

УДК 621.313

Сотула О.Д.І.¹, Тиховод С.М.²

¹ студ. гр. Е-910м НУ «Запорізька політехніка»

² д-р. техн. наук, доц. НУ «Запорізька політехніка»

РОЗРАХУНОК ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ В ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ З ВИКОРИСТАННЯМ ПОЛІНОМІВ ЧЕБИШОВА

Для інженерів-електриків, яким важлива фізична суть математичних дій, представляється наочнішим, якщо математична операція супроводжується схемною моделлю. Розроблена заступна схема відповідає перехідному процесу так, що він повністю описується алгебраїчними рівняннями. Схемна модель дозволяє від електричного кола, в якому процеси характеризуються інтегро-диференціальними рівняннями, перейти до кола із зображеннями струмів, для яких справедливі закони Кірхгофа, що приводять до алгебраїчних рівнянь. Це відкриває можливість використання всього багатоманітного апарату теорії кіл для роботи із зображеннями струмів. Модифікація числового методу, що супроводжується створенням адекватної схемної моделі, є «дружньою» для інженерів-електриків. Модифікація числового методу дозволила розробити систему моделювання перехідних процесів, яка дає можливість використовувати джерела напруги, керовані струмом, а також похідною струму.

Розглянемо одноконтурне коло, що містить резистивний (R), індуктивний (L) і ємнісний (C) елементи, включені послідовно. Хай до комутації конденсатор був заряджений до напруги $u_c(0)$. При підмиканні при $t=0$ джерела змінної ЕРС $e(t)$ у колі відбувається перехідний процес, який описується лінійним інтегро-диференціальним рівнянням з постійними коефіцієнтами:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + u_c(0) = e(t) \cdot \quad (1)$$

Розв'язок шукається в часовій області τ , що складається з N кроків (які можуть бути неоднаковими). Вузлові точки позначимо $t_0, t_1, t_2, \dots, t_{N-1}$.

Розв'язок для струму, як функцію часу, в інтервалі $[t_0, t_{N-1}]$ апроксимуємо поліномом Чебишова 1-го рода:

$$i(t) \approx p(t) = c_0 T_0(t) + c_1 T_1(t) + c_2 T_2(t) + \dots + c_{N-1} T_{N-1}(t) \cdot \quad (2)$$

Для апроксимуючого полінома (2) задамо умову, що в точках t_k ділення інтервалу зміни аргументу

$$i(t_k) = p(t_k) \quad (3)$$

для $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

При роботі з поліномами Чебишова в якості аргументу зручніше використати не час t , а змінну x , в інтервалі $[-1, 1]$.

Якщо умову (3) записати для кожної точки x_k , то отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

[illegible]

Якщо врахувати, що $T_0(x) = 1$, то з першого рівняння системи (4) можна отримати:

$$c_0 = i_0 - [c_1 T_1(x_0) + c_2 T_2(x_0) + \dots + c_{N-1} T_{N-1}(x_0)] \quad (5)$$

Віднімаємо з всіх рівнянь системи (4) перше рівняння, з урахуванням (5) одержуємо систему у матричній формі:

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{I} - \mathbf{i}_0, \quad (6)$$

де V - матриця в системі (6) для обчислення коефіцієнтів розкладу функції струму по поліномах Чебишова; $C = [c_1 \ c_{2...} \ c_{N-1}]^T$ - вектор коефіцієнтів поліному (2) без коефіцієнта a_0 ; $I = [i(t_1) \ i(t_2) \dots \ i(t_{N-1})]^T$ - вектор значень струму в опорних точках $1, 2, \dots, N-1$.

Продиференціюємо вираз (2):

$$\frac{di}{dt} \approx c_1 T'_1(t) + c_2 T'_2(t) + \dots c_{N-1} T'_{N-1}(t) \dots (7)$$

Якщо в (7) підставити значення часу t для точок $t_1, t_2, \dots, t_{N-1}$, то отримаємо систему лінійних рівнянь, яка в матричній формі має вигляд:

$$\Gamma = D C, \quad (8)$$

де: $I' = [i'(t_1) \ i'(t_2) \dots \ i'(t_{N-1})]^T$ – вектор похідних струму для точок $k = 1, 2, \dots, N-1$.

Проінтегруємо вираз (2) від нульової до k -ї точки за зміни номера k від 1 до $N-1$. Отримаємо систему в матричній формі:

$$J = S C + \Delta \cdot i_0, \quad (9)$$

де J – вектор інтегралів для значень $k=1, 2, \dots, N-1$;

$$\Delta = [\delta_1 \quad \delta_2 \quad \dots \quad \delta_{N-1}]^T; \delta_m = x_m - x_0. \quad (10)$$

Розпишемо рівняння (1) з урахуванням апроксимації (2) для точок $k = 1, 2, \dots, N$. Отримаємо в матричній формі вираз:

$$LI' + RI + BJ + u_{C0} = e, \quad (11)$$

де $B=1/C$; e – вектор значень ЕРС джерела в точках поточного часового інтервалу; u_{C0} – значення напруги на конденсаторі на початку інтервалу.

Якщо підставити у вираз (11) матриці I (6), I' (8), J (9), то отримаємо:

$$(LD + RV + BS)C = e - u_{C0} - Ri_0 - B\Delta \cdot i_0 \dots (12)$$

Рівняння (12) можна інтерпретувати таким чином. Нехай у початковій вітці R - L - C протікає струм $i(t)$. Згідно з рівнянням (12) їй відповідає заступна вітка, в якій протікає зображення C струму $i(t)$. При цьому в заступній схемі резистивний елемент має операторний опір RV і послідовно з ним назустріч струму включається джерело ЕРС $R \cdot i_0$. Індуктивний елемент має операторний опір LD , а ємнісний елемент – BS і послідовно з ним назустріч струму включається джерело ЕРС $B\Delta i_0 + u_{C0}$.

Доведено, що у вузлах заступної схеми для зображень C справедливий закон струмів Кірхгофа.

Реальному струмові $i(t)$ відповідає векторне зображення C в заступній схемі. Всі зображення струму C в заступній схемі задовольняють законам Кірхгофа, якщо заступна схема складається за сформульованими правилами.

У результаті розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь, що складена за законами Кірхгофа, отримуємо вектори поліноміальних коефіцієнтів C_k для всіх віток. Знаючи для будь-якої вітки коефіцієнти поліному, значення i_0 у початковій точці t_0 і напругу на конденсаторі u_{C0} , можемо вирахувати значення струму і напруги на конденсаторі у всіх довільних точках будь-якого з $N-1$ відрізків в інтервалі часу $[t_0, t_{N-1}]$.

На великих інтервалах зміни $t \gg N\tau$ рівняння (12) розв'язувати методом циклічного повторення, збільшуючи кожного разу поточний час на τ .

Порівняння процесорного часу розрахунку модельної задачі запропонованим методом і методом Гіра показало, що запропонований метод має швидкість більше ніж в чотири рази вищу за багатокроковий метод Гіра.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Васильев, Н.И. Применение полиномов Чебышева в численном анализе [Текст]/ Н.И. Васильев, Ю.А. Клоков, А.Я. Шкерстена. – Рига.: Зинатне. – 1984. – 240 с.