

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний університет "Запорізька політехніка"

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до самостійної та практичної роботи
з дисципліни «Загальна електротехніка»,
розділ «Електричні кола постійного струму»
для студентів спеціальностей 173 «Авіоніка» і
174 «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані
технології та робототехніка»
всіх форм навчання

2025

Методичні вказівки до самостійної та практичної роботи з дисципліни «Загальна електротехніка», розділ «Електричні кола постійного струму» для студентів спеціальностей 173 «Авіоніка» і 174 «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка» всіх форм навчання / Укл. І.О. Афанасьева, Г.М. Романіченко, Г.В. Касапов, – Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2025. – 42 с.

Укладачі: І.О. Афанасьева, ст. викладач,
Г.М. Романіченко, ст. викладач,
Г.В. Касапов, зав. Лабораторією.

Рецензент В.В. Козлов, доцент, к.т.н.

Відповідальний за випуск: Ю.О. Крисан, доцент, к.т.н.

Затверджено
на засіданні кафедри Е і АПУ
Протокол №4 від 22.01.2025 р.

Затверджено
на засіданні Навчально-методичної комісії
Електротехнічного факультету
Протокол №10 від 22.05.2025 р.

ЗМІСТ

Передмова	4
1. Основи лінійних електричних кіл постійного струму	5
1.1 Основні визначення і закони електричних кіл	5
1.2 Види з'єднань опорів в електричних схемах	9
2. Методи розрахунку лінійних електричних кіл	12
2.1 Метод еквівалентних перетворень	12
2.2 Метод безпосереднього застосування законів Кірхгофа	16
2.3 Метод контурних струмів	20
2.4 Потенційна діаграма	24
2.5 Метод вузлових потенціалів	25
3 Питання для самоперевірки	33
4. Індивідуальне завдання.....	34
5. Задачі для тренінга	41
6. Література	42

ПЕРЕДМОВА

Методичні вказівки призначені для студентів-бакалаврів неелектричних спеціальностей та містять теоретичні відомості з фундаментальних методів розрахунку електричних кіл постійного струму з одним чи декількома джерелами енергії. Кожен метод пояснюється прикладом розрахунку.

Вказівки мають основний перелік питань для самоперевірки, контрольні завдання, прості завдання для тренінгу, перелік навчальної літератури до курсу «Загальна електротехніка».

На титульному листі виконаної роботи обов'язково вказується шифр залікової книжки, номер варіанту завдання, назва роботи, номер академічної групи, ім'я та прізвище студента, *e-mail*, рік виконання.

Номер варіанту завдання та його особливості кожному студенту задає лектор.

1. ОСНОВИ ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

1.1 Основні визначення і закони електричних кіл

Електричне коло, що складається тільки з лінійних елементів, називається *лінійним*, а його енергетичний стан описують лінійними алгебраїчними рівняннями. Лінійним називають елемент кола, опір якого залишається незмінним незалежно від сили і напрямку струму в ньому і від величини напруги на його затискачах.

При розрахунку електричного кола найчастіше визначають струми, напруги і потужності на всіх (чи заданих) ділянках кола за відомим значенням е.р.с. E и опорам R .

Складне електричне коло має *вітки*, *вузли* і *контури*.

Вузол – місце з'єднання *трьох* (або більшої кількості) віток електричного кола. Наприклад, вузол a та вузол b на рисунку 1.1. Вузли поміж собою відрізняються величинами своїх потенціалів.

Вітка – ділянка електричного кола між двома вузлами, по якій протікає той самий струм, наприклад I_1 , ділянка ab на рисунку 1.1. Вітки одна від одної відрізняються своїми струмами.

Контур – будь-який замкнутий шлях, утворений вітками і вузлами електричного кола, наприклад, контур $abcd$ на рисунку 1.1.

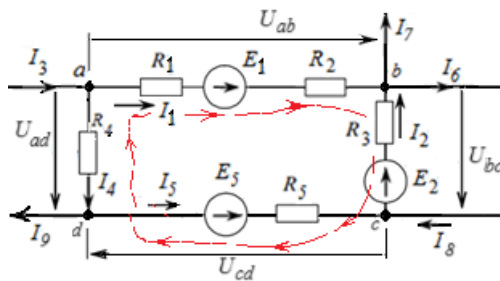
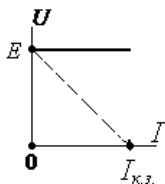
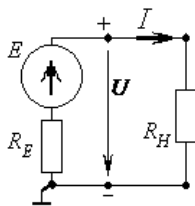
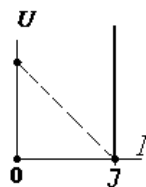
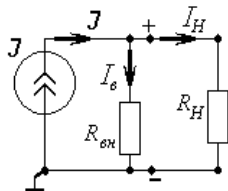


Рисунок 1.1- Ділянка електричного кола

Джерела енергії – це активні елементи кола, де будь-яка енергія перетворюється на електричну енергію. Всі джерела електричної енергії поділяють на два види: *е.р.с.* і *струму*. Основною характеристикою джерел, як і будь-якого іншого елемента є його вольт-амперна характеристика (BAX).

Рисунок 1.2 – Джерело *е.р.с.* і його *ВАХ*Рисунок 1.3 – Джерело *струму* і його *ВАХ*

В основу розрахунку лінійних електричних кіл покладені відомі закони Ома і Кірхгофа.

1.1.1. *Закон Ома* застосовується для одного елемента, однієї вітки або для одноконтурного замкнутого (без розгалужень!) кола:

- для одного елемента чи пасивної вітки *ab* (рисунок 1.4)

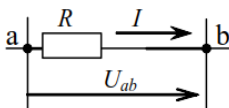


Рисунок 1.4 – Вітка електричного кола

$$I = \frac{U_{ab}}{R}, \quad (1.1)$$

де: I – струм, що проходить через елемент кола, [A];

$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b$ – прикладена до елемента (вітки) напруга, [B];

R – опір, [Ом].

- для вітки, яка в своєму складі має джерела *ЕРС* (Рис.1.5) закон Ома набуває вигляду формули (1.2).

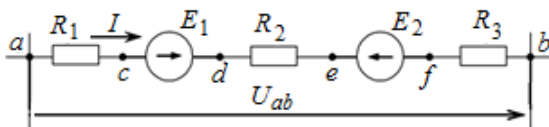


Рисунок 1.5 – Вітка з джерелами живлення

$$I = \frac{E_1 - E_2 + \varphi_a - \varphi_b}{R_1 + R_2 + R_3}. \quad (1.2)$$

У загальному випадку, коли між вузлами a і b включено активну резистивну вітку і струм спрямований від вузла a до вузла b , формула (1.2) набуває вигляд:

$$I = \frac{\varphi_a - \varphi_b + \sum \bar{E}}{\sum R}, \quad (1.3)$$

тут: $\sum \bar{E}$ – алгебраїчна сума ЕРС, при цьому ЕРС, напрямки яких збігаються з напрямком струму, обирають зі знаком “+”, а якщо ці напрямки не збігаються, то відповідні ЕРС мають від’ємний знак “-”;

$\sum R$ – арифметична сума опорів контуру.

Вираз (1.3) є узагальненою формулою закону Ома для ділянки кола, що містить джерела ЕРС.

- для замкнутого одно контурного кола (рисунок 1.6).

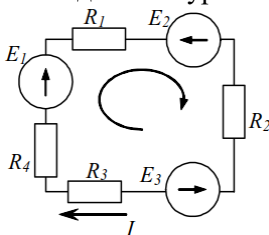


Рисунок 1.6 – Приклад одноконтурного електричного кола

$$I = \frac{\sum \bar{E}}{\sum R} = \frac{E_1 - E_2 - E_3}{R_1 + R_2 + R_3}. \quad (1.4)$$

1.1.2. Перший закон Кірхгофа (закон струмів).

Класичне формулювання. Алгебраїчна сума струмів у будь-якому вузлі електричного кола дорівнює нулю:

$$\sum \bar{I}_k = 0, \quad (1.5)$$

де: k – номер вітки (струму), що безпосередньо підключено до вузла.

Існує також інше формулювання: арифметична сума струмів, що входять у вузол, дорівнює арифметичній сумі струмів, що виходять із вузла.

Якщо струми, які входять у вузол обрати від'ємними, тоді струми, що відходять від вузла мають додатний знак в рівнянні (1.5). Наприклад, для вузла b (рисунок 1.1) перший закон Кірхгофа можна записати в такий спосіб:

$$-I_1 - I_2 + I_6 + I_7 = 0 ; \text{ або } I_6 + I_7 = I_1 + I_2.$$

1.1.3. Другий закон Кірхгофа (закон напруги).

Класичне формулювання: алгебраїчна сума падінь напруги на елементах у будь-якого замкнутого контуру дорівнює алгебраїчній сумі ЕРС цього ж таки контуру.

$$\sum R_k \cdot \bar{I}_k = \sum \bar{E}_k . \quad (1.6)$$

Для складання рівнянь за другим законом Кірхгофа спочатку вказують *напрямок струмів* у всіх вітках електричного кола і для кожного контуру обирають *напрямок обходу*. Якщо при цьому напрямок ЕРС збігається з напрямком обходу контуру, то таку ЕРС у правій частині рівняння (1.6) беруть зі знаком “+”, якщо не збігаються – зі знаком “мінус”. Падіння напруги у лівій частині рівняння (1.6) беруть зі знаком “+”, якщо обраний напрямок струму вітки збігається з напрямком обходу контуру, і зі знаком “–”, якщо не збігається.

Для контуру $abcda$ (Рис. 1.1), що складається з ділянок ab, bc, cd, da , рівняння (1.6) має вигляд:

$$(R_1 + R_2) \cdot I_1 - R_3 \cdot I_2 - R_5 \cdot I_5 - R_4 \cdot I_4 = E_1 - E_2 - E_5 .$$

1.1.4. Закон Джоуля- Ленца (теплова дія струму).

Кількість теплоти, яка виділяється в активному опорі R при проходженні через нього струму I є пропорційною до квадрату струму, величині опору і часу t проходження струму через елемент:

$$Q = I^2 \cdot R \cdot t . \quad (1.7)$$

1.1.5. Баланс потужності.

Згідно зі законом збереження та взаємного перетворення енергій в природі, для електричного кола обов'язково, щоб *алгебраїчна сума енергій джерел живлення дорівнювала арифметичній сумі енергій споживачів* цього кола.

Спожита енергія, яка розсіюється в опорах у вигляді тепла:

$$P_{cn} = \sum_{k=1}^n (I_k)^2 \cdot R_k . \quad (1.8)$$

Сумарна енергія, що вироблена джерелами живлення

$$P_{дж} = \sum_{k=1}^n E_k \cdot I_k + \sum_{s=1}^n U_s \cdot J_s , \quad (1.9)$$

тут: U_s напруга на полюсах джерела струму J_s .

1.2 Види з'єднань опорів в електричних схемах

1.2.1. *Послідовне з'єднання* – коли два опори мають одну спільну точку і вона не є вузлом електричного кола.

Особливості: по всім опорам проходить один і той же струм, а напруга на кожному опорі буде різною.

При заміні n послідовно з'єднаних опорів одним еквівалентним, його величина дорівнює *арифметичній* сумі цих опорів:

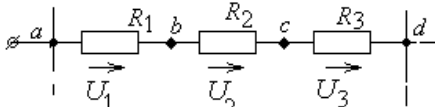
$$R_{eqv} = \sum_{k=1}^n R_k . \quad (1.10)$$

Наприклад, еквівалентний опір послідовної ділянки (Рис. 1.8,а):

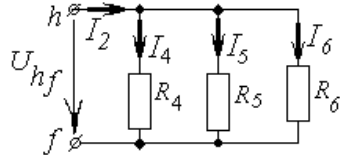
$$R_{ad} = R_1 + R_2 + R_3 .$$

1.2.2. *Паралельне з'єднання* – коли два (або більша кількість) опори мають *два спільні вузли* (рисунок 1.7,б).

Особливості: напруга на всіх опорам буде однаковою, а струми в кожному опорі – різні.



а)



б)

Рисунок 1.7 – Приклади послідовного (а) і паралельного (б) з'єднання опорів

Еквівалентний опір паралельного з'єднання знаходимо в 2 етапи: спочатку знайдемо еквівалентну *провідність* цієї ділянки схеми, а потім – опір. Наприклад, для схеми (Рис.1.7,б):

$$G_{hf} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}; \quad R_{hf} = \frac{1}{G_{hf}}, \quad (1.11)$$

де G_{hf} – еквівалентна провідність кола [См].

У випадку паралельного з'єднання двох опорів (наприклад, рисунок 1.7,б: R_4 і R_5) їх сумарний (еквівалентний) опір:

$$R_{45} = \frac{R_4 \cdot R_5}{R_4 + R_5}. \quad (1.12)$$

1.2.3. *Змішане* з'єднання – коли між опорами є один спільний вузол.

Приклади змішаних з'єднань: «трикутник» (Рис.1.8,а), «зірка» (Рис.1.8,б), «міст» (Рис.1.9).

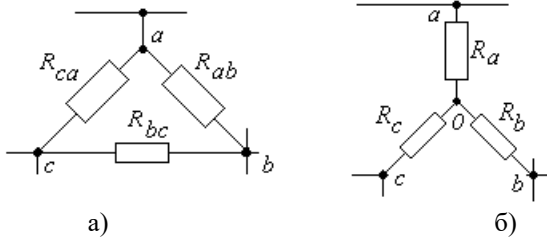


Рисунок 1.8– Електричний трикутник (а) і електрична зірка (б) опорів

У ряді випадків для спрощення схеми електричного кола необхідно перетворювати з'єднання зіркою в еквівалентне з'єднання трикутником чи з'єднання трикутником – до з'єднання зіркою.

Такі перетворення виконують за формулами:

– Перехід від «трикутника» на «зірку»:

$$R_a = \frac{R_{ab} \cdot R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}; \quad R_b = \frac{R_{bc} \cdot R_{ab}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}; \quad \dots (1.13)$$

– Перехід від «зірки» на «трикутник»:

$$R_{ab} = R_a + R_b + \frac{R_a \cdot R_b}{R_c}; \quad R_{bc} = R_b + R_c + \frac{R_b \cdot R_c}{R_a} \dots (1.14)$$

1.2.4. Засіб з'єднання між собою двох «трикутників» (або двох «зірок»), при якому існує одна загальна вітка, отримав назву «міст».

В цьому випадку еквівалентний опір схеми можна знайти шляхом застосування перетворення одного з «трикутників» на еквівалентну «зірку» (або «зірку» на «трикутник») з подальшою заміною послідовних і паралельних ділянок схеми.

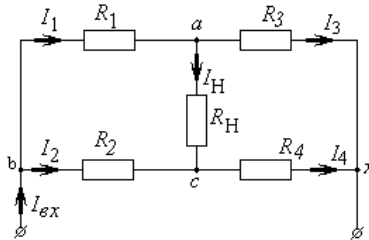


Рисунок 1.9 – «Мостова» схема

Міст може бути «врівноваженим», якщо в ньому дотримано співвідношення між опорами:

$$R_1 \cdot R_4 = R_2 \cdot R_3 . \quad (1.15)$$

В такому випадку струм через загальну ділянку між плечами моста (навантаження моста, R_H) дорівнює нулю: $I_H = 0$.

1.2.5 Перетворення джерела ЕРС (E) в еквівалентне джерело струму (J), або перетворення джерела струму в еквівалентне джерело ЕРС виконується за схемою, приведеної на рисунку 1.10.

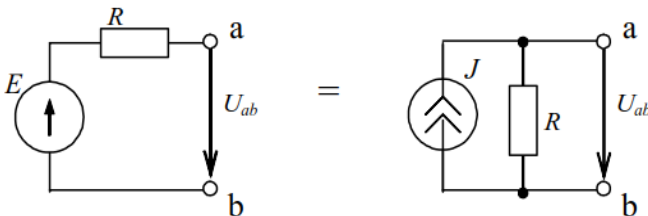


Рисунок 1.10 – Джерело ЕРС та джерело струму

Заміна є еквівалентною, якщо дотримуватися співвідношень:

$$J = \frac{E}{R} . \quad E = J \cdot R .$$

2. МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

Методів існує багато, основні з них:

- еквівалентних перетворень;
- безпосереднього застосування законів Кірхгофа;
- контурних струмів;
- вузлових потенціалів;
- еквівалентного генератора;
- та інші.

2.1. Метод еквівалентних перетворень

Метод еквівалентних перетворень найчастіше застосовують для електричного кола з одним джерелом енергії. Цей метод заснований на поступовому спрощенні конфігурації кола (так зв. "згортання схеми") і знаходженні одного еквівалентного опору всього кола відносно джерела енергії. Для розрахунку струмів в окремих вітках висхідної схеми треба провести розрахунки по схемах у «зворотному порядку».

Спрощення конфігурації електричної схеми (чи будь-якої її ділянки) роблять таким чином, щоб струми і напруги в частинах схеми, які не піддані перетворенню, залишилися незмінними. Таке перетворення називається *еквівалентним*, і схеми відповідно – *еквівалентними схемами*. Тому й потужності висхідного кола і еквівалентного будуть однакові.

2.1.1. Симетрія електричних кіл.

Якщо схема має *повздовжню* вісь (або площину) симетрії, тоді точки однакового потенціалу знаходяться на кінцях резисторів, які є симетричними відносно неї (повздовжня вісь або площина симетрії проходить через клеми джерела).

Якщо схема симетрична і має *поперечну* вісь симетрії, тоді однакові потенціали мають всі точки, що лежать на перетині її з провідниками (поперечна вісь або площина симетрії проходить «поперек» джерела, тобто його полюси симетричні відносно неї).

Для спрощення симетричних кіл використовують прийом об'єднання (чи роз'єднання) рівно потенційних вузлів.

Так, для визначення еквівалентного опору R_{ag} між вершинами куба a і g (рисунок 2.1), рівно потенційні вузли (b, d, e) можна об'єднати в один вузол. Таке ж об'єднання можна застосувати ще й до інших вузлів цієї схеми (наприклад, c, f, h).

Тоді опір R_{ag} можна визначити за схемою, представленої на рисунку 2.2 (тут усі грані куба мають рівні опори R).

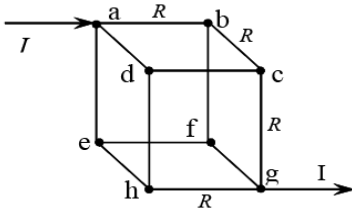


Рисунок 2.1 – «Куб»

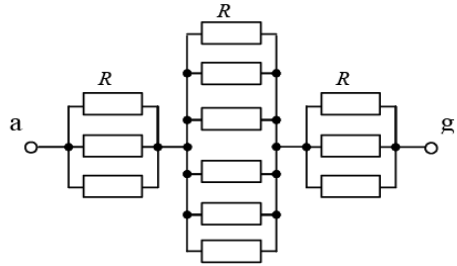


Рисунок 2.2 – Об'єднання в один вузол

Бачимо, що еквівалентний опір ($R_{екв} = R_{ag}$) визначається трьома паралельними групами (дві – з трьох опорів і одна група – із шести):

$$R_{екв} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \right) \cdot R = \frac{5}{6} R.$$

2.1.2. Приклад розрахунку

На рисунках 2.4...2.8, як приклад, показано поетапне перетворення складного електричного кола (Рис. 2.3) з використанням викладених вище прийомів.

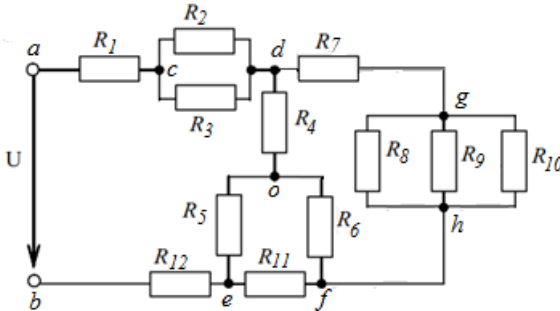


Рисунок 2.3 – Вихідна схема електричного кола

На першому етапі зробимо заміну паралельних ділянок висхідної схеми.

$$R_{cd} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}, \quad G_{gh} = \frac{1}{R_8} + \frac{1}{R_9} + \frac{1}{R_{10}}; \quad R_{gf} = \frac{1}{G_{gh}}.$$

Отримаємо нову, еквівалентну схему (Рис.2.4).

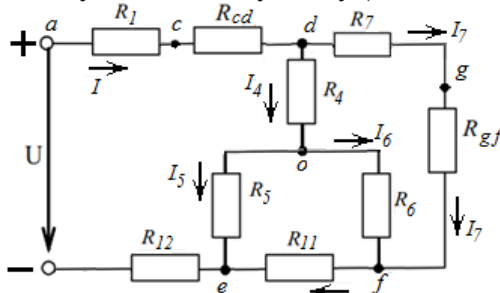


Рисунок 2.4 – Схема еквівалентна, після першого перетворення

Другий етап – це заміна послідовних ділянок в схемі (Рис.2.4).

$$R_{ad} = R_1 + R_{cd} \quad R_7^* = R_7 + R_{gf}.$$

Отримаємо нову еквівалентну схему (Рис.2.5).

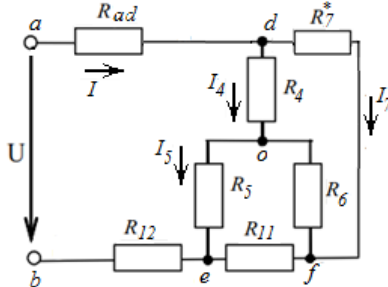


Рисунок 2.5 – Схема еквівалентна, після другого перетворення

Третє перетворення – це заміна R_4 , R_5 і R_6 (зірка) на R_{45} , R_{56} і R_{64} (трикутник), що розраховано за формулами (1.12). Після заміни зірки на трикутник схема має вид, що відповідає рисунку 2.6.

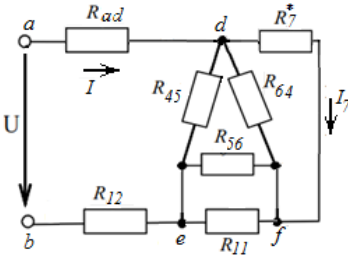


Рисунок 2.6 – Третє перетворення кола

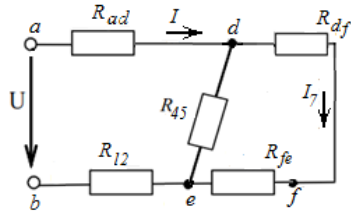


Рисунок 2.7 – Коло після етапу №4

Четвертий етап. Виділимо на схемі (Рис. 2.6) ділянки з паралельним з'єднанням резисторів (ділянка df із R_{64} і R_7^* та ділянка fe із R_{56} , R_{11}) і знайдемо еквівалентний опір зазначених ділянок.

$$R_{df} = \frac{R_{64} \cdot R_7^*}{R_{64} + R_7^*}, \quad R_{fe} = \frac{R_{56} \cdot R_{11}}{R_{56} + R_{11}}.$$

Отримаємо нову еквівалентну схему (Рис.2.7).

Подальші перетворення зводяться до заміни послідовно-паралельних з'єднань відповідними еквівалентними опорами:

- заміну послідовних опорів R_{df} та R_{fe} одним сумарним R_{dfe} ;
- заміну двох паралельних опорів R_{45} і R_{dfe} – одним еквівалентним

$$R_{de} = \frac{R_{45} \cdot R_{dfe}}{R_{45} + R_{dfe}};$$

– і, нарешті, послідовне з'єднання R_{ad} , R_{de} і R_{12} (Рис.2.8) підлягає останньому перетворенню: знаходимо еквівалентний опір всього кола

$$R_{eqv} = R_{ad} + R_{de} + R_{12}.$$

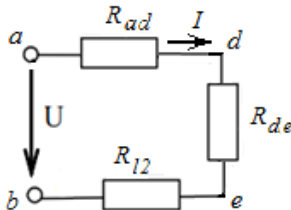


Рисунок 2.8 – Еквівалентне послідовне з'єднання опорів

Тоді струм I , що споживає коло від джерела енергії, буде:

$$I = \frac{U}{R_{eqv}}.$$

Напругу і струм для кожної ділянки електричного кола знаходимо за законами Ома або Кірхгофа, просуваючись по еквівалентних схемах в зворотному порядку – від найпростішої до висхідної. Наприклад:

$$U_{de} = I \cdot R_{de} \cdot \quad I_7 = \frac{U_{de}}{R_{dfe}} \cdot \quad U_{df} = I_7 \cdot R_7^* ; \quad U_{fe} = I_7 \cdot R_{fe} \cdot$$

Тепер звертаємось до схеми Рис.2.5. За законом Ома:

$$I_{11} = \frac{U_{fe}}{R_{11}} \cdot$$

За першим законом Кірхгофа:

$$I_4 = I - I_7 \cdot \quad I_6 = I_{11} - I_7 \cdot \quad I_5 = I_4 - I_6 \cdot$$

Перевірка вірності розв'язання: рівняння за другим законом Кірхгофа для найдовшого контуру схеми (Рис.2.5):

$$U = I \cdot R_1 + I \cdot R_{cd} + I_4 \cdot R_4 + I_6 \cdot R_6 + I_{11} \cdot R_{11} + I \cdot R_{12} \cdot$$

Якщо права і ліва частини останнього рівняння мають незначну розбіжність, тоді розрахунки виконано правильно.

Для більш детальної перевірки можна застосувати перевірку балансу потужності для висхідної схеми.

2.2. Метод безпосереднього застосування законів Кірхгофа

Розрахунок кола цим методом полягає в розв'язанні системи рівнянь, яку складено за першим і другим законами Кірхгофа для всієї схеми. Загальне число рівнянь в системі повинне дорівнювати числу невідомих, тобто числу віток кола. Результатом розрахунку будуть невідомі струми всіх віток електричного кола.

2.2.1. Правила складання рівнянь за законами Кірхгофа.

Кількість незалежних рівнянь, що складаються за першим законом Кірхгофа, дорівнює кількості вузлів схеми (q) мінус одиниця, тобто $q-1$. Інші рівняння складають за другим законом Кірхгофа.

При складанні рівнянь за другим законом Кірхгофа можна вибирати будь-як контури, однак потрібно стежити, щоб у кожному новому контурі містилася хоча б одна нова вітка, що не входила в інші, раніше обрані контури. Найбільше зручно обирати контури у виді

комірок схеми, тобто контурів, що не містять усередині себе інших віток. При такому виборі контурів можна бути упевненим, що всі рівняння, будуть *незалежними*.

Метод безпосереднього застосування законів Кірхгофа є універсальним, має наочність, дозволяє відразу визначити струми у всіх вітках електричного кола. Однак цей метод вимагає розв'язання системи з великою кількістю рівнянь, що дорівнює загальній кількості віток в схемі. Тому було розроблено й інші методи розрахунку кіл, що дозволяють скоротити число невідомих в системі рівнянь.

2.2.2. Приклад розрахунку.

Для кола (рисунок 2.9) визначити струми в вітках і показання вольметра, якщо:

$$E_1=10 \text{ В}; E_2=20 \text{ В}; E_3=80 \text{ В};$$

$$J=7.65 \text{ А};$$

$$R_1=1 \text{ Ом}; R_2=2 \text{ Ом}; R_3=3 \text{ Ом};$$

$$R_4=4 \text{ Ом}; R_5=5 \text{ Ом}; R_6=6 \text{ Ом};$$

$$R_7=7 \text{ Ом}.$$

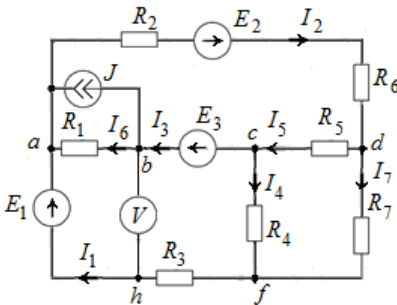


Рисунок 2.9 – Схема розгалуженого кола

Рекомендований порядок розрахунків

- Опори R_6 і R_2 включені послідовно, замінимо їх еквівалентним:

$$R_{26} = R_2 + R_6 = 2 + 6 = 8 \text{ Ом}.$$

Далі обираємо напрямки струмів у всіх вітках, позначимо вузли і напрямки обходу контурів (за годинниковою стрілкою).

- Складемо систему з 7 рівнянь (сім невідомих струмів), при цьому 4 рівняння складемо за першим законом Кірхгофа (тому що *кількість вузлів* схеми дорівнює 5). Наприклад, для вузлів a ; b ; c ; d .

- Інші три рівняння – за другим законом Кірхгофа для незалежних контурів I, II та III.

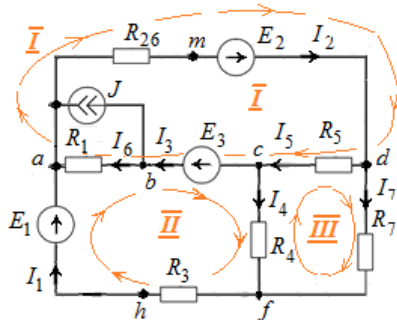


Рисунок 2.10 – Схема після спрощення

$$\left. \begin{aligned}
 I_2 - I_1 - I_6 - J &= 0 \\
 I_6 - I_3 + J &= 0 \\
 I_3 + I_4 - I_5 &= 0 \\
 I_5 + I_7 - I_2 &= 0 \\
 R_{26}I_2 + R_5I_5 + R_1I_6 &= E_2 + E_3 \\
 R_4I_4 + R_3I_1 - R_1I_6 &= E_1 - E_3 \\
 R_7I_7 - R_5I_5 - R_4I_4 &= 0
 \end{aligned} \right\} . \quad (2.1)$$

- Приводимо систему рівнянь до канонічного вигляду: в праву частину системи переносимо відомі величини, невідомі складові розташовуємо по стовбцях (один під одним).

По цій системі складаємо матрицю коефіцієнтів при невідомих (Δ) і вектор-стовпець правих частин (B).

$$\Delta = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & R_{26} & 0 & 0 & R_5 & R_1 & 0 \\ R_3 & 0 & 0 & R_4 & 0 & -R_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_4 & -R_5 & 0 & R_7 \end{bmatrix} . \quad B = \begin{bmatrix} J \\ -J \\ 0 \\ 0 \\ E_2 + E_3 \\ E_1 - E_3 \\ 0 \end{bmatrix} . \quad (2.2)$$

Для розрахунку такої системи лінійних рівнянь можна застосувати будь-яку сучасну математичну програму для ЕОМ.

Наприклад, розрахунок за допомогою програми *Mathcad* за матричною формулою:

$$I := \Delta^{-1} \cdot B \quad (2.3)$$

надає наступні значення струмів:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= -8.824, \text{ A}; & I_2 &= 7.059, \text{ A}; & I_3 &= 15.883, \text{ A}; \\
 I_4 &= -8.824, \text{ A}; & I_5 &= 7.059, \text{ A}; & I_6 &= 8.233, \text{ A}; \\
 I_7 &= 2.281 \cdot 10^{-6} \approx 0, \text{ A}.
 \end{aligned}$$

- Знайдемо напругу U_{bh} (показання вольтметра). Для цього складемо рівняння за другим законом Кірхгофа для контуру $habh$:

$$U_{bh} - R_1 I_6 = E_1.$$

Отже, показання вольтметра $V = E_1 + I_6 R_1 = 10 + 8.233 \cdot 1 = 18.23 \text{ В}$.

- Останній пункт розрахунку – це перевірка вірності розв'язку.

Для цього, зазвичай, застосовують рівняння за другим законом Кірхгофа для найдовшого контуру схеми (потенціальна діаграма) і (або) розрахунок балансу потужності для всієї схеми.

Наприклад, для контуру $f-h-a-m-d-c-f$ маємо таке рівняння:

$$R_3 I_1 + R_{26} I_2 + R_5 I_5 + R_4 I_4 = E_1 + E_2.$$

Зробивши відповідні підстановки, пересвідчимося в правильності розрахунків:

$$E_1 + E_2 = 10 + 20 = 30 \text{ В}.$$

$$3 \cdot (-8.824) + 8 \cdot 7.059 + 5 \cdot 7.059 + 4 \cdot (-8.824) = 29.999 \approx 30, \text{ В}.$$

Таким чином, рівняння за другим законом Кірхгофа виконується.

Баланс потужності для цього кола (див. розділ 1.1.5, сторінка 8).

Потужність джерел енергії:

$$\begin{aligned}
 P_{дж} &= E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2 + E_3 \cdot I_3 + (\varphi_a - \varphi_b) \cdot J = \\
 &= (-88.24) + 141.2 + 1270.63 + (-62.98) = 1260.6 \text{ ВА}.
 \end{aligned}$$

Потужність споживачів:

$$\begin{aligned}
 P_{cn} &= \sum R_k \cdot (I_k)^2 = \\
 &= R_1 \cdot I_6^2 + (R_2 + R_6) \cdot I_2^2 + R_3 \cdot I_1^2 + R_4 \cdot I_4^2 + R_5 \cdot I_5^2 + R_7 \cdot I_7^2 = \\
 &= 1260.6 \text{ Вт}.
 \end{aligned}$$

Оскільки, $P_{cn} = P_{дж}$, то баланс дотримано, всі розрахунки зроблено правильно.

2.3. Метод контурних струмів

В основу цього методу покладене поняття контурного струму. *Контурний струм* – це умовний (уявлений чи розрахунковий) єдиний для всіх віток контуру струм, що начебто циркулює у даному контурі. При цьому по всіх контурах протікають всі контурні струми одночасно. Насправді, у кожній вітці контуру протікає свій струм, відмінний від струмів інших віток, що утворюють даний контур. А власний струм кожної вітки є *алгебраїчною сумою* дії тих контурних струмів, що проходять по даній вітці електричного кола.

2.3.1. Метод засновано на застосуванні тільки другого закону Кірхгофа і дозволяє при розрахунку складних схем скоротити число розв'язуваних рівнянь. Для складання рівнянь за методом контурних струмів крім поняття контурний струм вводять такі поняття як контурна ЕРС, власний опір контуру і взаємний опір контурів (його також часто називають спільним чи суміжним).

Контурні струми, число яких дорівнює числу *незалежних* контурів, приймаються за шукані невідомі. Рівняння складаються саме відносно них. Як правило, контурні струми позначають двома індексами (контурний струм першого контуру – I_{11} , другого – I_{22} , третього – I_{33} і так далі).

Контурні ЕРС (їх позначають двома індексами E_{11} , E_{22} , E_{33} , ...) являють собою *алгебраїчні суми* всіх ЕРС, що діють у відповідному контурі.

Власним опором контуру називають *арифметичну суму* опорів усіх віток, що утворюють даний контур. Власні опори також позначають подвійними індексами (R_{11} , R_{22} , R_{33} , ...).

Взаємний опір – це опір вітки, що належить кільком суміжним контурам. Взаємні опори позначають подвійними індексами за номерами суміжних контурів (R_{12} , R_{23} , R_{13} , ..., R_{km} , ...). Якщо напрямки протікання контурних струмів по даному суміжному опорі співпадають, тоді цей опір буде мати додатній знак. А якщо напрямки протікання цих струмів зустрічні – знак буде від'ємний.

Враховуючи це, система рівнянь для будь-якої схеми, що містить n контурів має таку структуру:

$$\left. \begin{aligned} (R_{11}) \cdot I_{11} + R_{12} \cdot I_{22} + R_{13} \cdot I_{33} + \dots + R_{1n} \cdot I_{nn} &= E_{11} \\ R_{21} \cdot I_{11} + (R_{22}) \cdot I_{22} + R_{23} \cdot I_{33} + \dots + R_{2n} \cdot I_{nn} &= E_{22} \\ R_{31} \cdot I_{11} + R_{32} \cdot I_{22} + (R_{33}) \cdot I_{33} + \dots + R_{3n} \cdot I_{nn} &= E_{33} \\ \dots &\dots \\ R_{n1} \cdot I_{11} + R_{n2} \cdot I_{22} + R_{n3} \cdot I_{33} + \dots + (R_{nn}) \cdot I_{nn} &= E_{nn} \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Шукані контурні струми можуть бути знайдені будь-якими матричними методами, наприклад, за допомогою визначників:

$$I_{11} = \frac{\Delta_1}{\Delta}; I_{22} = \frac{\Delta_2}{\Delta}; I_{kk} = \frac{\Delta_k}{\Delta}; I_{nn} = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

де: Δ – головний визначник системи, елементами якого є власні і взаємні опори зі своїми знаками;

Δ_k – частинний визначник, k -й стовпець якого замінено стовпцем контурних ЕРС.

Власні струми кожної вітки знаходимо за допомогою *методу накладання*: як алгебраїчну суму всіх контурних струмів, які проходять по відповідній вітці.

Рекомендації до методу контурних струмів.

- Для складання контурних рівнянь доцільніше обирати незалежні контури по комірках з мінімальною кількістю віток.
- З метою однакової форми запису (рівнянь, матриці опорів, дійсних струмів у суміжних вітках) доцільно всі контурні струми направляти однаково (за годинниковою стрілкою чи проти неї).
- Якщо потрібно визначити струм тільки в одній вітці, тоді доцільно зробити шуканий струм контурним, тобто вітка повинна бути зовнішньою.
- Якщо в схемі є вітка з відомим струмом, то цей струм варто зробити контурним: у результаті число рівнянь зменшується на одиницю.

2.3.2. Приклад розрахунку.

Для схеми (рисунок 2.11, стор.18) методом контурних струмів визначити струми у вітках.

Вихідні дані: $E_1=10\text{ В}$; $E_2=20\text{ В}$; $E_3=80\text{ В}$; $J=7.65\text{ А}$;

$R_1=1\text{ Ом}$; $R_{26}=8\text{ Ом}$; $R_3=3\text{ Ом}$; $R_4=4\text{ Ом}$; $R_5=5\text{ Ом}$; $R_7=7\text{ Ом}$.

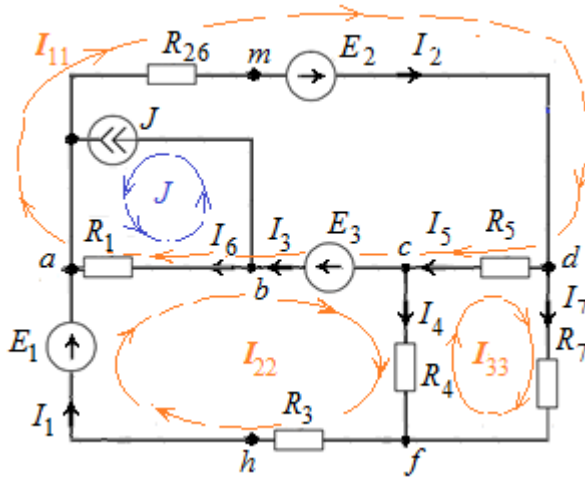


Рисунок 2.11 – Схема електричного кола

Рекомендований порядок розрахунків

Обираємо напрямок обходу контурів таким, що збігаються з напрямком протікання контурних струмів, як показано на рисунку 2.11.

При цьому в першому контурі діє струм I_{11} , у другому – I_{22} і в третьому – I_{33} . Ці струми будуть шуканими.

Контурний струм J від джерела струму – це відома величина і його напрямок співпадає зі струмом джерела струму J .

Складаємо рівняння за II законом Кірхгофа для кожного з незалежних контурів, беручи до уваги тільки контурні струми схеми.

$$\left. \begin{aligned} R_{26} \cdot I_{11} + R_5 \cdot I_{11} + R_1 \cdot I_{11} - R_1 \cdot I_{22} - R_5 \cdot I_{33} - J \cdot R_1 &= E_2 + E_3 \\ - R_1 \cdot I_{11} + (R_1 + R_3 + R_4) \cdot I_{22} - R_4 \cdot I_{33} + J \cdot R_1 &= E_1 - E_3 \\ - R_5 \cdot I_{11} - R_4 \cdot I_{22} + (R_4 + R_5 + R_7) \cdot I_{33} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Канонічна система рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} (R_{26} + R_5 + R_1) \cdot I_{11} - R_1 \cdot I_{22} - R_5 \cdot I_{33} &= E_2 + E_3 + J \cdot R_1 \\ -R_1 \cdot I_{11} + (R_1 + R_3 + R_4) \cdot I_{22} - R_4 \cdot I_{33} &= E_1 - E_3 - J \cdot R_1 \\ -R_5 \cdot I_{11} - R_4 \cdot I_{22} + (R_4 + R_5 + R_7) \cdot I_{33} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Матриця коефіцієнтів при невідомих для такої системи рівнянь:

$$\Delta = \begin{bmatrix} (R_{26} + R_5 + R_1) & -R_1 & -R_5 \\ -R_1 & (R_1 + R_3 + R_4) & -R_4 \\ -R_5 & -R_4 & (R_4 + R_5 + R_7) \end{bmatrix}.$$

Вектор-стовпець правих частин:

$$D := \begin{pmatrix} E_2 + E_3 + J \cdot R_1 \\ E_1 - E_3 - J \cdot R_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 107.65 \\ -77.65 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо невідомі контурні струми за допомогою матричних методів програмного забезпечення ЕОМ:

$$\begin{pmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \end{pmatrix} := \Delta^{-1} \cdot D \rightarrow \begin{pmatrix} 7.059 \\ -8.824 \\ 3.811 \cdot 10^{-15} \end{pmatrix}.$$

Отже, контурні струми: $I_{11} = 7.059 \text{ A}$; $I_{22} = -8.825 \text{ A}$; $I_{33} \approx 0 \text{ A}$.

Власні струми кожної вітки знайдемо за методом накладання, як алгебраїчну суму тих контурних струмів, що проходять по наданим віткам:

$$I_1 = I_{22} = -8.824 \text{ A}; \quad I_2 = I_{11} = 7.059 \text{ A}; \quad I_3 = I_{11} - I_{22} = 15.883 \text{ A};$$

$$I_4 = I_{22} - I_{33} = -8.824 \text{ A}; \quad I_5 = I_{11} - I_{33} = 7.059 \text{ A};$$

$$I_6 = I_{11} - I_{22} - J = 7.059 - (-8.824) - 7.65 = 8.233 \text{ A}; \quad I_7 = I_{33} = 0 \text{ A}.$$

Для перевірки правильності розрахунків побудуємо потенційну діаграму вздовж замкнутого контуру $a-b-c-d-f-h-a$.

2.4. Потенційна діаграма

Потенційною діаграмою називають графік розподілу потенціалу уздовж будь-якого контуру електричного кола.

2.4.1. При побудові потенційної діаграми по осі абсцис відкладають в обраному масштабі всі опори контуру, що зустрічаються при його *послідовному* обході. По осі ординат відкладають потенціали відповідних точок (зазвичай, потенціал початкової точки приймають рівним нулю). Діаграма дозволяє визначити струм і напругу на будь-якій ділянці контуру, що підтверджує правильність розрахунків.

2.4.2 Як приклад, на рисунку 2.12 (сторінка 25) побудовано потенційну діаграму для контуру *a-b-c-d-f-h-a* електричного кола, схема якого надана на рисунку 2.11.

За початок обходу контуру обрано точку *a*. Потенціал вузла *a* обираємо за нуль. Отже, координати точки *a*: $[x_a=0; y_a=0]$.

При переході від точки *a* до точки *b*, опір збільшується на величину $R_1 = 1 \text{ Ом}$, а її потенціал збільшується на величину падіння напруги на опорі R_1 : $\varphi_b = \varphi_a + I_6 \cdot R_1 = 0 + (8.233 \cdot 1) \approx 8.23 \text{ В}$.

Таким чином, координати точки *b*: $[x_b = 1; y_b = 8.23]$.

При переході від точки *b* до сусідньої точки *c* опір не змінюється (тому що опір ЕРС E_3 дорівнює нулю), а потенціал зменшується на величину E_3 : $\varphi_c = \varphi_b - E_3 = 8.23 - 80 = -71.77 \text{ В}$. Таким чином, координати точки *c*: $[x_c=1, y_c=-71.77]$.

Аналогічно знайдемо потенціали (і координати) точок *d*, *f*, *h*:

$$\varphi_d = \varphi_c + I_5 \cdot R_5 = -71.77 + (7.059 \cdot 5) = -36.47 \text{ В}; [x_d=6, y_d=-36.47].$$

$$\varphi_f = \varphi_d - I_7 \cdot R_7 = -36.47 - 0 = -36.47 \text{ В}; [x_f=13, y_f=-36.47].$$

$$\varphi_h = \varphi_f - I_1 \cdot R_3 = -36.47 - (-8.824 \cdot 3) = -10 \text{ В}; [x_h=16, y_h=-10].$$

Перевіримо потенціал точки *a* через потенціал сусідньої точки *h*:

$$\varphi_a = \varphi_h + E_1 = 10 - 10 = 0.$$

Електрики кажуть: діаграма «зійшлася», всі розрахунки вірні.

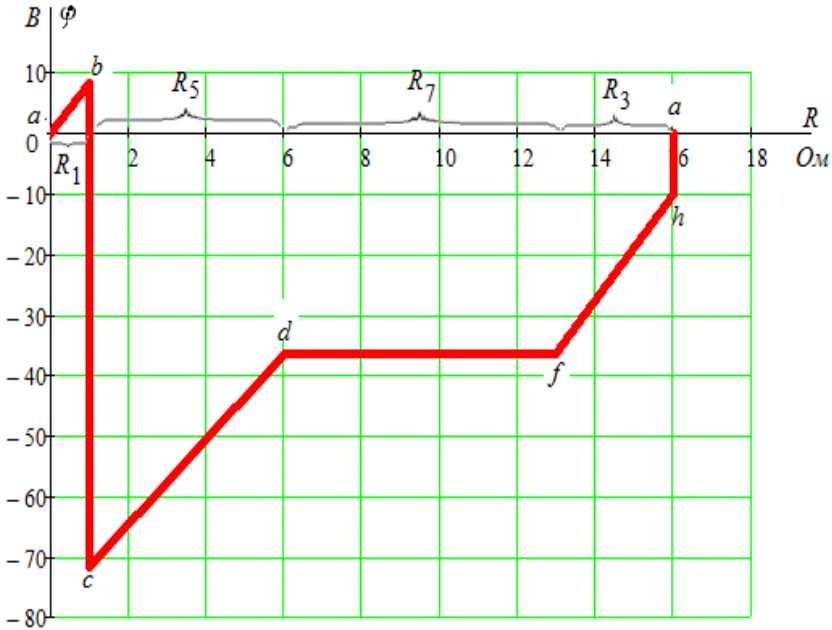


Рисунок 2.12 – Потенційна діаграма вздовж контуру $a-b-c-d-f-h-a$

2.5. Метод вузлових потенціалів

Цей метод заснований на застосуванні першого закону Кірхгофа і узагальненого закону Ома. Метод дозволяє скласти систему рівнянь, з якої можна визначити потенціали усіх вузлів схеми, а потім за законом Ома визначити всі струми у вітках.

Як впливає з узагальненого закону Ома (1.3), струм будь-якої вітки визначений, якщо відомі: її опір, потенціали вузлів, до яких підключена дана вітка, або відома напруга, під якою ця вітка знаходиться.

2.5.1. Як і в методі контурних струмів, введемо наступні поняття:

- вузловий струм;
- власна (вузлова) провідність вузла;
- взаємна (суміжна) провідність між двома вузлами;

Вузловий струм, що позначається двома однаковими індексами (наприклад для вузла k як I_{kk}), – це *алгебраїчна* сума струмів джерел, що діють у вітках, безпосередньо приєднаних до цього вузла k .

Якщо до якоїсь вітці f включено джерело ЕРС E_f , тоді вузловий струм I_f від такої вітки визначається як добуток: $I_f = E_f \cdot G_f$, де G_f – провідність вітки f із джерелом ЕРС E_f .

Якщо ЕРС і струм джерела струму спрямовані до вузла, тоді їх записують зі знаком “+”, а якщо – від вузла, тоді зі знаком “–”.

Власна (вузлова) провідність вузла k (G_{kk}) – це *арифметична* сума провідностей усіх віток, безпосередньо підключених до цього вузла (провідність вітки з ідеальним джерелом струму дорівнює нулю).

Взаємна провідність між вузлами f та k (G_{fk}) – це *арифметична* сума провідностей віток, включених між вузлами f і k .

При складанні рівнянь за методом вузлових потенціалів варто пам'ятати, що в електротехніці прийнято вести відлік потенціалів від потенціалу землі, який приймають рівним нулю. Тому для будь-якої схеми, що містить $n+1$ вузлів, рівнянь складають на одиницю менше, ніж число вузлів, тобто n . Це тому, що один з вузлів схеми можна поєднати із землею («заземлити»), його потенціал стає відомим (рівним нулю) і число невідомих потенціалів зменшується на одиницю.

Рекомендований порядок розрахунків

- Знаходимо кількість вузлів (y) та кількість віток (b) наданої схеми електричного кола. Проставляємо умовний напрям струмів кожної вітки.

ПРИМІТКА: кількість віток в схемі та кількість струмів повинні співпадати.

- Обираємо *базовий вузол*, потенціал якого приймаємо за *нуль*;

ПРИМІТКА: якщо в схемі існує вітка, яка складається *тільки із ідеального джерела е.р.с.*, тоді за *базовий* обираємо один з вузлів, до яких ця *е.р.с.* підключена.

Після цього потенціал іншого вузла, до якого підключено ідеальне джерело *е.р.с.* відразу стає відомим: він дорівнює величині ідеального джерела *е.р.с.* з точністю до знаку.

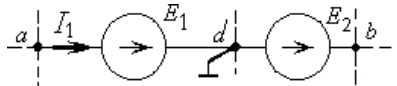


Рисунок 2.13 – Пояснення до вибору базового вузла

Наприклад, для ділянки схеми, що зображено на рисунку 2.13 базовим вузлом обрано вузол d , його потенціал буде дорівнювати нулю. Тоді потенціали інших вузлів цієї схеми будуть: $\varphi_a = -E_1$; $\varphi_b = E_2$.

- Для всіх інших вузлів, **потенціали яких невідомі** складаємо рівняння за I законом Кірхгофа.
- Кожний із невідомих струмів такої системи рівнянь переписуємо за законом Ома:

$$I_B = \frac{\varphi_{\Pi} - \varphi_K + E_B}{R_B},$$

тут індекси: \mathbf{v} - № вітки;

Π - № початкового вузла;

\mathbf{k} - № вузла, в якому вітка закінчується.

- Отримаємо нову систему рівнянь, в якій невідомими будуть **потенціали вузлів** електричного кола.

• Приводимо отриману систему рівнянь до канонічного вигляду. У загальному випадку, для будь-якої схеми, що містить $n+1$ вузлів, система рівнянь має вид:

$$\left. \begin{aligned} (G_{11}) \cdot \varphi_1 - G_{12} \cdot \varphi_2 - G_{13} \cdot \varphi_3 - \dots - G_{1n} \cdot \varphi_n &= J_{11} \\ -G_{21} \cdot \varphi_1 + (G_{22}) \cdot \varphi_2 - G_{23} \cdot \varphi_3 - \dots - G_{2n} \cdot \varphi_n &= J_{22} \\ -G_{31} \cdot \varphi_1 - G_{32} \cdot \varphi_2 + (G_{33}) \cdot \varphi_3 - \dots - G_{3n} \cdot \varphi_n &= J_{33} \\ \dots & \\ -G_{n1} \cdot \varphi_1 - G_{n2} \cdot \varphi_2 - G_{n3} \cdot \varphi_3 - \dots + (G_{nn}) \cdot \varphi_n &= J_{nn} \end{aligned} \right\} (2.6)$$

Тут G_{11} , G_{22} , G_{33} , ..., G_{nn} , – власні провідності відповідних вузлів, які являють собою **арифметичну суму** провідності всіх віток, що безпосередньо під'єднано до відповідного вузла;

$G_{12} = G_{21}$, $G_{32} = G_{23}$; $G_{13} = G_{31}$, ..., $G_{km} = G_{mk}$, – суміжні провідності між відповідними вузлами, які являють собою арифметичну суму провідності всіх віток, які безпосередньо з'єднують два відповідні вузли;

J_{11} , J_{22} , J_{33} , ..., J_{nn} – так звані *вузлові струми* – права частина системи канонічних рівнянь. Це алгебраїчна сума джерел енергії, які розташовані в вітках, що безпосередньо з'єднано з відповідним вузлом.

- Складаємо матрицю коефіцієнтів при невідомих $[F]$ та вектор-стовпець правих частин канонічної системи $[K]$.
- Розв'язуємо систему рівнянь за допомогою ЕОМ, застосувавши матричну формулу: $\varphi = F^{-1} \cdot K$ – отримаємо *потенціали вузлів* електричного кола (у вигляді вектор-стовпця).
- Знаходимо власні струми у вітках електричного кола за законом Ома.

2.5.2. Метод двох вузлів.

В окремому випадку, коли схема має всього два вузли, метод вузлових потенціалів дозволяє скласти всього одне рівняння, за допомогою якого визначають напруга між вузлами, це так звана формула між вузлової напруги:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sum \bar{E}_k \cdot G_k + \sum \bar{J}_k}{\sum G_k}, \quad (2.7)$$

де G_k сума провідностей усіх віток, включених між вузлами 1 і 2;

$\sum \bar{J}_k$ - алгебраїчна сума джерел струмів, які включено між вузлами .

Після знаходження між вузлової напруги струми в гілках схеми визначають за законом Ома:

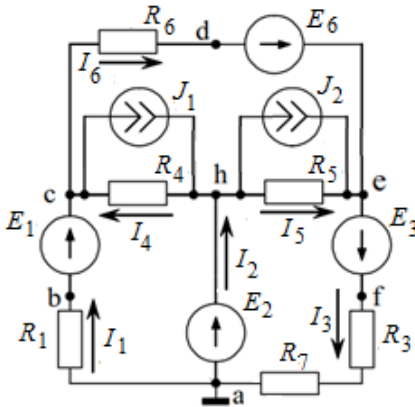
$$I_k = (E_k - U_{12}) \cdot G_k . \quad (2.8)$$

У формулі (2.8) знаки записані з урахуванням того, що всі струми I_k спрямовані від вузла 2 до вузла 1.

ЕРС E_k беруть зі знаком “+”, якщо вона спрямована до вузла 1; і знак “-”, якщо ЕРС спрямована до вузла 2. Цей метод часто називають методом *двох вузлів*.

2.5.3. Приклад розрахунку методом вузлових потенціалів.

Визначити струми у вітках електричного кола (рис. 2.14) методом вузлових потенціалів, якщо надано:



$$\begin{aligned} E_1 &= 31 \text{ В}; & E_2 &= 12 \text{ В}; \\ E_3 &= 50 \text{ В}; & E_6 &= 100 \text{ В}; \\ J_1 &= 1 \text{ А}; & J_2 &= 2 \text{ А}. \\ R_1 &= 10 \text{ Ом}; & R_3 &= 25 \text{ Ом}; \\ R_4 &= R_5 &= 40 \text{ Ом}; \\ R_6 &= 20 \text{ Ом}; & R_7 &= 5 \text{ Ом}. \end{aligned}$$

Рисунок 2.14 – Схема електричного кола

Рекомендований порядок розрахунків

- Обираємо напрямки струмів у вітках і базовий вузол (вузол **a**, тобто $\varphi_a=0$). Тоді потенціал вузла **h** відразу стає відомим:

$$\varphi_h = +E_2 = 12 \text{ В}.$$

- Невідомими будуть потенціали двох вузлів: **c**, **e**. Для них складаємо рівняння за першим законом Кірхгофа:

$$\left. \begin{aligned} c: & \quad I_6 - I_1 - I_4 + J_1 = 0 \\ e: & \quad I_3 - I_5 - I_6 - J_2 = 0 \end{aligned} \right\}.$$

- Кожний із невідомих струмів такої системи рівнянь переписуємо за законом Ома:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\varphi_c - \varphi_e + E_6}{R_6} - \frac{0 - \varphi_c + E_1}{R_1} - \frac{\varphi_h - \varphi_c}{R_4} &= -J_1. \\ \frac{\varphi_e + E_3}{R_3 + R_7} - \frac{\varphi_h - \varphi_e}{R_5} - \frac{\varphi_c - \varphi_e + E_6}{R_6} &= J_2. \end{aligned} \right.$$

• Приводимо отриману систему рівнянь до канонічного вигляду:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_1} \right) \varphi_c - \left(\frac{1}{R_6} \right) \varphi_e = \frac{E_1}{R_1} + \frac{\varphi_h}{R_4} - \frac{E_6}{R_6} - J_1 \\ - \left(\frac{1}{R_6} \right) \varphi_e + \left(\frac{1}{R_3 + R_7} + \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_5} \right) \varphi_e = \frac{E_6}{R_6} + \frac{\varphi_h}{R_5} - \frac{E_3}{R_3 + R_7} + J_2 \end{cases}$$

Власні (вузлові) провідності вузлів:

$$G_{11} = \left(\frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_1} \right) = 0.175 \text{ См};$$

$$G_{22} = \left(\frac{1}{R_3 + R_7} + \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_5} \right) = 0.108333 \text{ См.}$$

Суміжні провідності між вузлами c та e :

$$G_{12} = G_{21} = \frac{1}{R_6} = 0.05 \text{ См.}$$

• Визначимо вузлові струми:

$$I_c = \frac{E_1}{R_1} + \frac{\varphi_h}{R_4} - \frac{E_6}{R_6} - J_1 = -2.6 \text{ A};$$

$$I_e = \frac{E_6}{R_6} + \frac{\varphi_h}{R_5} - \frac{E_3}{R_3 + R_7} + J_2 = 5.63333 \text{ A.}$$

• Сформуємо матрицю коефіцієнтів при невідомих (головний визначник) і вектор-стовпець правих частин канонічної системи рівнянь:

$$F = \begin{bmatrix} G_{11} & -G_{12} \\ -G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}; \quad K = \begin{bmatrix} I_c \\ I_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.6 \\ 5.63333 \end{bmatrix}.$$

• Розв'яжемо цю систему за допомогою ЕОМ:

$$\begin{bmatrix} \varphi_c \\ \varphi_e \end{bmatrix} = F^{-1} \cdot K \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 52 \end{pmatrix}.$$

Отже, потенціал вузла c : $\varphi_c = 0 \text{ В}$; потенціал вузла e : $\varphi_e = 52 \text{ В}$.

- Власні струми у вітках електричного кола за законом Ома.

$$I_1 = \frac{\varphi_a - \varphi_c + E_1}{R_1} = \frac{0 - 0 + 31}{10} = 3.1 \text{ A};$$

$$I_3 = \frac{\varphi_e - \varphi_a + E_3}{R_3 + R_7} = \frac{52 - 0 + 50}{30} = 3.4 \text{ A};$$

$$I_4 = \frac{\varphi_h - \varphi_c}{R_4} = \frac{12 - 0}{40} = 0.3 \text{ A};$$

$$I_5 = \frac{\varphi_h - \varphi_e}{R_5} = \frac{12 - 52}{40} = -1 \text{ A};$$

$$I_6 = \frac{\varphi_c - \varphi_e + E_6}{R_6} = \frac{0 - 52 + 100}{20} = 2.4 \text{ A};$$

Струм другої вітки знаходимо за першим законом Кірхгофа:

$$I_2 = I_5 + I_4 - J_1 + J_2 = -1 + 0.3 - 1 + 2 = 0.3 \text{ A}.$$

- Перевіряємо перший закон Кірхгофа для базового вузла (а):

$$I_3 - I_2 - I_1 = 3.4 - 0.3 - 3.1 = 0.$$

- Баланс потужності (див. розділ 1.1.5, сторінка 8).

1) Потужність джерел енергії:

$$\begin{aligned} P_{дж} &= E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2 + E_3 \cdot I_3 + E_6 \cdot I_6 + (\varphi_h - \varphi_c) \cdot J_1 + (\varphi_c - \varphi_h) \cdot J_2 = \\ &= 96.1 + 3.6 + 170. + 240. + 12 + 80 = 601.7 \text{ ВА}. \end{aligned}$$

2) Потужність споживачів:

$$\begin{aligned} P_{сн} &= \sum R \cdot (I^2) = \\ &= R_1 \cdot I_1^2 + R_2 \cdot I_2^2 + (R_3 + R_7) \cdot I_3^2 + R_4 \cdot I_4^2 + R_5 \cdot I_5^2 + R_6 \cdot I_6^2 = \\ &= 96.1 + 0 + 346.8 + 3.6 + 40 + 115.2 = 601.7 \text{ Вт}. \end{aligned}$$

Оскільки, $P_{сн} = P_{дж}$, то баланс дотримано, всі розрахунки зроблено правильно.

2.5.4. Приклад розрахунку методом двох вузлів.

Визначити струми у вітках електричного кола (рис. 2.15) методом вузлових потенціалів, якщо надано:

$$E_1 = 12 \text{ В}; \quad E_2 = 9 \text{ В}; \quad E_3 = 36 \text{ В}; \quad J = 0.5 \text{ А.}$$

$$R_1 = 10 \text{ Ом}; \quad R_2 = 20 \text{ Ом}; \quad R_3 = 30 \text{ Ом}; \quad R_4 = 40 \text{ Ом}; \quad R_5 = 50 \text{ Ом.}$$

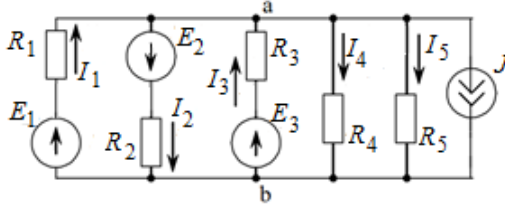


Рисунок 2.15 – Схема електричного кола

Рекомендований порядок розрахунків

- Схема кола, приведена на рисунку 2.15, містить два вузли, тому за формулою (2.7) визначаємо напругу між вузлами a і b

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = \frac{\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} + \frac{E_3}{R_3} - J}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}} = \frac{1.45}{0.228333} = 6.35 \text{ В.}$$

- Визначаємо струми у вітках:

$$I_1 = \frac{E_1 - U_{ab}}{R_1} = \frac{12 - 6.35}{10} = 0.565 \text{ А.}$$

$$I_2 = \frac{E_2 + U_{ab}}{R_2} = \frac{9 + 6.35}{20} = 0.768 \text{ А.}$$

$$I_3 = \frac{E_3 - U_{ab}}{R_3} = \frac{36 - 6.35}{30} = 0.988 \text{ А.}$$

$$I_4 = \frac{U_{ab}}{R_4} = \frac{6.35}{40} = 0.159 \text{ А.} \quad I_5 = \frac{U_{ab}}{R_5} = \frac{6.35}{50} = 0.127 \text{ А.}$$

- Перевірка для вузла b : $I_1 - I_2 + I_3 - I_4 - I_5 - J =$
 $= 0.565 - 0.768 + 0.988 - 0.159 - 0.127 - 0.5 = 0, \text{ А.}$

Перший закон Кірхгофа дотримано. Всі розрахунки вірні.

3. ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

3.1. Дайте визначення лінійного електричного кола.

3.2. Чим відрізняються між собою джерела напруги і струму? Зобразити для них схеми живлення двох паралельних приймачів.

3.3. Дайте визначення вітки, вузла і контуру електричного кола. Дайте визначення розгалуженого і нерозгалуженого електричних кіл.

3.4. Напишіть закон Ома для ділянки кола, що містить тільки приймач енергії (пасивний).

3.5. Напишіть узагальнений закон Ома (для активної ділянки кола).

3.6. Сформулюйте закони Кірхгофа і напишіть їхні математичні вирази.

3.7. Виведіть вираз для еквівалентного опору ділянки кола, що складається з n послідовно з'єднаних опорів.

3.8. Виведіть вираз для еквівалентного опору ділянки кола, що складається з n паралельно з'єднаних опорів.

3.9. Два резистори R_1 і R_2 з'єднані паралельно. Напишіть вираз для еквівалентного опору цього з'єднання.

3.10. Напишіть вираз балансу потужності для кола з декількома джерелами живлення і декількома резисторами.

3.11. Викласти сутність методів розрахунку розгалужених кіл з декількома джерелами ЕРС; методи безпосереднього застосування законів Кірхгофа, контурних струмів і вузлової напруги.

3.12. Чому при розрахунку кола, що містить n вузлів, за першим законом Кірхгофа можна скласти тільки $n - 1$ рівнянь?

3.13. Чи можна для контуру, що містить тільки пасивні елементи, скласти рівняння за другим законом Кірхгофа? Який у нього вигляд?

3.14. На чому ґрунтується метод контурних струмів? Як робиться розрахунок кола за цим методом?

3.15. Що називається двополюсником (активним і пасивним)? Викласти сутність методу вузлової напруги.

3.16. В чому полягає баланс потужності?

4. ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ

Для свого варіанту, вказаного викладачем, намалювати схему електричного кола і розрахувати струми у всіх вітках методами:

- контурних струмів;
- вузлових потенціалів;
- безпосереднього застосування рівнянь Кірхгофа.

Результати розрахунків звести в таблицю і порівняти між собою. Намалювати потенційну діаграму для зовнішнього контуру.

Перевірити результати, склавши рівняння балансу потужності.

Знайти показання вольтметра і перевірити полярність на правильність його підключення.

Значення ЕРС, опорів і струмів джерел струму обирає самостійно. Один з опорів можна обрати за нуль Ом.

Схеми для індивідуального завдання:

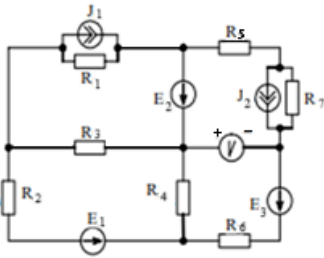


Рисунок 4.1 – Схема для варіанту 1

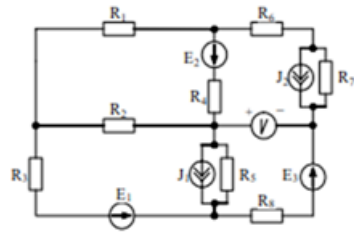


Рисунок 4.2 – Схема для варіанту 2

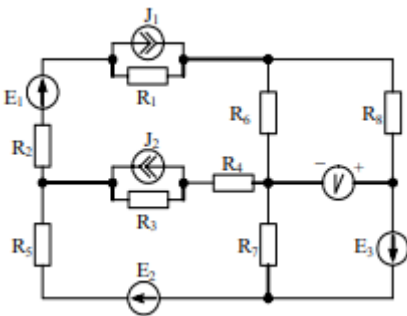


Рисунок 4.3 – Схема до варіанту 3

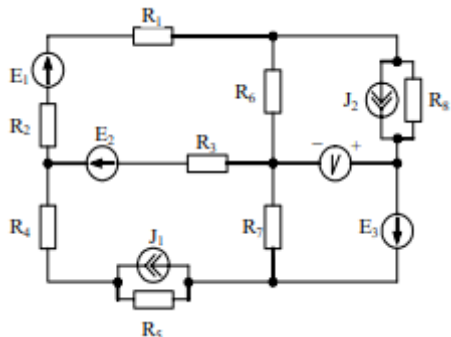


Рисунок 4.4 – Схема до варіанту 4

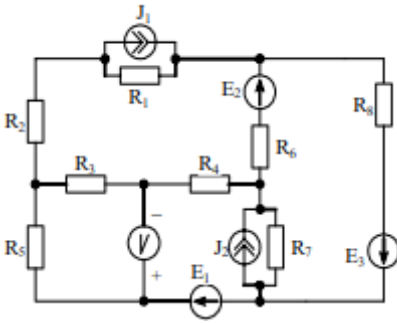


Рисунок 4.5 – Схема до варіанту 5

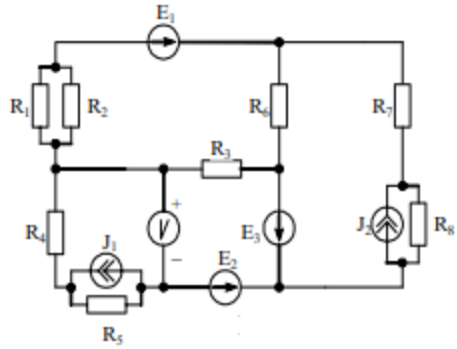


Рисунок 4.6 – Схема до варіанту 6

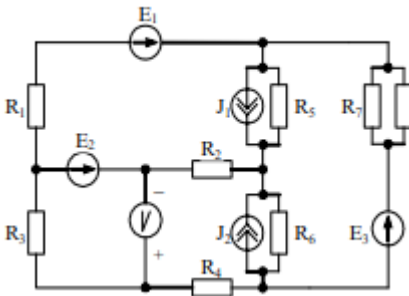


Рисунок 4.7 – Схема до варіанту 7

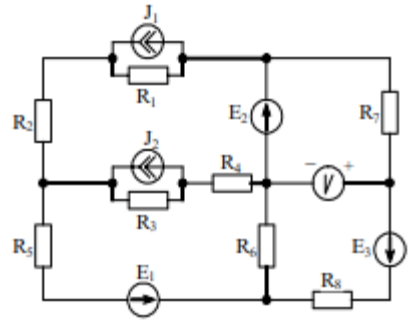


Рисунок 4.8 – Схема до варіанту 8

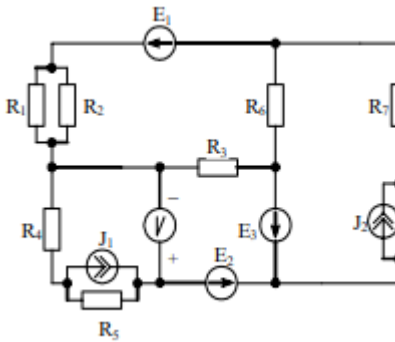


Рисунок 4.9 – Схема до варіанту 9

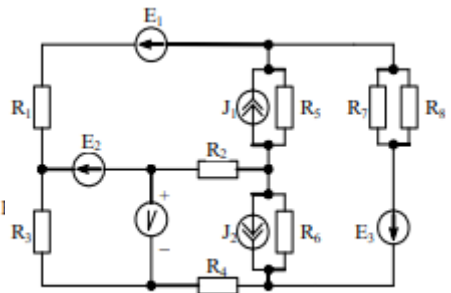


Рисунок 4.10 – Схема до варіанту 10

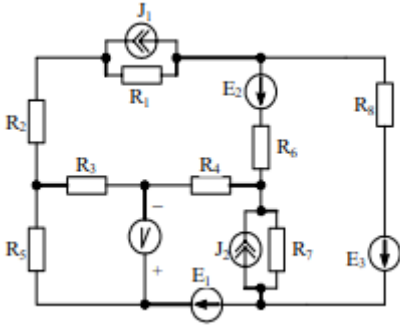


Рисунок 4.11 – Схема до варіанту 11

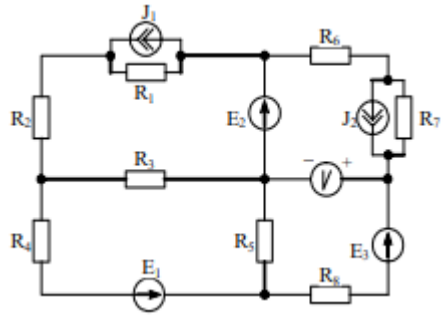


Рисунок 4.12 – Схема до варіанту 12

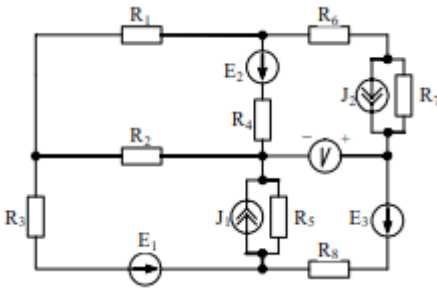


Рисунок 4.13 – Схема до варіанту 13

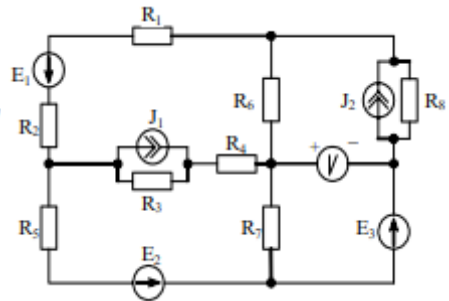


Рисунок 4.14 – Схема до варіанту 14

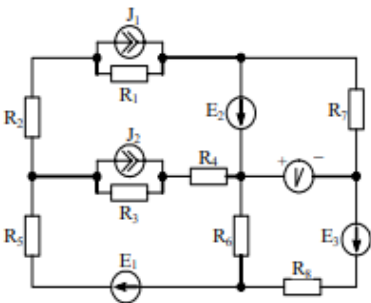


Рисунок 4.15- Схема до варіанту 15

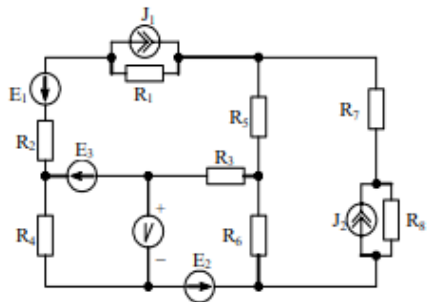


Рисунок 4.16-- Схема до варіанту 16

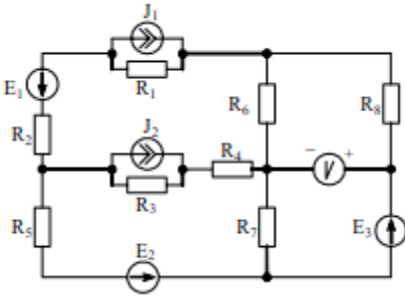


Рисунок 4.17 – Схема до варіанту 17

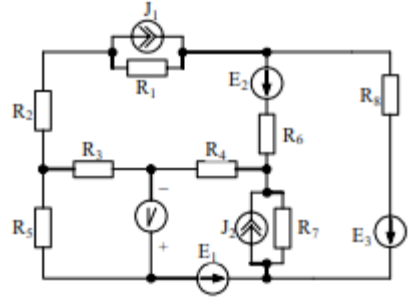


Рисунок 4.18 – Схема до варіанту 18

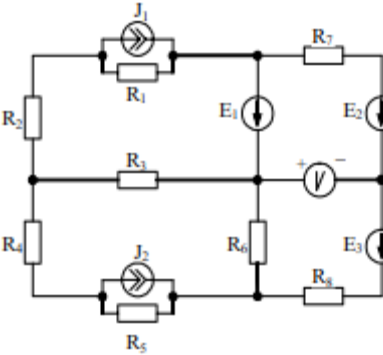


Рисунок 4.19 – Схема до варіанту 19

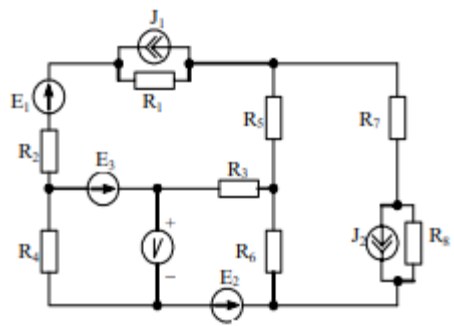


Рисунок 4.20 – Схема до варіанту 20

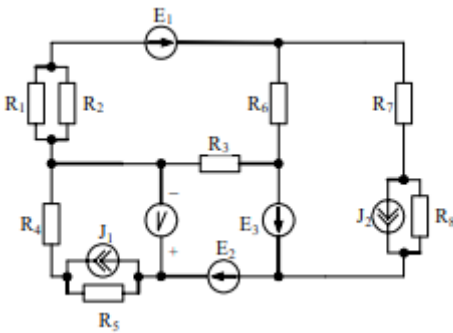


Рисунок 4.21 – Схема до варіанту 21

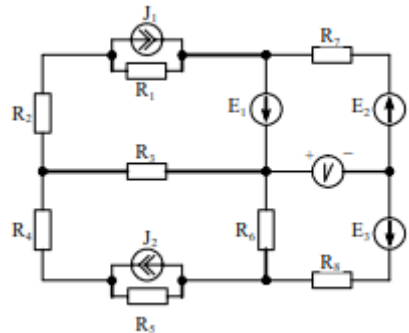


Рисунок 4.22 – Схема до варіанту 22

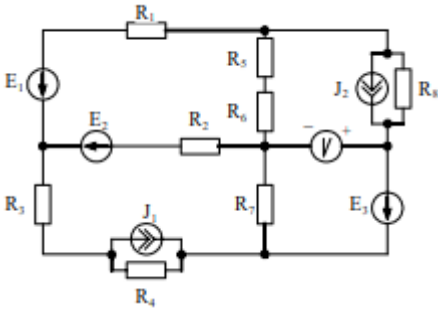


Рисунок 4.23 – Схема до варіанту 23

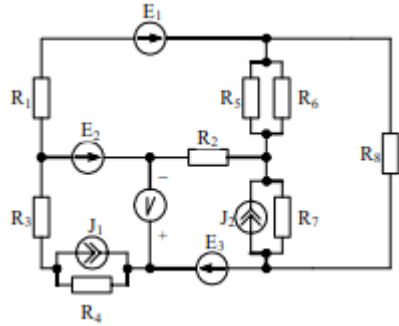


Рисунок 4.24 – Схема до варіанту 24

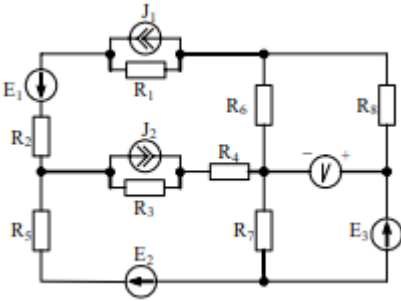


Рисунок 4.25 – Схема до варіанту 25

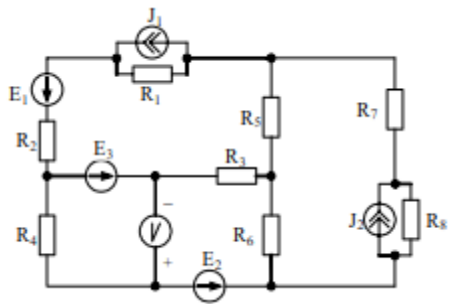


Рисунок 4.26 – Схема до варіанту 26

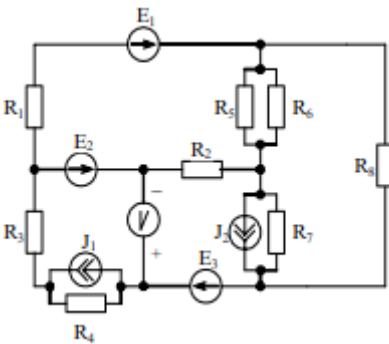


Рисунок 4.27 – Схема до варіанту 27

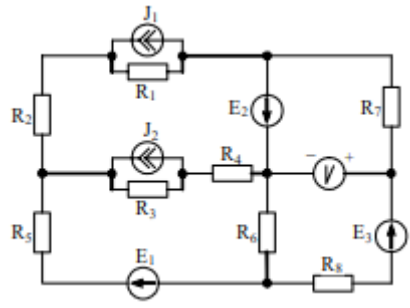


Рисунок 4.28 – Схема до варіанту 28

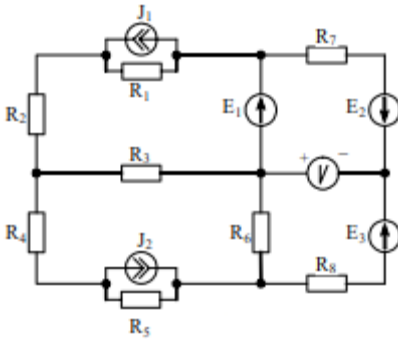


Рисунок 4.29 – Схема до варіанту 29

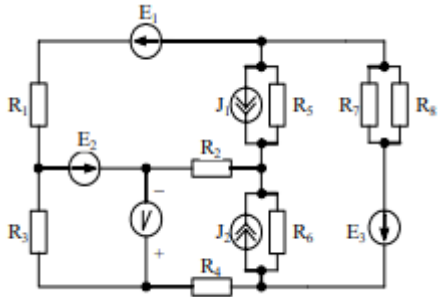


Рисунок 4.30 – Схема до варіанту 30

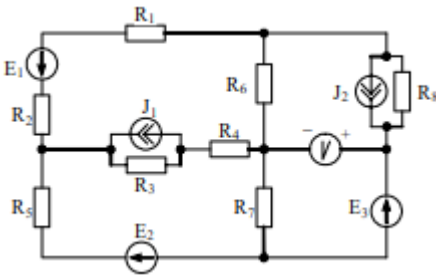


Рисунок 4.31 – Схема до варіанту 31

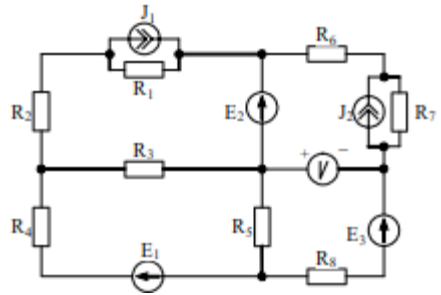


Рисунок 4.32 – Схема до варіанту 32

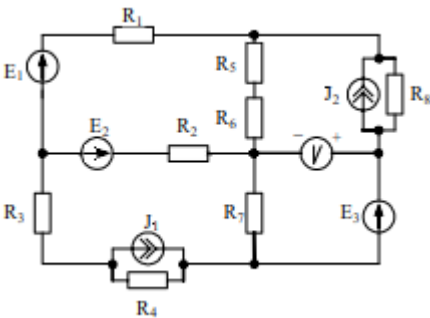


Рисунок 4.33 – Схема до варіанту 33

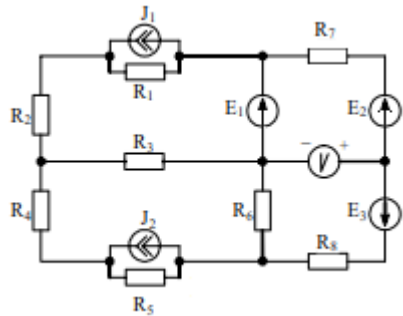


Рисунок 4.34 – Схема до варіанту 34

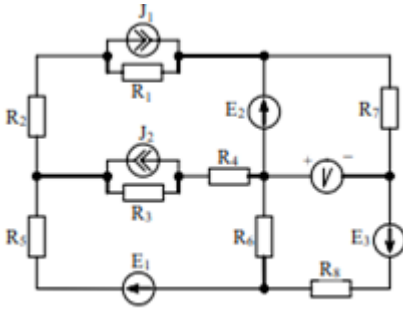


Рисунок 4.35 – Схема до варіанту 35

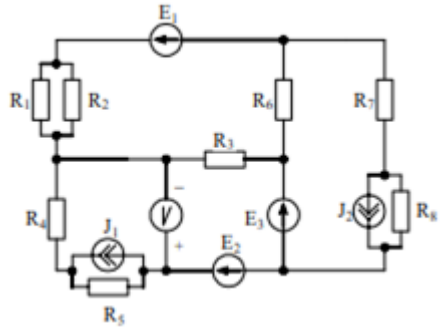


Рисунок 4.36 – Схема до варіанту 36

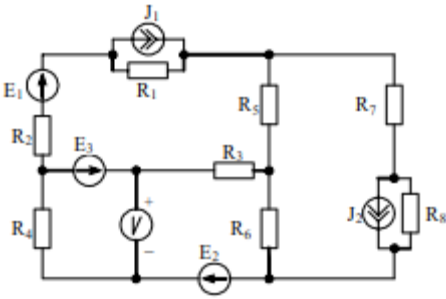


Рисунок 4.37 – Схема до варіанту 37

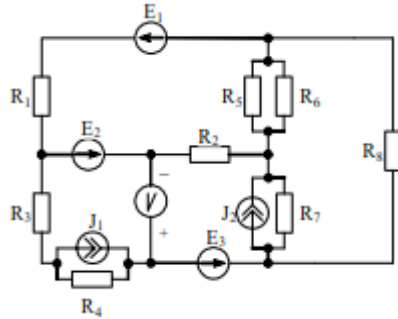


Рисунок 4.38 – Схема до варіанту 38

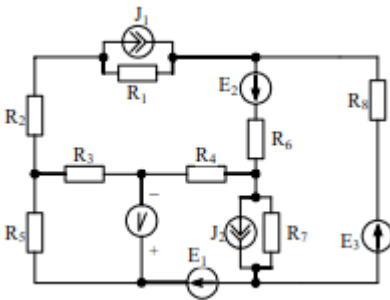


Рисунок 4.39 – Схема до варіанту 39

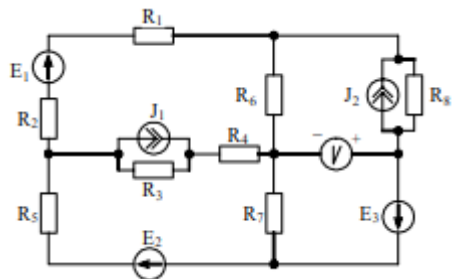


Рисунок 4.40 – Схема до варіанту 40

5. ЗАДАЧІ ДЛЯ ТРЕНІНГА

5.1. Дано: $I_3=2\text{ A}$, $I_4=1\text{ A}$,

$R_2=4\text{ Ом}$, $R_3=20\text{ Ом}$,

$R_4=10\text{ Ом}$, $R_5=5\text{ Ом}$.

Потужність, що виділяється в опорі R_6 дорівнює 20 Вт .

Визначити: R_6 , E_1 , E_2 .

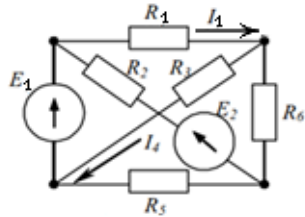


Рисунок 5.1 – Схема для розрахунку

5.2. Знайти показання

приладу амперметр, якщо дано:

$E_1=3\text{ В}$, $E_2=3\text{ В}$, $E_3=7\text{ В}$, $E_4=4\text{ В}$,

$E_5=6\text{ В}$, $R_2=4\text{ Ом}$, $R_3=2\text{ Ом}$,

$R_4=2\text{ Ом}$, $R_5=2\text{ Ом}$.

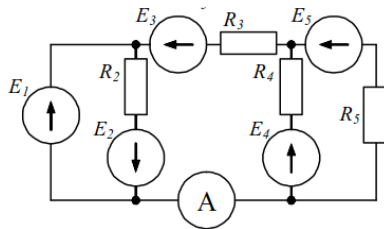


Рисунок 5.2 – Схема для розрахунку

5.3. Визначити струми у вітках та

показання вольтметра, якщо:

$E_1=40\text{ В}$, $E_2=15\text{ В}$, $E_3=25\text{ В}$,

$R_1=5\text{ Ом}$, $R_2=R_3=10\text{ Ом}$.

Струмом вольтметра знехтувати.

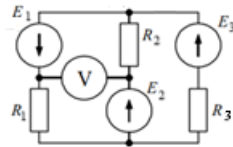


Рисунок 5.3 – Схема для розрахунку

5.4. Дано: $I_1=10\text{ мА}$, $I_3=-20\text{ мА}$,

$R_4=5\text{ кОм}$, $E_5=20\text{ В}$, $R_5=3\text{ кОм}$,

$E_6=40\text{ В}$, $R_6=2\text{ кОм}$.

Визначити:

- струми I_4 , I_5 , I_6 ;

- напругу $U_{ab}=\varphi_a - \varphi_b$.

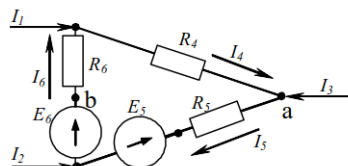


Рисунок 5.4 – Схема для розрахунку

5.5. Визначити струми у вітках,
якщо дано:

$$J = 1 \text{ A}, \quad R_4 = 20 \text{ Ом},$$

$$R_1 = R_2 = R_3 = 12 \text{ Ом},$$

$$R_5 = 8 \text{ Ом}.$$

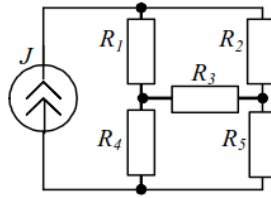


Рисунок 5.5 – Схема для розрахунку

5.6. Визначити струм I , якщо дано:

$$E_1 = 110 \text{ В}, \quad E_2 = 220 \text{ В},$$

$$R_1 = 1 \text{ Ом}, \quad R_2 = 10 \text{ Ом}, \quad R_3 = 5 \text{ Ом},$$

$$R_5 = 5 \text{ Ом}, \quad R_6 = 10 \text{ Ом}.$$

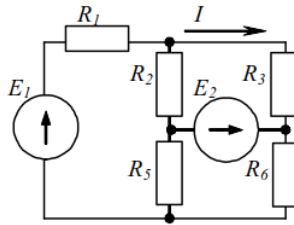


Рисунок 5.6 – Схема для розрахунку

6. ЛІТЕРАТУРА

6.1 Мілих В.І. Електротехніка та електромеханіка: Навчальний посібник.- К:Каравела, 2005.-376 с.

6.2 Мілих В.І., Шавьолкін О.О. Електротехніка, Електроніка та мікропроцесорна техніка: Навчальний посібник.-К: Каравела, 2008.– 688 с.

6.3 Малинівський С.М. Загальна електротехніка. Підручник. – Львів: Видавництво «Бескид», 2003. – 638 с.

6.4 Родзевич В.Е Загальна електротехніка. Навч. посібник. –К.: «Вища школа», 1993. – 183 с.

6.5 Паначевний Б.І., Свергун Ю.Ф. Електротехніка: Теорія, практикум. Підручник – К.: «Каравела», 2004. -440 с.