 2017. – 268 с.
2. Овчинников П.П. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра: Аналітична геометрія: Вступ до математичного аналізу: Диференціальне і інтегральне числення/ П.П. Овчинников, Ф.П. Яремчук, В.М. Михайленко. – 3-те вид., випр. – К.: Техніка, 2007. – 600 с.
3. Дубовик В.П. Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / В.П. Дубовик., І.І. Юрик. – 4-те вид. – К. : Ігнатекс-Україна., 2013. – 648 с
4. Левада В.С. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Конспект лекцій для студентів усіх спеціальностей РП та ІОТ факультетів. / В.С. Левада, Ю.В. Мастиновський. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2003.
5. Герасимчук В.С. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах: навчальний посібник для студ. технічних і технологічних спец. вищих навч. закладів: затв. МОНУ / В.С. Герасимчук, Г.С. Васильченко, В.І. Кравцов. – К.: Книги України ЛТД, 2009. – 577с.
6. Мастиновський Ю.В. Математичні поняття, визначення, теореми, формули: довідковий посібник / Ю.В. Мастиновський, Д.І. Анпілогов. – Запоріжжя; Кругозор, 2015. – 172с.
7. Клепко В. Ю. Вища математика в прикладах і задачах: навчальний посібник для студ. вищих навч. закл. / В.Ю. Клепко, В. Л. Голець. – 2-ге вид. – К. : Центр учбової літератури, 2009. – 594 с.
8. Литвин І.І. Вища математика: навч. посібник: рек. МОНУ / І.І. Литвин, О.М. Конончук, Г.О. Желізняк. – 2-ге вид. – К. : Центр учбової літератури, 2009. – 368 с.
9. Практикум з вищої математики: навчальний посібник: рек. МОНУ. Ч.1 / Ю.М. Бардачов, В.В. Крючковський, О.В. Цибуленко та ін. – Херсон : Олді-плюс, 2010. – 390 с.