

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Запорізький національний технічний університет

ЛЕКЦІЇ З ФІЗИКИ

Частина 2

Коливання та хвилі. Оптика. Квантова та атомна фізика

Для студентів інженерно-технічних

спеціальностей 151, 152, 153, 172

РТ-факультету

денної форми навчання

ЗАПОРІЖЖЯ

2019

Лекції з фізики. Частина 2. Коливання та хвилі. Оптика. Квантова та атомна фізика. Для студентів інженерно-технічних спеціальностей 151, 152, 153, 172 РТ-факультету денної форми навчання./Укладач: В.К.Манько.-Запоріжжя: ЗНТУ, 2019.-114 с.

Укладач:
доцент кафедри фізики

В.К.Манько

Рецензент: Швець Юлій Олександрович зав. кафедри інформатики та інформаційних технологій в освіті, КЗ "ЗОППО" ЗОР, доцент, к.ф.- м.н.

Затверджено
на засіданні кафедри
фізики

Протокол № 5 від 26 березня 2019 р.

Рекомендовано до видання

НМК РТ - факультету.

Протокол № 5 від 21 лютого 2019 р.

ЗМІСТ

ЧАСТИНА 2.

| | |
|---|-----|
| 10 КОЛИВАННЯ | 143 |
| 10.1 Комплексні числа та дії з ними..... | 143 |
| 10.2 Порядок розв’язку лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з постійними коефіцієнтами..... | 144 |
| 10.3 Вільні незатух гармонічні коливання Диф рівн цих коливань (пружинний маятник, кол. контур)..... | 145 |
| 10.4 Розв’язок диф рівняння незатух. гармонічних коливань.... | 148 |
| 10.5 Характеристики гармонічних коливань. Фазові співвідношення.. | 150 |
| 10.6 Енергія гармонічних коливань..... | 152 |
| 10.7 Фізичний та математичний маятники..... | 153 |
| 10.8 Додавання гармон. коливань одного напрямку рівних частот..... | 155 |
| 10.9 Додавання гармон кол. одного напрямку близьких частот (биття ко ливань)..... | 157 |
| 10.10 Додавання взаємно перпенх гарм. коливань (Фігури Ліссажу).... | 158 |
| 10.11 Затух. коля. Диф. рівн. затухаючих коливань та його розв’язок .. | 161 |
| 10.12 Характеристики затух. коливань та їх фізичний зміст..... | 163 |
| 10.13 Вимушені кол.. Диф. рівн. вимушених кол. та його розв’язок..... | 165 |
| 10.14 Резонанс напруг у коливальному контурі. Резонансні криві..... | 168 |
| 10.15 Резонанс струмів у коливальному контурі..... | 170 |
| 10.16 Векторні діаграми..... | 171 |
| 11 ХВИЛІ | 174 |
| 11.1 Мех-зм утвор. хвиль у пружн. серед. Класиф. хвиль. Рівн. хвиль.... | 174 |
| 11.2 Диференціальне хвильове рівняння..... | 174 |
| 11.3 Дисперсія хвиль. Фазова швидкість хвиль..... | 177 |
| 11.4 Швидкість передачі енергії хвилями. Групова швидкість..... | 177 |
| 11.5 Когерентні хвилі. Утворення стоячих хвиль. Рівн стоячих хвиль.. | 181 |
| 11.6 Звукові хвилі. Характер. звуку. Швидкість звуку в газах..... | 182 |
| 11.7 Ефект Доплера..... | 185 |
| 12 ОПТИКА | 187 |
| 12.1 Розвиток поглядів на природу світла..... | 187 |
| 12.2 Принцип Гюйгенса та його застосування до закону заломлення світла. Повне внутрішнє відбивання..... | 188 |
| 12.3 Інтерференція світла. Умови максимумів і мінімумів інтерфер. картини. Інтерференція від двох джерел (дослід Юнга)..... | 190 |
| 12.4 Інтерф світла в плоско-парал пласті і на клині. Лінії однакової товщини. | 192 |
| 12.5 Дифракція світла. Принцип Гюйгенса-Френеля. Метод зон Френеля для розрахунку дифракційної картини..... | 195 |

| | |
|---|-------------------|
| <u>12.6 Дифракція Френеля від круглого отвору та диску.....</u> | <u>199</u> |
| <u>12.7 Дифракція Фраунгофера на щілині.....</u> | <u>200</u> |
| <u>12.8 Дифракційна решітка та її роздільна здатність.....</u> | <u>202</u> |
| <u>12.9 Дифракція рентг. променів. Формула Вульфа-Бреггів.....</u> | <u>205</u> |
| <u>12.10 Поняття про голографію.....</u> | <u>206</u> |
| <u>12.11 Прир. і поляр. світло з-ни Малюса і Брюстера. Ефект Керра.....</u> | <u>207</u> |
| <u>13 КВАНТОВІ ВЛАСТИВОСТІ ВИПРОМІНЮВАННЯ..</u> | <u>211</u> |
| <u>13.1 Теплове випромінювання. Абсолютно чорне та сірі тіла.</u> | |
| <u>Закон Кірхгофа для теплового випромінювання.....</u> | <u>211</u> |
| <u>13.2 Розподіл енергії в спектрі абсолютно чорного тіла.</u> | |
| <u>Формули Віна, Релея-Джинса, Планка.....</u> | <u>214</u> |
| <u>13.3 Закони випромінювання абсолютно чорного тіла.</u> | |
| <u>Закон Стефана-Больцмана, закон Віна.....</u> | <u>216</u> |
| <u>13.4 Фотоэффект. Закони Столетова. Рівняння Ейнштейна</u> | |
| <u>для фотоэффекту. „Червона” межа фотоэффекту.....</u> | <u>218</u> |
| <u>13.5 Ефект Комптона.....</u> | <u>220</u> |
| <u>13.6 Тиск світла.....</u> | <u>223</u> |
| <u>14 ЕЛЕМЕНТИ АТОМНОЇ ФІЗИКИ.....</u> | <u>224</u> |
| <u>14.1 Дослід Е.Резерфорда по розсіюв. α-частинок.Ядерна модель ат...224</u> | |
| <u>14.2 Протиріччя моделі атома Резерфорда. Постулати Н.Бора</u> | |
| <u>та їх дослідне обґрунтування (дослід Франка і Герца).....</u> | <u>226</u> |
| <u>14.3 Борівська теорія воднеподібних ат..Законом. лін. ат. спектрів...229</u> | |
| <u>15 ЕЛЕМЕНТИ КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ</u> | <u>231</u> |
| <u>15.1 Гіпотеза де-Бройля. Дослідне обґрунтування корпускулярно-</u> | |
| <u>хвильового дуалізму матерії. Хвильова функція.....</u> | <u>231</u> |
| <u>15.2 Співвідношення невизначеностей Гейзенберга.....</u> | <u>234</u> |
| <u>15.3 Основне рівняння квантової механіки – рівняння Шредингера....235</u> | |
| <u>15.4 Рух мікрочастинки в нескінченно глибокій одновірній</u> | |
| <u>потенціальній ямі. Квантування енергії.....</u> | <u>237</u> |
| <u>15.5 Лінійний гармонічний квантовий осцилятор.....</u> | <u>240</u> |
| <u>15.6 Ат. водню за квант. теорією. Дослід Штерна і Герлаха. Спін ел.....241</u> | |
| <u>15.7 Спектральні закономірності.</u> | |
| <u>Правило добору для оптичних електронних переходів.....</u> | <u>246</u> |
| <u>15.8. Законом. рентгенівського випромін.Закон Мозлі.....</u> | <u>248</u> |
| <u>ЧАСТИНА 3.....</u> | <u>250</u> |

10 КОЛИВАННЯ

10.1 Комплексні числа та дії з ними

Число виду $z = x + iy$ (10.1)

називається комплексним числом, записаним в алгебраїчній формі. Тут: $x = \text{Re}[z]$ - дійсна (real) частина, $y = \text{Im}[z]$ - уявна (imaginary)

частина комплексного числа; $i = \sqrt{-1}$ - уявна одиниця. Число $z^* = x - iy$ з протилежною за знаком уявною частиною називається

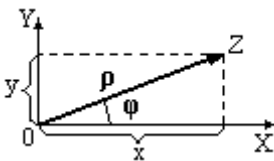


Рисунок 10.1

комплексно спряженим числом комплексному числу z .

Так же як будь-якому дійсному числу на числовій осі відповідає точка, так комплексному числу z відповідає точка на комплексній площині XOY (рис.10.1).

Положення точки Z на площині можна задати також полярними координатами ρ і φ . Зв'язок між полярними і декартовими координатами очевидний із рис 10.1.

$$x = \rho \cdot \cos\varphi; \quad y = \rho \cdot \sin\varphi, \quad (10.2)$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x}. \quad (10.3)$$

ρ – модуль комплексного числа, φ – його аргумент.

Підстановка (10.2) в (10.1) дає тригонометричну форму комплексного числа

$$z = \rho \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi). \quad (10.4)$$

З математики відомі формули розкладання в степеневий ряд таких функцій:

$$e^\varphi = 1 + \frac{\varphi}{1!} + \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^3}{3!} + \dots, \quad (10.5)$$

$$e^{i\varphi} = 1 + \frac{i\varphi}{1!} - \frac{\varphi^2}{2!} - \frac{i\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \frac{i\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^6}{6!} - \frac{i\varphi^7}{7!} + \dots, \quad (10.6)$$

$$\sin\varphi = \frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \dots, \quad (10.7)$$

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \dots \quad (10.8)$$

У формулі (10.6) згрупуємо члени у відповідності з формулами (10.7), (10.8). Одержуємо

$$e^{i\varphi} = \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \dots \right) + i \left(\frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \dots \right) = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Отже тригонометрична форма комплексного числа (10.4) може бути перетворена в показову форму

$$z = \rho \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi) = \rho \cdot e^{i\varphi}. \quad (10.9)$$

Додавання і віднімання комплексних чисел зручно виконувати у алгебраїчній (10.1) чи в тригонометричній (10.4) формах так як фактично необхідно виконати зведення подібних членів.

Множення, ділення, піднесення до степені зручніше виконувати з показовою формою комплексних чисел, наприклад,

$$z = z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad z^n = \rho^n \cdot e^{in\varphi}.$$

10.2 Порядок розв'язку лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з постійними коефіцієнтами

Рівняння виду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} + bx = f(t) \quad (10.10)$$

називається лінійним (всі похідні в першій степені) диференціальним рівнянням другого порядку (старша похідна друга) з постійними коефіцієнтами a і b . Розв'язок цього рівняння складається із суми: 1) загального розв'язку $x_0(t)$ однорідного рівняння, тобто коли права частина $f(t) = 0$ і 2) часткового розв'язку $x_{\text{ч.н}}(t)$ неоднорідного рівняння, яке залежить від виду функції $f(t)$.

1) Загальний розв'язок однорідного рівняння має вид

$$x_0(t) = A \cdot e^{\lambda_1 t} + B \cdot e^{\lambda_2 t}, \quad (10.11)$$

де λ_1 і λ_2 корні характеристичного алгебраїчного рівняння

$$\lambda^2 + a \cdot \lambda + b = 0, \quad (10.12)$$

яке складається на основі рівняння (10.10) шляхом заміни похідних деяким параметром, наприклад, λ в тій степені, який порядок похідної. Звернемо увагу, що x – це похідна нульового порядку. Тому доданок $b x$ замінюється на $b \cdot \lambda^0 = b$. А і B в (10.11) – константи інтегрування знаходяться із початкових умов.

2) Частковий розв'язок $x_{\text{ч.н}}(t)$ визначається видом функції $f(t)$. Якщо

$$\text{ця функція має вид} \quad f(t) = f_0 \cdot e^{i\omega t}, \quad (10.13)$$

$$\text{то} \quad x_{\text{ч.н}}(t) = C \cdot e^{i\omega t}. \quad (10.14)$$

C – третя константа інтегрування знаходиться із початкових умов.

Отже, загальний розв'язок рівняння (10.10) має вид

$$x(t) = A \cdot e^{\lambda_1 t} + B \cdot e^{\lambda_2 t} + C \cdot e^{i\omega t}. \quad (10.15)$$

Зауваження. Якщо функція $f(t)$ відрізняється від виду (10.13), то до неї можна додати будь-яку функцію, або число, такі, щоб можна було перевести одержаний комплексний вираз у показову форму, тобто звести до виду (10.13). Тоді розв'язок видозміненого рівняння буде мати вид (10.14). Після знаходження константи інтегрування C із одержаного розв'язку видозміненого рівняння $x_{\text{ч.н}}^*(t)$ беруть тільки дійсну чи уявну частину у відповідності з тим, якою була функція $f(t)$ у вихідному диференціальному рівнянні: дійсною чи уявною. Такий прийом дає можливість розв'язувати диференціальні рівняння за розглянутим правилом з досить різноманітними функціями $f(t)$.

10.3 Вільні незатухаючі гармонічні коливання. Диференціальне рівняння цих коливань (пружинний маятник, коливальний контур)

Колівальними називаються процеси, які характеризуються певною повторюваністю в часі.

Вільні коливання – це коливання в системах, виведених із положення рівноваги і представлених самим собі.

Вимушені коливання виникають в системах, які зазнають періодичної зовнішньої дії. Це може бути сила, напруга і т. ін.

Автоколивання – це різновидність вимушених коливань, коли моментами дії зовнішнього фактору керує сама система за рахунок зворотного зв'язку.

Гармонічні - це коливання, при яких параметри системи змінюються за гармонічним законом, тобто за законом \sin або \cos . Реальні коливання найчастіше негармонічні. Але будь-яку функцію можна розкласти в тригонометричний ряд Фур'є

$$f(t) = 0,5 \cdot a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + a_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t + \dots + a_n \cos nt + b_n \sin nt,$$

тобто представити сумою гармонічних функцій кратних частот (гармонік). Таким чином, для вивчення негармонічних коливань досить вивчити закони гармонічних коливань та правило їх додавання.

Незатухаючі – це коливання, які продовжуються нескінченно довго, тобто передана при збудженні коливань енергія системи не змінюється (не розсіюється) з часом. Якщо запасена енергія системи зменшується, коливання з часом припиняться (затухнуть). Такі коливання називаються **затухаючими**.

Розглянемо паралельно механічні (на прикладі пружинного маятника) та електричні (на прикладі коливального контуру) коливання.

Механічні коливання

Муфта масою m закріплена на пружині жорсткістю k може рухатись без тертя по стержню (рис.10.2).

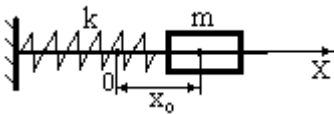


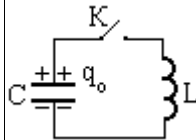
Рисунок 10.2

Розтягнемо пружину на величину x_0 . Тим самим надамо системі енергію деформованої пружини

$$W_{\text{п}} = \frac{1}{2} kx_0^2$$

Електричні коливання

Коливальний контур складається із конденсатора C і ідеальної (опір дроту дорівнює нулю) котушки індуктивністю L (рис.10.3).



Зарядимо конденсатор до заряду q_0 , тобто надамо системі енергію електричного поля конденсатора

$$W_c = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{C} \cdot q_0^2$$

Бачимо аналогію величин

Жорсткість пружини $k \rightarrow \frac{1}{C}$ - обернена електроємність

Максимальне зміщення $x_0 \rightarrow q_0$ - максимальний заряд

Представляємо системи самим собі:

Відпускаємо муфту. Під дією пружної сили муфта m починає рухатись з прискоренням. Швидкість зростає, досягаючи максимального значення V_0 в момент проходження точки 0 положення

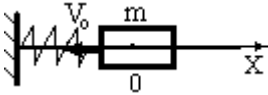


Рисунок 10.4

рівноваги, що відповідає недеформованій пружині (рис.10.4).

Потенціальна енергія перетворюється в кінетичну

$$W_k = \frac{mV_0^2}{2}$$

Замикаємо ключ К. Конденсатор починає розряджатись. Виникає електричний струм, який досягає максимального значення I_0 в момент повної розрядки

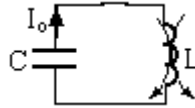


Рисунок 10.5

конденсатора (рис.10.5). В котушці виникає магнітне поле.

Енергія електричного поля перетворюється в енергію магнітного поля котушки

$$W_L = \frac{LI_0^2}{2}$$

Аналогія механічних і електричних величин:

маса $m \rightarrow L$ - індуктивність,

швидкість $V_0 \rightarrow I_0$ - струм.

Пройшовши положення рівноваги, муфта рухається за інерцією, стискаючи пружину. Швидкість і кінетична енергія зменшуються до нуля, стиснувши пружину на величину x_0 (рис.10.6).

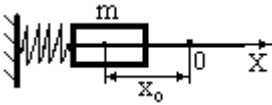


Рисунок 10.6

Кінетична енергія знову перетворюється в потенціальну енергію стиснутої пружини.

Потім процеси повторюються в зворотному напрямку до повернення систем у початковій стан. В системах відбулося одне повне коливання. Одержимо диференціальні рівняння, які описують розглянуті процеси незатухаючих коливань.

Запишемо другий закон Ньютона

$$a = \frac{F}{m}. \text{ Так як } a = \frac{d^2x}{dt^2}; F = -kx,$$

одержуємо

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x.$$

Позначимо $\frac{k}{m} = \omega_0^2$. Маємо

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot x = 0.$$

Після повної розрядки конденсатора, струм починає зменшуватись. За законом самоіндукції в котушці виникає індукційний струм, який за законом Ленца повинен протидіяти такому зменшенню, тобто мати той же самий напрямок. Цей індукційний струм і перезаряджає конденсатор (рис.10.7).

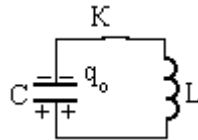


Рисунок 10.7

Енергія магнітного поля знову перетворюється в енергію електричного поля конденсатора.

Запишемо другий закон Кірхгофа

$U_c = \varepsilon_c$ напруга на конденсаторі дорівнює е.р.с. самоіндукції.

$$U_c = \frac{q}{C}; \varepsilon_c = -L \frac{dI}{dt} = -L \frac{d^2q}{dt^2}.$$

$$\text{Одержуємо } \frac{q}{C} = -L \frac{d^2q}{dt^2}.$$

Позначимо $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$. Маємо

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot q = 0. \quad (10.16)$$

Одержали ідентичні з математичної точки зору диференціальні рівняння. Тому достатньо розв'язати одне із них.

10.4 Розв'язок диференціального рівняння незатухаючих гармонічних коливань

Розв'яжемо рівняння (10.16) для електричних коливань, яке являється лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку з постійними коефіцієнтами. Порядок його розв'язку був розглянутий у розділі 10.2. Складаємо характеристичне алгебраїчне рівняння $\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$. Його корені $\lambda_1 = i \cdot \omega_0$; $\lambda_2 = -i \cdot \omega_0$. Загальний розв'язок рівняння (10.16) запишемо у вигляді (10.11)

$$q(t) = A \cdot e^{\lambda_1 t} + B \cdot e^{\lambda_2 t} = A \cdot e^{i\omega_0 t} + B \cdot e^{-i\omega_0 t}. \quad (10.17)$$

Константи інтегрування A і B знайдемо із початкових умов:

$$\text{при } t = 0 \quad q = q_0; \quad I = \frac{dq}{dt} = 0. \quad (10.18)$$

Знайдемо закон зміни струму з часом, продиференціювавши рівняння (10.17).

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = i\omega_0 A \cdot e^{i\omega_0 t} - i\omega_0 B \cdot e^{-i\omega_0 t} \quad (10.19)$$

Підставляємо умови (10.18) в (10.17) і (10.19). Маємо систему алгебраїчних рівнянь .
$$\begin{cases} A + B = q_0 \\ A - B = 0 \end{cases} \Rightarrow A = B = \frac{q_0}{2}$$
 Підставляємо

знайдені константи в (10.17) одержуємо

$$q(t) = q_0 \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} = q_0 \cdot \cos(\omega_0 t) \quad (10.20)$$

гармонічний закон зміни заряду з часом. Тут врахована формула Ейлера

$\frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} = \cos(\omega_0 t)$, яку можна одержати, скориставшись степеневими рядами (10.5)-(10.8).

Аналогічно для механічних коливань зміщення від положення рівноваги

$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega_0 t). \quad (10.21)$$

Рівняння (10.20), (10.21) називаються рівняннями гармонічних незатухаючих коливань. Графіки цих коливань зображені на рис.10.8.

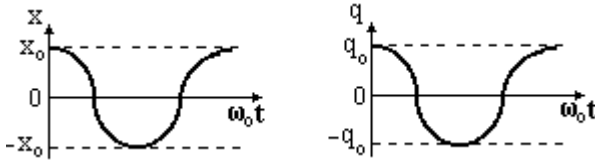


Рисунок 10.8

10.5 Характеристики гармонічних коливань. Фазові співвідношення

У загальному випадку (при інших початкових умовах, ніж (10.18), рівняння гармонічних коливань мають вид

$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \phi); \quad q(t) = q_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (10.22)$$

Дамо означення характеристикам гармонічних коливань.

Зміщення $x(t)$, $q(t)$ – відхилення фізичної величини від рівноважного значення в момент часу t .

Амплітуда x_0 , q_0 – найбільше відхилення фізичної величини від рівноважного значення. Фактично це коефіцієнт перед гармонічною функцією. Для незатухаючих коливань амплітуда постійна, при затухаючих вона зменшується з часом.

Фаза $\Phi(t) = (\omega_0 t + \phi)$ – аргумент гармонічної функції. Якщо фазу поділити на період гармонічної функції 2π , одержимо кількість коливань, які відбулися від початку коливань до моменту часу t .

Початкова фаза ϕ – будучи поділеною на 2π показує кількість коливань, що відбулися до моменту початку відліку часу.

Період T – Час одного повного коливання. За період фаза коливань змінюється на період гармонічної функції, тобто на 2π . Отже маємо $\Phi(T + t) - \Phi(t) = 2\pi$, або $[\omega_0 (T + t) + \phi] - (\omega_0 t + \phi) = 2\pi$. Після спрощень одержуємо

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (10.23)$$

В розділі 10.3 були введені позначення $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ для пружинного маятника і $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$ для коливального контуру. Підстановка в (10.23) дає вирази для періодів коливань пружинного маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}; \quad (10.24)$$

і у коливальному контурі (формула Томсона)

$$T = 2\pi\sqrt{L \cdot C}. \quad (10.25)$$

Частота ν – кількість коливань за одиницю часу $\nu = \frac{1}{T}$. (10.26)

Вимірюється частота в Герцах $1\text{Гц} = 1\text{с}^{-1}$.

Циклічна частота ω_0 - кількість коливань за 2π секунд.

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu. \quad (10.27)$$

Знайдемо закон зміни з часом струму $I(t)$ і напруг на конденсаторі $U_c(t)$ і на котушці $U_L(t)$ коливального контуру, виходячи із закону зміни заряду (10.20). Скористаємось також формулами додаткового кута, щоб всі закони виразити через одну гармонічну функцію, наприклад, \cos .

$$U_c(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{q_0}{C} \cos(\omega_0 t) = U_{oc} \cos(\omega_0 t); \quad (10.28)$$

$$I(t) = \frac{dq(t)}{dt} = -q_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t) = I_0 \cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}); \quad (10.29)$$

$$U_L(t) = L \frac{dI(t)}{dt} = -Lq_0 \omega_0^2 \cos(\omega_0 t) = U_{oL} \cos(\omega_0 t + \pi). \quad (10.30)$$

Одержали, що фази струму і напруг не співпадають. Напряга на

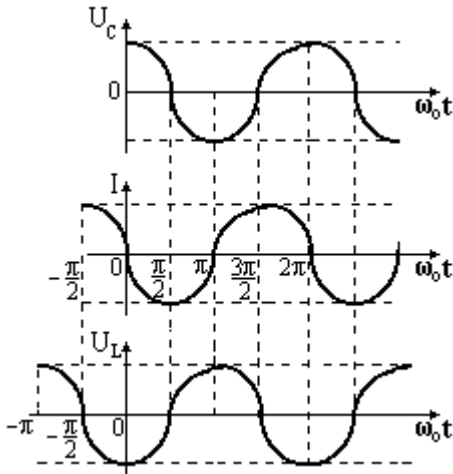


Рисунок 10.9

конденсаторі відстає по фазі від струму на $\frac{\pi}{2}$, а на котушці випереджає на $\frac{\pi}{2}$. Фази напруг на конденсаторі і на котушці відрізняються на π , що складає половину періоду гармонічної функції. Тому кажуть, що напруги на конденсаторі і на котушці змінюються в протифазі. Намалюємо графіки зміни струму і напруг.

У виразах (10.28) – (10.30) були позначені амплітуди напруг і струму:

$$U_{oc} = \frac{q_o}{C}, \quad (10.31)$$

$$U_{oL} = Lq_o\omega_o^2, \quad (10.32)$$

$$I_o = \omega_o q_o. \quad (10.33)$$

За законом Ома для ділянки кола (див. розділ 7.1), відношення напруги до струму дорівнює опоріві. Це дає можливість знайти реактивні опори конденсатора X_C і котушки X_L для змінного струму:

$$X_C = \frac{U_{oc}}{I_o} = \frac{q_o}{C\omega_o q_o} = \frac{1}{\omega_o C}; \quad (10.34)$$

$$X_L = \frac{U_{oL}}{I_o} = \frac{Lq_o\omega_o^2}{\omega_o q_o} = \omega_o L. \quad (10.35)$$

10.6 Енергія гармонічних коливань

Механічні коливання

У будь-який момент часу t повна енергія пружинного маятника складається із кінетичної енергії руху муфти і потенціальної енергії деформованої пружини

$$W = W_k + W_{\Pi} = \frac{mV^2}{2} + \frac{kx^2}{2}.$$

Врахуємо, що $x(t) = x_o \cdot \cos(\omega_o t)$,

$$V = \frac{dx}{dt} = -x_o \omega_o \sin(\omega_o t),$$

$k = m\omega_o^2$. Одержуємо

$$\begin{aligned} W &= \frac{m x_o^2 \omega_o^2 \sin^2(\omega_o t)}{2} + \frac{k x_o^2 \cos^2(\omega_o t)}{2} = \\ &= \frac{m x_o^2 \omega_o^2 \sin^2(\omega_o t)}{2} + \frac{m x_o^2 \omega_o^2 \cos^2(\omega_o t)}{2} = \\ &= \frac{m x_o^2 \omega_o^2}{2} [\sin^2(\omega_o t) + \cos^2(\omega_o t)] = \frac{m x_o^2 \omega_o^2}{2} = \\ &= \frac{m V_o^2}{2} = \frac{k x_o^2}{2} = \text{const} \end{aligned}$$

Електричні коливання

У будь-який момент часу t повна енергія коливального контуру складається із енергії електричного поля конденсатора і енергії магнітного поля котушки

$$W = W_C + W_L = \frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2}.$$

Враховуючи (10.20), (10.29) і маємо

$$W = \frac{q_o^2 \cos^2(\omega_o t)}{2C} + \frac{L q_o^2 \omega_o^2 \sin^2(\omega_o t)}{2}$$

Так як $\omega_o^2 = \frac{1}{LC}$, одержуємо

$$W = \frac{q_o^2}{2C} = \frac{L q_o^2 \omega_o^2}{2} = \frac{LI_o^2}{2} = \text{const}$$

Отже повна механічна енергія пружинного маятника при незатухаючих коливаннях

$$W = \frac{m x_o^2 \omega_o^2}{2} = \frac{m V_o^2}{2} = \frac{k x_o^2}{2} = \text{const} \quad (10.36)$$

не залежить від часу, тобто залишається сталою. Відбувається перетворення потенціальної енергії кінетичну і навпаки. Вона, як видно із (10.36) пропорційна квадрату амплітуди і квадрату частоти і дорівнює максимальній кінетичній, або максимальній потенціальній енергії.

Енергія незатухаючих коливань у коливальному контурі

$$W = \frac{q_o^2}{2C} = \frac{L q_o^2 \omega_o^2}{2} = \frac{L I_o^2}{2} = \text{const} \quad (10.37)$$

також не залежить від часу, пропорційна квадрату амплітуди і квадрату частоти і дорівнює максимальній енергії електричного поля конденсатора, або максимальній енергії магнітного поля котушки.

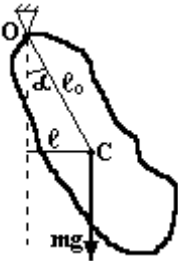


Рисунок 10.10

При відхиленні від вертикалі на кут α виникає момент сили тяжіння

$$M = mg \ell = mg \ell_o \sin \alpha, \quad (10.38)$$

який приводить тіло в обертальний рух відносно точки підвісу O.

Запишемо основне рівняння динаміки обертального руху (5.9) $\varepsilon = \frac{M}{J}$,

або

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = - \frac{mg \ell_o}{J} \sin \alpha. \quad (10.39)$$

Знак (-) враховує, те що момент сили зменшує кут відхилення, тобто при відхиленні вправо, момент сили намагається повернути тіло вліво і навпаки (рис.10.10).

При малих кутах відхилення, коли $\sin \alpha \approx \alpha$, рівняння (10.39) набуває виду

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mg\ell_o}{J}\alpha = 0, \text{ або } \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_o^2\alpha = 0 \quad (10.40)$$

диференціального рівняння незатухаючих гармонічних коливань (порівняйте з (10.16)).

$$\text{Тут } \omega_o = \sqrt{\frac{mg\ell_o}{J}} \quad (10.41)$$

циклічна частота коливань фізичного маятника. Знайдемо період коливань

$$T = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mg\ell_o}}.$$

(10.42)

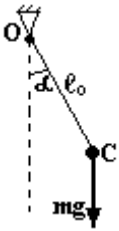


Рисунок 10.11

Математичний маятник – це матеріальна точка, підвішена на невагомій нерозтяжній нитці і виведена із положення рівноваги (рис.10.11). Його можна розглядати як різновидність фізичного маятника з моментом інерції матеріальної точки $J = m\ell_o^2$. Тоді період коливань математичного маятника одержуємо із (10.42)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mg\ell_o}} = 2\pi \sqrt{\frac{m\ell_o^2}{mg\ell_o}} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell_o}{g}}. \quad (10.43)$$

Якщо у формулі (10.42) позначити $\frac{J}{m\ell_o} = \ell_{\text{пр}}$, (10.44)

вона набуває виду, аналогічного (10.43) періоду коливань математичного маятника.

$\ell_{\text{пр}}$ - називається приведеною довжиною фізичного маятника.

Вона дорівнює довжині математичного маятника, період коливань якого дорівнює періоду коливань фізичного маятника.

Отже, фізичний і математичний маятники здійснюють гармонічні коливання при малих кутах відхилення $\alpha \leq 3^\circ \div 5^\circ$.

Вирази (10.42), (10.43), а також (10.24), (10.25) для періодів коливань показують, що вони не залежать від амплітуди.

10.8 Додавання гармонічних коливань одного напрямку рівних частот

Нехай деяка точка одночасно приймає участь у двох гармонічних коливаннях одного напрямку, заданих рівняннями (10.45)

$$x_1 = x_{o1} \cos(\omega_o t + \varphi_1) \quad x_2 = x_{o2} \cos(\omega_o t + \varphi_2) \quad (10.45)$$

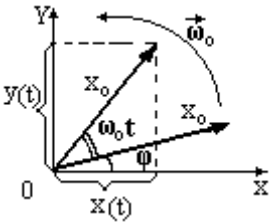


Рисунок 10.12

Потрібно знайти результуюче коливання. В математиці така задача додавання тригонометричних функцій вирішується чисто аналітично шляхом введення деякого допоміжного кута. Але є простіший і більш наглядний графоаналітичний спосіб.

Він базується на графічному моделюванні гармонічного коливання вектором, довжина якого дорівнює амплітуді коливань x_o (рис.10.12). Цей вектор рівномірно обертається проти годинникової стрілки (такий напрямок обертання прийнятий як позитивний) з кутовою швидкістю ω_o , яка дорівнює циклічній частоті коливань. Початкове положення вектора задається кутом φ (початкова фаза) утвореним з позитивним напрямком осі ox . За час t вектор повернеться на кут $\omega_o t$ і буде утворювати з віссю ox кут $(\omega_o t + \varphi)$. Запишемо проєкції цього вектора на осі координат в момент часу t

$$x = x_o \cos(\omega_o t + \varphi); \quad y = x_o \sin(\omega_o t + \varphi).$$

Одержали відомі (10.22) рівняння гармонічних коливань

Скористаємось таким геометричним уявленням для додавання двох коливань одного напрямку і однакової частоти. Так як кутові швидкості обох векторів однакові, то вони обертаються синхронно, тобто взаємне положення векторів не змінюється з часом. Тому зобразимо ці коливання векторами у початковий момент часу (рис.10.13). Вектор сумарного коливання є діагональ паралелограма зі сторонами x_{o1} і x_{o2} та кутом між ними $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. Результуючим буде гармонічне коливання з новою амплітудою x_o і новою початковою фазою φ .

$$x = x_o \cos(\omega_o t + \varphi). \quad (10.46)$$

Модуль вектора x_o – амплітуду результуючого коливання, знайдемо за теоремою косинусів як сторону трикутника, яка знаходиться проти кута $\pi - (\varphi_1 - \varphi_2)$ із сторонами x_{o1} і x_{o2} . Врахувавши формулу додаткового кута $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$, маємо

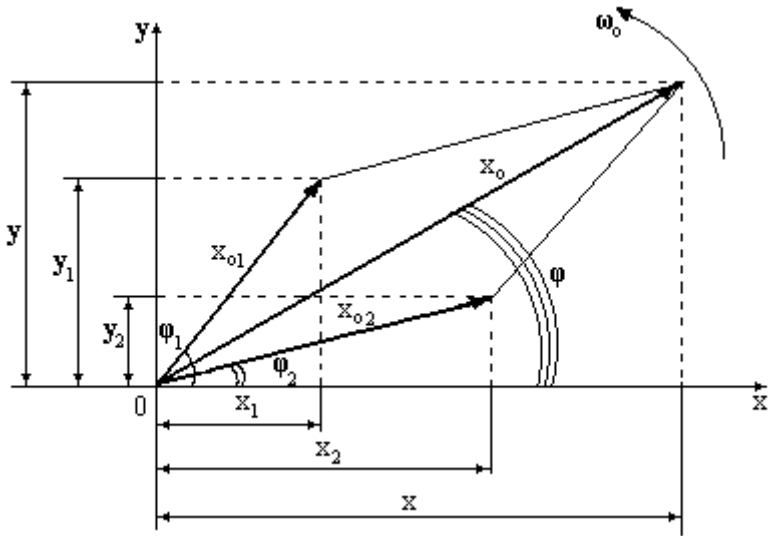


Рисунок 10.13

$$x_o = \sqrt{x_{o1}^2 + x_{o2}^2 + 2x_{o1}x_{o2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}. \quad (10.47)$$

Початкова фаза $\varphi = \arctg \frac{y}{x}$. Так як проекції результуючого вектора дорівнюють алгебраїчній сумі проекцій його доданків, маємо

$$\varphi = \arctg \frac{y}{x} = \arctg \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \arctg \frac{x_{o1} \sin \varphi_1 + x_{o2} \sin \varphi_2}{x_{o1} \cos \varphi_1 + x_{o2} \cos \varphi_2}. \quad (10.48)$$

Зауваження: назва тригонометричних функцій в рівняннях коливань, які додаються (10.45) і результуючого (10.46) повинні бути однаковими, тобто \cos , або \sin . Якщо функції різні, то за формулами додаткового кута їх зводять до однакової назви, змінюючи початкову фазу, і потім додають.

10.9 Додавання гармонічних коливань одного напрямку близьких частот (биття коливань)

Нехай маємо два гармонічних коливання одного напрямку, наприклад, вздовж осі x , з однаковою для простоти (потім це обмеження знімемо) амплітудою x_0 і близькими частотами ω і $\omega + \Delta\omega$, тобто $\Delta\omega \ll \omega$

$$x_1 = x_0 \cos(\omega t) \quad \text{і} \quad x_2 = x_0 \cos[(\omega + \Delta\omega)t].$$

Знайдемо закон коливання точки, яка приймає участь у цих коливаннях одночасно, тобто додамо ці коливання. Скористатись попереднім графоаналітичним способом неможливо, так як циклічні частоти різні і взаємне положення векторів коливань буде змінюватись з часом. Тому додамо ці коливання аналітично. Для цього скористаємось відомою з математики формулою суми косинусів

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2 \cos\frac{\alpha - \beta}{2} \cos\frac{\alpha + \beta}{2} \quad (10.49)$$

Застосуємо цю формулу, вважаючи, що $\alpha = \omega t$, а $\beta = (\omega + \Delta\omega)t$
 $x = x_1 + x_2 = x_0 \{ \cos(\omega t) + \cos[(\omega + \Delta\omega)t] \} =$

$$= 2x_0 \cos\frac{\omega t - \omega t - \Delta\omega t}{2} \cos\frac{\omega t + \omega t + \Delta\omega t}{2} = 2x_0 \cos\frac{\Delta\omega}{2} t \cdot \cos(\omega + \frac{\Delta\omega}{2})t$$

Так як за умовою $\Delta\omega \ll \omega$, знехтуємо доданком $\frac{\Delta\omega}{2}$ порівнюючи з ω .

Остаточно маємо

$$x(t) = 2x_0 \cos\frac{\Delta\omega}{2} t \cdot \cos\omega t = A(t) \cos\omega t. \quad (10.50)$$

Одержали гармонічне коливання з частотою ω і амплітудою

$$A(t) = 2x_0 \cos\frac{\Delta\omega}{2} t, \text{ яка змінюється з часом за гармонічним законом з}$$

частотою $\frac{\Delta\omega}{2}$. На рис.10.14 пунктиром зображено закон зміни

амплітуди, а суцільною лінією - результуюче коливання, яке ще називають биттям коливань. В моменти часу, коли фази коливань протилежні (точки $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$), результуюче зміщення дорівнює нулю.

Якщо ж амплітуди вихідних коливань, що додаються, не однакові, такої повної компенсації не буде.

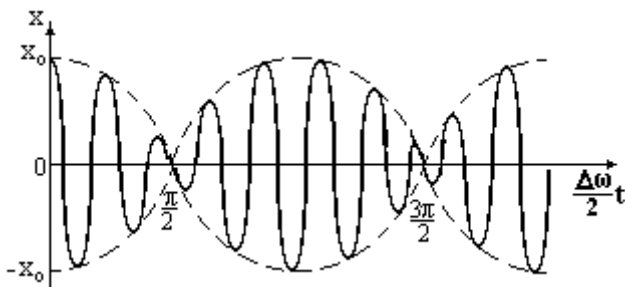


Рисунок 10.14

10.10 Додавання взаємно перпендикулярних гармонічних коливань (Фігури Ліссажу)

Нехай точка одночасно приймає участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях вздовж осі x і вздовж осі y . Вона буде рухатись в площині xy по деякій траєкторії, яка називається фігурою Ліссажу. Знайдемо рівняння цієї траєкторії. Для цього необхідно виключити з рівнянь коливань параметр t – час і одержати зв'язок між x і y .

Розглянемо спочатку випадок однакових частот коливань

$$\begin{cases} x = x_0 \sin(\omega t + \varphi_1) \\ y = y_0 \sin(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

Поділимо кожне рівняння на відповідну амплітуду і розкладемо синус суми кутів

$$\begin{cases} \frac{x}{x_0} = \sin \omega t \cdot \cos \varphi_1 + \cos \omega t \cdot \sin \varphi_1 \end{cases} \quad (9.51)$$

$$\begin{cases} \frac{y}{y_0} = \sin \omega t \cdot \cos \varphi_2 + \cos \omega t \cdot \sin \varphi_2 \end{cases} \quad (9.52)$$

Помножимо (10.51) на $\cos \varphi_2$, (10.52) – на $\cos \varphi_1$ і віднімемо одне рівняння із другого. Потім помножимо (10.51) на $\sin \varphi_2$, (10.52) – на $\sin \varphi_1$ і віднімемо одне рівняння із другого. Враховуючи, що $\cos \varphi_2 \cdot \sin \varphi_1 - \cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 = \sin(\varphi_2 - \varphi_1)$, одержуємо

$$\begin{cases} \frac{x}{x_0} \cos \varphi_2 - \frac{y}{y_0} \cos \varphi_1 = -\cos \omega t \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \\ \frac{x}{x_0} \sin \varphi_2 - \frac{y}{y_0} \sin \varphi_1 = \sin \omega t \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \end{cases}$$

Підносимо обидва рівняння до квадрату і додаємо. Враховуючи основну тригонометричну тотожність і формулу косинуса різниці кутів $\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 = \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$, одержуємо рівняння фігури Ліссажу

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 - \frac{2xy}{x_0 y_0} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (10.53)$$

Це рівняння еліпса з повернутими осями відносно координатних осей. Розглянемо декілька варіантів різниці фаз $(\varphi_2 - \varphi_1)$.

а) $(\varphi_2 - \varphi_1) = 0$. Із (10.53) одержуємо

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 - \frac{2xy}{x_0 y_0} = 0 \Rightarrow \left(\frac{x}{x_0} - \frac{y}{y_0}\right)^2 = 0 \Rightarrow y = \frac{y_0}{x_0} x$$

рівняння прямої лінії в 1-му і 3-му квадрантах (рис. 10.15, а).

б) $(\varphi_2 - \varphi_1) = \pm \pi$. Із (10.53) одержуємо

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 + \frac{2xy}{x_0 y_0} = 0 \Rightarrow \left(\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0}\right)^2 = 0 \Rightarrow y = -\frac{y_0}{x_0} x$$

рівняння прямої лінії в 2-му і 4-му квадрантах (рис. 10.15, б).

в) $(\varphi_2 - \varphi_1) = \pm \frac{\pi}{2}$. Із (10.53) одержуємо $\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 = 1$

рівняння еліпса (рис. 10.16, в).

Якщо частоти коливань різні, фігури Ліссажу мають більш

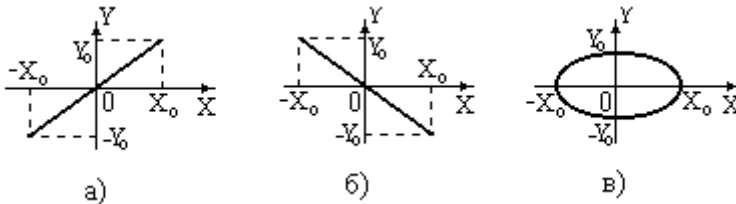


Рисунок 10.15

складний вид. Розглянемо, наприклад, результат додавання коливань

$$\begin{cases} x = 3 \sin \omega t \\ y = 2 \cos 2\omega t \end{cases}, \text{ частоти яких відрізняються в два рази. Звільняємося від}$$

параметра часу t . Із першого рівняння маємо $\sin \omega t = \frac{x}{3}$. Друге рівняння приведемо до одного аргументу з першим, скориставшись формулою косинуса подвійного кута та основною тригонометричною тотожністю

$$y = 2 \cos 2\omega t = 2(\cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t) = 2(1 - 2 \sin^2 \omega t) = 2 - 4 \left(\frac{x}{3}\right)^2 = 2 - \frac{4}{9} x^2.$$

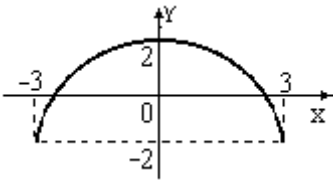


Рисунок 10.16

Одержали рівняння квадратної параболи (рис.10.16). Точка буде рухатись (коливатись) по частині параболи, не виходячи за амплітудні значення координат: $x_0 = 3$, $y_0 = 2$.

По виду фігур Ліссажу можна визначити відношення частот взаємно перпендикулярних

коливань $\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{n_y}{n_x}$. Воно обернене відношенню чисел перетину

відповідних осей координат за період точкою, яка рухається по фігурі

Ліссажу. В наведеному прикладі

$$\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{\omega}{2\omega} = \frac{n_y}{n_x} = \frac{1}{2}.$$

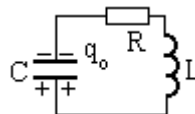
10.11 Затухаючі коливання. Диференціальне рівняння затухаючих коливань та його розв'язок

Розглянемо механічну коливальну систему, наприклад, пружинний маятник, в якій діють сили тертя, пропорційні, як відомо, швидкості

$$F_{\text{оп}} = -rV = -r \frac{dx}{dt}, \text{ де}$$

r – коефіцієнт опору.

Систему виводять із положення рівноваги і залишають саму собі. Виникають власні коливання. Така система дисипативна. Повна механічна енергія системи зменшується з часом, перетворюючись у немеханічні види енергії (в теплову).



Виникають затухаючі механічні коливання, які через деякий час припиняються. Одержимо диференціальне рівняння таких затухаючих власних коливань. Запишемо другий закон Ньютона

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F + F_{\text{оп}}, \quad F = -kx - \text{ сила}$$

пружності. Одержуємо

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt}, \quad \text{або}$$

В реальному коливальному контурі завжди є активний опір – це опір дроту контуру. У відповідності із законом Джоуля-Ленца на ньому виділяється тепло, тобто

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (10.54)$$

Тут $\beta = \frac{r}{2m}$ - коеф. затухання.

Диференціальне рівняння (10.54) затухаючих механічних власних коливань ідентичне диференційному рівнянню (10.55) власних електричних затухаючих коливань. Тому знайдемо розв'язок одного із них, наприклад, (10.55).

Характеристичне рівняння має вид (див. розділ 10.2)

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0, \quad \text{а його розв'язок згідно з (10.11)}$$

$$q(t) = A \cdot e^{\lambda_1 t} + B \cdot e^{\lambda_2 t}$$

Корні характеристичного рівняння $\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ в залежності від співвідношення між β і ω_0 можуть бути комплексними при $\beta < \omega_0$ і дійсними при $\beta \geq \omega_0$.

енергія контуру перетворюється в тепло. У контурі виникають затухаючі власні коливання. Запишемо другий закон Кірхгофа

$$U_C + U_R = \varepsilon_c, \quad \text{або}$$

$$\frac{q}{C} + IR = -L \frac{dI}{dt}$$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0 \quad (10.55).$$

Тут $\beta = \frac{R}{2L}$ - коефіцієнт затухання.

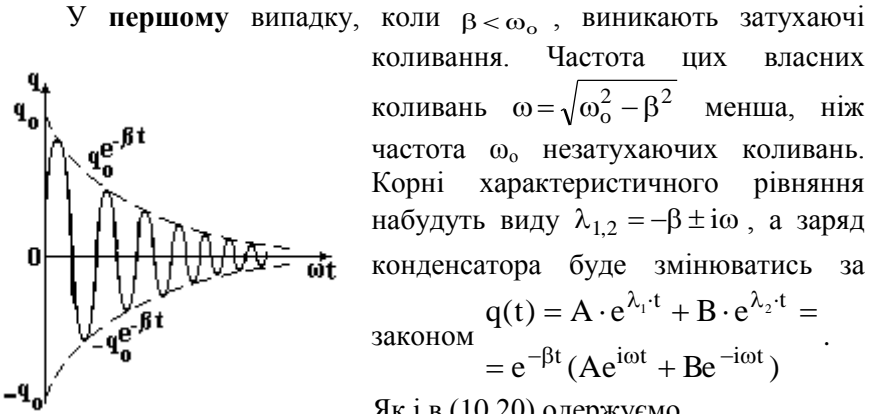


Рисунок 10.17

$$q(t) = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi). \quad (10.56)$$

Виникають затухаючі коливання (рис.10.17), амплітуда яких зменшується з часом за експоненціальним законом $A(t) = q_0 e^{-\beta t}$.

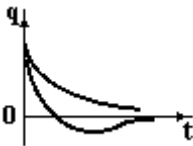


Рисунок 10.18

У **другому** випадку, коли $\beta \geq \omega_0$ втрата енергії настільки велика, що вона розсіюється за якусь долю періоду і коливання не виникають. Система релаксує до стану рівноваги аперіодично (неперіодично) (рис.10.18). Критерієм переходу до аперіодичного процесу релаксації є рівняння

$\beta = \omega_0$. $\frac{R_k}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow R_k = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$. При $R < R_k$ виникають затухаючі коливання, при $R > R_k$ має місце аперіодичний процес релаксації.

10.12 Характеристики затухаючих коливань та їх фізичний зміст

а) Коефіцієнт затухання $\beta = \frac{r}{2m} \left[\frac{H \cdot c}{M \cdot \text{кг}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}{c^2 \cdot \text{м} \cdot \text{кг}} = \frac{1}{c} \right]$ для

механічних коливань і $\beta = \frac{R}{2L} \left[\frac{\text{Ом} \cdot \text{А}}{\text{вб}} = \frac{B}{B \cdot c} = \frac{1}{c} \right]$ для електричних

коливань. Коефіцієнт опору r аналогічний електричному опору R .

б) Час релаксації τ – це час, за який амплітуда коливань зменшується в e раз. В момент часу t амплітуда $A(t) = q_0 e^{-\beta t}$, а в момент часу $t + \tau$ $A(t + \tau) = q_0 e^{-\beta(t+\tau)}$. За означенням часу релаксації відношення цих

амплітуд дорівнює e , тобто $\frac{A(t)}{A(t + \tau)} = \frac{q_0 e^{-\beta t}}{q_0 e^{-\beta(t+\tau)}} = e^{\beta \tau} = e$. Одержали

$\beta \tau = 1$, або $\tau = \frac{1}{\beta}$. Час релаксації обернений коефіцієнту затухання.

в) Циклічна частота затухаючих коливань $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} < \omega_0$ менша, ніж власних незатухаючих ω_0 . Для механічних коливань

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}, \text{ а для електричних } \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

г) Період затухаючих коливань $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} > T_0$ більший, ніж

власних незатухаючих T_0 .

При $\beta = \omega_0$ $\omega = 0$, а $T = \infty$. Коливання не виникають, а наступає аперіодичний процес релаксації.

д) Декремент затухання D – це відношення амплітуд через період.

$$D = \frac{A(t)}{A(t + T)} = \frac{q_0 e^{-\beta t}}{q_0 e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T}. \quad (10.57)$$

е) Логарифмічний декремент затухання λ – це натуральний логарифм із декременту затухання

$\lambda = \ln D = \ln e^{\beta T} = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{\tau/T} = \frac{1}{N_e}$. Він дорівнює оберненому числу

коливань за час релаксації, тобто обернений числу коливань, за які амплітуда зменшується в e раз.

ж) Добротність $Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi \cdot N_e$. З'ясуємо фізичний зміст добротності.

Для цього знайдемо відношення енергії системи в якийсь момент часу до енергії, яка втрачається системою за період (за одне коливання). Так як енергія коливань пропорційна квадрату амплітуди, маємо

$$\frac{W(t)}{W(t) - W(t+T)} = \frac{A^2(t)}{A^2(t) - A^2(t+T)} = \frac{q_0^2 e^{-2\beta t}}{q_0^2 e^{-2\beta t} - q_0^2 e^{-2\beta(t+T)}} = \frac{1}{1 - e^{-2\beta T}} = \frac{1}{1 - e^{-2\lambda}}$$

Розкладемо $e^{-2\lambda}$ в степеневий ряд, скориставшись розкладанням експоненти $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$. При малих λ , тобто при слабкому затуханні, можна обмежитись двома першими членами ряду, так як решта набагато менші. Одержимо $e^{-2\lambda} = 1 - 2\lambda$. Отже

$$\frac{W(t)}{W(t) - W(t+T)} = \frac{1}{1 - e^{-2\lambda}} = \frac{1}{1 - 1 + 2\lambda} = \frac{1}{2\lambda} = \frac{Q}{2\pi}$$

$Q = 2\pi \frac{W(t)}{W(t) - W(t+T)}$ характеризує втрату енергії при затухаючих коливаннях і дорівнює добутку 2π на відношення енергії системи до втрати енергії за період.

Знайдемо добротність коливального контуру

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\pi \cdot \omega}{\beta \cdot 2\pi} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}{2\beta}$$

При слабкому затуханні $\beta \ll \omega_0$,
тому $Q = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{2L}{\sqrt{LC} 2R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$. (10.58)

При $R = 0$ коливання незатухаючі і $Q = \infty$.

10.13 Вимушені коливання. Диференціальне рівняння вимушених коливань та його розв'язок

Вимушеними називаються коливання, що виникають у системі під дією періодичного зовнішнього фактору. Це може бути періодична сила, змінна напруга і т.ін.

Нехай на пружинний маятник діє періодична сила, яка змінюється за гармонічним законом з циклічною частотою Ω

$$F = F_0 \cos \Omega t$$

Запишемо другий закон Ньютона

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \Omega t$$

Після спрощень, одержимо

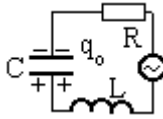
$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t$$

Позначивши

$$\beta = \frac{r}{2m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad f_0 = \frac{F_0}{m},$$

одержимо диференціальне рівняння вимушених коливань пружинного маятника

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \Omega t \quad (10.59)$$



У коливальний контур увімкнено джерело змінної напруги

$\varepsilon = \varepsilon_0 \cos \Omega t$ з циклічною частотою Ω . Запишемо другий закон Кірхгофа

$$U_C + U_R = \varepsilon_C + \varepsilon$$

$$\frac{q}{C} + I \cdot R = -L \frac{dI}{dt} + \varepsilon_0 \cos \Omega t$$

Позначивши

$$\beta = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad e_0 = \frac{\varepsilon_0}{L},$$

одержимо диференціальне рівняння вимушених електричних коливань

$$\begin{aligned} \frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q &= \\ &= e_0 \cos \Omega t \end{aligned} \quad (10.60)$$

Видно, що обидва рівняння ідентичні. Будемо розв'язувати рівняння (10.60) електричних коливань. У відповідності з розділом 10.2 $q(t) = q_{\text{однор}} + q_{\text{ч.н.}}$. Тут $q_{\text{однор}} = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)$ рівняння (10.56) незатухаючих власних коливань, $q_{\text{ч.н.}}$ часткове рішення неоднорідного рівняння (10.60). Згідно із зауваженням розділу 10.2 переведемо праву частину рівняння (10.60) в показову форму $e_0 \cdot e^{i\Omega t}$, додавши до неї вираз $(i \cdot e_0 \sin \Omega t)$. Одержуємо нове рівняння

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = e_0 \cdot e^{i\Omega t}. \quad (10.60^*)$$

Частковий розв'язок цього рівняння має вид $q_{\text{ч.н.}}^* = A \cdot e^{i\Omega t}$. Константу інтегрування A знайдемо, підставивши цей вираз в (10.60^{*}).

$$-\Omega^2 A e^{i\Omega t} + 2\beta i \Omega A e^{i\Omega t} + \omega_0^2 A e^{i\Omega t} = e_0 \cdot e^{i\Omega t}.$$

Після скорочення на $e^{i\Omega t}$ знаходимо $A = \frac{e_0}{(\omega_0^2 - \Omega^2) + i \cdot 2\beta\Omega} = \frac{e_0}{\rho} e^{-i\alpha}$.

Тут комплексне число у знаменнику переведене із алгебраїчної форми в показову.

Модуль цього числа
$$\rho = \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2} \quad (10.61),$$

його аргумент
$$\alpha = \arctg \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \quad (10.62)$$

Таким чином $q_{\text{ч.н.}}^* = \frac{e_0}{\rho} e^{i(\Omega t - \alpha)}$. Знайдемо $q_{\text{ч.н.}}$ шляхом виділення із

$q_{\text{ч.н.}}^*$ дійсної частини, так як права частина рівняння (10.58) дійсне число. Отже

$$q_{\text{ч.н.}} = \text{Re} [q_{\text{ч.н.}}^*] = \text{Re} \left[\frac{e_0}{\rho} \cos(\Omega t - \alpha) - i \cdot \frac{e_0}{\rho} \sin(\Omega t - \alpha) \right] = \frac{e_0}{\rho} \cos(\Omega t - \alpha).$$

Загальний розв'язок рівняння (10.60) вимушених коливань

$$q(t) = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi) + \frac{e_0}{\rho} \cos(\Omega t - \alpha) \quad (10.63)$$

складається із двох гармонічних функцій: перша із частотою ω власних затухаючих коливань і амплітудою, яка зменшується з часом за експонентою; друга із частотою Ω зовнішнього фактору, амплітудою та початковою фазою, які не залежать від часу, але залежать від частоти Ω (див.(10.61), (10.62)). Через час приблизно

$3\tau = \frac{3}{\beta}$ амплітуда першого доданку в (10.63) практично зникає.

Наступає сталий режим вимушених коливань

$$q(t) = \frac{e_0}{\rho} \cos(\Omega t - \alpha) = q_0(\Omega) \cdot \cos(\Omega t - \alpha). \quad (10.64)$$

10.14 Резонанс напруг у коливальному контурі. Резонансні криві

Резонансом називається явище різкого збільшення амплітуди вимушених коливань до максимуму при зміні частоти зовнішнього фактору. Частота Ω_p , при якій амплітуда стає максимальною, називається резонансною частотою. Знайдемо її для резонансу напруги, наприклад, на конденсаторі коливального контуру. На основі (10.61), та (10.28) напруга на конденсаторі в сталому режимі змінюється за законом

$$U_c(t) = U_{oc} \cos(\Omega t - \alpha) = \frac{q(t)}{C} = \frac{e_0}{LC\rho} \cos(\Omega t - \alpha). \quad (10.65)$$

Запишемо амплітуду напруги, враховуючи (10.61), як функцію частоти Ω і дослідимо її на екстремум

$$U_{oc}(\Omega) = \frac{e_0}{LC\rho(\Omega)} = \frac{e_0}{LC\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}. \quad (10.66)$$

Для цього необхідно взяти з (10.66) похідну за частотою і прирівняти її нулю.

$$\frac{dU_{oc}}{d\Omega} = \frac{e_0}{LC} \left\{ -\frac{1}{2} \left[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \left[2(\omega_0^2 - \Omega^2) \cdot (-2\Omega) + 8\beta^2\Omega \right] \right\} = 0$$

Як видно, вираз похідної досить громіздкий. Можна процедуру

дослідження функції на екстремум спростити, беручи похідну тільки з співмножника, який містить аргумент (Ω), тобто будемо диференціювати тільки підкореневий вираз у знаменнику (10.66)

$$\frac{d}{d\Omega} \left[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2 \right] = 2(\omega_0^2 - \Omega^2) \cdot (-2\Omega) + 8\beta^2 \Omega = 0$$

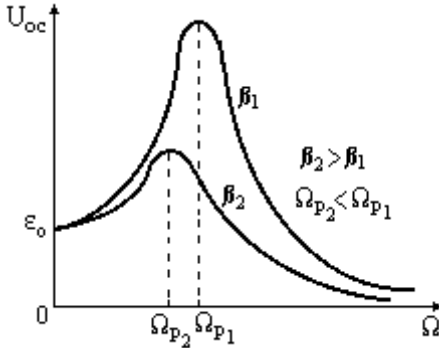


Рисунок 10.1

амплітуди від частоти Ω . Для її побудови з'ясуємо, які значення приймає амплітуда при $\Omega = 0$ і при $\Omega \rightarrow \infty$, тобто знайдемо границі.

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} U_{oc}(\Omega) = \epsilon_0 \qquad \lim_{\Omega \rightarrow \infty} U_{oc}(\Omega) = 0$$

Отже, резонансна крива починається з амплітуди прикладеної е.р.с., проходить через максимум і асимптотично прямує до осі частоти. (рис.10.19). При збільшенні коефіцієнта згасання β резонансна частота і амплітуда зменшуються (10.67), (10.66).

Знайдемо амплітуду напруги в момент резонансу, підставивши (10.67) в (10.66)

$$\begin{aligned} U_{oc}(\Omega_p) &= \frac{\epsilon_0}{LC \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_0^2 + 2\beta^2)^2 + 4\beta^2(\omega_0^2 - 2\beta^2)}} = \frac{\epsilon_0}{LC \sqrt{4\beta^2 \omega_0^2 - 4\beta^4}} = \\ &= \frac{\epsilon_0}{LC 2\beta \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{\epsilon_0}{2LC} \frac{R}{\omega} = \frac{\epsilon_0}{RC\omega} \end{aligned}$$

Після спрощень одержимо резонансну частоту для напруги

$$\Omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (10.67)$$

Видно, що резонансна частота напруги не співпадає як з власною частотою згасаючих $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, так і частотою незгасаючих коливань ω_0 , а менша від них.

Резонансною кривою називається залежність (10.66)

При слабкому затуханні $\omega \approx \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$. Одержуємо

$$U_{oc}(\Omega_p) = \frac{\varepsilon_0}{RC\sqrt{\frac{1}{LC}}} = \varepsilon_0 \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \varepsilon_0 \cdot Q,$$

Добротність Q показує у скільки разів напруга в момент резонансі більша, ніж амплітуда ε_0 зовнішньої е.р.с.

Виразимо амплітуду вимушених коливань через параметри контуру R, L, C . Для цього в (10.66) підставимо $\beta = \frac{R}{2L}$, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$.

$$\begin{aligned} U_{oc}(\Omega) &= \frac{\varepsilon_0}{LC\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}} = \frac{\varepsilon_0}{LC\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \Omega^2\right)^2 + \frac{4R^2\Omega^2}{4L^2}}} = \\ &= \frac{\varepsilon_0}{\Omega C\sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2}} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \cdot X_C = \frac{\varepsilon_0}{Z} \cdot X_C \end{aligned} \quad (10.68)$$

Тут: уже відомі ємнісний опір конденсатора (10.34) індуктивний опір котушки в колі змінного струму (10.35) в колі змінного струму. Z —загальний опір послідовно з'єднаних R, L і C

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}. \quad (10.69)$$

Вираз (10.66) відображає закон Ома для змінного струму.

$$I = \frac{\varepsilon_0}{Z}; \quad U_C = I \cdot X_C; \quad U_L = I \cdot X_L; \quad U_R = I \cdot R. \quad (10.70)$$

10.15 Резонанс струмів у коливальному контурі

Знайдемо закон зміни струму в коливальному контурі при сталому режимі вимушених коливань. Для цього візьмемо похідну за часом із закону (10.64) зміни заряду і врахуємо (10.59)

$$I = \frac{dq(t)}{dt} = -q_0 \Omega \sin(\Omega t - \alpha) = -\frac{\varepsilon_0 \Omega}{L\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}} \sin(\Omega t - \alpha). \quad (10.71)$$

Амплітуда струму як і напруги залежить від частоти Ω

$$I_o(\Omega) = \frac{\varepsilon_o \Omega}{L\sqrt{(\omega_o^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}} = \frac{\varepsilon_o}{\sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2}} = \frac{\varepsilon_o}{Z}. \quad (10.72)$$

Знайдемо резонансну частоту для струму. Будемо як і в розділі 10.14 брати похідну не з усього виразу (10.72), тільки із квадрата виразу в круглих дужках знаменника

$$\frac{d}{d\Omega} \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C} \right)^2 = 2 \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C} \right) \cdot \left(L + \frac{1}{\Omega^2 C} \right) = 0.$$

Одержуємо
$$\Omega_{pI} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_o, \quad (10.73)$$

що резонанс струму має місце при частоті ω_o власних незатухаючих коливань і на відміну від резонансу напруг не залежить від коефіцієнта затухання. Для побудови резонансних кривих знайдемо

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} I_o(\Omega) = 0 \quad \text{і} \quad \lim_{\Omega \rightarrow \infty} I_o(\Omega) = 0.$$

Видно, що резонансна крива струму починається з нуля і асимптотично, як і напруга, наближається до осі частоти. Резонансні криві для струму зображені на рис.10.20. Із зростанням коефіцієнта

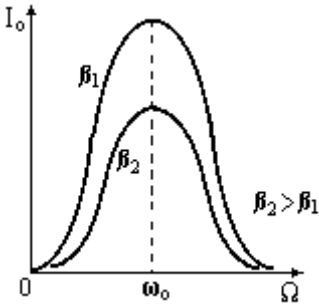


Рисунок 10.20

затухання β амплітуда струму при резонансі зменшується, а резонансна частота не змінюється.

10.16 Векторні діаграми

В розділі 10.5 були одержані фазові співвідношення між струмом та напругою. Нагадаємо, що напруга на котушці випереджає по фазі струм на 90° (на $0,5\pi$), а на конденсаторі напруга відстає від струму на 90° (на $0,5\pi$), на опорі вони співпадають по фазі. Для наглядного зображення фазових співвідношень призначені векторні діаграми.

Векторна діаграма – це графічне зображення змінних по гармонічному закону напруг і струмів у вигляді векторів. Довжина векторів дорівнює амплітудам у відповідному масштабі, а початкове положення задається початковою фазою, відрахованою від осі абсцис. (див. розділ 10.8). Потім вся картина приводиться в обертальний рух проти годинникової стрілки з кутовою швидкістю Ω , яка дорівнює циклічній частоті коливань.

Порядок побудови векторних діаграм.

Спочатку на комплексній площині будується вектор величини загальної для всіх елементів схеми: струм для послідовно з'єднаних елементів (див. рис.10.21), напруга для паралельного з'єднання елементів (див. рис.10.22). До цього вектора добудовуються інші, враховуючи, що напруга на опорі R співпадає по фазі із струмом, напруга U_L на котушці випереджає струм на 90° (відраховується від струму проти годинникової стрілки), а на конденсаторі відстає від струму на 90° (відраховується від струму за годинниковою стрілкою). Якщо діаграма побудована правильно, то у відповідності із законами Кірхгофа сума напруг на послідовно з'єднаних елементах повинна дорівнювати зовнішній е.р.с., а сума струмів у паралельних вітках дає струм до розгалуження. Розглянемо декілька прикладів.

Приклад 1. Побудувати векторну діаграму послідовно з'єднаних R, L, C . (рис. 10.21).

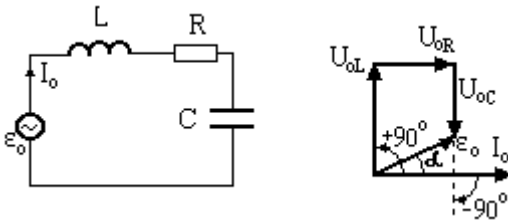


Рисунок 10.21

Спочатку горизонтально проводимо вектор струму I_0 , так як він однаковий при послідовному з'єднанні. До нього вертикально вгору

у випереджаючому напрямі під кутом $+90^\circ$ проводимо вектор напруги U_{0L} на котушці. Дійсно, при обертанні картинки проти годинникової стрілки вектор напруги U_{0L} буде рухатись попереду вектора струму. До кінця вектора U_{0L} добудовуємо вектор напруги на опорі U_R паралельно вектору струму. До вектора U_R добудовуємо вектор U_{0C} напруги на конденсаторі у відстаючому від струму на 90° напрямку, тобто вертикально вниз. Вектор, який замикає початок вектора U_{0L} і кінець

вектора U_{OC} є сума трьох напруг і за другим законом Кірхгофа дорівнює е.р.с. ϵ_0 .

Приклад 2. Побудувати векторну діаграму паралельно з'єднаних R, L, C. (рис. 10.22).

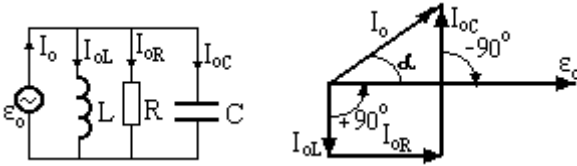


Рисунок 10.22

Починаємо будувати з вектора зовнішньої е.р.с. ϵ_0 , загальної для всіх віток. До нього послідовно добудовуємо вектори струмів у

вітках у відповідності з фазовими зсувами між струмом та напругою нат відповідних елементах. Замикаючий вектор струму I_0 згідно з першим законом Кірхгофа є струм то розгалуження.

Приклад 3. Побудувати векторну діаграму змішаного з'єднаних R, L, C (рис. 10.23).

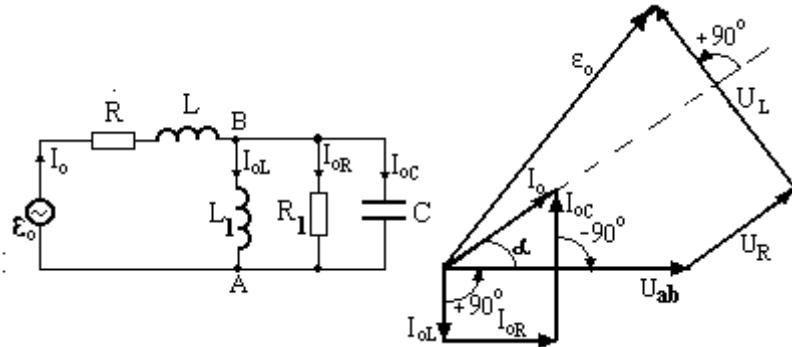


Рисунок 10.23

Починаємо будувати з вектора U_{ab} , провівши його, наприклад, горизонтально. Струми I_{0L} , I_{0R} , I_{0C} , I_0 будуються як і в попередньому прикладі 2. Далі до кінця вектора U_{ab} добудовуємо вектор U_R паралельно струмові I_{0L} , а до його кінця – вектор U_L з випереджаючим на 90° зсувом фази відносно струму I_0 . Вектор ϵ_0 замикаю вектори напруг

U_{ab} , U_R і U_L , так як він є їх сумою.

11 ХВИЛІ

11.1 Механізм утворення хвиль у пружному середовищі.

Класифікація хвиль. Рівняння хвиль

При коливанні тіла в пружному середовищі частинки середовища, які безпосередньо дотикаються до поверхні тіла, теж приходять у вимушені коливання. За рахунок сил зв'язку в коливальний рух утягуються більш віддалені шари середовища. Виникають деформації і сили пружності, які приводять в коливання все більш віддалені шари середовища. Таким чином кожна частинка середовища здійснює вимушені коливання навколо свого положення рівноваги. В середовищі ж з певною швидкістю поширюється стан деформації, а перенесення речовини середовища немає. Такий процес поширення коливань в середовищі називається **хвильовим процесом**, або просто **хвилею**.

В залежності від напрямку коливань частинок середовища і напрямку поширення хвиль вони поділяються на повздовжні і поперечні. У **повздовжніх** хвилях частинки середовища коливаються в напрямку поширення хвиль, а в **поперечних** – перпендикулярно до нього.

При повздовжніх хвилях виникають деформації розтягування (стискування), які мають місце як у твердих тілах, так і в рідинах та газах. Отже повздовжні пружні хвилі можуть поширюватись у трьох агрегатних станах речовини. В поперечних хвилях виникають деформації зсуву, який властивий тільки твердим тілам.. Тому такі хвилі не можуть поширюватись в газах чи рідинах, а поширюються тільки в твердих тілах.

Фронтом хвилі називається геометричне місце точок середовища, які в даний момент починають коливатись, тобто до яких дійшов стан деформації. В залежності від форми фронту хвилі поділяються на плоскі, сферичні, циліндричні, еліптичні і т.д.

Хвильовою поверхнею називається геометричне місце точок середовища, які коливаються в однаковій фазі. Отже фронт хвилі це одна із хвильових поверхонь.

Довжина хвилі λ – це відстань, на яку переміщується із швидкістю v фронт хвилі за один період T коливання елементів середовища

$$\lambda = v \cdot T. \quad (11.1)$$

Знайдемо рівняння хвилі, яке повинно давати можливість знайти зміщення S від положення рівноваги будь-якої точки середовища в довільний момент часу. Отже це функція чотирьох аргументів: координат і часу $S=S(x,y,z,t)$. Нехай джерело плоскої хвилі знаходиться в початку координат і починає колитися за гармонічним законом

$$S = A \cos(\omega t + \alpha). \quad (11.2)$$

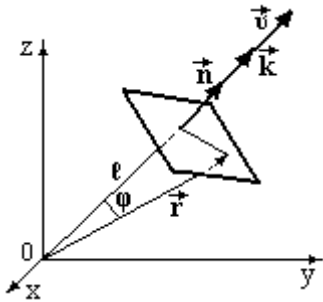


Рисунок 11.1

Плоска хвиля поширюється із швидкістю v в напрямку одиничного вектора \vec{n} , який перпендикулярний до хвильової поверхні (рис.11.1). Точки, віддалені від джерела на відстань ℓ , почнуть колитися пізніше від джерела на час затримки

$$\tau = \frac{\ell}{v}. \quad \text{Положення точок хвильової}$$

поверхні задамо радіус-вектором \vec{r} , який утворює з напрямком ℓ кут φ . Із простих

геометричних міркувань і означення скалярного добутку векторів можемо записати

$$\tau = \frac{\ell}{v} = \frac{r \cdot \cos \varphi}{v} = \frac{r \cdot \vec{n} \cdot \cos \varphi}{v} = \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{v}. \quad \text{Із врахуванням (11.2) і}$$

запізнення початку коливань на час τ закон коливання точок хвильової поверхні набуде виду

$$S(x, y, z, t) = A \cos\left[\omega(t - \tau) + \alpha\right] = A \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{v} \vec{n} \cdot \vec{r} + \alpha\right). \quad (11.3)$$

Враховуючи (11.1) та означення циклічної частоти (10.23),

відношення $\frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{T \cdot v} = \frac{2\pi}{\lambda} = k$. k називається хвильовим числом.

Його вважають вектором, направленим перпендикулярно до хвильової поверхні, тобто співпадає з нормальним вектором \vec{n}

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \vec{n}. \quad (11.4)$$

Таким чином, рівняння хвилі (11.3) набуває виду

$$S(x, y, z, t) = A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \alpha) = A \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha). \quad (11.5)$$

Рівняння хвилі можна записати і в показовій формі

$$S(x, y, z, t) = A e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \alpha)} = A e^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha)}. \quad (11.6)$$

11.2 Диференціальне хвильове рівняння

Диференціальним хвильовим рівнянням називається таке диференціальне рівняння, розв'язком якого є рівняння хвилі. Для його знаходження візьмемо другі частинні похідні із рівняння хвилі (11.6) по всім координатам

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = (-ik)^2 A e^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha)} = -k_x^2 S$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = (-ik)^2 A e^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha)} = -k_y^2 S$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = (-ik)^2 A e^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha)} = -k_z^2 S$$

Додамо ці рівняння

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \cdot S = -k^2 \cdot S. \quad (11.7)$$

Візьмемо також другу частинну похідну за часом і знайдемо S

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = (-i\omega)^2 A e^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha)} = -\omega^2 \cdot S \Rightarrow S = -\frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}.$$

Підставимо одержаний вираз для S в (11.7)

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = \left(\frac{k}{\omega}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}. \text{ Так як } \frac{k}{\omega} = \frac{1}{v}, \text{ одержуємо}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}, \text{ або } \Delta S = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}. \quad (11.8)$$

$$\text{Тут} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (11.9)$$

називається оператором Лапласа. Рівняння (11.8) і є диференціальне хвильове рівняння.

11.3 Дисперсія хвиль. Фазова швидкість хвиль

Нехай маємо одномірну плоску хвилю, яка поширюється вздовж осі x . Рівняння цієї хвилі

$$S = A_0 \cos(\omega t - kx + \alpha). \quad (11.10)$$

Знайдемо швидкість переміщення точок однакової фази, яка називається фазовою швидкістю. Це фактично швидкість переміщення фронту хвилі, рівняння якої має вид

$$\omega t - kx + \alpha = \text{const.}$$

Візьмемо першу похідну із цього рівняння за часом

$$\omega - k \frac{dx}{dt} = 0.$$

$$\text{Фазова швидкість} \quad v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}. \quad (11.11)$$

Теорія пружності дає для фазової швидкості v_{\perp} поперечних і повздовжніх v_{\parallel} хвиль вирази

$$v_{\perp} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad v_{\parallel} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (11.12)$$

де G – модель зсуву, E – модуль Юнга середовища.

Дисперсія – це явище залежності фазової швидкості хвиль від довжини хвиль (рис.11.2).

Коли із зростанням довжини хвилі λ фазова швидкість зростає, тобто коли $\frac{dv}{d\lambda} > 0$, дисперсія

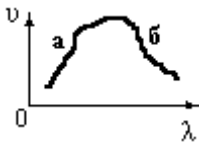


Рисунок 11.2

називається нормальною (рис.11.2 ділянка а), при протилежних співвідношеннях, тобто коли $\frac{dv}{d\lambda} < 0$,

– аномальною (рис.11.2, ділянка б).

11.4 Швидкість передачі енергії хвилями. Групова швидкість

При поширенні пружної хвилі речовина не переноситься, а передається лише стан деформації середовища, а отже передається енергія. Знайдемо об'ємну густину енергії, тобто енергію зосереджену в одиниці об'єму середовища, в якому поширюється хвиля $S = A_0 \cos(\omega t - kx + \alpha)$. Ця енергія складається із кінетичної енергії dW_K руху об'єму середовища dV в коливальному русі навколо свого положення рівноваги і потенціальної енергії dW_{II} деформації цього об'єму.

Кінетична енергія

$$dW_K = \frac{dm}{2} \left(\frac{dS}{dt} \right)^2 = \frac{\rho \cdot dV}{2} [-A_0 \omega \sin(\omega t - kx + \alpha)]^2 = \frac{\rho A_0^2 \omega^2}{2} \sin^2(\omega t - kx + \alpha) \cdot dV$$



Для знаходження потенціальної енергії dW_{II} будемо розглядати елемент об'єму dV у вигляді циліндра довжиною l і площею основи σ . Нехай поширюється повздовжня

хвиля. Тоді відносне стиснення елемента dV $\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{dS}{dx}$. За

законом Гука $\frac{F}{\sigma} = E\varepsilon = E \frac{\Delta \ell}{\ell} = E \frac{dS}{dx}$, або $F = k_{ж} \cdot \Delta \ell$. Звідси знаходимо

$$k_{ж} = \frac{E\sigma}{\ell}. \text{ Потенціальна енергія } dW_{II} = \frac{k_{ж}(\Delta \ell)^2}{2} = \frac{E\sigma(\Delta \ell)^2}{2\ell}. \text{ Із (11.12)}$$

знаходимо модуль Юнга $E = \rho v^2$. Одержуємо

$$\begin{aligned} dW_{II} &= \frac{k_{ж}(\Delta \ell)^2}{2} = \frac{E\sigma(\Delta \ell)^2}{2\ell} = \frac{E \cdot \sigma \cdot \ell}{2} \left(\frac{\Delta \ell}{\ell} \right)^2 = \frac{E \cdot dV}{2} \varepsilon^2 = \\ &= \frac{\rho v^2}{2} \left(\frac{dS}{dx} \right)^2 = \frac{\rho v^2}{2} k^2 A_0^2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha) \end{aligned}$$

Врахуємо, що хвильове число $k = \frac{\omega}{v}$, маємо

$$dW_{\Pi} = \frac{\rho A_0^2 \omega^2}{2} \sin^2(\omega t - kx + \alpha) \cdot dV = dW_K \quad . \quad \text{Кінетична енергія}$$

дорівнює потенціальній.

Отже, густина енергії

$$w = \frac{dW}{dV} = \rho A_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha) \sim A_0^2 \omega^2 \quad (11.13)$$

пропорційна квадрату амплітуди і частоти.

З'ясуємо, з якою швидкістю переноситься енергія хвилею. Це є швидкість переміщення точок, в яких густина енергії максимальна,

тобто точок, в яких $\sin^2(\omega t - kx + \alpha) = 1$, або $\omega t - kx + \alpha = \pm \frac{\pi}{2} \pm \pi n$.

Візьмемо першу похідну із останнього виразу за часом. Одержимо

$$\omega - k \frac{dx}{dt} = 0, \quad \text{тобто} \quad v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}.$$

Гармонічна монохроматична (однієї частоти) хвиля переносить енергію з фазовою швидкістю.

Реальні хвилі немонохроматичні, а уявляють собою суму гармонічних хвиль різних частот (гармонік), які можна знайти розкладанням негармонійної хвилі на гармоніки за тригонометричним рядом Фур'є

$$S(\omega) = C_0 + \sum_{i=1}^{\infty} C_i \sin(i \cdot \omega + \psi_i).$$

Другими словами, кожна хвиля уявляє собою пакет гармонічних хвиль з різними частотами. У цьому випадку мова йде про швидкість перенесення енергії групою (пакетом) хвиль. Ця швидкість називається груповою. Так як енергія хвиль пропорційна квадрату амплітуди, то логічно за групову швидкість U прийняти швидкість переміщення максимуму амплітуди пакету хвиль.

Нехай маємо найпростіший пакет двох хвиль із близькими частотами і хвильовими числами та однаковими амплітудами

$$S_1 = A_0 \cos(\omega t - kx) \quad \text{і} \quad S_2 = A_0 \cos[(\omega + d\omega)t - (k + dk)x]. \quad (11.14)$$

Тут $d\omega \ll \omega$, $dk \ll k$.

Знайдемо результуюче рівняння пакету хвиль. Для цього додамо ці два рівняння, скориставшись формулою суми косинусів

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$. Одержуємо з (11.14),

$$S = S_1 + S_2 = 2A_0 \cos\left(\frac{d\omega}{2}t - \frac{dk}{2}x\right) \cdot \cos(\omega t - kx).$$

Одержаний вираз є не що інше як рівняння (11.10) однієї хвилі з частотою ω та хвильовим числом k , амплітуда якої

$A(t, x) = 2A_0 \cos\left(\frac{d\omega}{2}t - \frac{dk}{2}x\right)$ залежить від координати x та часу t і

сама уявляє рівняння хвилі з частотою $\frac{d\omega}{2}$ і хвильовим числом $\frac{dk}{2}$.

Так як енергія пропорційна квадрату амплітуди, знайдемо швидкість переміщення максимуму амплітуди пакету. Очевидно, що це є фазова швидкість хвилі амплітуди, яка і буде груповою швидкістю U передачі енергії пакетом хвиль.

$$U = v_{\text{ампл}} = \frac{d\omega}{dk}. \quad (11.15)$$

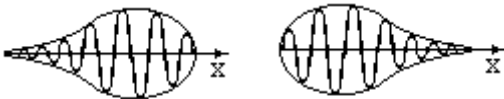
Встановимо зв'язок між фазовою та груповою швидкостями.

$$U = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d\omega}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dk}. \quad \text{Так як } \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi v}{\lambda}, \quad \frac{d\omega}{d\lambda} = -\frac{2\pi v}{\lambda^2} + \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{dv}{d\lambda}.$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \frac{dk}{d\lambda} = -\frac{2\pi}{\lambda^2}. \quad \text{Одержимо } U = \frac{-\frac{2\pi v}{\lambda^2} + \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{dv}{d\lambda}}{-\frac{2\pi}{\lambda^2}} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}.$$

Отже
$$U = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}. \quad (11.16)$$

Похідна $\frac{dv}{d\lambda}$ відображає дисперсію середовища. За її



нормальна дисперсія

аномальна дисперсія

відсутності $\frac{dv}{d\lambda} = 0$ групова швидкість дорівнює фазовій $U = v$. При наявності дисперсії групова і фазова

Рисунок 11.3

швидкості різні. Це приводить до розмиття пакету хвиль при його поширенні в дисперсійному середовищі. При нормальній дисперсії $\frac{dv}{d\lambda} > 0$ і групова швидкість більша фазової $U > v$. При аномальній дисперсії $\frac{dv}{d\lambda} < 0$ і групова швидкість менша фазової $U < v$. Характер розмиття пакету показано на рис.11.3.

11.5 Когерентні хвилі. Утворення стоячих хвиль. Рівняння стоячих хвиль

При поширенні у пружному середовищі декількох хвиль коливання кожної частинки середовища за принципом суперпозиції уявляє суму коливань від кожної хвилі. У загальному випадку це коливання буде нагадувати биття коливань. Картина поширення хвилі не буде стаціонарною, тобто в кожний момент часу амплітуда і частота коливань деякої точки середовища будуть змінюватись.

Якщо ж різниця фаз двох хвиль не змінюється з часом, такі хвилі називаються когерентними, і картина накладання коливань буде стаціонарною. В одних точках спостерігається підсилення коливань, в інших послаблення. Це явище називається інтерференцією.

Одним із прикладів інтерференції є накладання двох когерентних зустрічних хвиль, які утворюються при відбиванні біжучої хвилі від перешкоди. Так утворюється стояча хвиля.

Знайдемо її рівняння. Нехай рівняння прямої біжучої хвилі має вид $S_1 = A_0 \cos(\omega t - kx)$. Тоді рівняння відбитої хвилі буде таким

$$S_2 = A_0 \cos(\omega t + kx) . \text{ Тут змінився знак перед координатою.}$$

Результуючим буде коливання

$$S = S_1 + S_2 = A_0 \cos(\omega t - kx) + A_0 \cos(\omega t + kx) = 2A_0 \cos kx \cdot \cos \omega t$$

$$S = 2A_0 \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \cdot \cos \omega t . \quad (11.17)$$

Видно, що кожна точка середовища з координатою x здійснює гармонічне коливання з циклічною частотою ω і амплітудою, яка залежить від координати x

$$A(x) = 2A_0 \cos \frac{2\pi}{\lambda} x . \quad (11.18)$$

Точки, в яких амплітуда максимальна, називаються кучностями, а в яких дорівнює нулю – вузлами (рис.11.4).

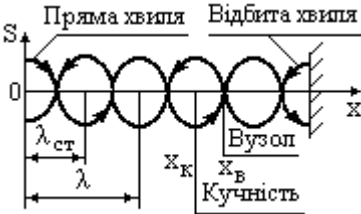


Рисунок 11.4

Координати кучностей x_k знаходяться із умови $\cos \frac{2\pi}{\lambda} x_k = \pm 1$, а вузлів із

умови $\cos \frac{2\pi}{\lambda} x_k = 0$. Одержимо

$$x_k = \pm n \cdot \frac{\lambda}{2}; \quad x_v = \pm \left(n + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{\lambda}{2} \quad (11.19)$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Довжина стоячої хвилі – це відстань між сусідніми вузлами, або кучностями. Із рис.11.4 видно, вона в два рази менша, ніж довжина біжучої хвилі

$$\lambda_{ст} = \frac{\lambda}{2}.$$

(11.20)

Стояча хвиля не переносить енергію, а відбувається перетворення кінетичної енергії у пучності в потенціальну енергію деформації у вузлі.

11.6 Звукові хвилі. Характеристики звуку. Швидкість звуку в газах

Пружні хвилі, частоти яких лежать в межах від 16 Гц до 20 кГц називаються звуковими. Хвилі з частотою меншою за 16 Гц називаються інфразвуковими, а з частотою більшою, ніж 20 кГц - ультразвуковими. Інфразвуки і ультразвуки людина не сприймає. Деякі тварини сприймають і інфразвуки і ультразвуки, наприклад, собаки кити, летючі миші.

Звукові хвилі розрізняються **висотою тону, тембром і гучністю**. Реальний звук уявляє собою негармонійну хвилю, яку можна розкласти в тригонометричний ряд Фур'є, тобто представити

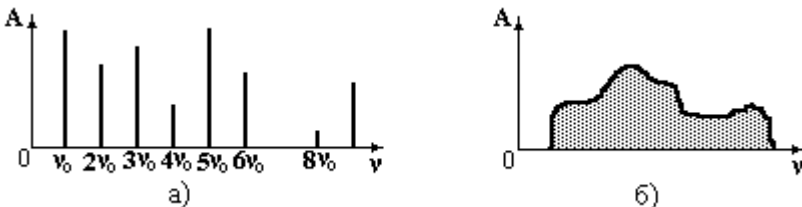


Рисунок 11.5

як суму гармонічних хвиль (гармонік) з кратними частотами. Набір цих частот називається акустичним спектром звуку. Кожна гармоніка має свою амплітуду A . Тональні звуки мають лінійчатий спектр (рис.11.5,а). Якщо ж спектр суцільний, то такий звук називається шумом (рис.11.5,б). Тон звуку задається найменшою частотою ν_0 , яка називається основним тоном. Чим більша ця частота тим вищий тон звуку. Кратні гармоніки називаються обертонами. Набір обертонів визначає тембр звуку. Якщо низькочастотні обертони мають більшу амплітуду, ніж високочастотні, маємо звук низькочастотного тембру (рис.11.6,а). Якщо ж високочастотні обертони мають більшу амплітуду, ніж низькочастотні, звук буде мати високочастотний тембр (рис.11.6,б).

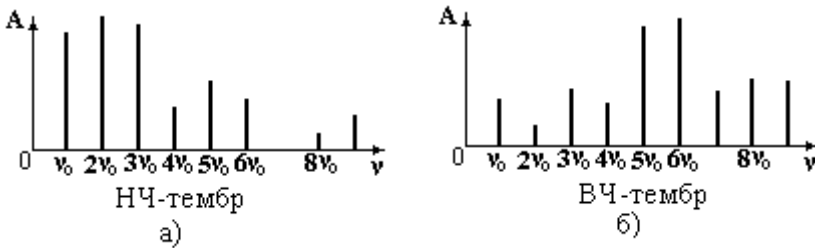


Рисунок 11.6

Інтенсивність звуку це енергетична його характеристика і дорівнює енергії, яка переносить звукова хвиля за 1 сек через площу 1 м^2 , яка перпендикулярна до напрямку поширення хвилі

$$I = \frac{W}{S \cdot t} \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \right]. \quad (11.21)$$



Рисунок 11.7

Для того, щоб викликати звукове відчуття, звукова хвиля повинна мати певну інтенсивність, яка залежить від частоти (рис.11.7). Мінімальна

інтенсивність $I_0 = 10^{-12} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$,

а максимальна, яка вже викликає больові

відчуття - $1 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$. Область чутності у кожної людини різна.

Гучність - це суб'єктивно оцінювана людиною інтенсивність звуку. Еволюційно органи слуху так же зору розвинулись так, що їхня чутливість зменшується по мірі збільшення рівня подразнення. Це захисна функція організму. У зв'язку з цим гучність зменшується повільніше, ніж об'єктивна характеристика звуку - інтенсивність. Гучність L визначається як десятковий логарифм відношення інтенсивності звуку I до мінімально чутної інтенсивності, в якості якої прийнято значення $I_0 = 10^{-12} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$

$$L = \lg \frac{I}{I_0}.$$

(11.22)

Одиницею вимірювання гучності є бел (Б) і децибел (дБ).

1Б = 10дБ.

Приклад. Розрахуємо гучність звуків з інтенсивністю $I_1 = 10^{-3} \text{ Вт/м}^2$ і $I_2 = 10^{-6} \text{ Вт/м}^2$.

$$L_1 = 10 \cdot \lg \frac{I_1}{I_0} = 10 \cdot \lg \frac{10^{-3}}{10^{-12}} = 30 \text{ дБ}; \quad L_2 = 10 \cdot \lg \frac{I_2}{I_0} = 10 \cdot \lg \frac{10^{-6}}{10^{-12}} = 60 \text{ дБ}$$

Бачимо, що при зменшенні інтенсивності в 1000 разів, гучність зменшилася всього у 2 рази.

Знайдемо швидкість звуку в газах. За виразом (11.12)

швидкість поздовжніх хвиль $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ визначається модулем Юнга і

густиною середовища. Так як модуль Юнга визначає пружні властивості твердих тіл, знайдемо його аналог для процесу стиснення газу. Для цього в законі Гука (див.Ч.1, формула (3.8) $\sigma = -E\varepsilon$ механічну напругу σ замінимо надлишковим тиском dP , а відносне стиснення ε відносно зміною об'єму $\frac{dV}{V}$. Одержимо $dP = -E \frac{dV}{V}$ і

$$E = -V \frac{dP}{dV}.$$

В звуковій хвилі стиснення і розширення газу відбувається швидко (навіть при найменшій частоті 20Гц це повторюється 20 разів за секунду), тому цей процес можна вважати адіабатним. Знайдемо

похідну $\frac{dP}{dV}$ із рівняння адиабати $PV^\gamma = \text{const}$ (див.Ч.1, вираз 6.60).

Там же було одержано $\frac{dP}{dV} = -\gamma \frac{P}{V}$. Отже модуль Юнга $E = \gamma P$, а

швидкість $v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$. Густина газу із рівняння Клапейрона-Менделєєва

$\rho = \frac{P\mu}{RT}$. Одержуємо для швидкості звуку в газі

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}. \tag{11.23}$$

Приклад. Розрахувати швидкість звуку в повітрі при кімнатній температурі 300К. Молярна маса повітря 0,029 кг/моль, газова стала 8,31 Дж/(моль·К).

Основні компоненти повітря азот і кисень двоатомні молекули. Тому прийmemo $\gamma = 1,4$.

$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{1,4 \cdot 8,31 \cdot 300}{0,029}} = 347 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Це значення добре узгоджується із експериментом.

11.7 Ефект Доплера

Ефект Доплера полягає в тому, що приймач хвиль фіксує іншу



Рисунок 11.8

частоту ν , ніж випромінює джерело ν_0 при умові, що сам приймач, або джерело хвиль рухаються. Знайдемо зв'язок між цими частотами. Нехай джерело випромінює хвилю з частотою ν_0 . Будемо вважати швидкість $V_{дж}$ позитивною коли джерело рухається в напрямку швидкості V звуку, а

швидкість $V_{пр}$ позитивною, коли він рухається назустріч хвилі (рис.11.8).

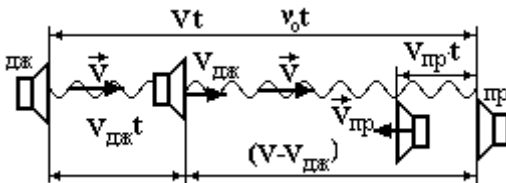


Рисунок 11.9

Спочатку розглянемо вплив руху джерела. За час t фронт

хвилі віддалиться від джерела на відстань Vt , а джерело переміститься за хвилию на відстань $V_{дж}t$, здійснивши v_0t коливань (рис.11.9). Тепер на відстані $(V - V_{дж})t$ буде вкладатись v_0t коливань. Тому довжина звукової хвилі буде дорівнювати $\lambda = \frac{(V - V_{дж})t}{v_0t} = \frac{V - V_{дж}}{v_0}$.

Вияснимо вплив руху приймача. За час t нерухомий приймач зафіксує $v_0t = \frac{V}{\lambda}t$ коливань. Коли ж приймач буде рухатись назустріч хвилі, він зафіксує більше коливань на $\Delta v \cdot t = \frac{V_{пр}}{\lambda}t$. Всього приймач

зафіксує $v \cdot t = \frac{V + V_{пр}}{\lambda}t$ коливань. Підставивши значення λ ,

одержимо
$$v = v_0 \frac{V + V_{пр}}{V - V_{дж}}.$$

(11.24)

Якщо напрямки швидкостей приймача і джерела протилежні по відношенню до напрямку швидкості звуку, у формулі (11.24) перед відповідною швидкістю знак змінюється на протилежний.

Зауваження. Знак швидкостей джерела і приймача визначаються відносно напрямку швидкості звуку, а не відносно одне одного!

12 ОПТИКА

12.1 Розвиток поглядів на природу світла

В кінці XVII століття майже одночасно були запропоновані дві теорії світла: корпускулярна (1675 р., І.Ньютон) і хвильова (1690 р., Х.Гюйгенс). Їх виникнення зумовлене властивістю світла переносити енергію, що можливо або потоком частинок, корпускул, або хвилями.

Корпускулярна теорія пояснювала такі експериментальні факти:

- а) Прямолінійність поширення світла випливає з 1-го закону Ньютона, закону інерції.
- б) Закони відбивання є наслідком закону збереження імпульсу.
- г) Різні кольори пояснювались різним розміром корпускул.

Але такі явища як інтерференція, дифракція, заломлення, не взаємодія променів світла, які перетинаються корпускулярна теорія не змогла пояснити. Пояснила їх хвильова теорія. Але вона мала суттєве протиріччя. По цій теорії світло поширюється в особливому пружному середовищі – ефірі. Але так як був встановлений поперечний характер світлових хвиль, які можуть поширюватись тільки у твердих тілах, ефір, що пронизує увесь простір, повинен мати властивість твердих тіл, щоб можлива була деформація зсуву. Це ставило під сумнів хвильову теорію.

В середині XIX століття Дж.Максвел запропонував електромагнітну теорію світла. Для поширення таких хвиль відпала необхідність ефіру. По цій теорії світло уявляє собою електромагнітні хвилі певного діапазону від 400 нм до 760 нм. Але і ця теорія не змогла пояснити такі експериментальні факти:

- а) Явище фотоефекту.
- б) Поглинання і розсіювання світла.
- в) Ефект Комптона.

В цих явищах проявлялись корпускулярні властивості світла. По сучасним поглядам світло має подвійну природу, тобто йому характерний корпускулярно-хвильовий дуалізм. В одних явищах проявляються хвильові властивості, а в інших корпускулярні. Фотон (корпускула) уявляється як пакет хвиль, енергія якого

$$E_{\text{ф}} = h\nu = \frac{hc}{\lambda}, \quad (12.1)$$

маса фотона
$$m_{\phi} = \frac{E_{\phi}}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2} = \frac{h}{\lambda c}, \quad (12.2)$$

імпульс
$$p_{\phi} = m_{\phi}c = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}. \quad (12.3)$$

Тут: $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – стала Планка; c – швидкість світла; λ – довжина хвилі; ν – частота хвилі.

На початку ХХ століття виявилось, що подвійна природа характерна не тільки світлові. Подвійна природа властива усім частинкам мікросвіту. Таку гіпотезу висловив у 1924 р. французький вчений Луї де-Бройль, яка потім знайшла експериментальне підтвердження.

12.2 Принцип Гюйгенса та його застосування до закону заломлення світла. Повне внутрішнє відбивання



Рисунок 12.2

Принцип Гюйгенса стверджує, що кожна точка хвильової поверхні являється джерелом вторинних хвиль. Цей принцип дає можливість по відомому в момент часу t положенню фронту хвилі знайти його положення в наступний момент часу $t + \Delta t$.

Одержимо в рамках цього принципу закон заломлення світла. На межі двох оптичних середовищ 1 і 2

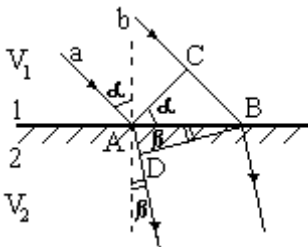


Рисунок 12.3

падає плоска (фронт хвилі AC –

площина) хвиля під кутом падіння α (рис.12.2). В момент часу, коли промінь

a досягає межі середовищ (точка A) і

переходить у друге середовище, промінь

b досягає точки C. За час Δt промінь **b**

пройде відстань BC із швидкістю V_1 , а

промінь **a** – відстань AD із швидкістю

V_2 . Фронт хвилі займе положення BD,

тобто заломлений промінь іде під кутом

заломлення β . Відрізки BC і AD виражаємо через загальну гіпотенузу AB у відповідні кути $BC = V_1 \cdot \Delta t = AB \sin \alpha$

$$AD = V_2 \cdot \Delta t = AB \sin \beta .$$

Поділимо рівняння одне на одне. Одержуємо закон заломлення (12.4): відношення синуса кута падіння до синуса кута заломлення постійне для двох середовищ, дорівнює відношенню швидкостей світла і називається відносним показником заломлення другого середовища відносно першого

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n_{21} = \text{const} . \quad (12.4)$$

Показник заломлення середовища відносно вакууму називається абсолютним показником заломлення цього середовища

$$\frac{c}{V_1} = n_1 , \quad \frac{c}{V_2} = n_2 . \quad \text{Відношення} \quad \frac{n_2}{n_1} = \frac{V_1}{V_2} = n_{21} \text{ дає можливість по}$$

абсолютним показникам, які можна знайти в довіднику, розрахувати відносний показник заломлення будь-якої пари оптичних середовищ. Абсолютний показник заломлення показує у скільки разів швидкість світла V , або довжина хвилі λ у середовищі менші, ніж у вакуумі (C і λ_0). Чим більший абсолютний показник заломлення, тим оптична густина середовища більша.



Рисунок 12.4

При переході променя в середовище з більшою оптичною густиною $\beta > \alpha$. Заломлений промінь віддаляється від перпендикуляра до межі середовищ (рис.12.3). Коли кут заломлення β стає прямим, кут падіння називається граничним кутом $\alpha_{гр}$. При кутах $\alpha > \alpha_{гр}$ промінь у друге середовище не переходить, а повністю відбивається. Це явище називається явищем повного внутрішнього відбивання. Так як $\sin 90^\circ = 1$, Граничний кут знаходиться із умови $\sin \alpha_{гр} = n_{21} < 1$.

Явище повного внутрішнього відбивання покладене в основу роботи поворотних (рис.12.4,а), оборотних (рис.12.4,б) призм і світловодів (рис.12.4,в). Поворотна призма відхиляє промінь на певний кут, оборотна перевертає зображення, тобто повертає промінь

на 180° вздовж напрямку його поширення, світловод проводить промінь по своїй внутрішній частині, показник заломлення якої більший, ніж оболонки. Тому на їхній границі промінь багаторазово зазнає повного внутрішнього відбивання і майже не послаблюється.

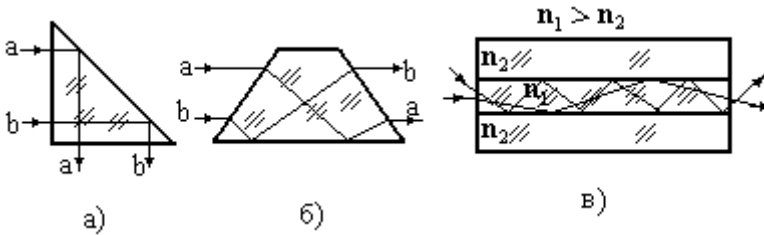


Рисунок 12.5

Реальний світловод складається з величезної кількості тонких структур, зображених на рис.12.4,в, тому його можна згинати як звичайний електричний кабель.

12.3 Інтерференція світла. Умови максимумів і мінімумів інтерференційної картини. Інтерференція від двох джерел (дослід Юнга)

Явище інтерференції полягає в підсиленні або ослабленні інтенсивності світла при накладенні двох світлових хвиль. Щоб інтерференційна картина була стаціонарною, тобто розподіл інтенсивності світла на екрані не змінювався з часом, світлові хвилі повинні бути **когерентними**. Це хвилі однакової частоти і незмінною з часом різницею фаз.



Рисунок 12.6

Знайдемо умови максимумів і мінімумів інтенсивності світла при інтерференції. Нехай у початковий момент часу фази коливань двох когерентних хвиль відповідно у точках O_1 і O_2 (рис.12.5) були однаковими і рівними ωt . Перша хвиля до точки спостереження P проходить відстань S_1 в середовищі з показником заломлення n_1 , а друга відповідно S_2 і n_2 . Тоді фази коливань із-за затримки в точці P будуть відповідно

Тоді фази коливань із-за затримки в точці P будуть відповідно

$$\Phi_1 = \omega \left(t - \frac{S_1}{V_1} \right) \quad \text{і} \quad \Phi_2 = \omega \left(t - \frac{S_2}{V_2} \right). \quad \text{Тут} \quad V_1 = \frac{c}{n_1}, \quad V_2 = \frac{c}{n_2} \quad -$$

швидкості світла у відповідних середовищах.

Очевидно, що інтенсивність результуючої хвилі залежить від різниці фаз $\delta = \Phi_1 - \Phi_2 = \omega \left(t - \frac{S_1}{V_1} \right) - \omega \left(t - \frac{S_2}{V_2} \right)$.

Після підстановки виразів для швидкостей і спрощень одержуємо

$$\delta = \frac{\omega}{c} (S_2 n_2 - S_1 n_1) = \frac{2\pi}{cT} (S_2 n_2 - S_1 n_1) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta. \quad (12.5)$$

Тут: $\lambda_0 = cT$ - довжина хвилі у вакуумі; $S_2 n_2 - S_1 n_1 = \Delta$ - різниця оптичних шляхів хвиль, або оптична різниця ходу променів.

Оптичний шлях - це геометричний шлях помножений на показник заломлення середовища.

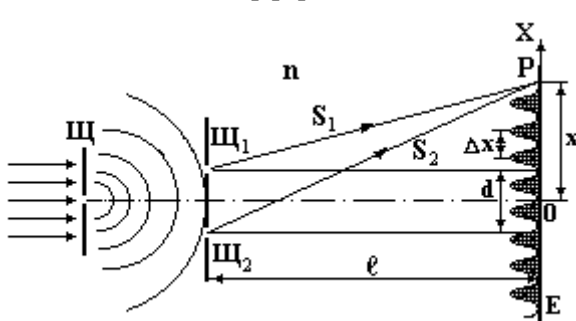
При накладанні в точці Р хвилі будуть давати максимум інтенсивності, коли вони приходять у фазі, тобто $\delta = \pm 2\pi m$, а мінімум коли у протифазі, тобто $\delta = \pm \pi \pm 2\pi m$, де $m = 0, 1, 2, 3, \dots$. Підстановка цих умов у (12.5) дає для оптичної різниці ходу у випадку максимуму інтенсивності $\Delta_{\max} = \pm m \cdot \lambda_0$,

$$(12.6)$$

а у випадку мінімуму $\Delta_{\min} = \pm \left(m + \frac{1}{2} \right) \cdot \lambda_0$. (12.7)

Таким чином, для розрахунку інтерференційної картини, тобто знаходження положення точок з максимальною або мінімальною інтенсивністю, необхідно знайти оптичну різницю ходу Δ і задовольнити умовам (12.6) або (12.7).

Розглянемо інтерференційний дослід Томаса Юнга (1773-1829р.,



англ. фізик, один із основоположників хвильової теорії світла) від двох когерентних джерел, який був проведений ще у 1807 р. Когерентні джерела він

Рисунок 12.7

одержав досить оригінально (рис.12.6). Пучок сонячного світла падав на вузьку щілину Щ. Від неї промінь ішов до двох симетрично розміщених паралельних щілин Щ₁ і Щ₂, які відкривали дві ділянки однієї циліндричної хвильової поверхні. Тому вторинні промені мали однакову фазу і частоту, тобто були когерентними. На екрані Е спостерігались паралельні інтерференційні смуги. Знайдемо координати максимумів x_{\max} і мінімумів x_{\min} інтенсивності. Із прямокутних трикутників за теоремою Піфагора маємо

$$S_1^2 = \ell^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2, \quad S_2^2 = \ell^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 \Rightarrow S_2^2 - S_1^2 = 2xd, \text{ або}$$

$(S_2 - S_1)(S_2 + S_1) = 2xd$. Як правило $\ell \gg d$, наприклад, $\ell = 1\text{м}$, $d = 1\text{мм}$. Тому можна прийняти, що $S_2 + S_1 = 2\ell$. Тоді різниця

геометричних шляхів $S_2 - S_1 = \frac{xd}{\ell}$, а оптичну різницю ходу

одержуємо помноживши на показник заломлення n
 $\Delta = (S_2 - S_1) \cdot n = \frac{xd}{\ell} n$. Задовольняємо умовам (12.6) і (12.7) і

врахувавши, що $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$, одержимо

$$x_{\max} = \pm m \frac{\ell}{d} \lambda; \quad x_{\min} = \pm \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\ell}{d} \lambda. \quad (12.8)$$

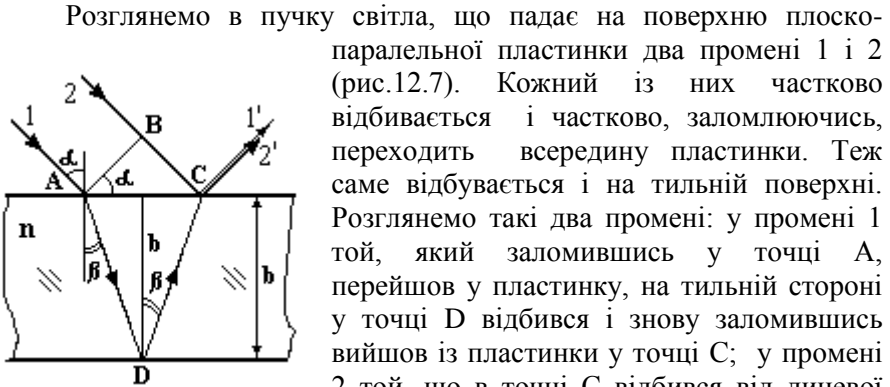
Знайдемо відстань Δx між інтерференційними смугами як різницю координат сусідніх смуг (максимумів, або мінімумів)

$$\Delta x = x_{m+1} - x_m = (m+1 - m) \frac{\ell}{d} \lambda = \frac{\ell}{d} \lambda. \quad (12.9)$$

Одержали, що ця відстань не залежить від m , тобто інтерференційні смуги розміщені на однаковій відстані одна від другої. Вираз (12.9) дає можливість знайти довжину світлової хвилі за експериментально вимірним Δx , ℓ і d . Саме так Т.Юнг вперше виміряв довжину хвилі червоного світла.

12.4 Інтерференція світла в плоско-паралельній пластинці і на клині.

Лінії однакової товщини.



Рисунком 12.7

тобто виникає інтерференція, результат якої залежить від оптичної різниці ходу Δ . Знайдемо її. Фронт падаючого променя це площина АВ. Промінь 1 проходить шлях $AD+DC$ в середовищі з показником заломлення n . Його оптичний шлях дорівнює $(AD+DC) \cdot n$. За цей же час промінь 2 проходить відстань BC . Тому оптична різниця ходу $\Delta = (AD+DC) \cdot n - BC$.

Виражаємо ці відрізки через товщину пластинки b та кути: падіння α і заломлення β . $AD = CD = \frac{b}{\cos \beta}$,

$$BC = AC \cdot \sin \alpha = 2b \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \sin \alpha. \text{ Одержимо } \Delta = \frac{2b}{\cos \beta} - 2b \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \sin \alpha.$$

Звільняємось від кута β , скориставшись законом заломлення (12.4) та основною тригонометричною тотожністю

$$\Delta = 2b \frac{n - \sin \beta \cdot \sin \alpha}{\cos \beta} = 2b \frac{n - \frac{\sin^2 \alpha}{n}}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}}} = 2b \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}. \quad (12.10)$$

Властивість світла така, що при відбиванні світла від оптично густішого середовища (точка С) фаза хвилі змінюється на протилежну. Враховуючи це, оптична різниця ходу буде на половину довжини хвилі меншою, ніж за (12.10), тобто

$$\Delta = 2b\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \frac{\lambda_0}{2}. \quad (12.11)$$

Використаємо тепер умови (12.6) і (12.7). Одержимо, що максимум інтерференційної картини у відбитих променях буде мати місце при умові

$$2b\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} = \pm(m + \frac{1}{2})\lambda_0, \quad (12.12)$$

а мінімум при умові

$$2b\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} = \pm m\lambda_0. \quad (12.13)$$

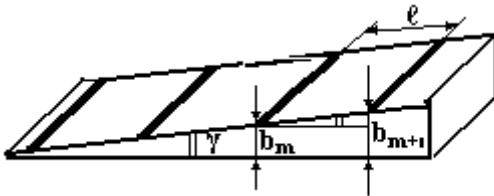


Рисунок 12.8

При падінні променя на клин (рис.12.8) інтерференційні смуги (максимуми чи мінімуми) спостерігаються в тих місцях, де товщина клина однакова і задовольняє відповідній умові (12.12) для максимуму і (12.13)

для мінімуму. Тому такі лінії називаються лініями однакової товщини клина.

Запишемо умову максимуму для двох сусідніх ліній:

$$2b_{m+1}\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} = \pm(m + 1 + \frac{1}{2})\lambda_0$$

$$2b_m\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} = \pm(m + \frac{1}{2})\lambda_0.$$

Віднімемо друге рівняння із першого $2(b_{m+1} - b_m)\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} = \lambda_0$.

Із прямокутного трикутника маємо $(b_{m+1} - b_m) = l \cdot \sin \gamma$.

Отже $2l \cdot \sin \gamma \cdot \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} = \lambda_0$. При малих кутах γ клина $\sin \gamma = \gamma$. Як правило кут падінні променів близький до 0° , тобто промені падають на поверхню клина перпендикулярно. При таких умовах одержуємо $2l \cdot \gamma \cdot n = \lambda_0$. Цей вираз дає можливість застосувати явище інтерференції для вимірювання надзвичайно малих кутів клина по відомим довжині хвилі λ_0 і показнику

заломлення n та експериментально вимірній відстані ℓ між інтерференційними лініями.

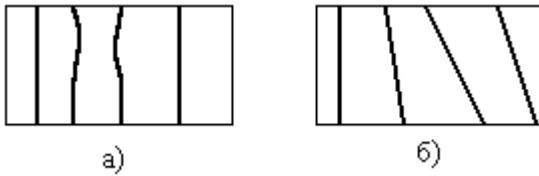


Рисунок 12.9

Крім цього по виду ліній однакової товщини і їх паралельності можна візуально виявити дефекти полірування клина (рис.12.9): а) на поверхні клина є нерівності; б) кут клина

неоднаковий.

12.5 Дифракція світла. Принцип Гюйгенса-Френеля.

Метод зон Френеля для розрахунку дифракційної картини

Дифракцією світла називається сукупність явищ, зумовлених хвильовою природою світла, і полягає в перерозподілі інтенсивності світла при поширенні його в середовищі з різкою неоднорідністю. Це приводить до того, що світло, подібно звукові, огинає малі перешкоди, не утворюючи різкої тіні. Тобто спостерігається відхилення поширення світла від прямолінійного.

Розрізняють дифракцію Френеля від точкового джерела в розбіжних променях, коли фронт хвилі має сферичну форму, і дифракцію Фраунгофера в паралельних променях, коли фронт хвилі плоский.

Задача розрахунку дифракційної картини така ж, як і розрахунок інтерференційної картини – це знаходження положення максимумів і мінімумів інтенсивності світла. Математичний розв'язок цієї задачі досить складний. Ми з ним познайомимся пізніше. А зараз розглянемо простіший, графоаналітичний метод зон Френеля. Він оснований на принципі Гюйгенса-Френеля, який має такі три положення.

1. Будь-яке точкове джерело світла S можна замінити еквівалентною йому системою вторинних джерел, розміщених по довільній замкнутій поверхні, яка охоплює це джерело. Для зручності вибирають поверхню, яка співпадає з однією із хвильових

поверхонь. Тоді всі вторинні джерела будуть мати однакову фазу і будуть когерентними.

2. Якщо вторинні джерела вибрані на одній хвильовій поверхні, то інтенсивність вторинного випромінювання однакових по площі ділянок однакова.
3. Вторинне випромінювання поширюється в сторону зовнішньої нормалі до поверхні, тобто в сторону її опуклості. При цьому із збільшенням кута між нормаллю і напрямком випромінювання його інтенсивність зменшується (рис.12.10).

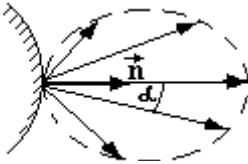


Рисунок 12.10

Розрахунок дифракційної картини за цим методом оснований на розбитті хвильової поверхні (поверхні вторинних джерел) на зони Френеля так, щоб випромінювання від відповідних точок сусідніх зон приходило в точку спостереження Р у протифазі, тобто щоб різниця ходу від них дорівнювала $\frac{\lambda}{2}$. У цьому

випадку сусідні зони будуть одна одну послаблювати. Тому очевидно, коли в точку спостереження прийде випромінювання від парної кількості зон Френеля буде мінімальна інтенсивність, якщо ж від непарної – буде максимум (одна зона виявиться не компенсованою).

Нехай маємо точкове джерело світла S. Розіб'ємо його сферичну хвильову поверхню на зони за вказаним правилом (рис.12.11).

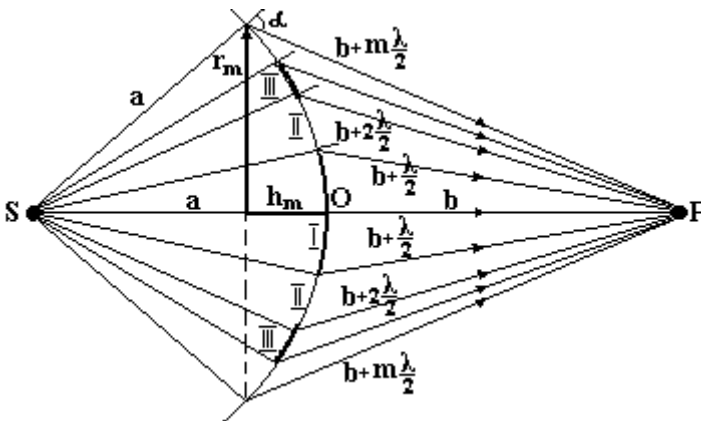
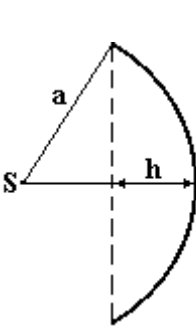


Рисунок 12.11

Точкове джерело S замінене еквівалентними йому вторинними джерелами, розміщеними на сферичній хвильовій поверхні радіусом a . До точки спостереження P відстань дорівнює b (відрізок OP). Із точки P знаходимо на сферичній поверхні геометричне місце точок,



віддалених від неї на відстань $b + \frac{\lambda}{2}$. Це коло, яке

вирізає сферичний сегмент – першу зону Френеля. Аналогічну операцію проводимо відрізками

$b + 2\frac{\lambda}{2}$, $b + 3\frac{\lambda}{2}$, ..., $b + m\frac{\lambda}{2}$. Проведені сусідні кола

вирізають за сферичній поверхні послідовучі зони Френеля, які мають форму кільцевих смуг. Знайдемо площу m -ї зони, скориставшись відомою

із математики формулою площі сферичного сегментау $\sigma = 2\pi ah$ (рис.12.12), де h – стрілка

Рисунок 12.12

сегменту, a – радіус кривизни. Площа m -ї зони ΔS_m дорівнює різниці площ сферичних сегментів із стрілками h_{m+1} і h_m . Знайдемо стрілку h_m , записавши теорему Піфагора для загального катета r_m двох утворених прямокутних трикутників (рис.12.11)

$$r_m^2 = a^2 - (a - h_m)^2 = (b + m\frac{\lambda}{2})^2 - (b + h_m)^2. \quad (12.14)$$

$$\text{Після спрощень } h_m = \frac{bm\lambda + m^2 \frac{\lambda^2}{4}}{2(a + b)} \approx \frac{bm\lambda}{2(a + b)} \quad (12.15)$$

Так як $b \gg \lambda$, другим доданком в чисельнику знехтували ($b\lambda \gg \lambda^2$).

Таким чином площа m -ї зони Френеля

$$\Delta S_m = 2\pi a(h_{m+1} - h_m) = 2\pi a \frac{b\lambda}{2(a + b)} (m + 1 - m) = \frac{\pi ab}{a + b} \lambda. \quad (12.16)$$

Одержали, що площа зони не залежить від m , тобто площі всіх зон однакові, а отже у відповідності із 2–м положенням принципу Гюйгенса-Френеля інтенсивність вторинного випромінювання всіх зон теж однакова. Але з ростом номера m зони монотонно зростає кут α (див. рис.12.11), під яким вторинні промені ідуть в точку спостереження P . Тому у відповідності із 3–м положенням принципу Гюйгенса-Френеля інтенсивність вторинного випромінювання (I_m)

монотонно зменшується з ростом m , тобто маємо монотонно спадаючий ряд $I_1 > I_2 > I_3 > \dots > I_{m-1} > I_m$. Так як фази коливань від сусідніх зон відрізняються на π , то результуюча інтенсивність знаходиться як сума знакозмінного ряду $I_p = I_1 - I_2 + I_3 - I_4 + I_5 - I_6 \dots$. Знайдемо цю суму, записавши кожний позитивний доданок як суму його двох половин і згрупувавши доданки по три: від'ємний і по дві половини сусідніх доданків

$$I_p = \frac{I_1}{2} + \left(\frac{I_1}{2} - I_2 + \frac{I_3}{2}\right) + \left(\frac{I_3}{2} - I_4 + \frac{I_5}{2}\right) + \left(\frac{I_5}{2} - I_6 \dots = \frac{I_1}{2}\right). \quad (12.17)$$

Тут кожний вираз у круглих дужках дорівнює нулю, так як із-за монотонного зменшення інтенсивності можна вважати, що $\frac{I_{m-1}}{2} + \frac{I_{m+1}}{2} = I_m$.

Знайдемо і цінимо радіус зовнішньої границі m -ї зони r_m . Для цього підставимо h_m із (12.15) у вираз для r_m (12.14)

$r_m^2 = a^2 - (a - h_m)^2 = 2ah_m - h_m^2 \approx 2ah_m$. Тут h_m^2 знехтували як величиною вищого порядку малості. Одержуємо

$$r_m = \sqrt{2ah_m} = \sqrt{\frac{ab}{a+b}} \lambda \cdot m. \quad (12.18)$$

При $m = 1$, $a = b = 1\text{ м}$, $\lambda = 0,5 \cdot 10^{-6}\text{ м}$ $r_1 = 5 \cdot 10^{-4}\text{ м} = 0,5\text{ мм}$.

Отже, якщо між джерелом S і точкою спостереження P , які знаходяться на відстані $a + b = 2\text{ м}$ посередині поставити непрозорий екран з отвором радіусом $0,5\text{ мм}$, то залишиться відкритою тільки перша зона Френеля і інтенсивність буде дорівнювати I_1 , тобто зросте в 2 рази, порівняно з виразом (12.17).

Подальше збільшення інтенсивності (суми ряду (12.17)) можна досягти, якщо поставити екран (зонну пластинку), який би пропускав випромінювання тільки від парних, чи непарних зон, тобто через одну. Тоді випромінювання будуть мати однакову фазу і будуть підсилювати одне одного. Ще більше зростання суми (12.19) можна досягти, якщо поміняти знак у доданках через один, тобто змінити фазу випромінювання на протилежну через одну зону. Цього можна досягти, пропускаючи випромінювання від цих зон через оптичне середовище з іншим показником заломлення, ніж від решти зон. Можна підібрати таку товщину, щоб оптична різниця ходу склала

половину довжини хвилі. Тоді у точку спостереження придуть вторинні промені від усіх зон в однаковій фазі і інтенсивність ще більше виросте.

12.6 Дифракція Френеля від круглого отвору та диску

Нехай на шляху сферичної світлової хвилі знаходиться непрозорий екран с отвором радіусом r_0 . Він залишить відкритими для точки спостереження

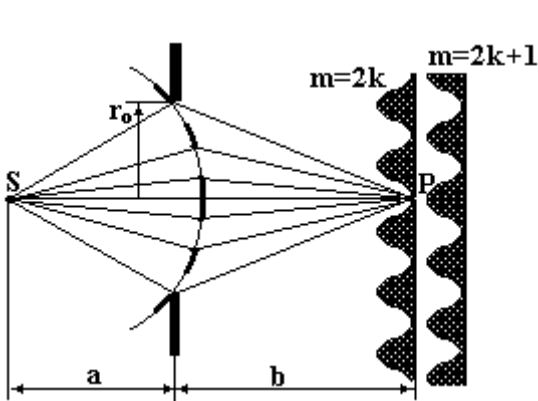


Рисунок 12.13

$$P \quad m = \frac{r_0^2}{\lambda} \cdot \frac{a+b}{ab} \quad \text{зон}$$

Френеля (рис.12.13).

m знайшли з (12.18).

Якщо буде відкрита парна кількість зон $m = 2k$, в центрі екрану буде мінімум, якщо ж непарна $m = 2k+1$ – максимум.

При зміщенні точки P по екрану будуть відкриватися частина

раніше закритих зон і відповідно закриватися частина раніше відкритих (рис.12.14). Тому інтенсивність світла буде теж змінюватись і мати осцилюючий характер.

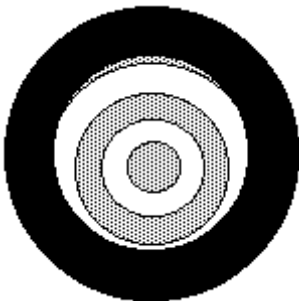


Рисунок 12.14

При дифракції на диску радіусом

$$r_0 \quad \text{він закриває } m = \frac{r_0^2}{\lambda} \cdot \frac{a+b}{ab} \quad \text{перших}$$

зон, залишаючи відкритими решту починаючи з $(m+1)$ -ї. Тоді інтенсивність в центрі екрану, аналогічно міркуванням при знаходженні виразу (12.17), буде

дорівнювати половині інтенсивності від першої відкритої зони, в

нашому випадку $I_p = \frac{I_{m+1}}{2}$, тобто завжди буде максимум! **Мінімум же**

утворитись не може! Такий результат вперше одержав французький вчений Пуассон (1781-1840). Він здався йому настільки абсурдним, (за непрозорим екраном утворюється світна пляма, а за отвором темна), що навіть не провівши експеримент, висунув його на одному із засідань Паризької академії наук як аргумент проти хвильової теорії світла. Але французький вчений Араго на цій же конференції експериментально підтвердив справедливості теоретично одержаного результату. Ця світна пляма одержала назву пляма Араго-Пуассона, її існування доказує хвильову природу світла.

При зміщенні точки спостереження по екрану інтенсивність осцилює так само, як і у випадку дифракції на отворі.

12.7 Дифракція Фраунгофера на щілині

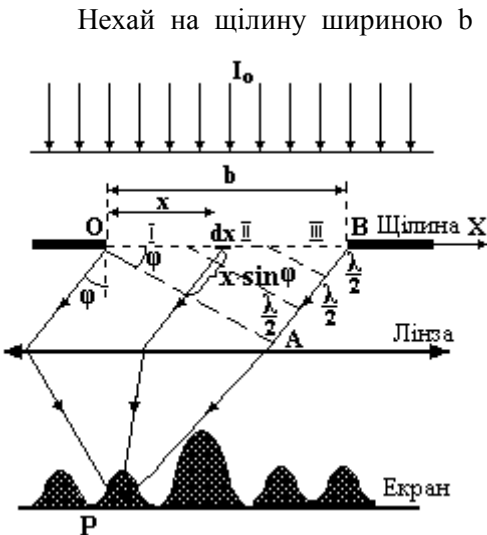


Рисунок 12.15

Нехай на щілину шириною b і набагато більшою довжиною $\ell \gg b$ перпендикулярно до її площини падає паралельний пучок променів. Вторинні джерела розмістимо по хвильовій поверхні, яка в цьому випадку є площина (плоска світлова хвиля). Щілина залишає відкритою частину цієї хвильової поверхні. За щілиною будемо спостерігати вторинне випромінювання, яке поширюється під деяким кутом φ від початкового напрямку (рис.12.15). Щоб зібрати паралельні вторинні

промені в одну точку на екрані використаємо збірну лінзу.

Розрахуємо дифракційну задачу двома способами: а) методом зон Френеля б) аналітичним.

а) **Метод зон Френеля.** Поділимо оптичну різницю ходу крайніх променів $AB = \Delta = b \cdot \sin \varphi$ на відрізки по $\frac{\lambda}{2}$ і проведемо площини, паралельні ОА фронту вторинного випромінювання. Вони поділять фронт падаючої хвилі (щілину) на зони Френеля, які уявляють собою вузькі смуги шириною $\frac{\lambda}{2 \cdot \sin \varphi}$ і довжиною ℓ паралельні краям щілини. На рис.12.15, наприклад, зображені три такі зони Френеля.

Коли щілина ділиться на непарну кількість зон, тобто оптична різниця ходу крайніх променів дорівнює пів цілому числу довжин хвилі, на екрані буде, **максимум**

$$AB = \Delta_{\max} = b \cdot \sin \varphi = \pm \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda, \quad (12.19)$$

а коли цілому – **мінімум**

$$AB = \Delta_{\min} = b \cdot \sin \varphi = \pm m \lambda. \quad (12.20)$$

б) **Аналітичний спосіб.** Виберемо по всій довжині щілини вузьку смугу шириною dx розташовану на відстані x від лівого краю щілини, координату якої проймемо за нуль. (див. рис. 12.15). Інтенсивність dI вторинного випромінювання від цієї смуги буде пропорційна її ширині, тобто $dI = \frac{I_0}{b} \cdot dx$. Фаза цього випромінювання буде відрізнятись від фази випромінювання із точки О на величину $k \cdot x \cdot \sin \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} x \cdot \sin \varphi$ (див. розділ 12.1). Якщо фазу коливань в точці О прийняти рівною ωt , то рівняння хвилі від вибраної ділянки запишеться так

$$dI = \frac{I_0}{b} \cdot dx \cdot \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \cdot \sin \varphi \right).$$

Інтегруємо цей вираз по всій ширині щілини

$$I = \int_0^b dI = \frac{I_0}{b} \int_0^b \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \cdot \sin \varphi\right) dx = \frac{I_0}{b} \left(-\frac{\lambda}{2\pi \cdot \sin \varphi}\right) \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \cdot \sin \varphi\right) \Big|_0^b =$$

$$= \frac{I_0 \lambda}{2\pi b \cdot \sin \varphi} \left[\sin(\omega t) - \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} b \cdot \sin \varphi\right) \right]$$

Скористаємось формулою різниці синусів

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Одержимо

$$I = I_0 \frac{\sin \frac{\pi b \cdot \sin \varphi}{\lambda}}{\frac{\pi b \cdot \sin \varphi}{\lambda}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi b \cdot \sin \varphi}{\lambda}\right)$$

коливання, амплітуда якого залежить від кута φ

$$A(\varphi) = I_0 \frac{\sin \frac{\pi b \cdot \sin \varphi}{\lambda}}{\frac{\pi b \cdot \sin \varphi}{\lambda}}. \quad (12.21)$$

Знайдемо умови, при яких ця амплітуда, а отже і інтенсивність світла, буде мінімальною і максимальною.

Максимум буде при умові $\sin \frac{\pi b \cdot \sin \varphi}{\lambda} = 1 \Rightarrow \frac{\pi b \cdot \sin \varphi}{\lambda} = \pm \frac{\pi}{2} \pm \pi m$, або $b \cdot \sin \varphi = \pm(m + \frac{1}{2})\lambda$, що співпадає з (12.19).

Мінімум буде при умові $\sin \frac{\pi b \cdot \sin \varphi}{\lambda} = 0 \Rightarrow \frac{\pi b \cdot \sin \varphi}{\lambda} = \pm \pi m$, або

$b \cdot \sin \varphi = \pm m\lambda$, що співпадає з (12.20). Тут $m = 1, 2, 3, \dots$ порядок дифракційного мінімуму. Значення $m = 0$ відкинута, так як у цьому випадку $b \cdot \sin \varphi = 0$ і вираз (12.21) буде мати значення першої чудової

границі $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$. Тому під кутом $\varphi = 0$ $A(0) = I_0$ буде спостерігатися головний дифракційний максимум нульового порядку.

Відмітимо, що при $b < \lambda$ дифракційна картина не утворюється.

Дійсно, у цьому випадку $\sin \varphi = \pm m \frac{\lambda}{b}$ при всіх $m \neq 0$ буде більшим за

1. Але ж синус не може перевищувати 1. Будемо мати тільки один центральний (головний) максимум.

Отже для утворення дифракційної картини розміри перешкоди повинні бути одного порядку з довжиною хвилі, але не меншою за неї.

12.8 Дифракційна решітка та її роздільна здатність

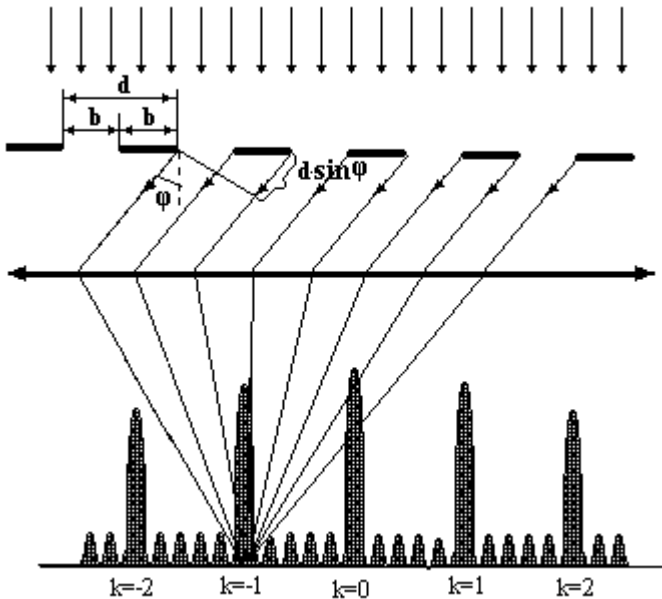


Рисунок 12.16

Сукупність великої кількості паралельних щілин, розділених непрозорими проміжками, називається дифракційною решіткою (рис.12.16). Вона використовується для спектрального аналізу випромінювання. Відстань d між відповідними точками сусідніх щілин називається періодом дифракційної ґратки. Як правило, ширина щілин b і ширина непрозорих проміжків однакова. Тому $d = 2b$. При

дифракції світла на дифракційній ґратці необхідно враховувати не тільки дифракцію на одній уособленій щілині, а і результат інтерференції (накладання) променів в точці спостереження Р, які ідуть від різних щілин. Якщо в напрямку φ на точку спостереження кожна щілина дає дифракційний мінімум, то ясно, що всі щілини дадуть в цьому напрямку мінімум. Це головний мінімум. Але якщо кожна щілина в деякому напрямку дає дифракційний максимум, то це ще не означає, що при накладенні коливань від різних щілин буде максимум інтенсивності. Все залежить від оптичної різниці ходу променів від сусідніх щілин. Дійсно, представивши коливання від кожної щілини вектором із врахуванням їх фаз, як це робилось при побудові векторних діаграм (див. розділ 10.16), інтенсивність результуючого коливання знайдеться як векторна сума інтенсивності від кожної щілини $\vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \dots + \vec{I}_N$. Вона може дорівнювати нулю, коли різниця фаз коливань від сусідніх щілин буде цілократною $\frac{2\pi}{N}$.

Наприклад, при $N = 2$ (дві щілини) коли коливання від кожної щілини приходять у точку спостереження в протифазі, буде мати місце мінімум інтенсивності. При $N = 3$ різниця фаз для одержання мінімуму повинна бути 120° , або 240° . Виникає два додаткових мінімуми. Для $N = 4$ мінімум виникає при трьох можливих значеннях різниці фаз коливань від сусідніх щілин: 90° , 180° і 270° . Отже, в загальному випадку N щілин виникає крім головного мінімуму ще $(N-1)$ додатковий мінімум. І чим більша кількість щілин, тим більше мінімумів, а отже у відповідності із законом збереження енергії, інтенсивності максимумів будуть більшими, тобто максимуми будуть більш гострими.

Для того, щоб спостерігались головні максимуми, оптична різниця ходу променів від сусідніх щілин повинна бути цілократною довжині хвилі

$$\Delta = d \cdot \sin \varphi = \pm k\lambda, \quad (12.22)$$

де $k = 0, 1, 2, \dots$ - називається порядком максимуму.

Між головними максимумами знаходиться N мінімумів. Тому їхнє положення відповідає умові

$$\Delta = d \cdot \sin \varphi = \pm k \frac{\lambda}{N}. \quad (12.23)$$

Із (12.22) видно, що положення головних максимумів для різних довжин хвиль буде спостерігатись під різними кутами φ , тобто вони будуть на екрані зміщені один відносно одного.

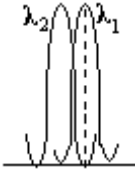


Рисунок 12.17

Прийнято вважати, що максимуми для близьких за значенням довжин хвиль, які перекриваються, можна надійно розділити, коли вони зміщені на відстань не меншу, ніж до першого додаткового мінімуму (рис.12.17). Запишемо умову головного максимуму для довжини хвилі λ_1 і першого додаткового мінімуму для довжини хвилі λ_2 .

$$d \cdot \sin \varphi_1 = k\lambda_1 \quad d \cdot \sin \varphi_2 = k\lambda_2 + \frac{\lambda_2}{N}$$

Для надійного розділення необхідно, щоб $d \cdot \sin \varphi_1 \geq d \cdot \sin \varphi_2$.

$$\text{Одержуємо } k\lambda_1 \geq k\lambda_2 + \frac{\lambda_2}{N}, \text{ або } kN \geq \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

$$\text{Вираз} \quad R = kN = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad (12.24)$$

називається роздільною здатністю дифракційної решітки. Чим більша кількість щілин N і чим більший порядок максимуму, тим більша роздільна здатність, тобто тим з меншою різницею значень довжин хвиль можна надійно розділити положення головних максимумів.

Наприклад. Нехай $N=1000$, $k = 1$, $\lambda_2 = 5000 \text{ \AA}$. Одержимо

$$\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 = \frac{\lambda_2}{kN} = \frac{5000}{1000} = 5 \text{ \AA}. \text{ Це означає, що випромінювання із}$$

довжинами хвиль 5000 \AA і 5005 \AA такою решіткою можна надійно розділити навіть у спектрі першого порядку.

12.9 Дифракція рентгенівських променів. Формула Вульфа-Бреггів

У розділі 12.7 було відмічено, що для спостереження дифракції необхідно, щоб розмір перешкоди був одного порядку з довжиною хвилі, але більшим за неї. Кристал твердого тіла може бути використаний як просторова дифракційна решітка, але оскільки міжатомна відстань d дорівнює декілька ангстремів ($1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ м}$), то і довжина хвилі повинна бути такого ж порядку. А це вже діапазон

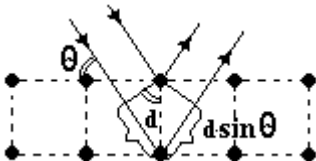


Рисунок 12.18

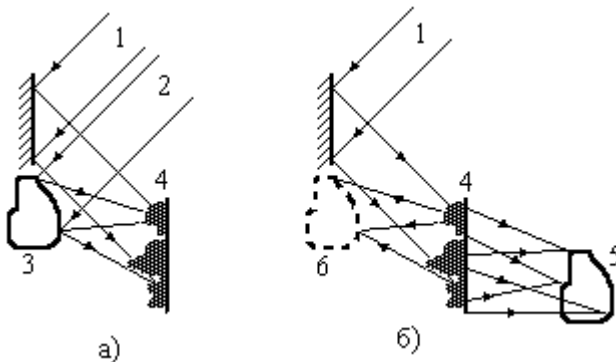
рентгенівських променів. Отже на кристалічній гратці твердого тіла можна спостерігати дифракцію рентгенівських променів. При падінні на поверхню кристалу рентгенівські промені відбиваються від різних атомних площин, які потім накладаються і підсилюють, чи послаблюють один одного (рис. 12.18). В рентгеноструктурному аналізі прийнято задавати напрямок падіння променів на поверхню кристалу кутом ковзання θ , тобто кутом між променем і поверхнею кристалу. Із рис.12.18 видно, що оптична різниця ходу променів, відбитих від сусідніх атомних площин дорівнює $\Delta = 2d \sin \theta$. Отже максимум буде при умові

$$\Delta = 2d \sin \theta = k\lambda. \quad (12.25)$$

Це і є формула Вульфа-Бреггів, покладена в основу рентгеноструктурного аналізу: по відомим k , θ і λ знаходять міжатомну відстань d , яка відображає величину деформації кристалу, чи залишкові напруження.

12.10 Поняття про голографію

Можливість одержання голографічного (об'ємного) зображення теоретично було обґрунтоване у 1947 році американським фізиком Д.Габаром. Експериментально перше таке зображення було одержане у 1963 році після створення джерел високо когерентного випромінювання – лазерів. В основі голографічного зображення лежать явища інтерференції і дифракції. Дійсно, чому людина бачить зображення об'ємним? Завдяки тому, що вона має два ока. Саме цей факт дає можливість відчутти відстань до різних точок предмету. Отже, якщо якимсь чином зафіксувати (записати) інформацію про віддаленість до різних точок предмету, то це і буде об'ємне зображення. А таку інформацію несуть явища інтерференції і дифракції. Саме від оптичної різниці ходу залежить інтенсивність променів у цих явищах.



Розглянемо механізм запису голографічного зображення (рис.12.19, а). Опорний промінь 1 відбивається від плоского

Рисунок 12.19

дзеркала і потрапляє на фотопластинку 4. Предметний промінь 2 відбивається від різних точок предмета 3 і потрапляє на фотопластинку, де інтерферує з опорними променями. На фотопластинці фіксується відповідна інтенсивність інтерференційної картини. Так створюється голограма, яка уявляє собою складну дифракційну решітку.

При відтворенні зображення (рис.12.19, б) опорний промінь зазнає дифракції на голограмі. Утворюється дійсне зображення 5 і уявне зображення 6.

12.11 Природне і поляризоване світло закони Малюса і Брюстера. Ефект Керра

Світловим вектором \vec{E} прийнято називати вектор напруженості електричного поля електромагнітної хвилі. Якщо коливання світлового вектора хаотичні (як за напрямком так і за величиною), світло називається **природним**. Схематично будемо зображати його як

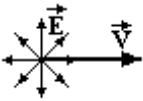


Рисунок 12.20

на рис.12.20.

Якщо коливання світлового вектора якимось чином впорядковане, світло називається **поляризованим**. Наприклад, коли світловий вектор коливається в одній площині (рис.12.21), маємо плоскополяризоване світло. Якщо кінець світлового вектора описує еліпс, маємо еліптично поляризоване світло, якщо коло – поляризоване світло по колу. Розрізняють світло правої чи лівої поляризації, в залежності від напрямку обертання світлового вектора.

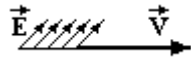


Рисунок 12.21

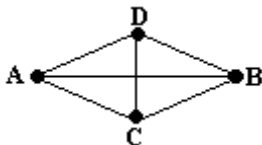


Рисунок 12.22

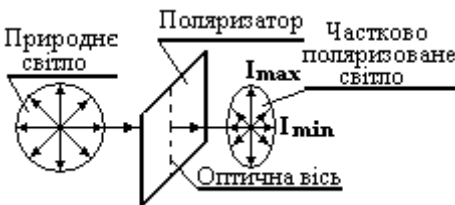


Рисунок 12.23

Найчастіше мають справу з плоскополяризованим світлом. Розглянемо способи його одержання.

а) Лазер випромінює плоскополяризоване світло.

б) При пропусканні природного світла через прозорі речовини з анізотропними оптичними властивостями – поляроїди, наприклад, турмалін,

герпатит. До їх складу входять так звані діхроїчні молекули (рис.12.22). Енергія збудження коливань атомів у такій молекулі в напрямку АВ менша, ніж у напрямку CD. Тому поглинання випромінювання з орієнтацією світлового вектора E паралельного АВ буде сильнішим, ніж у напрямку CD. Одержуємо частково поляризоване світло (рис.12.23), яке характеризується ступінню поляризації

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \quad (12.26)$$

де I_{\max} і I_{\min} – максимальна і мінімальна інтенсивності світла, яке проходить через поляроїд при повороті його на кут 360° навколо осі, що співпадає з променем світла. Для звичайного світла $I_{\max} = I_{\min}$, тому $P = 0$, для плоскополяризованого світла $I_{\min} = 0$, а $P = 1$.

в) Після проходження звичайного світла через кристали, яким властиве явище подвійного заломлення світла, наприклад, кварц, ісландський шпат. Це явище зумовлене анізотропією властивостей,



Рисунок 12.24

яка проявляється у тому, що промені з різною площиною коливання світлового вектора мають різний показник заломлення. За рахунок цього промінь природного світла розділяється на два промені (рис.12.24): звичайний 1 і незвичайний 2 із взаємно-перпендикулярними площинами

поляризації. В таких кристалах є напрямок, вздовж якого звичайний і незвичайний промені співпадають. Цей напрямок називається оптичною віссю кристала. Використовуючи це явище шотландський фізик Ніколь (1768-1851) у 1828 році виготовив призму, яка носить



Рисунок 12.25

його ім'я. Хід променів у призмі Ніколя показаний на рис. 12.25. Звичайний промінь 1 на межі з клеєм (канадським бальзамом) зазнає повного внутрішнього відбивання, за рахунок чого

звичайний і незвичайний промені чітко розділяються. Інтенсивність цих променів приблизно однакова.

г) При відбиванні і заломленні світла відбитий і заломлений промені теж мають взаємно-перпендикулярні площини поляризації (рис.12.26). Шотландський фізик Брюстер (1781-1868) у 1815 році встановив, що відбитий промінь має 100% поляризацію у площині, яка перпендикулярна до площини падіння променя, коли відбитий і заломлений промені взаємно-перпендикулярні. Це закон Брюстера. При цьому заломлений промінь має часткову, але

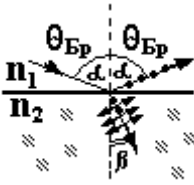


Рисунок 12.26

максимальну ступінь поляризації у площині падіння променів. Знайдемо кут падіння $\alpha = \theta_{\text{Бр}}$ із системи рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\sin \theta_{\text{Бр}}}{\sin \beta} = \frac{n_1}{n_2} = n_{21} \\ \theta_{\text{Бр}} + \beta = 90^\circ \end{cases} \quad \text{знаходимо} \quad \text{tg} \theta_{\text{Бр}} = n_{21}. \quad (12.27)$$

Французький фізик Малюс (1776-18120) експериментально встановив закон, який носить його ім'я: інтенсивність I плоскополяризованого світла, яке пройшло через поляризатор прямо пропорційна квадрату косинуса кута φ між площиною поляризації падаючого променя і оптичною віссю поляризатора.

$$I = I_0 \cos^2 \varphi \quad (12.28)$$

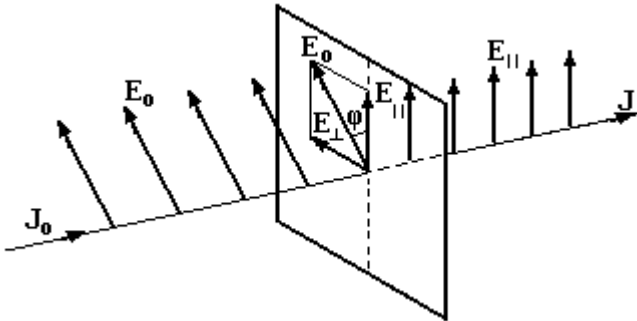


Рисунок 12.27

Впевнимось у цьому законі за таких міркувань. Світловий вектор E_0 утворює з оптичною віссю поляризатора кут φ (рис.12.27). Розкладемо цей вектор на дві складові: $E_{\parallel} = E_0 \cos \varphi$ і $E_{\perp} = E_0 \sin \varphi$. Світяловий вектор E_{\parallel} променя пройде через поляризатор, а перпендикулярна складова E_{\perp} повністю поглинеться. Так як інтенсивність світла пропорційна квадрату амплітуди світлового вектора, (аналог енергії хвиль), маємо $I_0 \sim E_0^2$, а

$$I \sim E_{\parallel}^2 \sim (E_0 \cos \varphi)^2 \sim E_0^2 \cos^2 \varphi = I_0 \cos^2 \varphi. \quad (12.30)$$

Одержали вираз (12.28) закону Малюса.

У 1875 р. шотландський фізик Д.Керр (1824-1907) відкрив ефект виникнення анізотропії оптичних властивостей рідин (нітробензолу) під дією електричного поля. При цьому оптична вісь, яка виникає в електричному полі, паралельна напруженості електричного поля. Цей ефект Керра лежить в основі роботи оптичного затвору (рис.12.28).

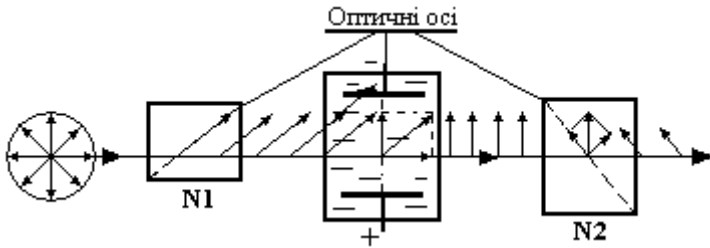


Рисунок 12.28

Між схрещеними ніколями N1 і N2, тобто оптичні осі яких взаємно-перпендикулярні, розміщена комірка Керра – посудина з нітробензолом із зануреними в нього пластинами плоского конденсатора. За відсутності електричного поля конденсатора така оптична система не пропускає світло у відповідності із законом Малюса (12.28) ($\cos 90^\circ = 0$). При подачі на конденсатор напруги у нітробензолі виникає оптична вісь, яка утворює з оптичними осями обох ніколів непрямої кут. Після першого Ніколя виходить плоскополяризований промінь, площина поляризації якого співпадає з оптичною віссю N1. Після комірки Керра виходить промінь, поляризований вздовж електричного поля, а після другого ніколя світловий вектор паралельний оптичній осі N2. Тому така система уже пропускає світло. За допомогою комірки Керра формуються світлові П – імпульси з крутими фронтами, як і фронти електричних П – імпульсів. Такі світлові імпульси використовуються в оптико-фізичних дослідженнях.

13 КВАНТОВІ ВЛАСТИВОСТІ ВИПРОМІНЮВАННЯ

13.1 Теплове випромінювання. Абсолютно чорне та сірі тіла. Закон Кірхгофа для теплового випромінювання

Теплове випромінювання – це електромагнітне випромінювання атомів і молекул, збуджених за рахунок теплової енергії. Воно має місце при будь-якій температурі, відмінній від абсолютного нуля. Особливістю теплового випромінювання є його рівноважний характер. Це означає, що при поміщенні нагрітого тіла в тепло

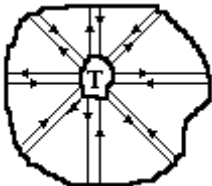


Рисунок 13.8

ізолюючу оболонку із абсолютно відбиваючими стінками (рис.13.1) температура тіла буде залишатись незмінною нескінченно довго. Скільки енергії тіло випромінить, стільки ж і поглине від відбитого випромінювання. Тобто тіло буде знаходитись у рівновазі із випромінюванням.

Тіла можуть світитись не тільки за рахунок теплової енергії. Це різні види люмінесценції: хемілюмінесценція – свічення за рахунок енергії хімічної реакції; катодолюмінесценція – свічення кристалофосфорів при бомбардуванні електронами (екрани телевізорів, монітори); фотолюмінесценція – свічення фосфорів при освітленні; електролюмінесценція – свічення кристалів у електричному полі; триболюмінесценція – свічення при руйнуванні кристалу і т.д. Але всі вони нерівноважні. Тому люмінесценцію називають холодним свіченням.

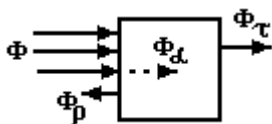


Рисунок 13.9

Потік випромінювання Φ , який падає на поверхню твердого тіла, може: а) відбитись Φ_{ρ} ; б) поглинутись Φ_{α} ; в) пройти Φ_{τ} (рис.13.2). Кожний із цих процесів характеризується відповідним коефіцієнтом:

Відбивання $\rho = \frac{\Phi_{\rho}}{\Phi}$, поглинання

$\alpha = \frac{\Phi_{\alpha}}{\Phi}$ і пропускання $\tau = \frac{\Phi_{\tau}}{\Phi}$, які показують відносну долю

кожного процесу. Очевидно, що $\Phi = \Phi_{\rho} + \Phi_{\alpha} + \Phi_{\tau}$, а тому сума коефіцієнтів дорівнює одиниці $\rho + \alpha + \tau = 1$. Всі ці коефіцієнти

залежать від температури та довжини хвилі. Залежністю від довжини хвилі пояснюються різні кольори тіл. У відбитих променях тіло має той колір, довжину хвилі якого відбиває це тіло.

Якщо тіло поглинає випромінювання всіх довжин хвиль, тобто $\alpha = 1$, а $\rho = \tau = 0$, то таке тіло називається **абсолютно чорним**.

Якщо ж $\alpha < 1$ і не залежить від довжини хвилі, тіло називається **сірим**. Абсолютно чорних тіл, як і других ідеальних об'єктів, у природі не існує. Найкращим наближенням до абсолютно чорного тіла є замкнута порожнина (рис.13.3), у стінці якої зроблений



Рисунок 13.10

невеликий отвір, через який випромінювання виходить назовні. Випромінювання, що потрапило в порожнину, зазнає багаторазового відбивання і практично не може вийти з порожнини. Це означає, що коефіцієнт поглинання такої системи дорівнює одиниці, як і у абсолютно чорного тіла. Якщо нагріти оболонку до деякої температури, то із отвору буде виходити випромінювання таке ж як і від абсолютно чорного тіла з такою ж температурою і з площі, яка дорівнює площі отвору. В природі абсолютно чорним тілом вважається Сонце. Дійсно, все що на нього потрапляє, поглинається.

Інтегральною густиною випромінювання R_T називається енергія, яка випромінюється з одиниці площі нагрітого тіла за одиницю часу у всьому можливому інтервалі довжин хвиль (від 0 до ∞)

$$R_T = \frac{\Delta W}{\Delta S \cdot \Delta t} \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \right]. \quad (13.1)$$

Індекс T означає, що інтегральна густина випромінювання залежить тільки від температури.

Експерименти показують, що енергія випромінювання розподілена по довжинам хвиль нерівномірно (рис. 13.4). Тому вводиться ще одна характеристика теплового випромінювання – **спектральна**

густина випромінювання $r_{\lambda, T} = \frac{dR_T}{d\lambda}$, яка дає потужність

випромінювання з одиниці площі в одиничному інтервалі довжин

хвиль. $[r_{\lambda, T}] = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}$. Очевидно, що інтегральна густина

випромінювання

$$R_T = \int_0^{\infty} r_{\lambda, T} d\lambda - \quad (13.2)$$

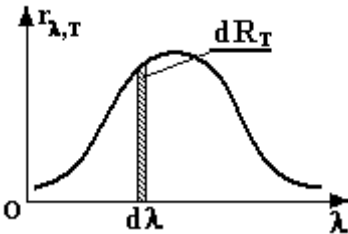


Рисунок 13.11

це площа під кривою спектральної густини випромінювання (рис.13.4).

У 1859 р. німецький фізик Г. Кірхгоф (1824-1887) експериментально встановив закон, який дає зв'язок між випромінювальною і поглинальною здатністю тіл – **закон Кірхгофа** в диференціальній формі:

$$\left(\frac{r_{\lambda,T}}{\alpha_{\lambda,T}} \right)_1 = \left(\frac{r_{\lambda,T}}{\alpha_{\lambda,T}} \right)_2 = \dots = \left(\frac{r_{\lambda,T}}{\alpha_{\lambda,T}} \right)_n = U(\lambda, T) = U_{\lambda,T}. \quad (13.3)$$

Відношення спектральної густини випромінювання до коефіцієнта поглинання, взятих при однакових довжині хвилі та температурі, для різних тіл однакове і є універсальною функцією довжини хвилі і температури $U_{\lambda,T}$ (13.3).

З'ясуємо фізичний зміст функції $U_{\lambda,T}$. При $\alpha_{\lambda,T} = 1$, тобто для абсолютно чорного тіла, $U_{\lambda,T} = r_{\lambda,T}$ – це функція спектральної густини випромінювання абсолютно чорного тіла.

Отже, для будь-якого тіла спектральна густина випромінювання



Рисунки 13.12

$r_{\lambda,T} = \alpha_{\lambda,T} \cdot U_{\lambda,T}$. А так як $\alpha_{\lambda,T} < 1$, то $r_{\lambda,T} < U_{\lambda,T}$, тобто будь-яке тіло при будь-якій довжині хвилі при однакових температурах випромінює менше енергії, ніж абсолютно чорне тіло (рис.13.5).

Для сірих тіл має місце закон Кірхгоф в інтегральній формі:

$$R_T^{\text{сір}} = \int_0^{\infty} r_{\lambda,T} d\lambda = \int_0^{\infty} \alpha_T \cdot U_{\lambda,T} \cdot d\lambda = \alpha_T \int_0^{\infty} U_{\lambda,T} \cdot d\lambda = \alpha_T \cdot R_T^{\text{абс.чорне}} \quad (13.4)$$

Інтегральна густина випромінювання сірого тіла дорівнює інтегральній густині випромінювання абсолютно чорного тіла помноженій на коефіцієнт поглинання. Останній для сірих тіл не залежить від λ , а тому в (13.4) його винесли за інтеграл і індекс λ опущений.

13.2 Розподіл енергії в спектрі абсолютно чорного тіла. Формули Віна, Релея-Джинса, Планка

Прийнявши до уваги закон Кірхгофа (розд. 13.1), для вивчення випромінювання різних тіл необхідно знати коефіцієнт поглинання та випромінювання абсолютно чорного тіла і, перш за все його, спектральну густину випромінювання $U_{\lambda, T}$.

У 1893 р. німецький фізик В.Він (1864-1928) з термодинамічної точки зору і рівноважного характеру теплового випромінювання теоретично одержав розподіл енергії в спектрі абсолютно чорного тіла. Формула Віна має вид (рис.13.6)

$$U_{\lambda, T} = a\lambda^{-5} e^{-\frac{b}{\lambda T}}, \quad (13.5)$$

а і b – константи.

У 1900 р. англ. фізики У.Релей і А.Джинс (1877-1946) на основі класичних уявлень про випромінювання, а саме: неперервний характер випромінювання та рівномірний розподіл енергії по степеням вільності (див. Ч.1, розд.6.16), також теоретично одержали формулу розподілу енергії у спектрі абсолютно чорного тіла

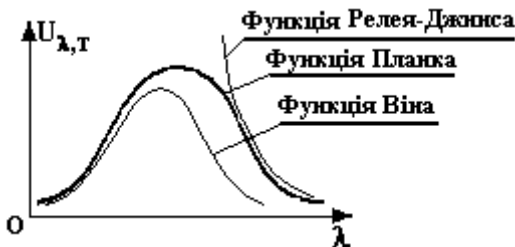


Рисунок 13.13

$$U_{\lambda, T} = 8\pi \cdot kT\lambda^{-4}. \quad (13.6)$$

Але ні один із цих законів не узгоджувався з експериментальною кривою в усьому діапазоні довжин хвиль (рис.13.6, жирна крива). Формула Віна (13.5) давала хороше узгодження в області коротких довжин хвиль, а формула Релея-Джинса (13.6) – в області великих довжин хвиль. Більш того, формула (13.6) взагалі давала абсурдний результат в області коротких довжин хвиль: при зменшенні довжини хвилі (в ультрафіолетовій області) спектральна густина випромінювання, а разом з нею і інтегральна густина, зростали до нескінченності, що з енергетичної точки зору

неможливо. Це протиріччя одержало у фізиці назву „ультрафіолетової катастрофи”.

Для усунення цих недоліків у 1900 р. нім. фізик М.Планк (1858-1947) висунув гіпотезу про дискретний (квантовий) характер випромінювання: випромінювання, поширення і поглинання світла відбувається певними порціями, квантами. Енергію кванта (фотона) випромінювання з частотою ν , або довжиною хвилі λ дає вираз

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}, \quad (13.7)$$

де: $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж · с - стала Планка, c – швидкість світла.

Одержана Планком теоретична формула

$$U_{\lambda,T} = \frac{2\pi \cdot hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \quad (13.8)$$

повністю співпадає із експериментальною кривою розподілу енергії в спектрі випромінювання абсолютно чорного тіла (рис.13.6), а граничні переходи дають формули (13.5) і (13,6). Дійсно, при малих λ одиницею у знаменнику (13.8) можна знехтувати, що приводить до формули Віна

$$U_{\lambda,T} = \frac{2\pi \cdot hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}} = 2\pi \cdot hc^2 \lambda^{-5} e^{-\frac{hc}{\lambda kT}} = a\lambda^{-5} e^{-\frac{b}{\lambda T}}.$$

При великих λ $x = \frac{hc}{\lambda kT} \ll 1$. Розкладання експоненти в степеневий

ряд, обмежившись двома першими членами, $e^x = 1 + x$, якісно дає формулу Релея-Джинса $U_{\lambda,T} = 2\pi \cdot kTc \cdot \lambda^{-4}$.

13.3 Закони випромінювання абсолютно чорного тіла. Закон Стефана-Больцмана, закон Віна

Знайдемо інтегральну густину випромінювання абсолютно чорного тіла. Для цього у формулу (13.2) замість $r_{\lambda,T}$ підставимо формулу Планка (13.8)

$$R_T^{\text{абс.ч.}} = \int_0^{\infty} U_{\lambda,T} d\lambda = \int_0^{\infty} \frac{2\pi \cdot hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT} - 1}} d\lambda.$$

Виконаємо заміну аргументу та межі інтегрування $\frac{hc}{\lambda kT} = x; \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{kTx}; d\lambda = -\frac{hc}{kTx^2} dx$; при $\lambda = 0$ $x = \infty$; $\lambda = \infty$ $x = 0$

Одержуємо

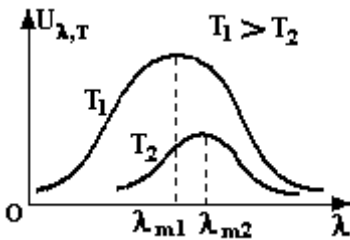
$$R_T^{\text{абс.ч.}} = \int_0^{\infty} \frac{2\pi \cdot hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT} - 1}} d\lambda = 2\pi hc^2 \int_{\infty}^0 \left(\frac{kT}{hc}\right)^5 x^5 \frac{1}{e^x - 1} \left(-\frac{hc}{kT}\right) \frac{dx}{x^2} =$$

$$= \frac{2\pi hc^2 k^5 T^5 hc}{h^5 c^5 kT} \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} T^4 = \sigma \cdot T^4$$

Тут використаний табличний інтеграл $\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$.

Одержали **закон Стефана-Больцмана**: інтегральна густина випромінювання абсолютно чорного тіла пропорційна четвертому степеню його абсолютної температури

$$R_T^{\text{абс.ч.}} = \sigma \cdot T^4. \quad (13.9)$$



Рисунк 13 14

$$\sigma = 5,6696 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4} \quad - \text{ стала}$$

Стефана-Больцмана.

Цей закон експериментально встановив у 1879 р. австрійський фізик Й. Стефан (1835-1893), а теоретично у 1894 р. Л. Больцман (1844-1906).

У 1894 р. В.Він експериментально знайшов, що довжина хвилі λ_m , при якій спектральна густина випромінювання абсолютно чорного тіла максимальна, обернена абсолютній температурі (рис.13.7)

$$\lambda_m = \frac{b}{T}. \quad (13.10)$$

Одержимо цей закон із формули Планка. Для цього необхідно дослідити функцію (13.8) на екстремум. Беремо похідну по λ і прирівнюємо нулю.

$$\begin{aligned} \frac{dU_{\lambda,T}}{d\lambda} &= \frac{-2\pi hc^2 5}{\lambda^6} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} + \frac{2\pi hc^2 e^{\frac{hc}{\lambda kT}} \frac{hc}{kT \lambda^2}}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1 \right)^2} = \\ &= \frac{2\pi hc^2}{\lambda^6 \left(e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1 \right)} \left(\frac{\frac{hc}{\lambda kT} e^{\frac{hc}{\lambda kT}}}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} - 5 \right) = 0 \end{aligned}$$

Нулю дорівнює вираз в останніх дужках. Позначимо $\frac{hc}{\lambda kT} = x$.

Одержуємо трансцендентне рівняння $xe^x - 5e^x + 5 = 0$, яке має тривіальний корінь $x_m = 0$ і ще один корінь в інтервалі від 4 до 5. В останньому легко впевнитись, так як ліва частина рівняння на цьому інтервалі змінює знак. Дійсно, при $x = 4$ $4e^4 - 5e^4 + 5 = -e^4 + 5 < 0$;

При $x = 5$ $5e^5 - 5e^5 + 5 = 5 > 0$. Розв'язок рівняння числовим методом дає $x_m = 4,965$. Таким чином, $\lambda_m = \frac{hc}{kTx_m} = \frac{b}{T}$ одержуємо

закон Віна, який показує, що при збільшенні температури максимум спектральної густини випромінювання зміщується в сторону коротких

довжин хвиль (рис.13.7). Тому закон Віна називають ще законом зміщення. При збільшенні температури зростає і інтегральна густина випромінювання (див.13.9). Тому площа під кривою T_1 більша, ніж під кривою T_2 .

13.4 Фотоефект. Закони Столетова. Рівняння Ейнштейна для фотоефекту. „Червона” межа фотоефекту

Фотоелектричний ефект був відкритий у 1887 р. німецьким фізиком Генріхом Герцем (1857-1894) і полягає у вибиванні електронів із поверхні металів при їх освітленні. Те, що вилітають

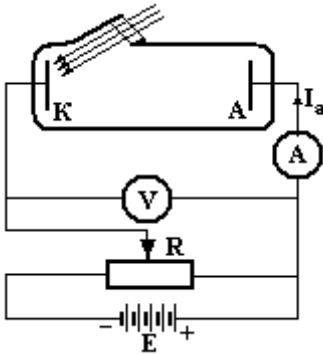


Рисунок 13.16

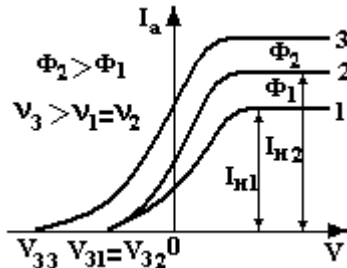


Рисунок 13.15

саме електрони, встановили у 1898 р. англ. фізики Леонард і Дж. Томсон (1856-1940) по вимірюванню питомого заряду частинок, які вилітають. У 1888-1889 р. російський фізик А.Г.Столетов (1839-1896) ретельно досліджував фотоефект. Схема його дослідів показана на рис.13.8. У відкачаному балоні знаходились два електроди: катод К і анод А. Щоб не поглинались ультрафіолетові промені, катод освітлювати через кварцове вікно.

Досліджувались вольт-амперні характеристики (ВАХ- залежність між анодним струмом та напругою) при різних інтенсивностях та довжинах хвиль світла. Типові ВАХ приведені на рис.13.9. Тут зображені всього три характеристики: 1-а і 2-а одержані при однаковій частоті освітлення, але з різною інтенсивністю; 3-я ВАХ знята при більшій частоті освітлення, ніж 1-а та 2-а. Розглянемо закономірності, встановлені Столетовим.

1. При $V = 0$ $I_a \neq 0$. Це пояснюється

тим, що електрони вилітають із катода з ненульовою швидкістю, за рахунок чого вони, навіть за відсутності прискорюючого поля К–А, можуть потрапити на анод.

2. При деякій напрузі струм виходить на насичення, тобто перестає залежати від напруги. Це пояснюється тим, що при заданій інтенсивності освітлення при цій напрузі уже всі фотоелектрони потрапляють на анод. Якщо ж збільшити світловий потік, то пропорційно збільшується і струм насичення (див. криві 1 і 2).
3. Для зникнення фотоструму необхідно прикласти затримуючу напругу (на катод + на анод -). Струм зникає, коли робота затримуючого електричного поля eV_3 дорівнює кінетичній енергії найбільш швидких електронів $0,5m\nu_{\max}^2$. Звідки затримуюча

напруга $V_3 = \frac{m\nu_{\max}^2}{2e}$. Виявилось, що затримуюча напруга не

залежить від інтенсивності світла (див. криві 1 і 2), але пропорційна частоті опромінюючого світла (див. криві 3 та 1 і 2).

4. Фотоефект спостерігається починаючи з певних значень частоти (довжини хвилі) опромінювання. Ця частота (довжини хвилі) були названі „червоною” межею фотоефекту. Краще було б назвати її довгохвильовою межею фотоефекту, так як він спостерігається при умові $\nu \geq \nu_q$, або $\lambda \leq \lambda_q$. λ_q – це найбільша довжина хвилі, при якій ще має місце фотоефект. У видимому діапазоні червоне світло має більшу довжину хвилі, ніж фіолетове. Звідси і назва „червона” межа. Але це не означає, що ця гранична частота належить до діапазону червоного світла. Тому термін довгохвильова більш вдалий. Встановлено, що для різних металів червона межа різна.
5. Явище фотоефекту практично безінерційне, тобто після початку, або припинення освітлення фотострум зникає практично миттєво.

Ці закономірності фотоефекту не вдається пояснити з точки зору хвильової (електромагнітної) природи світла. Дійсно, вільні електрони металу в електромагнітному полі здійснюють вимушені коливання з частотою падаючої електромагнітної хвилі. Амплітуда і енергія цих коливань зростає по мірі збільшення інтенсивності світла. Тому затримуюча напруга повинна була б залежати від інтенсивності світла, чого в експерименті не спостерігається (див рис.13.9, криві 1 і 2).

Класична електродинаміка не може пояснити існування „червоної” межі і безінерційності явища. Для розвитку вимушених коливань до енергії, достатньої для виходу електрона, як показують розрахунки, необхідно декілька хвилин, що суперечить дослідам.

А.Ейнштейн показав, що всі закономірності фотоефекту можна пояснити на основі квантової природи світла. Фотон при поглинанні віддає свою енергію $E_{\phi} = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$ повністю. Частина цієї енергії витрачається електроном на роботу виходу ($A_{\text{вих}}$), а решта залишається у вигляді кінетичної енергії $\frac{m\nu^2}{2}$. Ейнштейн записав рівняння балансу (збереження) енергій, яке називається рівнянням Ейнштейна для фотоефекту

$$E_{\phi} = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = A_{\text{вих}} + \frac{m\nu^2}{2}. \quad (13.11)$$

Із цього рівняння знаходиться „червона” межа фотоефекту, коли енергії фотона вистачає тільки на роботу виходу, тобто при $\nu = 0$

$$\nu_{\text{ч}} = \frac{A_{\text{вих}}}{h}, \text{ або } \lambda_{\text{ч}} = \frac{c}{\nu_{\text{ч}}} = \frac{hc}{A_{\text{вих}}}. \quad (13.12)$$

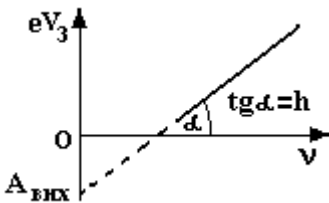


Рисунок 13.17

Таким чином, явище фотоефекту підтверджує корпускулярну природу світла.

Якщо в рівнянні (13.11) кінетичну енергію замінити роботою затримуючого електричного поля, одержимо лінійну залежність між затримуючою напругою і частотою (рис.13.10).

$$eV_3 = h\nu - A_{\text{вих}}. \quad (13.13)$$

Досліджуючи цю залежність, можна знайти роботу виходу і сталу Планка.

13.5 Ефект Комптона

У 1922 році американський фізик А.Комптон відкрив явище, назване його іменем. Цей ефект полягає в тому, що розсіяне речовиною рентгенівське випромінювання містить наряду з довжиною λ падаючої хвилі, ще хвилю більшої довжини λ^1 . Зміщення $\Delta \lambda = \lambda^1 - \lambda$ не залежить від природи розсіювальної речовини, довжини падаючої хвилі, але залежить від кута розсіяння θ –це кут між напрямками падаючого та розсіяного пучків (рис. 13.11).

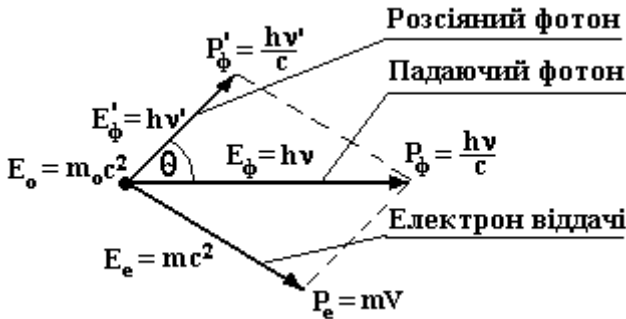


Рисунок 13.18

Хвильов а теорія світла не може пояснити цього явища. Дійсно, за цією теорією електрони здійснюють вимушені коливання з частотою падаючої

електромагнітної хвилі. А отже і вторинне випромінювання електронами буде мати таку ж частоту (довжину) хвилі, як і падаюча.

Корпускулярна ж теорія рентгенівського випромінювання легко пояснює це явище. Взаємодія фотона з практично вільним (дуже слабо зв'язаним) електроном розглядається як нецентральный пружний удар. Вважається, що електрон перед ударом не рухається. Дійсно його теплова швидкість $\sim 10^5$ м/с набагато менша за швидкість фотона $3 \cdot 10^8$ м/с. Після удару електрон набуває імпульсу P_e і одержує не всю енергію фотона, як в явищі зовнішнього фотоефекту, а лише його частину. Напрямок руху фотона теж змінюється, а його енергія і імпульс зменшуються, що приводить до зростання довжини хвилі.

Знайдемо зміну довжини хвилі $\Delta \lambda$ розсіяного рентгенівського променя. Запишемо закони збереження енергії і імпульсу із врахуванням релятивістських ефектів .

Закону збереження енергії запишемо так

$$h\nu + m_0c^2 = h\nu^1 + mc^2, \quad (13.14)$$

де $h\nu$ і $h\nu^1$ – відповідно енергія падаючого і розсіяного фотонів;

$m_0 c^2$ і mc^2 – повна енергія електрона відповідно до і після

зіткнення;

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

(13.15)

– маса електрона віддачі; m_0 – маса спокою електрона.

Закон збереження імпульсу запишемо у векторній формі

$\vec{P}_\phi = \vec{P}_e + \vec{P}_\phi^I$ і в скалярній формі за теоремою косинусів із трикутника імпульсів (див. рис.13.11)

$$(mV)^2 = \left(\frac{hv}{c}\right)^2 + \left(\frac{hv^I}{c}\right)^2 - 2\frac{h^2}{c^2}vv^I\cos\theta. \quad (13.16)$$

Розв'язуємо систему рівнянь (13.14)–(13.16). Рівняння (13.14) ділимо на c і приводимо до виду

$$mc = m_0c + \frac{h}{c}(v - v^I), \text{ підносимо до квадрату}$$

$$(mc)^2 = (m_0c)^2 + 2m_0h(v - v^I) + \left(\frac{hv}{c}\right)^2 - 2\frac{h^2}{c^2}vv^I + \left(\frac{hv^I}{c}\right)^2.$$

Із цього рівняння віднімаємо (13.16)

$$m^2(c^2 - V^2) = (m_0c)^2 + 2m_0h(v - v^I) - 2\frac{h^2}{c^2}vv^I(1 - \cos\theta). \quad (13.17)$$

Підносимо рівняння (13.15) до квадрату і звільняємось від знаменника

$$m^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) = m_0^2 \quad \Rightarrow \quad m^2(c^2 - V^2) = (m_0c)^2.$$

Отже у рівнянні (13.17) ліва частина і перший доданок у правій частині однакові тому вони зникають. Залишається

$$2m_0h(v - v^I) = 2\frac{h^2}{c^2}vv^I(1 - \cos\theta), \text{ або}$$

Після перетворення і ділення на vv^I маємо

$$\frac{c}{v^I} - \frac{c}{v} = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta). \quad \text{Але } \frac{c}{v^I} = \lambda^I; \quad \frac{c}{v} = \lambda.$$

Одержуємо для зміни довжини хвилі

$$\lambda^I - \lambda = \Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta) = \lambda_K (1 - \cos \theta). \quad (13.18)$$

Величина $\lambda_K = \frac{h}{m_0 c} = 0,002426 \text{ нм}$ називається комптонівською

довжиною хвилі.

Формула (13.18) підтверджує експериментальну залежність зміни $\Delta\lambda$ від кута розсіювання θ . З неї також випливає, що комптонівська зміна довжини хвилі не залежить від довжини хвилі падаючого променя, а тому краще виявляється для фотонів порівняно коротких довжин хвиль (одного порядку з $\lambda_K = 0,002426 \text{ нм}$). Відносне значення зміщення $\Delta\lambda/\lambda$ для ультрафіолетового випромінювання близько 0,001%, для рентгенівського – 10%, для гамма-випромінювання – 100%. Для видимого світла (400-700 нм) комптонівське зміщення майже не спостерігається.

Ефект Комптона є переконливим доказом справедливості корпускулярної природи світла, а також законів збереження енергії та імпульсу при взаємодії елементарних частинок.

13.6 Тиск світла

В рамках корпускулярної теорії світла виникнення тиску пояснюється як і тиск газу в молекулярно-кінетичній теорії. При поглинанні чи відбиванні фотона змінюється його імпульс (при поглинанні на P_ϕ , при відбиванні на $2 P_\phi$). Нагадаємо, що імпульс фотона

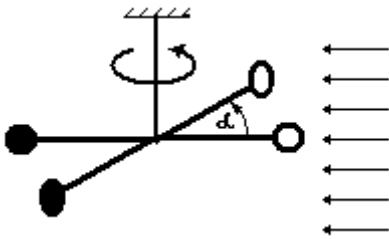


Рисунок 13.19

$$P_\phi = m_\phi \cdot c = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad (13.19)$$

За другим законом Ньютона на стінку діє сила, яка дорівнює швидкості зміни імпульсу.

Експериментально тиск світла вперше виміряв російський вчений П.Н.Лебедєв у 1900–1910 р. по куту α закручування крутильних терезів (рис. 13.12) з двома металевими пластинками: одна дзеркальна, друга зачернена. Від дзеркальної пластинки фотони відбивались, а на зачерненій поглинались. На дзеркальній пластинці зміна імпульсу фотона була більшою, ніж на зачерненій. Тому закручування нитки терезів було таке, як зображено на рис.13.12.

Знайдемо тиск P світла. Нехай на непрозору (коефіцієнт пропускання $\tau = 0$) поверхню S , коефіцієнт поглинання якої ρ , падає N фотонів (рис.13.13). Тоді, враховуючи, що сума коефіцієнтів поглинання, відбивання і пропускання дорівнює 1 (див. розділ 13.1), записуємо, що $\rho \cdot N$ фотонів відбивається, а $(1 - \rho) \cdot N$ фотонів поглинається. Зміна імпульсу цих фотонів складає

$$2 \cdot P_{\phi} \cdot \rho \cdot N + P_{\phi} \cdot (1 - \rho) \cdot N = dF \cdot dt \quad (13.20)$$

За означенням тиску та з урахуванням (13.19) і (13.20) маємо

$$P = \frac{dF}{dS} = \frac{2 \cdot P_{\phi} \cdot \rho \cdot N + P_{\phi} \cdot (1 - \rho) \cdot N}{dS \cdot dt} = \frac{h\nu \cdot N(1 + \rho)}{c \cdot dS \cdot dt} \quad (13.21)$$

З рис.13.13 видно, що добуток $c \cdot dS \cdot dt = dV$ дає об'єм, з якого всі N фотонів встигають досягти поверхні dS , добуток же $h\nu \cdot N = dW$ дорівнює енергії dW цих фотонів. Відношення $\frac{dW}{dV} = w$ дає об'ємну густину енергії

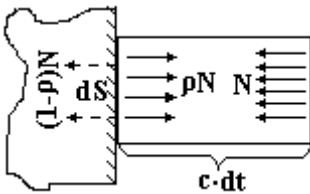


Рисунок 13.20

падаючого випромінювання. Таким чином, для тиску світла одержуємо вираз

$$P = w(1 + \rho), \quad (13.22)$$

який узгоджується з експериментом: у сонячний день тиск світла складає $\sim 4 \cdot 10^{-5}$ Па.

14 ЕЛЕМЕНТИ АТОМНОЇ ФІЗИКИ

14.1 Дослід Е.Резерфорда по розсіюванню α -частинок. Ядерна модель атома

Поняття атома, як неподільної найменшої частинки речовини, було введено ще грецькими філософами Левкіпом і Демокрітом в V

столітті до нашої ери. Але на початок XX століття ряд відкриттів свідчили про складну будову атома. Це: лінійчасті спектри випромінювання ізольованими атомами, характерні для кожного хімічного елементу; фотоэффект; відкриття радіоактивності; дослідження катодних променів; відкриття електрона та ін. Було доведено, що нейтральні атоми – складні системи позитивно і негативно заряджених частинок. Але відомостей про розподіл цих зарядів у атомі не було.

Першу модель атома запропонував у 1903 році англ. фізик Дж.Томсон (1856-1940). За його моделі атом уявляв собою позитивно заряджену кулю з вкрапленими в неї негативними електронами (як родзинки в булочку), так що сумарний заряд атома дорівнював нулю. Але така модель не була підтверджена дослідами. Тому у 1911 році англ. фізик Е.Резерфорд для з'ясування розподілу позитивних і негативних зарядів у атомі провів досліди по розсіюванню атомами α -частинок (двозарядних позитивних іонів гелію He^{2+}), тобто провів зондування атомів. Схема цих дослідів зображена на рис.14.1.

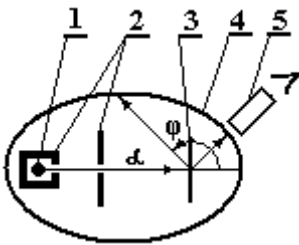


Рисунок 14.1

Джерелом α -частинок була крупинка 1 радіоактивної речовини. За допомогою діафрагм (щілин) 2 формувалася вузький пучок α -частинок, які потрапляли на тонку ($\sim 1\text{мкм}$) фольгу 3 з розсіювальної речовини (спочатку це було золото). Відкачаний скляний балон 4, в якому знаходилася вся ця система, зсередини був покритий фосфором. При потраплянні α -частинок на такий екран виникли спалахи світла, по яким через окуляр 5 підраховувалась кількість α -частинок dN , які потрапили за одиницю часу в поле зору окуляра, в

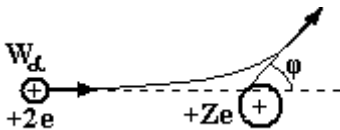


Рисунок 14.2

залежності від кута розсіювання ϕ . Виявилось, що деякі α -частинки відхилялись на кут, більший за 90° , з чого був зроблений висновок, що розсіювання позитивних α -частинок зумовлене їх взаємодією з позитивною і масивною частиною атома. Теоретично за законом Кулона було знайдено, що при нецентральному ударі однойменно заряджених частинок (рис.14.2) кількість α -частинок dN , які

розсіюються за одиницю часу в одиничному тілесному куті Ω

$$\frac{dN}{dt \cdot d\Omega} \sim \frac{(Ze)^2}{W_\alpha \cdot \sin^4\left(\frac{\varphi}{2}\right)}. \quad (14.1)$$

Така закономірність була підтверджена дослідями

В (14.1): W_α – енергія α -частинок; із експериментальної залежності

$$\frac{dN}{dt \cdot d\Omega} \cdot \sin^4\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sim \frac{(Ze)^2}{W_\alpha} = \text{const} \text{ було визначене число } Z. \text{ Воно}$$

співпало з порядковим номером елемента розсіювальної фольги.

Для оцінки найменшого розміру r_{\min} позитивної частини атома був використаний закон збереження енергії для випадку центрального удару частинок. Кінетична енергія W_α α -частинки витрачається на подолання сил відштовхування, тобто перетворюється в потенціальну енергію взаємодії заряду α -частинки $+2e$ і заряду $+Ze$

$$W_\alpha = \frac{2e \cdot Ze}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_{\min}} \quad \Rightarrow \quad r_{\min} \approx 3 \cdot 10^{-14} \text{ м.}$$

По сучасним оцінкам $r_{\min} = r_0 \approx 3 \cdot 10^{-15} \text{ м.}$

А із газо-кінетичних вимірювань розмір атомів був відомим $\sim 3 \cdot 10^{-10} \text{ м}$, що на п'ять порядків більший за розмір позитивної його частини – ядра.. Щоб уявити таку різницю, уявимо розмір ядра 1 см, тоді розмір атома складе $10^5 \text{ см} = 1000 \text{ м} = 1 \text{ км}$.

На цих даних Резерфордом була запропонована планетарна модель атома – в центрі знаходиться позитивно заряджене ядро із зарядом $+Ze$ і основною його масою, а навколо нього обертаються електрони, кількість яких дорівнює порядковому номеру Z елемента.

14.2 Протиріччя моделі атома Резерфорда. Постулати Н.Бора та їх дослідне обґрунтування (дослід Франка і Герца)

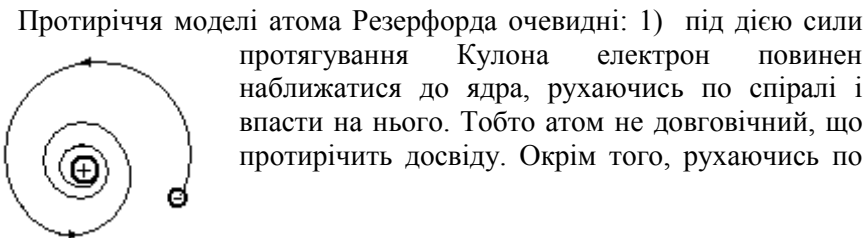


Рисунок 14.3

спіралі (рис.14.3), прискорення електрона змінюється плавно, а тому і випромінювана ним енергія повинна змінюватись плавно. Тобто спектр випромінювання атомами повинен бути суцільним, тоді як експерименти дають лінійчатий спектр.

Для зняття цих протиріч Нільс Бор у 1913 р. висунув рад постулатів, які не узгоджувались із класичним уявленням.

а. Електрони в атомі рухаються по певним стаціонарним орбітам і, не дивлячись на наявність доцентрового прискорення, не випромінюють енергії.

б. Стаціонарні орбіти електронів характеризуються тим, що момент

імпульсу електрона mvr_n на них цілократний $\frac{h}{2\pi} = \hbar$, тобто

змінюється дискретно (квантується) ($h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – стала Планка)

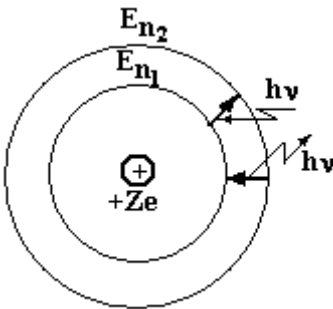


Рисунок 14.4

$$mvr_n = n \frac{h}{2\pi} = n \cdot \hbar. \quad (14.2)$$

$n = 1, 2, 3, \dots$

в. Випромінювання чи поглинання енергії атомом відбувається при переході електрона із однієї стаціонарної орбіти на другу, причому енергія випроміненого чи поглинутого кванта дорівнює різниці енергій електрона на цих стаціонарних орбітах (рис.14.4)

$$h\nu = E_{n_2} - E_{n_1} \quad (14.3)$$

Останній постулат пояснював лінійчатий характер атомних спектрів і був найбільш неприйнятний фізиками. Нерозуміння викликало твердження, що атом може сприйняти тільки певну порцію енергії: не більшу і не меншу! Саме цей факт дискретної зміни енергії атомом був

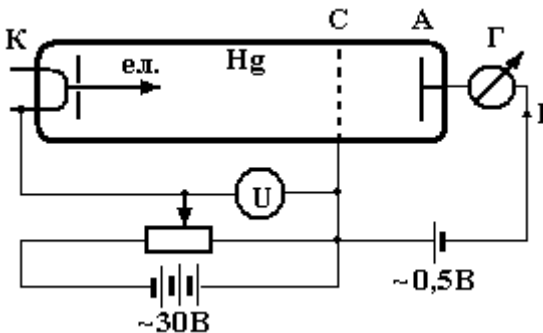


Рисунок 14.5

експериментально підтверджений у 1913 році дослідями німецьких фізиків Дж.Франка і Г.Герца. Досліджувалась взаємодія електронів з атомами ртуті (рис.14.5). У скляний балон, що містив ртутну пару при тиску близько 13 Па, були впаяні: підігрівний катод К, який випромінював електрони, анод А, з'єднаний з гальванометром Г і сітка С. Між сіткою та катодом створювалось електричне поле, яке прискорювало електрони до енергії eU . Між сіткою та анодом створювалось невелике гальмівне поле з різницею потенціалів порядку 0,5 В. Досліджувалась вольт-амперна характеристика (ВАХ),

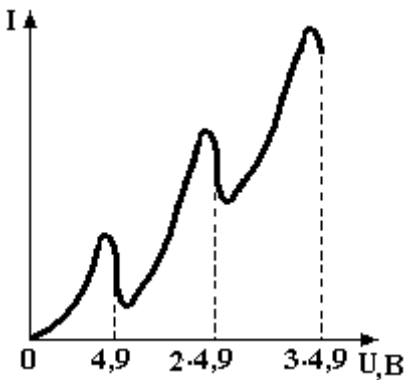


Рисунок 14.6

тобто залежність анодного струму I від напруги U між катодом та сіткою (рис.14.6). Виявилось, що вона має осцилюючий характер. Через певні однакові значення напруги 4,9 В струм різко зменшувався, а потім знову зростає. Такий хід ВАХ пояснюється двояким характером зіткнень електронів з атомами ртуті: пружними при енергії меншій за 4,9 еВ і не пружними, коли енергія електрона досягає значення 4,9 еВ. Саме така енергія необхідна для переходу атома ртуті у збуджений стан. Якщо таке зіткнення

відбувається поблизу сітки, електрон, втративши енергію, не може подолати слабке затримуюче поле між сіткою та анодом. Струм спадає. При подальшому збільшенні прискорюючої напруги між катодом та сіткою енергію 4,9 еВ електрон набуває пройшовши меншу відстань, тобто місце не пружного зіткнення наближається до катода. На шляху, що залишився до сітки, електрон знову прискорюється і, долаючи гальмівне поле $C - A$, потрапляє на анод. Струм зростає. Послідуючі спади струму відбувається тоді, коли електрон на шляху до сітки зазнає два, три і т.д. не пружних зіткнень, але останнє відбувається поблизу сітки.

Таким чином, цей дослід підтвердив постулат Бора про дискретний характер зміни енергії атомів. Було також виявлене ультрафіолетове випромінювання з довжиною хвилі 253,7 нм, яка відповідає енергії кванта світла саме 4,9 еВ. Це збуджені атоми ртуті

віддають надлишок енергії при переході в нормальний стан.

14.3 Борівська теорія воднеподібних атомів. Закономірності лінійчатих атомних спектрів

Воднеподібний атом (іон) – це іон із зарядом ядра $+Ze$ навколо якого обертається лише один електрон, як і в атомі водню. До таких атомів відносяться іонізований гелій He^+ , двічі іонізований літій Li^{2+} , тричі іонізований берилій Be^{3+} , чотири рази іонізований бор B^{4+} і т.д.

Розглянемо електрон, що рухається в полі атомного ядра $+Ze$. Для спрощення розрахунків вважатимемо, що електрон масою m рухається по коловій орбіті радіусом r_n зі швидкістю v під дією сили Кулона. Запишемо основне рівняння динаміки оберտального руху і постулат квантування орбіт (14.2)

$$\begin{cases} \frac{mv^2}{r_n} = \frac{e \cdot Ze}{4\pi\epsilon_0 r_n^2} & (14.4) \\ mvr_n = n \cdot \hbar & (14.5) \end{cases}$$

Із системи цих рівнянь знайдемо радіус орбіти r_n , вилучивши швидкість v . Для цього із (14.5) знаходимо швидкість і підставляємо в (14.4)

$$v^2 = \left(\frac{n\hbar}{mr_n} \right)^2; \quad \frac{m}{r_n} \left(\frac{n\hbar}{mr_n} \right)^2 = \frac{e \cdot Ze}{4\pi\epsilon_0 r_n^2}$$

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{Ze^2 m} \cdot n^2 = \frac{\epsilon_0 \hbar^2}{Ze^2 \pi \cdot m} \cdot n^2. \quad (14.6)$$

Для атома водню $Z = 1$. Радіус найближчої до ядра орбіти при $n = 1$

$$r_1 = \frac{\epsilon_0 \hbar^2}{e^2 \pi \cdot m} = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} (6,62 \cdot 10^{-34})^2}{(1,6 \cdot 10^{-19})^2 \cdot 3,14 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}} = 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ м.}$$

Це значення відповідає розмірам атома водню, які знайдені з кінетичної теорії газів.

Знайдемо повну енергію електрона, яка складається з потенціальної енергії взаємодії з ядром і кінетичної енергії руху по орбіті

$$E_n = E_{\text{пот.}} + E_{\text{кін.}} = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} + \frac{mv^2}{2}. \quad (14.7)$$

Підставляємо із (14.4) mv^2 , а потім радіус (14.6). Одержуємо

$$E_n = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} + \frac{e \cdot Ze}{8\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{Z^2 e^4 m}{8\epsilon_0^2 h^2} \cdot \frac{1}{n^2}. \quad (14.8)$$

Для атома водню $Z = 1$; $E_n = -13,6 \cdot \frac{1}{n^2}$ еВ. При $n = 1$ одержуємо теоретичне значення енергії іонізації атома водню 13,6 еВ, що добре узгоджується з експериментом.

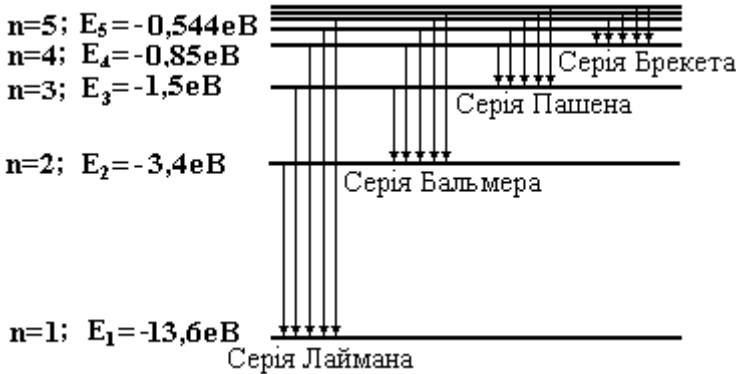


Рисунок 14.7

Намалюємо енергетичний спектр атома водню і електронні переходи, при яких енергія атомом випромінюється (рис.14.7).

Експериментально певна закономірність в атомних спектрах у видимому діапазоні була вперше знайдена швейцарським вчителем у 1885 році І.Бальмером (1825-1898) як плід довготерпіння в переборі чисел. Він одержав формулу, яка носить його ім'я

$$\nu = R_{\nu} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (14.9)$$

де ν – частота спектральної лінії, $R_{\nu} = 3,29 \cdot 10^{15}$ Гц – емпірично підбрана стала, яка називається сталою Рідберга, $n = 3, 4, 5, \dots$

Дякуючи теорії Бора стала зрозумілою формула Бальмера (14.9), а також були передбачені спектральні серії в ультрафіолетовій області (див. рис.14.7 серія Лаймана) і в інфрачервоній області (див. рис.14.7 серії Пашена, Брекета.). Спектральні лінії систематизують по серіям, в залежності від того, на який енергетичний рівень переходить електрон із більш високих рівнів: на 1-й рівень – серія Лаймана, на 2-й – серія Бальмера, на 3-й – серія Пашена, на 4-й – серія Брекета і т.д.

Скориставшись формулами (14.3) та (14.8), знайдемо частоти спектральних ліній

$$\nu = \frac{E_{n1} - E_{n2}}{h} = \frac{Z^2 e^4 m}{8 \epsilon_0^2 h^3} \cdot \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) = Z^2 \cdot R_{\nu} \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right). \quad (14.10)$$

Тут $R_{\nu} = \frac{e^4 m}{8 \epsilon_0^2 h^3} = 3,27 \cdot 10^{15}$ Гц – теоретичне значення сталої Рідберга, яке добре узгоджується із емпіричним значенням.

Таким чином, теорія Бора пояснила механізм виникнення спектральних ліній та їх закономірності, одержане теоретичне значення сталої Ридберга, передбачила спектральні серії в невидимій області спектру. Але кількісного узгодження в спектрах уже для атома гелію не давала. В цьому полягає основний недолік теорії. Це обумовлене тим, що теорії Бора притаманна внутрішня суперечність. У ній класична фізика штучно поєднується з квантовими постулатами, тобто вона була ні послідовно класичною ні послідовно квантовою.

15 ЕЛЕМЕНТИ КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ

15.1 Гіпотеза де-Бройля. Дослідне обґрунтування корпускулярно-хвильового дуалізму матерії. Хвильова функція

У 1924 р. французький фізик Луї де-Бройль (1892-1987) висунув гіпотезу, що корпускулярно-хвильовий дуалізм властивий не

тільки світлові, а взагалі всім матеріальним частинкам. Тобто він поширив на частинки речовини співвідношення корпускулярних і хвильових характеристик, які були запропоновані Ф.Ейнштейном для фотонів світла. Перехід від хвильових до корпускулярних характеристик здійснюється за тими ж правилами (формулами) як і для світла (див. розділ 12.1). Частинка масою m , яка рухається зі швидкістю V , має імпульс $P = mV$ і кінетичну енергію

$$E_k = \frac{mV^2}{2} = \frac{m^2V^2}{2m} = \frac{P^2}{2m}. \quad (15.1)$$

Виразимо імпульс через кінетичну енергію

$$P = \sqrt{2mE_k}. \quad (15.2)$$

Такий частинці за гіпотезою де-Бройля відповідає довжина хвилі

$$\lambda = \frac{h}{mV} = \frac{h}{P} = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}}. \quad (15.3)$$

Ця гіпотеза була підтверджена експериментально у 1927 р. амер. фізиками К.Д.Девісоном (1881-1958) і Л.Х.Джермером (1896-

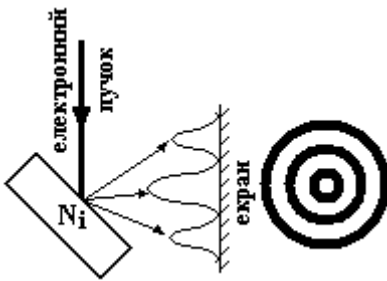


Рисунок 15.1

1971). Вони одержали дифракційну картину при відбиванні пучка електронів від поверхні нікелю (рис. 15.1). Відомо, що дифракція – це суцього хвильове явище. І той факт, що експериментальне положення максимумів відбитих електронів співпав із розрахованими для хвильового процесу с довжиною хвилі де-Бройля, свідчить про

справедливість формули (15.3) і підтверджує хвильові властивості електронів.

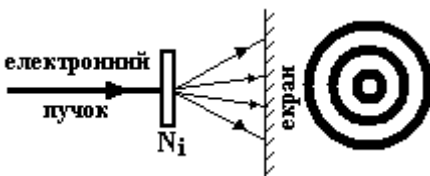


Рисунок 15.2

В 1928 р. англ. Дж.П.Томсон (1856-1940) і укр. П.С.Тартаковський (1895-1940) провели аналогічний дослід, але спостерігали дифракційну картину

електронів, які пройшли через плівку нікелю (рис. 15.2). Але ряд фізиків висловлювали думку, що такі дифракційні картини є результатом взаємодії електронів в пучку між собою, тобто хвильові властивості притаманні потокові великої сукупності частинок. А чи має окремий електрон хвильові властивості? Для вирішення цього питання необхідно позбутися взаємодії електронів між собою, тобто провести досліди з пучками дуже малої інтенсивності. Такі досліди були проведені в Москві у 1949 році Л.М.Біберманом, Н.Г.Сушкіним і В.А.Фабрикантом з використанням над слабких електронних пучків. Період вильоту електрона в 30000 разів перевищував час його проходження через прилад. Були одержані аналогічні дифракційні картини.

Отже хвильові властивості має кожний окремо взятий електрон. Пізніше(у 1930 р.) була виявлена дифракція атомів водню, гелію, а ще пізніше – нейтронів.

Що стосується макроскопічних тіл, то їх дифракцію спостерігати неможливо. Так, наприклад, порошинці масою $m = 10^{-12}$ г при швидкості руху 1 см/с відповідає довжина хвилі

$$\lambda = \frac{h}{mV} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{10^{-15} \cdot 10^{-2}} = 6,62 \cdot 10^{-17} \text{ м.}$$

Для порівняння, діаметр ядро атома порядку 10^{-15} м. Для одержання дифракційної картини розмір перешкоди повинен бути одного порядку з довжиною хвилі (див. висновок в кінці розділу 12.7), тобто $\sim 10^{-16}$ м. Навіть ядро атома перешкода завелика. Тому хвильові властивості макроскопічних тіл не проявляються.

Для описання поведження мікрочастинок в рамках хвильової їх природи вводиться хвильова функція, яка як правило позначається буквою ψ являється функцією чотирьох аргументів: трьох координат і часу. Яка ж природа хвиль де-Бройля та які властивості ψ -функції і який її фізичний зміст?

Хвилі де-Бройля – це не механічні і не електромагнітні хвилі. Дифракційні досліди показали, що ймовірність виявити електрон у певній точці максимальна там, де інтенсивність хвиль де-Бройля теж максимальна. Тому цим хвилям був приписаний імовірнісний характер, або їх ще називають хвилями ймовірності. Так як числове значення ймовірності лежить в межах від 0 до 1 і це число дійсне і позитивне, фізичний зміст приписали не самій хвильовій функції, а

квадрату її модуля. Тобто ймовірність dw виявити частинку в нескінченно малому об'ємові dV пропорційна добутку цього об'єму і квадрата модуля хвильової функції

$$dw = |\psi|^2 \cdot dV. \quad (15.4)$$

Інтеграл 10 дає ймовірність виявити частинку в якомусь об'ємі простору V_{12} . Якщо цей об'єм нескінченно великий і якщо частинка дійсно існує, то ймовірність виявити її дорівнює 1, так як це достовірна подія. Таким чином

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 \cdot dV = 1. \quad (15.5)$$

Цей вираз називається умовою нормування хвильової функції. Це одна із властивостей ψ -функції. Окрім цього у зв'язку з імовірнісним тлумаченням ψ -функція повинна бути однозначною, нерозривною і гладкою, тобто без різких змін. Остання властивість з математичної точки зору означає, що її перші частинні похідні $\frac{\partial \psi}{\partial x}$, $\frac{\partial \psi}{\partial y}$, $\frac{\partial \psi}{\partial z}$, $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ теж повинні бути нерозривними.

15.2 Співвідношення невизначеностей Гейзенберга

Подвійна корпускулярно-хвильова природа мікрочастинок та статистичне (імовірнісне) тлумачення хвильової функції приводить до того, що в квантовій механіці виявляється неможливо одночасно виміряти координату частинки та її імпульс зі скільки завгодно великою точністю. Дійсно, щоб визначити положення і імпульс частинки необхідно «освітити» її і одержати в крайньому разі хоч би один фотон. При цьому, внаслідок дифракції, точність визначення координати частинки не може бути більшою за довжину хвилі фотона. Для точнішого визначення координати необхідно зменшити довжину хвилі зонduючого фотона. Але при цьому зростає імпульс фотона, а разом із цим зростає і зміна імпульсу частинки при зіткненні з ним. Співвідношення невизначеностей сформулював німецький фізик Гейзенберг (1901- 1976) у 1926 сформулював принцип невизначеностей

$$\begin{cases} \Delta x \cdot \Delta p_x \geq h \\ \Delta y \cdot \Delta p_y \geq h \\ \Delta z \cdot \Delta p_z \geq h \\ \Delta E \cdot \Delta t \geq h \end{cases} \quad (15.6)$$

Ці співвідношення дають можливість визначитись, яким із способів (корпускулярним чи хвильовим) описувати поведінку мікрочастинки.

Приклад. Як описувати рух електрона в електронно-променевої трубці, коли невизначеність в імпульсі не перевищує 1%?

$$\text{За умовою } \Delta p = 0,01p. \text{ Тоді } \Delta x = \frac{h}{\Delta p} = 100 \frac{h}{p} = 100 \cdot \lambda.$$

Довжина хвилі де-Бройла за прискорюючої напруги в 1000 в дорівнює

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}} = \frac{h}{\sqrt{2mqU}} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^3}} = 3,9 \cdot 10^{-11} \text{ м}$$

Отже $\Delta x = 100 \cdot \lambda = 3,9 \cdot 10^{-9}$ м. Одержане значення значно менше за геометричні розміри електронно-променевої трубки. Тому можна застосовувати класичні закони.

15.3 Основне рівняння квантової механіки – рівняння Шредингера

Основне рівняння квантової механіки для швидкостей руху мікрочастинки набагато менших за швидкість світла було знайдене австр. фізиком-теоретиком Е.Шредингером (1887-1961) у 1926 р. Воно має в квантовій механіці таке ж значення, як і другий закон Ньютона в класичній механіці (див. розділ 3.1) Обидва рівняння не виводяться, а вважаються постулатами, справедливості яких ґрунтується на співпаданні теоретичних розрахунків з результатами експериментів. Часове рівняння Шредингера має вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \Delta \psi + U \cdot \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (15.7)$$

Тут: $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ - стала Планка, m - маса частинки, $i = \sqrt{-1}$ - уявна одиниця, $U = U(x, y, z, t)$ - функція потенціальної енергії частинки, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа взяття других частинних похідних за координатами.

В розвернутому варіанті рівняння Шредінгера має такий вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + U \cdot \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (15.8)$$

Досить часто розглядаються стаціонарні задачі, незмінні з часом. Це означає, що функція U потенціальної енергії частинки не залежить від часу, тобто є функцією тільки трьох координат xyz . У цьому випадку ψ - функцію можна представити як добуток функції тільки координат і тільки часу, тобто

$$\Psi(x, t) = \psi(x, y, z) \cdot \varphi(t) \quad (15.9)$$

Підставляємо (15.9) в (15.7), або в (15.8)

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \Delta[\psi(xyz) \cdot \varphi(t)] + U(xyz) \cdot \varphi(t) \cdot \psi(xyz) = i\hbar \psi(xyz) \cdot \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

Ділимо це рівняння на $\psi(xyz) \cdot \varphi(t)$. Одержуємо

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\Delta\psi(xyz)}{\psi(xyz)} + U(xyz) = i\hbar \frac{d\varphi(t)}{dt} \cdot \frac{1}{\varphi(t)}$$

Ліва частина цього рівняння є функція координат, права - функція часу. Зрозуміло, що таке рівняння буде виконуватись, коли кожна із його частин дає одну і ту ж константу, яку позначимо буквою E . Фізичний її зміст з'ясуємо пізніше. І так наше рівняння розбилося на

два: тільки координат $-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\Delta\psi(xyz)}{\psi(xyz)} + U(xyz) = E$, або

$$\Delta\psi(xyz) + \frac{2m}{\hbar^2} [E - U(xyz)]\psi(xyz) = 0 \quad (15.10)$$

і тільки часу $i\hbar \frac{d\varphi(t)}{dt} \cdot \frac{1}{\varphi(t)} = E$, або

$$\frac{d\varphi(t)}{\varphi(t)} = -i \frac{E}{\hbar} \cdot dt. \quad (15.11)$$

Рівняння (15.10) називається стаціонарним рівнянням Шредингера. Його розв'язок залежить від виду функції потенціальної енергії $U(x,y,z)$. Рівняння (15.10) легко інтегрується до виду

$$\varphi(t) = \varphi(0) \cdot \exp\left(-i \frac{E}{\hbar} \cdot t\right).$$

Переведемо це комплексне число із показової форми в тригонометричну $\varphi(t) = \varphi(0) \cos(\omega t) + i\varphi(0) \sin(\omega t)$, де

$$\omega = \frac{E}{\hbar}, \text{ або } E = \hbar \cdot \omega = \frac{h}{2\pi} \cdot 2\pi\nu = h\nu.$$

Отже константа E має розмірність енергії і за своїм фізичним змістом дорівнює повній енергії частинки. Тому в рівнянні (15.10) у квадратних дужках стоїть різниця повної і потенціальної енергій, тобто не що інше, як кінетичне енергія частинки.

15.4 Рух мікрочастинки в нескінченно глибокій одновірній потенціальній ямі. Квантування енергії

Розглянемо одну із задач квантової механіки поведінки мікрочастинки в нескінченно глибокій потенціальній ямі.

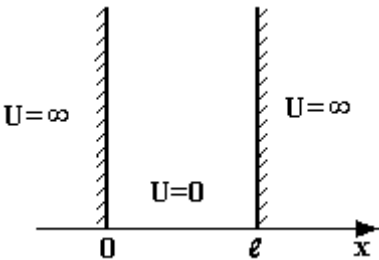


Рисунок 15.3

Мікрочастинка знаходиться між двома нескінченними паралельними площинами на відстані l одна від другої. Графічний (рис.15.3) і аналітичний вид потенціальної енергії такий

$$U(x) = \begin{cases} \infty & \text{при } x < 0 \\ 0 & \text{при } 0 \leq x \leq l \\ \infty & \text{при } x > l \end{cases} \quad (15.11)$$

Необхідно записати та розв'язати стаціонарне рівняння Шредингера (15.9) для трьох областей простору. Але із фізичних міркувань ясно, що за межами ями частинка знаходитись не може, так як вона не може

мати нескінченно велику енергію. Отже в цих областях хвильова функція $\psi(x) = 0$. Всередині ями, тобто при $0 \leq x \leq \ell$ рівняння (15.10) набуває виду

$$\Delta\psi(xyz) + \frac{2m}{\hbar^2} E \cdot \psi(xyz) = 0. \quad (15.12)$$

У нашій задачі функція потенціальної енергії є функція одного аргументу координати x . Тому і хвильова функція ψ буде мати один аргумент – x . Тому в операторі Лапласа (15.8) частинна похідна по x перейде в повну, а похідні по y та z дорівнюють нулю. Одержуємо

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi = 0. \quad (15.13)$$

Постійний множник $\frac{2mE}{\hbar^2}$ позначимо як ω^2 . Одержуємо рівняння

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \omega^2 \psi = 0 \text{ незатухаючого гармонічного коливання (див. (10.16)}$$

в розділі 10.3). Розв'язок такого рівняння має вид гармонічної функції

$$\psi(x) = A \cdot \sin(\omega x + \alpha), \quad (15.14)$$

де A і α – константи інтегрування, які знайдемо із умови нерозривності ψ -функції на стінках ями, тобто маємо $\psi(0) = 0$ і $\psi(\ell) = 0$, або

$$\begin{cases} A \sin \alpha = 0 \\ A \sin(\omega \ell + \alpha) = 0 \end{cases}. \quad (15.15)$$

Константа $A \neq 0$, так як у цьому випадку ψ - функція при всіх значеннях аргументу x буде нульовою, що фактично означає відсутність частинки. Але ж вона є. Із (15.15) одержуємо, що $\sin \alpha = 0$, або $\alpha = 0$, і $\sin \omega \ell = 0$, або $\omega \ell = \pm n\pi$, де $n = 1, 2, 3, \dots$. Тут допустиме з математичної точки зору значення відкинуте з фізичних міркувань.

Дійсно, згадаємо $\frac{2mE}{\hbar^2} = \omega^2$. Звідки повна енергія частинки

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m\ell^2} n^2. \quad (15.16)$$

Рівність $n = 0$ означає, що $E_n = 0$, тобто частинка не існує.

Вираз (15.16) показує, що повна енергія мікрочастинки приймає певні дискретні значення, при різних значеннях n , тобто квантується. Такий результат не потребував окремого постулату, а одержаний із єдиного постулату квантової механіки – рівняння Шредінгера.

Константу інтегрування A знайдемо із умови (15.5) нормування хвильової функції, причому інтегрування достатньо провести в межах ями, оскільки за її межами $\psi = 0$.

$$\int_0^{\ell} A^2 \sin^2 \frac{\pi n}{\ell} \cdot x dx = A^2 \int_0^{\ell} \frac{1 - \cos \frac{2\pi n}{\ell}}{2} dx = A^2 \frac{\ell}{2} - A^2 \frac{\ell}{4\pi n} \sin \frac{2\pi n}{\ell} x \Big|_0^{\ell} = A^2 \frac{\ell}{2} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{\ell}}.$$

Таким чином, набір нормованих хвильових функцій має вид

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin \frac{\pi \cdot n}{\ell} x, \quad (15.17)$$

а квадрат її модуля

$$|\psi^2| = \frac{2}{\ell} \sin^2 \frac{\pi \cdot n}{\ell} x. \quad (15.18)$$

Набір значень енергії (15.16) та власних значень хвильової функції (15.17) та квадрату її модуля (15.18) показані на рис. 15.4.

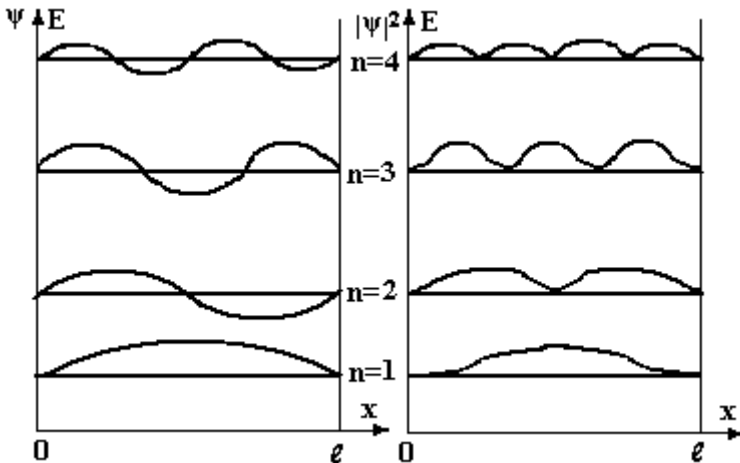


Рисунок 15.21

При $n = 1$ основний стан мікрочастинки. Її енергія мінімальна. Імовірність знаходження частинки максимальна в центрі ями. При збудженні $n = 2$ енергія зростає і частинка здійснює гармонічні коливання. Імовірність знаходження частинки максимальна посередині лівої і правої половин ями. При подальшому збудженні $n = 3$ коливання частинки стають негармонічними, а нагадують биття (див. розділ 10.9). Імовірність знаходження частинки максимальна в центрі ями, а також посередині лівої і правої третин ями.

15.5 Лінійний гармонічний квантовий осцилятор

Лінійний гармонічний квантовий осцилятор – це мікрочастинка, яка здійснює коливання навколо свого положення рівноваги вздовж одного напрямку під дією сили, пропорційної зміщенню $F = -kx$. Його можна уявити як пружинний маятник зменшений до мікроскопічних розмірів. Він моделює коливання атомів в молекулі або в кристалі твердого тіла. Потенціальна енергія виражається відомою (див. розділ 10.6) формулою $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$.

Графіком цієї функції є квадратна парабола отже маємо задачу, аналогічну попередній тобто рух мікрочастинки в нескінченно глибокій потенціальній ямі, але не з вертикальними а параболічними стінками (рис.15.5). Стаціонарне одномірне рівняння Шредінгера має вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - \frac{kx^2}{2} \right) \psi = 0. \quad (15.19)$$

Розв'язувати це рівняння не будемо із-за складності, яка зумовлена

наявністю члена kx^2 , але ясно, що основний результат розв'язку такий же, як і у випадку ями з вертикальними стінками, а саме – дискретний енергетичний спектр. Хвильова функція задовольняє своїм властивостям (див. розділ 15.1) при умові дискретної зміни енергії за законом (рис.15.5)

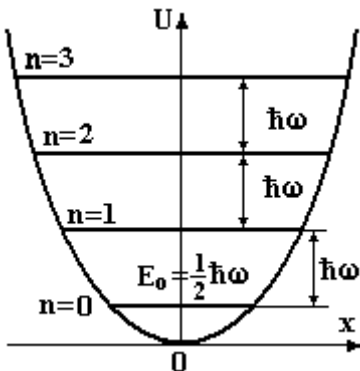


Рисунок 15.5

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega, \quad (15.20)$$

де $n = 0, 1, 2, \dots$ - квантові числа, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ - циклічна частота коливань (див. розділ 10.3). Звернемо увагу, що у не збудженому (основному) стані при $n = 0$ осцилятор має енергію відмінну від нуля, тобто коливання навіть при температурі 0К не припиняються. Якби вони припинились, то це означало б, що координата ($x = 0$) і імпульс ($p_x = 0$) одночасно визначені точно, що протирічить принципу невизначеностей Гейзенберга (15.6).

В теорії твердого тіла коливання атомів кристалічної решітки описуються законами коливання квантового осцилятора. Інтервал енергій між сусідніми рівнями $\hbar\omega$ однаковий.

Такі рівні називаються еквідистантними, а квант коливальної енергії $\hbar\omega$ називається фононом (не путайте з фотоном).

Важливою є задача про середню енергію осцилятора, здатного приймати будь-які значення E_n із ряду (15.20). Її вперше розрахував Планк

$$E_{\text{ср}} = \frac{1}{2} \hbar \omega + \frac{\hbar \omega}{\exp\left(\frac{\hbar \omega}{kT}\right) - 1}. \quad (15.21)$$

15.6 Атом водню за квантовою теорією. Дослід Штерна і Герлаха. Спін електрона

В атомі водню, або у гідрогеноподібних іонах, потенціальна енергія взаємодії електрона з ядром дорівнює

$$U = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (15.22)$$

де: Z – порядковий номер елемента в таблиці Менделєєва, e – елементарний заряд (заряд електрона), r – радіус орбіти електрона, ϵ_0 – діелектрична стала.

Стаціонарне рівняння Шредінгера має вид

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0. \quad (15.23)$$

Оскільки поле являється центральносиметричним, розв'язувати його доцільно в сферичних координатах r , θ , φ . Розв'язок цього рівняння виходить за рамки програми, тому зупинимось тільки на його результатах.

Задача трьохмірна, тому із необхідності виконання властивостей хвильової функції виникає три квантових числа:

а) Головне квантове число $n = 1, 2, 3, \dots$, яке задає ряд власних значень енергії електрона на орбіті за виразом

$$E_n = -\frac{Z^2 e^4 m}{8\epsilon_0^2 \hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}, \quad (15.24)$$

яке, до речі, співпадає з (14.8) за теорією Бора.

б) Орбітальне (азимутальне) квантове число $\ell = 0, 1, 2, \dots, n-1$ характеризує ступінь витягнутості орбіти і задає ряд моментів імпульсу електрона на орбіті

$$L_\ell = \hbar \sqrt{\ell(\ell+1)}. \quad (15.25)$$

в) Магнітне квантове число, яке пробігає ряд значень $m = -\ell, -(\ell-1), \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, (\ell-1)$. (15.26)

Воно задає ряд можливих значень проекцій орбітального механічного моменту імпульсу електрона на напрямок силового поля, найчастіше магнітного.

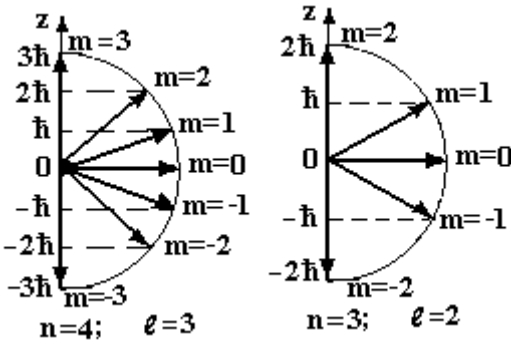


Рисунок 15.6

$$L_{\ell z} = \pm m\hbar. \quad (15.27)$$

На рис.15.6 зображено можливі значення для двох випадків: ($n = 4$, $\ell = 3$) і ($n = 3$, $\ell = 2$).

У 1922 німецькі фізики О.Штерн (1888-1969р.) і В.Герлах (1889-1979р.)

експериментально вимірювали магнітні моменти атомів. Були

вибрані такі атоми, у яких сумарний орбітальний магнітний момент дорівнював нулю. Таким вимогам задовольняли атоми літію, срібла, водню. Передбачалось знайти магнітний момент по відхиленню пучка атомів у неоднорідному магнітному полі, яке формувалось в зазорі електромагніту з осердям спеціальної форми (рис.15.7). Але виявилось, що пучок здавалось би однакових за магнітними властивостями атомів поділявся на два приблизно однакової інтенсивності. Вони відхилялися в різні сторони. Тобто пучок за магнітними властивостями складався із двох типів атомів.

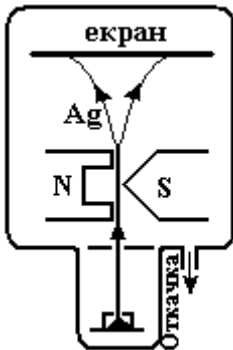


Рисунок 15.7

Детальне дослідження атомних спектрів показало, що кожна спектральна лінія складається із двох близько розміщених ліній, тобто уявляють собою дублет. Рішення рівняння Шредингера не дає що до цього ніяких пояснень.

У 1925 р. амер. фізики С.А. Гоудсміт (1902-1979р.) і Д.Ю.Уленбек (1902-1979р.) запропонували пояснити ці факти наявністю у електрона власних (тобто не зв'язаними з орбітальним, або другим рухом) механічного і магнітного моментів – спіна (від англ. – веретено). Було введено четверте квантове число s спінове, яке може приймати два значення $s = \pm 0,5$. Спроба пояснити існування спіна обертанням електрона навколо своєї осі, по аналогії з Землею, не підтвердились гіромагнітними дослідженнями з феромагнетиками. Природа спіна поки що не в'яяснена. Він розглядається як невід'ємна властивість, як заряд, маса.

Механічний спіновий момент електрона знаходиться через спінове число так

$$L_s = \hbar \sqrt{s(s+1)}, \quad (15.28)$$

а його проекція на силове поле

$$L_{sz} = s\hbar. \quad (15.29)$$

Вектори магнітних моментів як орбітальних, так і спінових протилежні, (рис.15.8) так як електрон має від'ємний заряд. Величина їх визначається через магнетон Бора

$$\mu_B = \frac{\mu_0 q}{2m_{\text{ел}}} \hbar = 1,15 \cdot 10^{-29} \text{ В} \cdot \text{с} \cdot \text{м}. \quad (15.30)$$

Орбітальний магнітний момент і його проекція визначаються відповідними виразами

$$M_\ell = -\frac{\mu_B}{\hbar} L_\ell = -\mu_B \sqrt{\ell(\ell+1)} \quad \text{і} \quad (15.31)$$

$$M_{\ell z} = -\frac{\mu_B}{\hbar} L_{\ell z} = -\mu_B \cdot m. \quad (15.32)$$

Для спінового магнітного моменту і його проекцій маємо

$$M_s = -2\frac{\mu_B}{\hbar} L_s = -2\mu_B \sqrt{s(s+1)} \quad \text{і} \quad (15.33)$$

$$M_{sz} = -2\frac{\mu_B}{\hbar} L_{sz} = -2\mu_B \cdot s \quad (15.34)$$

Відношення магнітного моменту до механічного називається гіромагнітним відношення Г. Із виразів (15.31)-(15.34) одержуємо що спінове гіромагнітне відношення в два рази більше за орбітальне. Дійсно, спінове

$$\Gamma_s = \frac{M_s}{L_s} = -2\frac{\mu_B}{\hbar}, \text{ а} \quad (15.35)$$

орбітальне

$$\Gamma_\ell = \frac{M_\ell}{L_\ell} = -\frac{\mu_B}{\hbar}. \quad (15.35)$$

Такі результати підтверджуються гіромагнітними дослідями, про які мова буде йти далі.

В спектроскопії числові значення головного квантового числа ф. тобто електронні шари, прийнято позначати великими латинськими літерами (табл.15.1). Електрони, що входять у підгрупи зі

значенням орбітального квантового числа $\ell=0; 1; 2; 3; 4; \dots$

Таблиця 15.1

| n | $\ell=0, \text{ s}$ | $\ell=1, \text{ p}$ | $\ell=2, \text{ d}$ | $\ell=3, \text{ f}$ | $\ell=4, \text{ g}$ | Макс.к-ть ел. |
|---|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------|
| 1 | K | 2 | | | | 2 |

| | | | | | | | |
|---|----------|---|---|----|----|----|----|
| 2 | L | 2 | 6 | | | | 8 |
| 3 | M | 2 | 6 | 10 | | | 18 |
| 4 | N | 2 | 6 | 10 | 14 | | 32 |
| 5 | O | 2 | 6 | 10 | 14 | 18 | 50 |

називають відповідно s- p- d- f- g- електронами (табл.15.1). Стани електронів в атомі прийнято записувати так: головне квантове число n – цифрою, орбітальне квантове число ℓ - відповідною літерою, числова ступінь біля цієї літери вказує кількість електронів на підрівні. В таблиці 15.1 приведена також кількість електронів на підрівнях та їх максимальна кількість у відповідному шарі..

В таблиці 15.2 приведені можливі комбінації квантових чисел та максимальна кількість електронів на підрівнях і стани електронів.

Таблиця 15.2

| Головне кв. число n | | Орбітальне кв. число ℓ | | Магнітне кв. число m | Спінове кв.число s | | К-ть електронів | Стан електрона | |
|-----------------------|-----------|-----------------------------|-----------|------------------------|----------------------|-----------|-----------------|----------------|-----------|
| Число | Буква | Число | Буква | | Чис | Позн. | | | |
| 1 | K | 0 | s | 0 | $\pm 0,5$ | ↑↑ | 2 | $1s^2$ | |
| 2 | L | 0 | s | 0 | $\pm 0,5$ | ↑↑ | 2 | $2s^2$ | |
| | | 1 | p | -1 | $\pm 0,5$ | ↑↑ | | | |
| | | | | 0 | $\pm 0,5$ | ↑↑ | 6 | $2p^6$ | |
| 3 | M | 0 | s | 0 | $\pm 0,5$ | ↑↑ | | | 2 |
| | | | | 1 | p | -1 | $\pm 0,5$ | ↑↑ | |
| | | 0 | $\pm 0,5$ | | | ↑↑ | 6 | $3p^6$ | |
| | | 1 | $\pm 0,5$ | | | ↑↑ | | | |
| | | 2 | d | 2 | -2 | $\pm 0,5$ | ↑↑ | 10 | $3d^{10}$ |
| | | | | | -1 | $\pm 0,5$ | ↑↑ | | |
| 0 | $\pm 0,5$ | | | | ↑↑ | | | | |
| 1 | $\pm 0,5$ | | | | ↑↑ | | | | |
| | | | | 2 | $\pm 0,5$ | ↑↑ | | | |

Розглянемо порядок заповнення атомних енергетичних рівнів електронами. Справа в тому, що заповнення іде не в порядку монотонного зростання головного а потім орбітального квантових чисел, а по мірі монотонного зростання енергії. А вона ж зростає

монотонно по мірі зростання суми головного та орбітального квантових чисел. Отже послідовність заповнення підрівнів відбувається у відповідності з правилом радянск. фізика В.М.Клечковського (1900-1972р.), як раз по мірі зростання суми $(n + \ell)$. При однаковій сумі спочатку заповнюється підрівень з меншим значенням головного квантового числа n . Приведемо суму $(n + \ell)$ для підрівнів охопивши всю таблицю Менделєєва (до порядкового номера 110) (табл.15.3)

Таблиця 15.3

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Ел.структ. | 1s | 2s | 2p | 3s | 3p | 3d | 4s | 4p | 4d | 4f | 5s | 5p | 5d | 5f | 5g | 6s | 6p | 6d | 6f | 6g | 6h | 7s |
| $(n + \ell)$ | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 4 | 5 | 6 | 7 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 7 |

Впорядкуємо ці ряди за правилом Клечковського (табл.15.4), в якому є два виключення: перше $6s \rightarrow 5d^1 \rightarrow 4f^{14} \rightarrow 5d^9$;
друге $7s \rightarrow 6d^1 \rightarrow 5f^{14} \rightarrow 6d^9$

Таблиця 15.4

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----------------|----|-----------------|----|----|-----------------|-----|-----------------|--|--|--|
| $(n + \ell)$ | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 8 | 8 | 8 | | | |
| Стан ел. | 1s | 2s | 2p | 3s | 3p | 4s | 3d | 4p | 5s | 4d | 5p | 6s | 5d ¹ | 4f | 5d ⁹ | 6p | 7s | 6d ¹ | 5f | 6d ⁹ | | | |
| Макс.№ | 2 | 4 | 10 | 12 | 18 | 20 | 30 | 36 | 38 | 48 | 54 | 56 | 57 | 71 | 80 | 86 | 88 | 89 | 103 | 112 | | | |

В середньому рядку цієї таблиці вказана послідовність заповнення підрівнів електронами, а в останньому – максимальний порядковий номер елемента з заданою структурою. Наприклад, візьмемо порядковий номер 56, це барій (Ba). Його електронна оболонка може бути записана з середнього рядка від початку до клітинки 6s (№ 56)

Ba: $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 5d^{10} 4p^6 5s^2 4d^{10} 5p^6 6s^2$. Видно, що на зовнішній оболонці $6s^2$ знаходиться два електрони у s-стані, Отже він двохвалентний і дійсно знаходиться у 2-й групі таблиці Менделєєва.

Візьмемо другий елемент, наприклад за № 49, це індій (In) Його електронна структура:

In: $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 5d^{10} 4p^6 5s^2 4d^{10} 5p^1$. Видно, що зовнішня оболонка $5s^2 5p^1$ містить 3 електрони: 2 у s-стані 1 у p-стані. Всього 3, отже індій трьохвалентний і дійсно знаходиться в 3-групі таблиці Менделєєва.

15.7 Спектральні закономірності.

Правило добору для оптичних електронних переходів

За квантовою теорією атом а, як і за теорією Бора, при поглинанні кванта світла атомом електрон переходить на збуджений більш високий енергетичний рівень, а випромінює квант світла при зворотному переході. При цьому зберігається закон збереження енергії. Але фотон, як і електрон, має власний момент імпульсу, спин, причому в два рази більший, ніж у електрона, тобто \hbar . Ясно, що електронні переходи за участі фотона, або такі переходи ще називають оптичними, повинен виконуватись ще й закон збереження моменту імпульсу, про який в теорії Бора взагалі не йде мова. Як і спіновий момент електрона, спин фотона може давати на виділений напрямок лише дві проекції $\pm\hbar$. Отже при оптичних переходах атом не тільки віддає або одержує енергію, а і змінює свій момент імпульсу на величину моменту імпульсу фотона, тобто на \hbar . Такій зміні відповідає зміна орбітального квантового числа на одиницю, тобто

$$\Delta\ell = \pm 1. \quad (15.36)$$

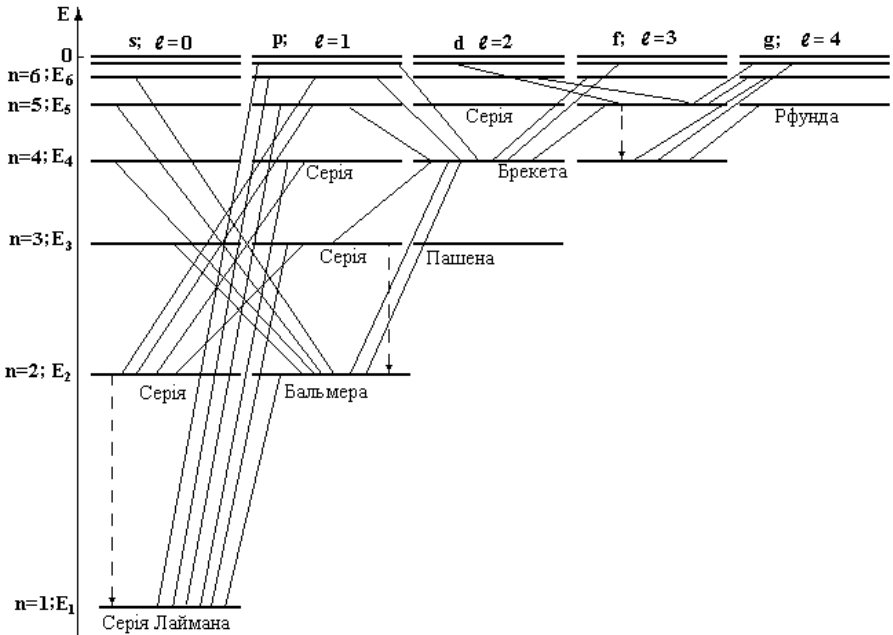


Рисунок 15.8

Ця умова, яка вказує можливі (дозволені) електронні переходи в атомі за участі фотона носить назву правила добору для оптичних електронних переходів.

Але у збуджений стан атом не обов'язково переходить, одержуючи енергію від поглинутого фотона. Наприклад, електрон може перейти на більш високий енергетичний рівень за рахунок енергії електричного поля (в газовому розряді) або при бомбардуванні електронами. При цьому виконання правила (15.36) не обов'язкове. Якщо електрон потрапив на такий рівень, з якого він не може повернутися на нижчий рівень зі зміною орбітального числа на ± 1 , то він і не переходить. Такий рівень називається метастабільним. Покажемо можливі оптичні переходи (тонкі лінії) на енергетичному спектрі атома, на якому враховане не тільки головне, а і орбітальні квантові числа (рис.15.8). Напрямки переходів навмисно не ставились, так як показані переходи можливі в обох напрямках. Рівень $2s$ метастабільний. Пунктиром показані декілька неможливі оптичних

переходів, так як при цьому орбітальне квантове число не змінюється. Як видно з рис.15.8 оптичні переходи можливі тільки при переході між сусідніми підгрупами, або кажуть можливі непрямі, невертикальні оптичні переходи.

15.8. Закономірності рентгенівського випромінювання. Закон Мозлі.

Випромінювання, відкрите у 1895 р. нім. фізиком В.Рентгеном (1845-1923р) і назване на його честь рентгенівським, виникає при гальмуванні речовиною швидких електронів. При цьому кінетична енергія електронів перетворюється в енергію електромагнітного випромінювання коротких довжин хвиль. Діапазон таких рентгенівських променів (РП)

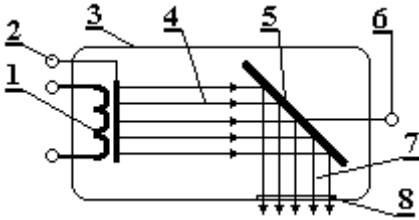


Рисунок 15.9

складає від 0,001 до 80 нм. Для порівняння найкоротша фіолетова довжина хвилі видимого діапазону складає 400 нм.

Для одержання РП використовують спеціальні електровакуумні лампи - рентгенівські трубки.

Вони складаються (рис.15.9) із скляного чи металевого корпусу 3, в який впаяні нитка розжарювання 1 катода 2 і анод 5. Пучок електронів 4 прискорюється високою 10 – 200 кВ напругою 2-6 і гальмується охолоджуваній водою анод 5. Рентгенівське випромінювання 7 виходить через вікно 8.

Виникають два типи РП. **Перший тип** має

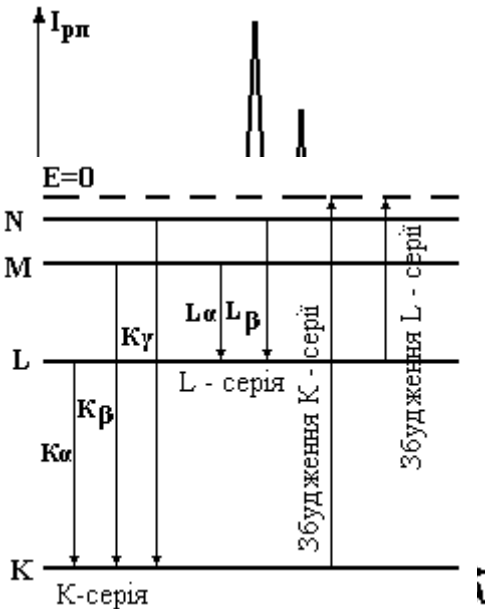


Рисунок 15.11

суцільний спектр подібний до спектру білого світла і називається білим. Це випромінювання має гальмівну природу. Прискорений до великої швидкості електрон різко гальмується в матеріалі анода, випромінюючи при цьому електромагнітні хвилі у відповідності з класичною електродинамікою. Частина енергії електрона витрачається на нагрівання анода. Оскільки ця втрата різна для різних електронів, то і випромінюється суцільний спектр (рис.15.10), правда обмежений з боку коротких довжин хвиль. Хвильова теорія випромінювання не може пояснити цього обмеження. На основі ж квантових уявлень наявність $\lambda_{\text{мін}}$ пояснюється законом збереження енергії і неподільністю фотона. Ясно, що енергія рентгенівського кванта не може перевищувати кінетичну енергію прискореного напругою U електрона, тобто

$$\frac{hc}{\lambda_{\text{мін}}} = eU \Rightarrow \lambda_{\text{мін}} = \frac{hc}{eU}. \quad (15.37)$$

Дослідження залежності $\lambda_{\text{мін}} = f(U)$ виявилась найточнішим методом визначення сталої Планка h .

Другий тип РП – характеристичне рентгенівське випромінювання. Воно виникає при досить високій прискорюючій напрузі. Спектр його лінійний у вигляді гострих піків, які накладаються на суцільний спектр (рис.15.10). Набір цих ліній пояснюється так. Прискорений електрон вибиває електрон із внутрішньої оболонки атома, наприклад із К-оболонки ($n = 1$). На звільнений енергетичний рівень можуть перейти електрони із більш віддалених від ядра оболонок L, M, N,...(рис.15.11). Кожна із серій містить набір окремих ліній, які позначаються в порядку зменшення довжини хвилі $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ ($K\alpha, K\beta, K\gamma, \dots L\alpha, L\beta, L\gamma, \dots$). Набір цих ліній для кожного елемента свій, і не залежить від того, знаходиться атом у хімічній сполуці в молекулі, кристалічній решітці чи вільний. Пояснюється це тим, що в зв'язок вступають зовнішні, валентні електрони внаслідок чого змінюється спектр видимого ультрафіолетового чи інфрачервоного випромінювання. Глибокі ж рівні при цьому не зазнають збурень.

У1913 р. англ. фізик Г.Мозлі (1887-1915р.) Встановив співвідношення, яке називається законом Мозлі

$$\nu = R_{\nu} (Z - \sigma)^2 \cdot \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) \quad (15.38)$$

яка схожа на формулу (14.10) Бальмера, в якій заряд ядра Z зменшений на величину σ . Ця поправка враховує екрануючу (послаблюючу) дію електронів, що знаходяться на ближчих до ядра оболонках для більш віддалених від ядра електронів. Наприклад, для К-оболонки

$\sigma = 1$. У виразі (15.8) : R_{ν} – стала Рідберга, n_2 – головне квантове число шару, на який переходять електрони, $n_1 = n_2 + 1$ головне квантове число оболонки, з якої переходять електрони.

ЧАСТИНА 3.