

УДК004.9

Дейнега Л.Ю.¹, Басанець М.І.², Діденко А.Є.³, Камєнський Д.В.³

¹ старш. викл. НУ «Запорізька політехніка»,

² студ. гр. КНТ-117 НУ «Запорізька політехніка»,

³ студ. гр. КНТ-127 НУ «Запорізька політехніка»,

СКЛАДАННЯ РОЗКЛАДУ РОБІТ ДЛЯ ЗАДАЧ З ФУНКЦІЯМИ ШТРАФІВ

Проблема складання графіку на виконання деяких задач є вкрай актуальною через наявність пріоритетів у задач та штрафів за невиконання завдання. Іноді у групі людей декілька задач мають послідовно проходити через кожну людину, і тоді цікавить оптимальний час виконання цих задач. В загальному вигляді ці задачі описуються верстатами та часом опрацювання однієї деталі (задачі) на ньому і відомі як задачі теорії розкладів, або «Schedulingjobs».

Розглянутий в даній роботі алгоритм описує типову задачу з теорії розкладів – складання розкладу робіт для задач з функціями штрафів. Ця задача відома як задача Джонсона з одним верстатом, названа на честь вченого, що перший описав оптимальний алгоритм її вирішення. Алгоритми, що були запропоновані для вирішення даної задачі до Джонсона, працювали не менш як з квадратичною асимптотикою ($O(n^2)$). Алгоритм, розглянутий в даній роботі, працює з асимптотикою ($O(n \log n)$).

Задача Джонсона з одним верстатом – задача створення оптимального розкладу опрацювання n деталей на єдиному верстаті, якщо i -та деталь опрацьовується на ньому за час t_i , а за t секунд очікування до опрацювання цієї деталі платиться штраф $f_i(t)$.

Таким чином, задача полягає в тому, щоб знайти такий порядок опрацювання деталей, що розмір штрафу мінімальний. Якщо через p_i позначати номери деталей, то отримаємо наступну суму штрафу:

$$F(n) = f_{n_1}(0) + f_{n_2}(t_{n_1}) + \dots + f_{n_n} \left(\sum_{i=1}^{n-1} t_{n_i} \right) \quad (1)$$

Вирішимо цю задачу в випадку, якщо усі $f_i(t)$ лінійні. Після цього прийому вирішення задачі можна використовувати для інших видів функцій. Нехай функція штрафу має вигляд:

$$f_i(t) = c_i \cdot t, \quad (2)$$

де c_i – невід’ємні числа. В цих лінійних функціях вільний член дорівнює

нулю.

Зафіксуємо деякий розклад – перестановку P . Зафіксуємо деякий номер $i = 1 \dots n - 1$, і нехай перестановка P' дорівнює перестановці P , в якій замінили місцями i -ий та $i+1$ -ий елементи. Розглянемо, як саме змінився штраф F . Легко побачити з формули (1), що зміни відбулися лише в доданках з номерами i та $i+1$.

Якщо розклад P є оптимальним, то будь-яка зміна призводить до збільшення штрафу (або збереження значення штрафу). Таким чином, оптимальний розклад можна отримати, просто відсортувавши усі деталі за відношенням c_i до t_i в зворотному порядку.

Потрібно зазначити, що цей алгоритм було отримано так званим перестановочним прийомом: переставлено місцями два сусідні елементи розкладу, вираховано, наскільки при цьому змінився штраф і звідси отримано алгоритм пошуку оптимального розкладу.

Дана задача вирішується лише для трьох видів функцій штрафу: лінійної, експоненціальної та однакових монотонних функцій. Для всіх інших випадків перестановочний прийом не має сенсу та не працює (Теорема Лившиця-Кладова). В усіх трьох випадках шуканий оптимальний розклад може бути знайдений звичайним сортуванням, що використовує порівняння, тобто за $O(n \log n)$.

Даний алгоритм був реалізований мовою програмування C++, його робота протестована на декількох наборах даних. За результатами роботи алгоритму можна зробити наступні висновки.

Завдання складання розкладу робіт для задач з функціями штрафів можуть бути вирішене простим сортуванням послідовності за знайденим компаратором. Компаратор знаходиться за допомогою прийому перестановки двох сусідніх елементів послідовності та визначення внесених таким чином змін в шукані величини. Асимптотика алгоритму залежить від використаного методу сортування. Оптимальні методи сортування працюють за $O(n \log n)$, тому асимптотика розглянутих алгоритмів також $O(n \log n)$.