

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Запорізький національний технічний університет

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання контрольних робіт
(для студентів заочної форми навчання)
та РГР (для студентів денної форми
навчання) з вищої математики
(скорочена форма навчання)
(2 семестр, 3 частина)

2016

Методичні вказівки до виконання контрольних робіт (для студентів заочної форми навчання) та РГР (для студентів денної форми навчання) з вищої математики (скорочена форма навчання) (2 семестр, 3 частина) / Укл. : Килимник І.М., Полякова Т.Г. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2016 –90 с.

Укладачі: Килимник І.М., к.т.н., доцент,
Полякова Т.Г. асистент

Комп'ютерна верстка

Давиденко С.І.

Відповідальний за випуск:

Килимник І.М., к.т.н., доц.

Затверджено на засіданні кафедри
вищої математики ЗНТУ
Протокол № 8 від 23.03.2016 р.

ЗМІСТ

	Стор
Правила оформлення та виконання контрольної роботи (РГР)	4
Контрольна робота (РГР) № 4.2 Теорія ймовірностей. Елементи математичної статистики	5
1 Вказівки до виконання контрольної роботи (РГР) по темі «Теорія ймовірностей. Елементи математичної статистики»	5
1.1 Елементи комбінаторики	5
1.2 Події. Алгебра подій	6
1.3 Ймовірність випадкових подій	7
1.3.1 Теорема додавання ймовірностей несумісних подій	10
1.3.2 Теорема множення ймовірностей	11
1.3.3 Теорема додавання ймовірностей сумісних подій	13
1.3.4 Формула повної ймовірності та формула Байєса	14
1.3.5 Формула Бернуллі	16
1.3.6 Локальна теорема Лапласа	18
1.3.7 Інтегральна теорема Лапласа	19
1.3.8 Теорема Пуассона	20
1.4 Виипадкові величини	22
1.4.1 Дискретні випадкові величини (ДВВ)	23
1.4.2 Неперервні випадкові величини (НВВ)	29
1.5 Закон великих чисел	35
1.6 Система випадкових величин	36
1.7 Умовні закони розподілу	41
1.8 Лінійна регресія. Прямі лінії середньоквадратичної регресії	45
1.9 Статистичне оброблення результатів спостережень	48
1.10 Інтервальні оцінки параметрів. Довірчі інтервали	51
1.11 Перевірка статистичних гіпотез	55
2 Індивідуальні завдання	65
3 Довідковий матеріал	81
Література	90

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕННЯ ТА ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ (РГР)

1. Студент повинен виконувати контрольну роботу (РГР) в окремому зошиті.

2. На обкладинці зошита треба записати номер контрольної роботи (РГР), назву дисципліни, з якої виконується контрольна робота (РГР), номер академічної групи, прізвище, ім'я по батькові повністю. В правому верхньому куті вказати шифр – номер залікової книжки.

3. В контрольній роботі (РГР) повинні бути розв'язані всі завдання, вказані викладачем. Розв'язання завдань необхідно записувати в порядку номерів завдань, зберігаючи їх послідовність. Умова задачі в завданні переписується повністю.

4. Номер задачі в завданні вибирають таким чином: дві останні цифри шифру треба поділити на 30. Остача від ділення відповідає номеру задачі в завданні.

Якщо остача дорівнює нулю, то студент розв'язує 30 задачу завдання.

5. Контрольна робота (РГР) подається викладачеві на перевірку і захищається студентом на консультаціях. Контрольна робота (РГР), виконана не за своїм варіантом, не зараховується.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА (РГР) № 4.2

Теорія ймовірностей. Елементи математичної статистики.

1 Вказівки до виконання контрольної роботи (РГР) по темі «Теорія ймовірностей. Елементи математичної статистики»

1.1 Елементи комбінаторики

Перестановками з n елементів називають сполуки, що містять всі n елементів і відрізняються між собою лише їх порядком.

Кількість перестановок з n елементів обчислюється за формулою

$$P_n = n!, \text{ де } n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Прийнято, що $0! = 1$. Корисна рекурентна формула $P_n = n \cdot P_{n-1}$.

Розміщеннями з n елементів по m в кожному називають такі сполуки, в кожному з яких входять m елементів, узятих з даних n елементів і які відрізняються одна від одної або самими елементами, або порядком їх розташування. Число розміщень з n елементів по m знаходять за формулою:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \quad \text{або} \quad A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1).$$

За змістом визначення ясно, що $m \leq n$.

Комбінаціями з n елементів по m називають сполуки, в кожному з яких входять m елементів, взятих з даних n елементів і які відрізняються одна від одної, принаймні, одним елементом (порядок не враховуємо).

Число комбінацій з n елементів по m знаходять за формулою:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{m!} \quad \text{або} \quad C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

На практиці часто використовують першу формулу для обчислення C_n^m .

Задача 1. Менеджер щоденно переглядає 6 видань економічного змісту. Якщо порядок перегляду видань випадковий, то скільки існує способів його здійснення?

Розв'язування. Способи перегляду видань розрізняються лише порядком, склад видань при кожному способі незмінний. Отже, при розв'язанні цієї задачі необхідно розрахувати число перестановок

$$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$

Задача 2. Правління комерційного банку вибирає з 10 кандидатів 3 людини на різні посади, всі 10 кандидатів мають рівні шанси. Скільки різних груп по 3 людини можна скласти з 10 кандидатів?

Розв'язування. Оскільки групи по 3 людини можуть відрізнятися і складом претендентів, і заповнюваними ними вакансіями, тобто порядком, то необхідно розраховувати число розміщень з 10 елементів по 3 елемента.

$$A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$$

Задача 3. Правління комерційного банку вибирає з 10 кандидатів 3 людини на однакові посади, всі 10 кандидатів мають рівні шанси. Скільки різних груп по 3 людини можна скласти з 10 кандидатів?

Розв'язування. Склад різних груп повинен відрізнятися, принаймні, хоча б одним кандидатом і порядок вибору не має значення, отже, цей вид з'єднань є комбінаціями.

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$$

1.2 Події. Алгебра подій

Подією називатимемо будь-який факт, який може статися або не статися при певному комплексі умов. Події позначатимемо великими латинськими буквами $A, B, C, \dots$. При кожному здійсненні певного комплексу умов обов'язково відбувається деяка подія.

Прийнято позначати через $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \dots$ події, **протилежні** подіям A, B, C .

Серед всіх подій виділимо дві крайні:

а). подія U називається **вірогідною**, якщо вона настає при кожній реалізації комплексу умов. Наприклад, при підкиданні двох гральних кісток сума очок, що випали, завжди не менша двох;

б) подія $\emptyset$ називається **неможливою**, якщо вона не настає при жодній реалізації комплексу умов. Наприклад, при киданні двох гральних кісток сума очок, що випали, не може бути більше дванадцяти;

Подія, що в результаті певного комплексу умов може відбутися або не відбутися, називається **випадковою**.

Сукупність операцій, що виконуються над подіями, утворює алгебру подій.

Сумою або **об'єднанням** двох подій A і B називається така подія C , яка полягає в здійсненні або події A , або події B , або подій A і B разом:

$$C = A + B \text{ або } C = A \cup B.$$

Добутком або **перетином** двох подій A і B називається така подія C , яка полягає в здійсненні і події A , і події B :

$$C = AB \text{ або } C = A \cap B.$$

Події A і B називаються **несумісними**, якщо поява однієї з них виключає появу іншої:

$$A \cap B = \emptyset$$

Події A_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) утворюють **повну групу подій**, якщо

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = U; \quad A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$$

1.3 Ймовірність випадкових подій

Класичне означення ймовірності.

Ймовірністю $P(A)$ події A називають відношення m числа випадків, що сприяють появі цієї події, до загального числа n всіх можливих елементарних результатів випробування, що утворюють повну групу. При цьому обов'язковою умовою є рівна можливість результатів досліджу.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Властивості ймовірності:

- а) ймовірність вірогідної події дорівнює одиниці;
- б) ймовірність неможливої події дорівнює нулю;
- в) ймовірність випадкової події $0 \leq P(A) \leq 1$.

Задача 4. З 50 питань, що входять до екзаменаційних білетів, студент підготував 40. Яка ймовірність того, що 2 питання, які випадковим чином дісталися студенту, виявляться підготовленими?

Розв'язування. Нехай подія A полягає в тому, що обидва питання підготовлені. Вибір двох питань з 50 питань можна здійснити

$$n = C_{50}^2 = \frac{50 \cdot 49}{1 \cdot 2} = 1225$$

способами, а обрати два підготовлених питання з 40 питань можна

$$m = C_{40}^2 = \frac{40 \cdot 39}{1 \cdot 2} = 780$$

способами. Тоді ймовірність $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{780}{1225} = 0,64$

Задача 5. На 7 картках написані літери: О, М, П, Ч, І, Е, Н. Картки перемішують і виймають по одній, прикладаючи одна до другої. Знайти ймовірність того, що буде складено слово ЧЕМПІОН.

Розв'язування. Нехай подія A полягає в тому, що буде складено слово ЧЕМПІОН. Число сприятливих результатів $m=1$, а число всіх можливих результатів в цьому досліді $n = P_7 = 7! = 5040$. Тоді

ймовірність $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{5040}$.

Задача 6. На 7 картках написані літери: О, А, П, С, І, Т, К. Картки перемішують і виймають чотири по одній, прикладаючи одна до другої. Знайти ймовірність того, що буде складено слово СКАТ.

Розв'язування. Нехай подія A полягає в тому, що буде складено слово СКАТ. Число сприятливих результатів $m=1$, а число всіх

можливих результатів в цьому досліді $n = A_7^4 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$.

Тоді ймовірність $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{840}$.

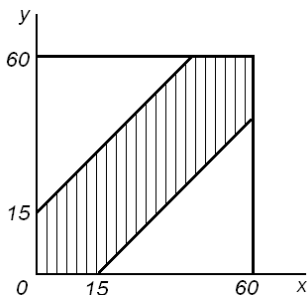
Геометричне означення ймовірності.

Поняття **геометрична ймовірність** виникає в тому випадку, коли ймовірність потрапляння випадкової точки в будь-яку частину області пропорційна мірі цієї області і не залежить від її розташування і форми. В таких задачах множина елементарних випадків не є дискретною. Якщо геометрична міра всієї області $mes(\Omega)$ (довжина, площа, об'єм і т.д.), а геометрична міра частини цієї області $mes(w)$, попадання в яку сприяє даній події, то ймовірність такої події

$$P(A) = \frac{mes(w)}{mes(\Omega)},$$

де mes означає міру області, яка може бути довжиною, якщо Ω – одномірна множина; площею, якщо Ω – двовимірна множина і об'ємом, якщо Ω – тривимірна множина.

Задача 7. Дві особи A і B умовилися зустрітися в певному місці між 17 і 18 годинами. Той, хто прийшов першим, чекає другого протягом 15 хвилин, після чого йде. Визначити ймовірність зустрічі, якщо час приходу кожного незалежний і рівно можливий протягом зазначеної години.



Розв'язування. Нехай x – момент приходу A і y – момент приходу B . Подія C – визначає зустріч двох людей у певному місці. Областю можливих значень (простір елементарних подій Ω) є квадрат площею $S = 60^2$ (одна година – 60 хвилин). Зустріч відбудеться, якщо $|x - y| \leq 15$. Отже,

множина елементарних подій w , що сприяють зустрічі, лежить між прямими $x - y = 15$ і $x - y = -15$. Площа утвореної фігури

$S_{\phi} = 60^2 - (60 - 15)^2$. На підставі наведеної вище формули, ймовірність події C дорівнює відношенню площі S_{ϕ} до площі всього квадрата S , тобто

$$P(C) = \frac{S_{\phi}}{S} = \frac{1575}{3600} = 0,4375$$

Відносною частотою $W(A)$ події A називають відношення числа випробувань m , в яких подія A з'явилася, до загального числа n фактично проведених випробувань, тобто

$$W(A) = \frac{m}{n}.$$

1.3.1 Теорема додавання ймовірностей несумісних подій

Ймовірність суми двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

Висновок 1. Ймовірність появи однієї з декількох попарно несумісних подій, байдуже якої, дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P(A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots + P(A_n).$$

Висновок 2. Якщо події $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ утворюють повну групу подій, то сума їх ймовірностей дорівнює одиниці:

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots + P(A_n) = 1.$$

Висновок 3. Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

Задача 8. На стелажі в бібліотеці стоять 15 підручників, причому 5 із них у твердій палітурці. Бібліотекар бере три підручники. Знайти ймовірність того, що хоча б один із взятих підручників буде у твердій палітурці.

Розв'язування. Перший спосіб. Нехай подія A – хоча б один підручник у твердій палітурці; подія B – один з взятих підручників в палітурці, а два без палітурки; подія C – два підручника в палітурці, а один без палітурки; подія D – всі три підручника в палітурці. Очевидно, $A=B+C+D$. Події B , C , D – несумісні. Тоді $P(A)=P(B+C+D)=P(B)+P(C)+P(D)$. Знайдемо ймовірності подій B , C , D :

$$P(B)=\frac{C_5^1 \cdot C_{10}^2}{C_{15}^3}=\frac{45}{91}, \quad P(C)=\frac{C_5^2 \cdot C_{10}^1}{C_{15}^3}=\frac{20}{91}, \quad P(D)=\frac{C_5^3}{C_{15}^3}=\frac{2}{91}.$$

Отже, $P(A)=\frac{67}{91}$.

Другий спосіб. Нехай подія A – хоча б один підручник у твердій палітурці; подія $\bar{A}$ – жоден із взятих підручників не має твердої палітурки. Оскільки події A і $\bar{A}$ протилежні, то

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{C_{10}^3}{C_{15}^3}=1-\frac{24}{91}=\frac{67}{91}.$$

1.3.2 Теорема множення ймовірностей

Подія A називається **незалежною** від події B , якщо ймовірність події A не залежить від того, відбулася подія B чи ні.

Кілька подій називаються **незалежними в сукупності**, якщо будь-яка з них не залежить від будь-якої сукупності інших.

Подія A називається **залежною** від події B , якщо ймовірність події A змінюється в залежності від того, відбулася чи ні подія B .

Ймовірність події A , яка обчислюється за умови, що подія B сталася, називається **умовною ймовірністю** події A і позначається $P_B(A)$ або $P(A/B)$. Умовна ймовірність задовольняє всім властивостям ймовірності.

Ймовірність добутку двох залежних подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність іншої, обчислену за умови, що перша з них відбулася:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B).$$

Висновок 1. Якщо подія A не залежить від події B , то і подія B не залежить від події A .

Висновок 2. Ймовірність добутку двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Для обчислення ймовірності спільної появи більшої кількості подій, наприклад, чотирьох, використовують формулу:

$$P(A \cdot B \cdot C \cdot D) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/AB) \cdot P(D/ABC).$$

Для кількох незалежних в сукупності подій ймовірність їх добутку дорівнює добутку їх ймовірностей:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot \dots \cdot P(A_n).$$

Висновок 3. Ймовірність появи хоча б однієї з подій $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, незалежних в сукупності, дорівнює різниці одиниці і добутку ймовірностей протилежних подій $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}, \dots, \overline{A_n}$:

$$P(A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) \cdot \dots \cdot P(\overline{A_n}).$$

Задача 9. В урні 2 білі і 3 чорні кулі. З урни підряд виймаються дві кулі. Знайти ймовірність того, що обидві вийняті кулі білі.

Розв'язування. Позначимо через A подію, що полягає в тому, що обидві вийняті кулі білі. Ця подія являє собою добуток двох подій: B – поява білої кулі при першому вийманні і C – поява білої кулі при другому вийманні. Події B і C залежні. Тому

$$P(A) = P(B) \cdot P(C/B) = (2/5) \cdot (1/4) = 0,1.$$

Задача 10. Ті ж умови, що й у Задачі 9, але після першого виймання куля повертається в урну, і кулі в урні перемішуються.

Розв'язування. У цьому випадку події B і C незалежні і тому

$$P(A) = P(B) \cdot P(C) = (2/5) \cdot (2/5) = 0,16.$$

Задача 11. Студент розшукує потрібну йому формулу в трьох довідниках. Імовірність того, що формула міститься в першому, другому і третьому довідниках відповідно рівні 0,6; 0,7 і 0,8. Знайти ймовірності того, що формула міститься а) тільки в одному довіднику; б) тільки у двох довідниках; в) у всіх трьох довідниках; г) хоча б в одному довіднику.

Розв'язування. Розглянемо події: A – формула міститься в першому довіднику; B – формула міститься в другому довіднику; C – формула міститься в третьому довіднику. За умовою задачі $P(A)=0,6$; $P(B)=0,7$; $P(C)=0,8$. Позначимо через D – подія полягає в тому, що формула міститься тільки в одному довіднику, через E – формула міститься тільки в двох довідниках, через F – формула міститься в усіх трьох довідниках, через G – формула міститься хоча б в одному довіднику, а через $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ події протилежні подіям A, B, C . Їх ймовірності відповідно рівні $P(\bar{A})=0,4$; $P(\bar{B})=0,3$; $P(\bar{C})=0,2$. Скористаємося теоремами додавання та множення ймовірностей. Тоді:

- а) $P(D)=P(\bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C}) = P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) + P(\bar{A}B\bar{C}) + P(A\bar{B}\bar{C}) = 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,2 + 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,2 = 0,188$;
 б) $P(E)=P(\bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C}) = P(\bar{A}B\bar{C}) + P(A\bar{B}\bar{C}) + P(\bar{A}B\bar{C}) = 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,2 + 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,2 = 0,452$;
 в) $P(F)=P(ABC)=0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,8 = 0,336$;
 г) $P(G)=1 - P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=1 - 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,2=1 - 0,024=0,976$.

1.3.3 Теорема додавання ймовірностей сумісних подій

Дві події називаються **сумісними**, якщо поява однієї з них не виключає появи іншої в одному і тому ж випробуванні.

Ймовірність появи хоча б однієї з двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх сумісної появи:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Задача 12. Ймовірність попадання в ціль у першого стрілка 0,8, у другого – 0,9. Стрілки роблять пострілу. Знайти ймовірність: а) подвійного влучення; б) подвійного промаху; в) хоча б одного влучення; г) тільки одного влучення.

Розв’язування. Нехай подія A – влучення першого стрільця. Тоді $P(A)=0,8$. Подія B – влучення другого стрільця і $P(B)=0,9$. Подія $\bar{A}$ – промах першого стрільця і $P(\bar{A})=1-0,8=0,2$. Подія $\bar{B}$ – промах другого стрільця і $P(\bar{B})=1-0,9=0,1$. Події A і B незалежні. Знайдемо шукані ймовірності:

а) подія AB – подвійне попадання,

$$P(AB)=P(A) \cdot P(B) = 0,8 \cdot 0,9 = 0,72;$$

б) подія $\bar{A}\bar{B}$ – подвійний промах,

$$P(\bar{A}\bar{B})=P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = 0,2 \cdot 0,1 = 0,02;$$

в) подія $A+B$ – хоча б одне влучення

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) = 0,8+0,9-0,72 = 0,98;$$

або

$$P(A+B)=1-P(\bar{A}\bar{B})=1-0,02 = 0,98;$$

г) подія $\bar{A}B + A\bar{B}$ – одне влучення,

$$\begin{aligned} P(\bar{A}B + A\bar{B}) &= P(\bar{A}B) + P(A\bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(B) + P(A) \cdot P(\bar{B}) = \\ &= 0,2 \cdot 0,9 + 0,8 \cdot 0,1 = 0,26. \end{aligned}$$

1.3.4 Формула повної ймовірності та формула Байєса

Нехай подія A може відбутися або ні після здійснення однієї з подій $H_1, H_2, \dots, H_n$, що утворюють повну групу подій (вони називаються гіпотезами). Тоді ймовірність $P(A)$ появи події A визначається за формулою повної ймовірності:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A/H_i)$$

причому

$$P(H_1) + P(H_2) + \dots + P(H_n) = 1.$$

Формулою повної ймовірності зазвичай користуються, коли щодо події A , яка нас цікавить, відомо, що про умови, за яких вона настає, можна висловити деякі попарно несумісні гіпотези $H_1, H_2, \dots, H_n$. Відомі ймовірності цих гіпотез $P(H_i)$ і умовні ймовірності настання події A , якщо правильна та чи інша гіпотеза $P(A/H_i)$. Формула повної ймовірності дає можливість знайти ймовірність настання події A з урахуванням можливості настання будь-якої з гіпотез.

Іншою найважливішою формулою є формула Байєса. Нехай у результаті випробування відбулася подія A , яка могла наступити тільки разом з однією з подій $H_1, H_2, \dots, H_n$, що утворюють повну групу подій. Необхідно знайти умовну ймовірність $P(H_i/A)$ настання гіпотези H_i за умови, що подія A відбулася. Для знаходження цієї ймовірності використовують формулу Байєса:

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{P(A)}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Зауваження:

1. Ймовірності $P(H_i/A)$ називаються післядослідними (апостеріорними) ймовірностями гіпотез H_i , а ймовірності $P(H_i)$ – до- дослідними (апріорними) ймовірностями гіпотез H_i . Ці ймовірності розрізняються.

2. Знаменник у правій частині формули дорівнює $P(A)$ – ймовірності, що обчислюється за формулою повної ймовірності.

Формула Байєса саме дозволяє знайти ці апостеріорні ймовірності і тим самим отримати інформацію про умови настання події A .

Задача 13. У канцелярії працюють 4 секретарки, які відправляють 40%, 10%, 30% і 20% вихідних документів. Ймовірності неправильної адресації документів секретарками відповідно рівні 0,01; 0,04; 0,06; 0,01. Знайти ймовірність того, що: а) відправлений документ адресовано неправильно; б) неправильно адресований документ відправлений третьою секретаркою.

Розв'язування. Введемо гіпотези H_i – документ відправила i -а секретарка, $i = 1, 2, 3, 4$. Тоді за умовою задачі ймовірності $P(H_1) = 0,4$; $P(H_2) = 0,1$; $P(H_3) = 0,3$; $P(H_4) = 0,2$. Позначимо через A подію, яка складається в тому, що документ адресований неправильно. Тоді за умовою завдання умовні ймовірності $P(A/H_1) = 0,01$; $P(A/H_2) = 0,04$; $P(A/H_3) = 0,06$; $P(A/H_4) = 0,01$. а) За формулою повної ймовірності знайдемо ймовірність того, що відправлений документ адресовано неправильно:

$$P(A) = \sum_{i=1}^4 P(H_i) \cdot P(A/H_i) = 0,4 \cdot 0,01 + 0,1 \cdot 0,04 + 0,3 \cdot 0,06 +$$

$+ 0,2 \cdot 0,01 = 0,028$; б) Знайдемо ймовірність $P(H_3/A)$ того, що неправильно адресований документ відправлений третьою секретаркою за формулою Байєса:

$$P(H_3/A) = \frac{P(H_3) \cdot P(A/H_3)}{P(A)} = \frac{0,3 \cdot 0,06}{0,028} = \frac{0,018}{0,028} = \frac{9}{14} \approx 0,64.$$

1.3.5 Формула Бернуллі

Нехай проводиться серія з n незалежних випробувань, у кожному з яких подія A може відбутися (з однаковою ймовірністю p) або не відбутися (також з однаковою ймовірністю $q = 1 - p$). Припускаємо, що ймовірність p настання події A в кожному випробуванні постійна, тобто не залежить ні від номера випробування, ні від результатів попередніх випробувань.

Послідовність випробувань, що задовольняють зазначеній умові, називається схемою Бернуллі. Імовірність $P_n(m)$ того, що в n випробуваннях, що відповідають указаній схемі, подія A з'явиться рівно m раз, визначається за формулою Бернуллі:

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$$

Задача 14. Система автоматичного управління (САУ) космічного літального апарата складається з шести основних вузлів, ймовірність виходу з ладу кожного з яких при динамічних перевантаженнях дорівнює 0,3. При виході з ладу трьох або меншої кількості вузлів система автоматичного управління з ладу не виходить. При виході з ладу чотирьох вузлів ймовірність виходу САУ з ладу дорівнює 0,3, при виході з ладу п'яти вузлів – 0,7, при виході з ладу шести вузлів – 1. Визначити ймовірність виходу САУ з ладу при динамічних перевантаженнях (подія A).

Розв'язування. Ймовірність виходу з ладу чотирьох, п'яти і шести вузлів обчислимо за формулою Бернуллі ($p = 0,3$; $q = 1 - p = 0,7$):

$$P_6(4) = C_6^4 p^4 q^2 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot (0,3)^4 \cdot (0,7)^2 = 15 \cdot 0,0081 \cdot 0,49 \approx 0,0595$$

$$P_6(5) = C_6^5 p^5 q^1 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot (0,3)^5 \cdot (0,7)^1 = 6 \cdot 0,00243 \cdot 0,7 \approx 0,0102$$

$$P_6(6) = C_6^6 p^6 q^0 = \frac{6!}{6!0!} \cdot (0,3)^6 \cdot (0,7)^0 = 1 \cdot 0,000729 \cdot 1 \approx 0,0007$$

За формулою повної ймовірності знаходимо ймовірність виходу з ладу САУ:

$$P(A) \approx 0,0595 \cdot 0,3 + 0,0102 \cdot 0,7 + 0,0007 \cdot 1 \approx 0,0257.$$

Задача 15. Електронний пристрій змонтовано на 8 напівпровідниках, ймовірність виходу з ладу кожного дорівнює 0,1. Пристрій виходить з ладу, якщо виходять з ладу хоча б будь-які два з 8 напівпровідників. Знайти ймовірність виходу з ладу всього пристрою.

Розв'язування. Припустимо, що вихід з ладу кожного з напівпровідників не залежить від стану працездатності інших. Тоді тут має місце типова схема Бернуллі, причому, ймовірність, що цікавить нас (вихід з ладу будь-якого напівпровідника) дорівнює $p = 0,1$. Введемо події: A_i – вихід з ладу рівно i напівпровідників серед 8 наявних ($i = 0, 1, 2, \dots, 8$); B – вихід з ладу пристрою; $\bar{B}$ –

пристрій працездатний. $B = A_0 + A_1$. Звідси ймовірність події B можна підрахувати таким чином:

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - P(A_0) - P(A_1).$$

Імовірності $P(A_0)$ і $P(A_1)$ подій A_0 , A_1 знаходимо за формулою Бернуллі. Тоді

$$P(B) = 1 - P_8(0) - P_8(1) = 1 - (1-p)^8 - 8 \cdot p \cdot (1-p)^7 = 1 - (0,9)^8 - 8 \cdot 0,1 \cdot (0,9)^7 = 1 - 0,4305 - 8 \cdot 0,1 \cdot 0,4783 = 0,1869.$$

1.3.6 Локальна теорема Лапласа

Формулу Бернуллі стає важко застосувати при великих n . Це пов'язано з обчисленням $n!$. У цьому випадку в схемі Бернуллі застосовують локальну теорему Лапласа.

Локальна теорема Лапласа. Нехай ймовірність появи події A в кожному з n незалежних випробувань дорівнює p , причому $0 < p < 1$. Імовірність того, що подія A не з'явиться у випробуванні $q = 1 - p$. Тоді ймовірність того, що в умовах схеми Бернуллі в n незалежних випробуваннях подія A настане рівно m раз, наближено виражається рівністю

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \phi(x), \quad \text{де} \quad \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad \text{і} \quad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}.$$

Функція $\phi(x)$ – локальна функція Лапласа, значення якої знаходять за таблицею 3.1, що складена для $x \geq 0$, так як $\phi(x)$ – парна функція, тобто $\phi(-x) = \phi(x)$. Для $x \geq 4$ значення $\phi(x) = 0$. Формула дає тим більш точний результат, чим більше n .

Задача 16. За даними ВТК заводу, 0,8 всього обсягу мікросхем, що випускаються, не має дефектів. Знайти ймовірність того, що серед узятих навмання 400 мікросхем дефекти будуть мати 80 мікросхем.

Розв'язування. В умові прикладу $n = 400$, $m = 80$, $p = 0,2$, $q = 0,8$. Згідно з формулою локальної теореми Лапласа маємо:

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{80 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = 0.$$

За таблицею 3.1 знаходимо, що $\phi(0) = 0,3989$. Тоді шукана ймовірність

$$P_{400}(80) = \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} \cdot \phi(0) = \frac{1}{8} \cdot 0,3989 = 0,04986.$$

1.3.7 Інтегральна теорема Лапласа

У багатьох задачах потрібно обчислити ймовірність $P_n(m_1, m_2)$ того, що в серії з n випробувань подія A відбудеться не менше m_1 і не більше m_2 раз. Для обчислення цієї ймовірності застосовують інтегральну теорему Лапласа.

Інтегральна теорема Лапласа. Нехай ймовірність появи події A в кожному з n незалежних випробувань дорівнює p , причому $0 < p < 1$. Ймовірність того, що подія A не з'явиться у випробуванні $q = 1 - p$. Тоді ймовірність того, що в умовах схеми Бернуллі в n незалежних випробуваннях подія A з'явиться від m_1 до m_2 раз ($m_2 > m_1$), наближено виражається рівністю

$$P_n(m_1, m_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

$$\text{де } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt; \quad x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}; \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Інтегральна функція Лапласа $\Phi(x)$ непарна, тобто $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Її значення знаходять з таблиці 10.2, складеної лише для $x \geq 0$. Для $x > 5$ значення функції $\Phi(x) = 0,5$.

Зауваження 1. Якщо в деякій серії з n випробувань подія A настає m раз, то частота її появи $W(A) = m/n$. Тоді нерівність

$|W(A) - p| < \varepsilon$ рівносильна нерівностям $np - n\varepsilon \leq m \leq np + n\varepsilon$, а з інтегральної теореми Лапласа слідує

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 2 \cdot \Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

де p – ймовірність появи події A в одному випробуванні; $\varepsilon > 0$ – будь-яке дійсне число.

Зауваження 2. Число m_0 , яке задовольняє нерівностям $P_n(m_0 - 1) \leq P_n(m_0) \leq P_n(m_0 + 1)$ називається найімовірнішим числом появи події A в n незалежних випробуваннях. Це число відповідає умовам $np - q \leq m_0 \leq np + p$.

Задача 17. Фабрика випускає 70% продукції першого сорту. Чому дорівнює ймовірність того, що в партії з 1000 виробів число виробів першого сорту буде знаходитись між 652 і 760?

Розв'язування. За умовою задачі $n = 1000$, $p = 0,7$, $q = 0,3$, $m_1 = 652$, $m_2 = 760$. Шукану ймовірність обчислюємо за формулою $P_{1000}(652, 760) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, де

$$x_1 = \frac{652 - 1000 \cdot 0,7}{\sqrt{1000 \cdot 0,7 \cdot 0,3}} \approx -3,31, \quad x_2 = \frac{760 - 1000 \cdot 0,7}{\sqrt{1000 \cdot 0,7 \cdot 0,3}} \approx 4,14$$

За таблицею 3.2 знаходимо значення інтегральної функції Лапласа $\Phi(4,14) = 0,49998$, $\Phi(-3,31) = -0,49981$. Отже, шукана ймовірність $P_{1000}(652, 760) = 0,99979$.

1.3.8 Теорема Пуассона

Розглянемо схему Бернуллі з малою ймовірністю p появи події A в одному випробуванні та з великою кількістю n випробувань. Нехай при великому n ймовірність p мала така, що $p \cdot n = \lambda$, де λ – деяке число.

Теорема Пуассона. Нехай $p \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, причому так, що $p \cdot n \rightarrow \lambda$, де $\lambda > 0$. Тоді для будь-якого $m = 1, 2, \dots$

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!}.$$

Через малість значень p розподіл Пуассона називають також законом розподілу рідкісних подій.

Зауваження. Заміна формули Бернуллі на формулу Пуассона при великих n обґрунтована, якщо $p \leq 0,1$ і $npq \leq 9$. У випадку, коли $p > 0,1$ і $npq > 9$, застосовують локальну теорему Лапласа.

Задача 18. Сервісний автоцентр одночасно може обслуговувати 100 автомобілів. Ймовірність того, що протягом 1 хв. автомобіліст звернеться до автоцентру, дорівнює 0,01. Знайти ймовірність того, що протягом 1 хв. звернуться до автоцентру: а) три автомобілісти; б) менше трьох автомобілістів; в) більше трьох автомобілістів; г) хоча б один автомобіліст.

Розв'язування. Оскільки звернення до автоцентру автомобілістів є незалежними подіями, число $n = 100$ велике, а ймовірність $p = 0,01$ мала ($npq = 100 \cdot 0,01 \cdot 0,99 = 0,99 \leq 9$ і $p \leq 0,1$), скористаємося формулою Пуассона.

а) знаходимо $\lambda = n \cdot p = 100 \cdot 0,01 = 1$. Ймовірність події A – в автоцентр звернулися три автомобіліста ($m = 3$) знаходимо за формулою

$$P_{100}(3) = \frac{1 \cdot e^{-1}}{3!} \approx 0,0613;$$

б) за цією ж формулою ймовірність того, що в автоцентр звернуться менше трьох автомобілістів,

$$P_{100}(0) + P_{100}(1) + P_{100}(2) \approx e^{-1} + e^{-1} + \frac{1}{2}e^{-1} \approx 0,9197;$$

в) подія A – в автоцентр звернуться більше трьох автомобілістів і подія $\bar{A}$ – звернуться не більше трьох автомобілістів є протилежні, тому,

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(\bar{A}) = 1 - P_{100}(0) - P_{100}(1) - P_{100}(2) - P_{100}(3) = \\ &= 1 - 0,9197 - 0,0613 = 0,0019; \end{aligned}$$

г) події A – в автоцентр звернувся хоча б один автомобіліст і $\bar{A}$ – в автоцентр ніхто не звернувся є протилежні, тому ймовірність події A є

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P_{100}(0) = 1 - e^{-1} \approx 0,632.$$

1.4 Випадкові величини

Під **випадковою величиною** будемо розуміти таку величину, яка в результаті досліду приймає невідоме заздалегідь значення, причому воно від досліду до досліду може змінюватися.

Випадкові величини прийнято позначати великими латинськими буквами $X, Y, Z, U, W, \dots$

Важливою характеристикою будь-якої випадкової величини X є її функція розподілу. Розглянемо подію $A = (X < x)$, де x – будь-яке дійсне число. Імовірнісна міра P будь-якій події A ставить у відповідність число $P(A)$, що визначає ймовірність цієї події. Це число залежить від x і є основною характеристикою випадкової величини.

Функція розподілу $F(x)$ визначається як ймовірність події A : $F(x) = P(X < x)$, тобто $F(x)$ є ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення, менше деякого x .

Найважливіші властивості функції розподілу такі:

а) $F(x)$ – неспадна функція, тобто, якщо $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \leq F(x_2)$;

б) $0 \leq F(x) \leq 1$;

в) $F(x \rightarrow -\infty) \rightarrow 0$;

г) $F(x \rightarrow \infty) \rightarrow 1$;

д) функція розподілу неперервна зліва: $F(x_0 - 0) = F(x_0)$.

Функція розподілу $F(x)$ є найбільш повною характеристикою випадкової величини; описати, задати випадкову величину X – означає задати її функцію розподілу $F(x)$.

Якщо відома функція розподілу $F(x)$, то ймовірність потрапляння випадкової величини X в напіввідкритий проміжок $[a, b)$ знаходиться за формулою: $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$.

1.4.1 Дискретні випадкові величини (ДВВ)

Випадкова величина називається **дискретною**, якщо всі її можливі значення ізольовані одне від одного і їх можна занумерувати.

Можливі значення випадкових величин, наприклад, X , Y , позначають відповідними малими буквами $x_1, x_2, \dots, x_n$; $y_1, y_2, \dots, y_m$. Ймовірність того, що випадкова величина прийме значення, рівне x_i , позначають $P(X = x_i) = p_i$.

Законом розподілу (рядом розподілу) дискретної випадкової величини X називається взаємно однозначна відповідність між можливими її значеннями x_i і ймовірностями $p_i = P(X = x_i)$, з якими ці значення приймаються. Найчастіше закон або ряд розподілу зображують таблицею:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Тут $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, а $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

Для дискретної випадкової величини функція розподілу знаходиться за формулою:

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} p_i$$

Якщо можливі значення ВВ X належать кінцевому відрізку $[a; b]$, то $F(x) = 0$ при $x \leq a$ і $F(x) = 1$ при $x > b$. Величина $b - a$ називається розмахом ВВ X .

Для того, щоб надати закону більш наочний вигляд, вдаються до його графічного зображення: по осі абсцис відкладають можливі значення випадкової величини X , а по осі ординат – їх ймовірності.

Точки $(x_i; p_i)$, $i=1, 2, \dots, n$ з'єднують відрізками прямих. Отриману фігуру називають багатокутником розподілу.

Числові характеристики дискретних випадкових величин

1. Математичне сподівання дискретної випадкової величини

Математичним сподіванням $M(X)$ дискретної випадкової величини X називається сума добутків можливих значень випадкової величини на їх ймовірності:

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$

Відзначимо, що при великому числі дослідів середнє арифметичне значень випадкової величини, що спостерігалися, наближається до її математичного сподівання.

Зауваження. Математичне сподівання випадкової величини є величина не випадкова. Математичне сподівання зберігає розмірність випадкової величини. Математичне сподівання ВВ є аналог центру мас системи матеріальних точок.

Основні властивості математичного сподівання:

а) математичне сподівання постійної величини дорівнює постійній, тобто, якщо $C = \text{const}$, то $M(C) = C$;

б) постійний множник можна виносити за знак математичного сподівання, тобто $M(CX) = C \cdot M(X)$;

в) математичне сподівання суми двох випадкових величин дорівнює сумі математичних сподівань цих величин, тобто $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$;

г) математичне сподівання добутку двох незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань, тобто $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$, де X та Y – незалежні випадкові величини;

д) якщо проводиться n незалежних випробувань, в кожному з яких ймовірність появи події A постійна і дорівнює p , тоді математичне сподівання $M(X)$ числа появи події A в n незалежних випробуваннях $M(X) = n \cdot p$.

Для будь-якої ВВ X випадкова величина $X^0 = X - M(X)$ називається **центрованою ВВ** або **відхиленням**.

2. Дисперсія дискретної випадкової величини

Нехай X – випадкова величина. Випадкову величину $[X - M(X)]$ називають відхиленням. Очевидно, що математичне сподівання відхилення дорівнює нулю: $M[X - M(X)] = 0$.

Дисперсією (розсіюванням) $D(X)$ випадкової величини X називають математичне сподівання квадрата відхилення від її математичного сподівання, тобто

$$D(X) = M([X - M(X)]^2) = M(X^2) - (M(X))^2$$

Для дискретної випадкової величини:

$$D(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - M(X))^2 \cdot p_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i - (M(X))^2$$

Основні властивості дисперсії:

- а) дисперсія постійної величини дорівнює нулю, тобто $D(C) = 0$;
- б) постійний множник можна виносити за знак дисперсії, підносячи його до квадрату, тобто $D(CX) = C^2 \cdot D(X)$;
- в) дисперсія суми або різниці двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$;
- г) дисперсія числа появи події A в n незалежних випробуваннях, в кожному з яких ймовірність події A постійна, дорівнює добутку числа випробувань на ймовірність появи події і на ймовірність того, що подія не з'явиться, в одному випробуванні: $D(X) = n \cdot p \cdot q$.

Наслідок: $D(C + X) = D(X)$, де $C = const$.

Зауваження. Дисперсія $D(X)$ випадкової величини має розмірність квадрата одиниці розмірності випадкової величини X .

3. Середнє квадратичне відхилення.

Вводять показник розсіювання випадкової величини, що має ту ж розмірність, що і випадкова величина. Для цього добувають квадратний корінь з дисперсії. Отриману величину $\sigma(X)$ називають **середнім квадратичним відхиленням** (стандартом) і позначають:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Відзначимо, що середнє квадратичне відхилення суми скінченного числа взаємно незалежних випадкових величин:

$$\sigma(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \sqrt{\sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + \dots + \sigma^2(X_n)}$$

Якщо математичне сподівання ВВ X є характеристикою її положення, середнім значенням, біля якого групуються значення ВВ, то дисперсія ВВ X і її середнє квадратичне відхилення є характеристиками розсіювання ВВ біля її математичного сподівання.

4. **Модою** M_0 дискретної ВВ X називається її найбільш ймовірне значення, тобто те значення, для якого ймовірність p_i максимальна.

5. **Медіаною** M_e ВВ X називається таке значення випадкової величини, для якого $P(X < M_e) = P(X \geq M_e) = 0,5$.

У разі симетричного розподілу ВВ мода і медіана співпадають з її математичним сподіванням.

6. **Початковим моментом порядку k** випадкової величини X називають математичне сподівання величини X^k :

$$\nu_k = M(X^k), \text{ зокрема, } \nu_1 = M(X), \nu_2 = M(X^2)$$

Користуючись цими позначеннями формулу для обчислення дисперсії можна записати так:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = \nu_2 - (\nu_1)^2.$$

7. **Центральним моментом порядку k** випадкової величини X називають математичне сподівання величини $[X - M(X)]^k$:

$$\mu_k = M([X - M(X)]^k), \text{ зокрема, } \mu_1 = M[X - M(X)] = 0, \\ \mu_2 = M([X - M(X)]^2) = D(X).$$

Задача 19. Зроблено два високо ризикові внески: 10 тис. грн. у компанію А і 15 тис. грн. – у компанію В. Компанія А обіцяє 50% річних, але може «лопнути» з ймовірністю 0,2. Компанія В обіцяє 40% річних, але може «лопнути» з ймовірністю 0,15. Скласти закон розподілу випадкової величини – загальної суми прибутку (збитку), отриманого від двох компаній через рік і знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення.

Розв'язування. Нехай випадкова величина X – загальна сума прибутку (збитку) від двох компаній через рік. Випадкова величина X може приймати значення: $-25, -10, -4, 11$. Тоді $X = -25$ (обидві компанії «лопнули»); $X = -10$ (компанія А виплатила 5 тис. грн. (50% річних), компанія В «лопнула»); $X = -4$ (компанія А «лопнула», компанія В виплатила 6 тис. грн. (40% річних)); $X = 11$ (компанія А виплатила 5 тис. грн. (50% річних) і компанія В – 6 тис. грн. (40% річних)). Отже, $P(X = -25) = 0,2 \cdot 0,15 = 0,03$; $P(X = -10) = 0,8 \cdot 0,15 = 0,12$; $P(X = -4) = 0,2 \cdot 0,85 = 0,17$; $P(X = 11) = 0,8 \cdot 0,85 = 0,68$. Закон розподілу випадкової величини X :

X	-25	-10	-4	11
p	0,03	0,12	0,17	0,68

$$\sum_{i=1}^4 p_i = 0,03 + 0,12 + 0,17 + 0,68 = 1.$$

Знайдемо математичне сподівання:

$$M(X) = -25 \cdot 0,03 + (-10) \cdot 0,12 + (-4) \cdot 0,17 + 11 \cdot 0,68 = 4,85.$$

$$D(X) = (-25)^2 \cdot 0,03 + (-10)^2 \cdot 0,12 + (-4)^2 \cdot 0,17 + 11^2 \cdot 0,68 - (-4,85)^2 = 625 \cdot 0,03 + 100 \cdot 0,12 + 16 \cdot 0,17 + 121 \cdot 0,68 - 23,5225 = 18,75 + 12 + 2,72 + 82,28 - 23,5225 = 115,75 - 23,5225 = 92,2275.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{92,2275} \approx 9,6035.$$

Задача 20. Знайти закон розподілу дискретної ВВ X , яка приймає тільки два значення: x_1 і x_2 ($x_1 < x_2$). Ймовірність значення x_1 дорівнює $p_1 = 0,1$, математичне сподівання $M(X) = 3,9$ і дисперсія $D(X) = 0,09$.

Розв'язування. За означенням:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2; \quad D(X) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 - (M(X))^2,$$

де $p_2 = 1 - p_1 = 1 - 0,1 = 0,9$.

Звідси:

$$\begin{cases} 0,1 \cdot x_1 + 0,9 \cdot x_2 = 3,9 \\ 0,1 \cdot x_1^2 + 0,9 \cdot x_2^2 = 15,3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 9 \cdot x_2 = 39 \\ x_1^2 + 9 \cdot x_2^2 = 153 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 39 - 9 \cdot x_2 \\ (39 - 9 \cdot x_2)^2 + 9 \cdot x_2^2 = 153 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x_2^2 - 39x_2 + 76 = 0 \\ x_2^{(1)} = 4; \quad x_2^{(2)} = 3,8 \end{cases}$$

і $x_1^{(1)} = 3$; $x_1^{(2)} = 4,8$. За умовою $x_1 < x_2$, тому $x_1 = 3$; $x_2 = 4$.

Закон розподілу дискретної ВВ X буде таким:

X	3	4
P	0,1	0,9

Закони розподілу дискретних випадкових величин

1. **Біноміальний закон розподілу.** Нехай у кожному з n незалежних випробувань подія A з'являється з ймовірністю p . Тоді випадкова величина X , що означає число появ події A в n незалежних випробуваннях (схема Бернуллі), може приймати значення $0, 1, 2, \dots, n$ з ймовірностями

$$P_n(X = m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$$

Такий розподіл ВВ X називається біноміальним. У цьому випадку $M(X) = n \cdot p$, а $D(X) = n \cdot p \cdot q$.

2. **Розподіл Пуассона.** Якщо число випробувань велике, а ймовірність p появи події A мала, то використовують наближену формулу

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!}$$

де m – число появ події A в n незалежних випробуваннях; $\lambda = n \cdot p$. Такий розподіл ВВ називається розподілом Пуассона. У цьому випадку $M(X) = \lambda$, а $D(X) = \lambda$.

3. **Потоком подій** називається послідовність подій, які настають у випадкові моменти часу. Потоки можуть мати властивості: стаціонарності (в цьому випадку ймовірність появи m подій за проміжок часу тривалості t є функція, що залежить тільки від m і t),

відсутність післядії, ординарності. **Найпростішим (пуассонівським) потоком подій** називають потік подій, що має перераховані вище властивості. **Інтенсивністю потоку** λ називають середнє число подій, які з'являються в одиницю часу. Ймовірність настання m подій за час t визначається формулою Пуассона:

$$P_t(m) = \frac{(\lambda t)^m \cdot e^{-\lambda t}}{m!}$$

4. Геометричний розподіл. Позначимо через X дискретну ВВ – число випробувань, які потрібно провести до першої появи події A . Нехай у перших $m-1$ випробуваннях подія A не відбулася, а в m -му випробуванні сталася. Цей розподіл ВВ називають геометричним. Ймовірність цієї події за теоремою множення ймовірностей незалежних подій розраховують за формулою:

$$P_n(X = m) = q^{m-1} \cdot p$$

5. Гіпергеометричний розподіл. Нехай у партії з N виробів є M стандартних ($M < N$). З партії випадково відбирають n виробів. Знайдемо ймовірність того, що серед n виробів рівно m стандартних

$$P(X = m) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

Такий розподіл ймовірностей називають гіпергеометричним.

1.4.2 Неперервні випадкові величини (НВВ)

Випадкову величину називають **неперервною**, якщо вона може приймати будь-які значення з деякого проміжку (скінченного або нескінченного). Для неперервної випадкової величини X функція розподілу $F(x) = P(X < x)$ неперервна.

Для неперервних випадкових величин щільність розподілу ймовірностей є основною характеристикою. **Щільністю розподілу ймовірностей** неперервної випадкової величини X називають похідну від її функції розподілу: $f(x) = F'(x)$.

Розглянемо основні властивості щільності розподілу ймовірностей:

$$a) f(x) \geq 0, \quad \forall x \in R;$$

$$б) P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx;$$

$$в) F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt;$$

$$г) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

Числові характеристики неперервних випадкових величин

1. **Математичним сподіванням** $M(X)$ неперервної випадкової величини X із щільністю розподілу ймовірностей $f(x)$ називається величина

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

2. **Дисперсією** $D(X)$ неперервної випадкової величини X називається $M(X - M(X))^2$, де різниця $[X - M(X)]$ називається відхиленням ВВ X від її математичного сподівання. Дисперсія обчислюється за формулою

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - [M(X)]^2$$

Зауваження. Властивості $M(X)$ і $D(X)$ аналогічні відповідним властивостям числових характеристик дискретної випадкової величини.

3. **Середнє квадратичне відхилення** $\sigma(X)$ неперервної випадкової величини обчислюється, як

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

4. **Мода** M_0 неперервної випадкової величини X – це точка максимуму щільності розподілу $f(x)$. Мода може бути не єдиною.

Такий розподіл називається полі модальний. У цьому випадку часто статистичний матеріал, використаний у дослідженні, є різномірним.

5. Медіаною M_e ВВ X називається таке значення випадкової величини, для якого $P(X < M_e) = P(X \geq M_e) = 0,5$. Геометрично медіана – це точка на осі Ox , для якої площі під графіком щільності розподілу, що лежать ліворуч і праворуч від неї, однакові і рівні 0,5.

Зауваження. Якщо щільність розподілу симетрична щодо прямої $x = a$ і розподіл одномодальний, то математичне сподівання, медіана і мода збігаються між собою.

6. Початковим моментом порядку k неперервної випадкової величини X називається число ν_k , яке дорівнює математичному сподіванню випадкової величини X^k і обчислюється за формулою

$$\nu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot f(x) dx$$

Якщо $k = 1$, то $\nu_1 = M(X)$.

7. Центральним моментом порядку k неперервної випадкової величини X називається число μ_k , яке обчислюється за формулою:

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^k f(x) dx$$

Якщо $k = 1$, то $\mu_1 = 0$. Якщо $k = 2$, то $\mu_2 = D(X)$.

Задача 21. Випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2 \\ \frac{x^3 - 8}{19}, & 2 < x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

Знайти: а) $f(x)$; б) $P(2,5 < X < 3)$; в) $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Розв'язування. Знайдемо щільність розподілу ймовірностей $f(x)$

а) $f(x) = F'(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2 \\ \frac{3x^2}{19}, & 2 < x \leq 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$$

б)

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

$$P(2,5 < X < 3) = \int_{2,5}^3 \frac{3x^2}{19} dx = \frac{3}{19} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{2,5}^3 = \frac{1}{19} (3^3 - 2,5^3) = 0,599$$

в)

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx \qquad D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx - [M(X)]^2$$

$$M(X) = \int_2^3 x \cdot \frac{3x^2}{19} dx = \frac{3}{19} \frac{x^4}{4} \Big|_2^3 = \frac{3}{76} (3^4 - 2^4) = \frac{3}{76} (81 - 16) = 2,566$$

$$D(X) = \int_2^3 x^2 \cdot \frac{3x^2}{19} dx - 2,566^2 = \frac{3}{19} \frac{x^5}{5} \Big|_2^3 - 2,566^2 = 0,079$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,079} = 0,28$$

Закони розподілу неперервних випадкових величин

1. **Рівномірний розподіл.** Розподіл ймовірностей називається рівномірним, якщо на інтервалі, якому належать всі можливі значення неперервної випадкової величини, щільність розподілу ймовірностей зберігає постійне значення, а поза цим інтервалом вона дорівнює нулю. Для рівномірно розподіленої випадкової величини X , можливі значення якої належать відріzk $[a; b]$, щільність розподілу ймовірностей має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a), & a \leq x \leq b \\ 0, & x < a, \quad x > b \end{cases}$$

Функція розподілу $F(x)$ рівномірно розподіленої ВВ

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

Числові характеристики: $M(X) = (a+b)/2$,

$D(X) = (b-a)^2/12$, $\sigma(X) = (b-a)/(2\sqrt{3})$. Ймовірність попадання випадкової величини X на будь-який інтервал, наприклад, інтервал $(\alpha; \beta) \subset [a; b]$ обчислюється $P(\alpha < X < \beta) = (\beta - \alpha)/(b - a)$.

2. Експоненціальний розподіл. Неперервна випадкова величина X має експоненціальний закон розподілу, якщо її щільність розподілу ймовірностей має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

де $\lambda > 0$ називається параметром розподілу. Функція розподілу $F(x)$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Числові характеристики: $M(X) = 1/\lambda$, $D(X) = 1/\lambda^2$, $\sigma(X) = 1/\lambda$. Ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $(a; b)$ розраховують за формулою: $P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$.

Якщо T – час безвідмовної роботи механізму, то $F(t) = P(T < t)$ виражає ймовірність виходу з ладу механізму за час t . Тоді $R(t) = P(T > t) = 1 - F(t)$ це ймовірність безвідмовної роботи механізму за час t . Функція $R(t)$ називається функцією надійності. Так як при експоненціальному законі розподілу $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, то $R(t) = e^{-\lambda t}$, де λ – інтенсивність відмов (число відмов в одиницю часу).

3. **Нормальний розподіл** (розподіл Гаусса). Неперервна випадкова величина X має нормальний закон розподілу, якщо її функція щільності розподілу ймовірностей має вигляд:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

де a , σ – параметри розподілу. Графік функції $f(x)$ називають нормальною кривою або кривою Гаусса. Вона має такі властивості: крива симетрична щодо прямої $x = a$; максимум досягається при $x = a$; при $x \rightarrow \pm\infty$ крива наближається до осі Ox ; крива опукла вниз при $x \in (a - \sigma; a + \sigma)$ і опукла вгору при $x \in (-\infty; a - \sigma) \cup (a + \sigma; +\infty)$. Функція розподілу ВВ X має вигляд:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Числові характеристики: математичне сподівання $M(X) = a$; дисперсія $D(X) = \sigma^2$; σ – середнє квадратичне відхилення. Ймовірність попадання нормальної випадкової величини X на відрізок $[\alpha; \beta]$ визначається за формулою:

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$$

де $\Phi(x)$ – функція Лапласа. Ймовірність попадання нормальної випадкової величини в інтервал, симетричний щодо математичного сподівання, визначається формулою: $P(|X - a| < \delta) = 2 \cdot \Phi(\delta / \sigma)$. Якщо, зокрема, $\delta = 3\sigma$, то $P(|X - a| < 3\sigma) = 2 \cdot \Phi(3) = 0,9973$, тобто нормально розподілена ВВ X відхиляється від свого математичного сподівання a , як правило, менш ніж на 3σ (правило трьох сигм). (Слова «як правило» означають, що лише в 0,27% випадках відхилення нормальної випадкової величини від її математичного сподівання може перевищити 3σ).

Нормованим називають нормальний розподіл з параметрами: $a = 0$ і $\sigma = 1$. Для нормованого нормального розподілу функція

щільності розподілу ймовірностей і функція розподілу відповідно рівні:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}; \quad F_o(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-x^2/2} dx \Rightarrow F_o(x) = 0,5 + \Phi(x)$$

Задача 22. Математичне сподівання $a = 2$, середнє квадратичне відхилення $\sigma = 4$ нормально розподіленої ВВ X . Знайти ймовірність того, що: а) $x \in (6; 10)$; б) $|X - 2| < 0,5$.

Розв'язування. а) $P(\alpha \leq X \leq \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$. Маємо

$$\alpha = 6, \quad \beta = 10. \quad \text{Тоді } x_1 = \frac{\alpha - a}{\sigma} = \frac{6 - 2}{4} = 1, \quad x_2 = \frac{\beta - a}{\sigma} = \frac{10 - 2}{4} = 2.$$

За таблицею знайдемо $\Phi(x_1) = \Phi(1) = 0,3413$, $\Phi(x_2) = \Phi(2) = 0,4772$
Тоді $P(6 < X < 10) = \Phi(2) - \Phi(1) = 0,4772 - 0,3413 = 0,1359$.

б) $P(|X - a| < \delta) = 2 \cdot \Phi(\delta / \sigma)$. Маємо $\delta = 0,5$. Тоді

$$x = \frac{\delta}{\sigma} = \frac{0,5}{4} = 0,125. \quad \text{За} \quad \text{таблицею} \quad \text{знайдемо}$$

$$\Phi(x) = \Phi(0,125) = \frac{\Phi(0,12) + \Phi(0,13)}{2} = \frac{0,0478 + 0,0517}{2} = 0,04975.$$

Тоді $P(|X - 2| < 0,5) = 2 \cdot 0,04975 = 0,0995$.

1.5 Закон великих чисел

На практиці часто розглядають ВВ, які є, в свою чергу, сумами великої кількості випадкових величин. Обчислення безпосередньо ймовірностей розподілу має певні труднощі. Однак при дуже великій кількості випадкових явищ середній їх результат практично не є випадковим і може бути передбачений з великим ступенем певності. Наприклад, якщо в кожному досліді ВВ X приймає деяке значення, то при зростанні $n \rightarrow \infty$ середнє арифметичне спостережених значень ВВ X стає стійким (збігається) до математичного сподівання ВВ X . Умови, за яких сукупний результат впливу випадкових

факторів практично перестає бути випадковим, описуються в декількох теоремах, які носять загальну назву закону великих чисел. Якщо ВВ X має скінчену дисперсію $D(X)$ і математичне сподівання $M(X)$, то за будь-якого $\varepsilon > 0$ справедливо:

Лема. Нехай випадкова величина невід'ємна ($X \geq 0$), тоді $P(X \geq \varepsilon) \leq M(X)/\varepsilon$.

Нерівність Чебишова. Імовірність того, що відхилення ВВ X від її математичного сподівання (середнього значення) за абсолютною величиною менше додатного числа ε , не менше, ніж $1 - D(X)/\varepsilon^2$:

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - D(X)/\varepsilon^2.$$

Зауваження. Часто використовується інша форма висловлювання:

$$P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) \leq D(X)/\varepsilon^2.$$

Теорема Чебишова. Якщо випадкові величини $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$

а) попарно незалежні і б) їх дисперсії обмежені, $D(X) \leq C$, то яким би малим не було додатне число ε , справедливо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(X_i)\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

Іншими словами, середнє арифметичне значень незалежних випадкових величин $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ у міру зростання числа доданків все менше відхиляється від середнього арифметичного їх математичних сподівань.

1.6 Система випадкових величин

Спільний розгляд декількох ВВ приводить до системи випадкових величин. Умовно систему випадкових величин $X, Y, \dots, W$ записують у вигляді точки $(X, Y, \dots, W)$ простору відповідної вимірності. Наприклад, складається модель витрат випадково вибраної сім'ї на одяг, взуття, харчування, транспорт і т.д. Ці витрати є випадковими величинами на одному просторі елементарних подій.

Сукупність двох випадкових величин (X, Y) , що розглядаються разом, називається **системою двох випадкових величин** або двовимірним випадковим вектором. Систему двох випадкових величин можна розглядати як випадкову точку $M(X, Y)$ на площині xOy .

Функцією спільного розподілу $F(x, y)$ системи двох випадкових величин (X, Y) називається ймовірність одночасного виконання двох нерівностей: $X < x, Y < y$, тобто $F(x, y) = P(X < x, Y < y)$. Це ймовірність того, що ВВ (X, Y) потрапить у нескінченний квадрат з вершиною (x, y) , розташований лівіше і нижче цієї вершини.

Властивості функції $F(x, y)$:

а) $0 \leq F(x, y) \leq 1$;

б) $F(x_1, y) \leq F(x_2, y)$ для $x_1 \leq x_2$ і $F(x, y_1) \leq F(x, y_2)$ для $y_1 \leq y_2$;

в) $F(-\infty, -\infty) = 0$, $F(-\infty, y) = 0$, $F(x, -\infty) = 0$, $F(\infty, \infty) = 1$;

г) $F(\infty, y) = F_2(y)$ і $F(x, \infty) = F_1(x)$, де $F_1(x)$ і $F_2(y)$ функції розподілу одновимірних випадкових величин, тобто по багатомірному розподілу можна відновити одномірний розподіл.

Імовірність попадання випадкової точки (X, Y) в прямокутник $ABCD$: $A(x_1, y_1)$, $B(x_1, y_2)$, $C(x_2, y_2)$, $D(x_2, y_1)$ обчислюється за формулою:

$$P(x_1 < X < x_2, y_1 < Y < y_2) = (F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)) - (F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)).$$

Випадкові величини X і Y називаються незалежними, якщо їх спільна функція розподілу дорівнює добутку функцій розподілу одновимірних ВВ X і Y : $F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y)$.

Система дискретних ВВ (X, Y)

Системою дискретних ВВ (X, Y) називають систему випадкових величин, складові X , Y якої дискретні. Ймовірність того, що ВВ X набуде значення x_i , а ВВ Y – значення y_j , називають законом розподілу двовимірної дискретної випадкової величини, тобто $p_{ij} = p(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$. p_{ij} – спільна ймовірність. Закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин (X, Y) може бути заданий наступною таблицею:

$Y \setminus X$	x_1	x_2	$\dots$	x_n
y_1	p_{11}	p_{21}	$\dots$	p_{n1}
y_2	p_{12}	p_{22}	$\dots$	p_{n2}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
y_m	p_{1m}	p_{2m}	$\dots$	p_{nm}

Справедливо, що

$$\sum_{i,j=1}^{n,m} p_{ij} = 1; \quad \sum_{j=1}^m p_{ij} = P(X = x_i) = P(x_i); \quad \sum_{i=1}^n p_{ij} = P(Y = y_j) = P(y_j)$$

Дискретні ВВ X і Y незалежні тоді і тільки тоді, коли $p_{ij} = P(x_i) \cdot P(y_j)$, де $P(x_i) = P(X = x_i)$ і $P(y_j) = P(Y = y_j)$.

Система неперервних ВВ (X, Y)

Системою неперервних ВВ (X, Y) називають систему випадкових величин, складові X , Y якої неперервні.

Якщо функція спільного розподілу $F(x, y)$ неперервна і має другу мішану похідну по x і y , то цю похідну називають **щільністю спільного розподілу** і позначають $f(x, y)$. Таким чином,

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

Щільність спільного розподілу $f(x, y)$ має такі властивості:

$$\text{а) } f(x, y) \geq 0; \quad \text{б) } \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1.$$

Знаючи щільність розподілу, можна знайти інтегральну функцію розподілу за формулою:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x, y) dx dy.$$

Імовірність попадання випадкової точки (X, Y) в довільну область D знаходиться за формулою:

$$P((X, Y) \in D) = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Щільності розподілу компонент X , Y , що входять в систему (X, Y) , виражаються через щільність спільного розподілу системи формулами:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy; \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

Випадкові величини X і Y називаються незалежними, тоді і тільки тоді, коли: $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$.

Числові характеристики двовимірних випадкових величин

1. Математичним сподіванням двовимірної ВВ (X, Y) називається впорядкована пара чисел $(M(X), M(Y))$.

Для дискретної ВВ (X, Y) :

$$M(X) = m_X = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i p_{ij}, \quad M(Y) = m_Y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m y_j p_{ij}$$

Для неперервної ВВ (X, Y) :

$$M(X) = m_X = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x, y) dx dy, \quad M(Y) = m_Y = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f(x, y) dx dy.$$

Математичне сподівання (m_X, m_Y) – координати середньої точки, щодо якої розкидані випадкові точки (X, Y) . (m_X, m_Y) іноді називають **центром розсіювання**.

2. **Дисперсією двовимірної ВВ** (X, Y) називається впорядкована пара чисел $(D(X), D(Y))$.

Для дискретної ВВ (X, Y) :

$$D(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i - m_X)^2 p_{ij}, \quad D(Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (y_j - m_Y)^2 p_{ij}.$$

Для неперервної ВВ (X, Y) :

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 f(x, y) dx dy, \quad D(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_Y)^2 f(x, y) dx dy$$

Дисперсія $(D(X), D(Y))$ показує наскільки хмара точок (X, Y) розкидана в напрямку осей Ox і Oy .

3. **Середнє квадратичне відхилення двовимірної ВВ** (X, Y) обчислюють за формулами:

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)} \quad \text{та} \quad \sigma_y = \sqrt{D(Y)}$$

4. **Початковим моментом** $\nu_{k,s}$ порядку $k + s$ системи ВВ (X, Y) називають математичне сподівання добутку $X^k \cdot Y^s$: $\nu_{k,s} = M(X^k \cdot Y^s)$. Зокрема, $\nu_{1,0} = M(X)$, $\nu_{0,1} = M(Y)$.

5. **Центральним моментом** $\mu_{k,s}$ порядку $k + s$ системи ВВ (X, Y) називають математичне сподівання добутку відхилень відповідно до k – го і s – го ступенів: $\mu_{k,s} = M((X - M(X))^k \cdot (Y - M(Y))^s)$. Зокрема, $\mu_{1,0} = 0$, $\mu_{0,1} = 0$, $\mu_{2,0} = D(X)$, $\mu_{0,2} = D(Y)$.

1.7 Умовні закони розподілу

Якщо ВВ X і Y , що утворюють двовимірну ВВ (X, Y) залежні, для характеристики цієї залежності вводять поняття умовного розподілу.

Умовним законом розподілу випадкової величини, що входить до системи, називається її закон розподілу, обчислений за умови, що інша випадкова величина прийняла певне значення. Наприклад, умовним законом розподілу ВВ X , що входить у систему ВВ (X, Y) , називається її закон розподілу, знайдений за умови, що друга ВВ Y прийняла певне значення (або потрапила в певний інтервал). Для залежних ДВВ X і Y умовні ймовірності обчислюються за формулами:

$$P(X = x_i / Y = y_j) = \frac{P(X = x_i; Y = y_j)}{P(Y = y_j)} \quad \text{або} \quad P(x_i / y_j) = \frac{P(x_i; y_j)}{P(y_j)},$$

$$P(Y = y_j / X = x_i) = \frac{P(X = x_i; Y = y_j)}{P(X = x_i)} \quad \text{або} \quad P(y_j / x_i) = \frac{P(x_i; y_j)}{P(x_i)},$$

$$\sum_{i=1}^n P(x_i / y_j) = 1, \quad \sum_{j=1}^m P(y_j / x_i) = 1.$$

Цю властивість умовних розподілів використовують для контролю обчислень. Якщо безумовні і умовні ймовірності ($P(x_i)$ і $P(x_i / y_j)$; $P(y_j)$ і $P(y_j / x_i)$) відрізняються, то величини X і Y залежні, а якщо збігаються – незалежні.

Для залежних НВВ X і Y **умовні щільності розподілу** (або щільності ймовірності умовного розподілу) випадкових величин X і Y , що входять у систему, позначаються $\phi(x / y)$ – умовна щільність розподілу випадкової величини X за умови, що випадкова величина $Y = y$ і $\varphi(y / x)$ – умовна щільність розподілу випадкової величини Y за умови, що випадкова величина $X = x$ і визначається як:

$$\phi(x / y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)}, \quad f_2(y) \neq 0; \quad \varphi(y / x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)}, \quad f_1(x) \neq 0$$

Для незалежних випадкових величин $\phi(x/y) = f_1(x)$ і $\phi(y/x) = f_2(y)$, тому $f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$.

Числові характеристики умовних розподілів

1. Умовним математичним сподіванням BB_X при $Y = y$, де y – одне з можливих значень BB_Y , називається:

$$\text{для дискретної } BB \quad M(X/Y=y) = \sum_{i=1}^n x_i p(x_i/y),$$

$$\text{для неперервної } BB \quad M(X/Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \phi(x/y) dx.$$

Умовне математичне сподівання $M(X/y)$ є функцією y , яку називають **функцією регресії** X на Y .

Аналогічно визначається умовне математичне сподівання $M(Y/x)$, що є функцією x і називається **функція регресії** Y на X .

2. **Кореляційний момент** K_{XY} (коваріація) системи $BB (X,Y)$ називається величина

$$K_{XY} = cov(X,Y) = M((X - m_X) \cdot (Y - m_Y)).$$

Для дискретної $BB (X,Y)$:

$$K_{XY} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i - m_X)(y_j - m_Y) p_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j p_{ij} - m_X m_Y.$$

Для неперервної $BB (X,Y)$:

$$K_{XY} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)(y - m_Y) \cdot f(x,y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x y f(x,y) dx dy - m_X m_Y.$$

BB_X і Y називаються некорельованими, якщо їх $K_{XY} = 0$.

Властивості коваріації: а) $K_{XY} = K_{YX}$; б) $cov(X+a,Y) = cov(X,Y+b) = cov(X,Y)$; в) якщо випадкові величини X і Y незалежні, то $K_{XY} = 0$; якщо $K_{XY} \neq 0$, то

випадкові величини X і Y залежні; г) $\text{cov}(cX, Y) = c \cdot \text{cov}(X, Y) = \text{cov}(X, cY)$; д) $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2 \cdot K_{XY}$; е) $|K_{XY}| \leq \sigma_X \cdot \sigma_Y$.

3. Безрозмірною характеристикою зв'язку між ВВ X і Y є **коефіцієнт кореляції**

$$r_{XY} = \text{cov}\left(\frac{X - m_X}{\sigma_X}, \frac{Y - m_Y}{\sigma_Y}\right) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Він характеризує ступінь тісноти лінійного зв'язку між випадковими величинами: якщо $|r_{XY}| \rightarrow 1$, то зв'язок сильніше; якщо $|r_{XY}| \rightarrow 0$, то зв'язок слабкіше. Властивості коефіцієнта кореляції:

а) $|r_{XY}| \leq 1$;

б) для незалежних ВВ $r_{XY} = 0$;

в) якщо ВВ X і Y пов'язані лінійною функціональною залежністю $Y = aX + b$, $a \neq 0$, то $|r_{XY}| = 1$, причому $r_{XY} = 1$ при $a > 0$ і $r_{XY} = -1$ при $a < 0$ і навпаки.

Задача 23. Дана двовимірна ВВ (X, Y) . Знайти: а) граничні закони ВВ X та Y ; б) умовний закон ВВ X при $y = 2,9$; в) числові характеристики $m_X, m_Y, \sigma_X, \sigma_Y, r_{XY}$.

$Y \backslash X$	1,7	1,8	1,9	2,0
2,7	0,01	0,02	0,04	0,04
2,8	0,01	0,22	0,13	0,4
2,9	0,05	0,125	0,12	0,105
3,0	0,015	0,035	0,025	0,015

Розв'язування. а) запишемо граничні закони ВВ X та Y :

X	1,7	1,8	1,9	2,0
P	0,085	0,4	0,315	0,2

Y	2,7	2,8	2,9	3,0
p	0,11	0,4	0,4	0,09

б) умовний закон ВВ X при $y = 2,9$. Знайдемо умовні ймовірності за формулою:

$$P(x_i / y = y_k) = \frac{P(x_i; y_k)}{P(y_k)}. \text{ З таблиці закону розподілу для ВВ } Y \text{ маємо,}$$

$$\text{що } p(y = 2,9) = 0,4. \text{ Тоді } p(x_1 / y = 2,9) = 0,05 / 0,4 = 0,125;$$

$$p(x_2 / y = 2,9) = 0,125 / 0,4 = 0,3125;$$

$$p(x_3 / y = 2,9) = 0,12 / 0,4 = 0,3;$$

$$p(x_4 / y = 2,9) = 0,105 / 0,4 = 0,2625.$$

X	1,7	1,8	1,9	2,0
$p(X / y = 2,9)$	0,085	0,4	0,315	0,2

в) знайдемо числові характеристики $m_X, m_Y, \sigma_X, \sigma_Y, r_{XY}$.

Математичне сподівання ВВ X :

$$m_X = \sum_{i=1}^4 x_i p_i = 1,7 \cdot 0,085 + 1,8 \cdot 0,4 + 1,9 \cdot 0,315 + 2 \cdot 0,2 = 1,863$$

Математичне сподівання ВВ Y :

$$m_Y = \sum_{j=1}^4 y_j p_j = 2,7 \cdot 0,11 + 2,8 \cdot 0,4 + 2,9 \cdot 0,4 + 3 \cdot 0,09 = 2,847$$

Дисперсія ВВ X :

$$D_X = \sum_{i=1}^4 x_i^2 p_i - (m_X)^2 = 1,7^2 \cdot 0,085 + 1,8^2 \cdot 0,4 + 1,9^2 \cdot 0,315 + 2^2 \cdot 0,2 - (1,863)^2 = 0,009231$$

Дисперсія ВВ Y :

$$D_Y = \sum_{j=1}^4 y_j^2 p_j - (m_Y)^2 = 2,7^2 \cdot 0,11 + 2,8^2 \cdot 0,4 + 2,9^2 \cdot 0,4 + 3^2 \cdot 0,09 - (2,847)^2 = 0,006591$$

Середнє квадратичне відхилення ВВ X :

$$\sigma_X = \sqrt{D_X} = \sqrt{0,009231} \approx 0,096.$$

Середнє квадратичне відхилення ВВ Y :

$$\sigma_Y = \sqrt{D_Y} = \sqrt{0,006591} \approx 0,0812.$$

Закон розподілу ВВ (XY):

XY	4,59	4,76	4,93	5,1	4,86	5,04	5,22	5,4
P	0,01	0,01	0,05	0,015	0,02	0,22	0,125	0,035
XY	5,13	5,32	5,51	5,7	5,4	5,6	5,8	6,0
P	0,04	0,13	0,12	0,025	0,04	0,04	0,105	0,015

Знайдемо математичне сподівання ВВ (XY):

$$\begin{aligned} M(XY) &= \sum_i (xy)_i p_i = 4,59 \cdot 0,01 + 4,76 \cdot 0,01 + 4,93 \cdot 0,05 + 5,1 \cdot 0,015 + \\ &+ 4,86 \cdot 0,02 + 5,04 \cdot 0,22 + 5,22 \cdot 0,125 + 5,4 \cdot 0,035 + 5,13 \cdot 0,04 + \\ &+ 5,32 \cdot 0,13 + 5,51 \cdot 0,12 + 5,7 \cdot 0,025 + 5,4 \cdot 0,04 + 5,6 \cdot 0,04 + \\ &+ 5,8 \cdot 0,105 + 6,0 \cdot 0,015 = 5,3035 \end{aligned}$$

Знайдемо коефіцієнт кореляції за формулою:

$$r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{M(XY) - M(X) \cdot M(Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{5,3035 - 1,863 \cdot 2,847}{0,096 \cdot 0,0812} \approx -0,059$$

1.8 Лінійна регресія. Прямі лінії середньоквадратичної регресії

Нехай залежні ВВ X і Y пов'язані лінійною функціональною залежністю $Y \cong g(x) = aX + b$. Функцію $g(x)$ називають **середньоквадратичною регресією** Y на X , a і b – параметри, що підлягають визначенню. Частіше для їх знаходження застосовують метод найменших квадратів. Для цього треба розв'язати систему двох рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha \sum_{i=1}^n x_i + n \cdot b = \sum_{i=1}^n y_i \\ \alpha \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{cases}$$

Лінійна середньоквадратична регресія Y на X має вигляд:

$$g(x) = m_Y + r_{XY} \cdot (\sigma_Y / \sigma_X) \cdot (X - m_X),$$

де $m_X = M(X)$, $m_Y = M(Y)$, $\sigma_X = \sqrt{D(X)}$, $\sigma_Y = \sqrt{D(Y)}$, $r_{XY} = K_{XY} / (\sigma_X \cdot \sigma_Y)$. Коефіцієнт $a = r_{XY} \cdot (\sigma_Y / \sigma_X)$ називають **коефіцієнтом регресії** Y на X , $b = m_Y - r_{XY} \cdot (\sigma_Y / \sigma_X) \cdot m_X$, а пряму: $y - m_Y = r_{XY} \cdot (\sigma_Y / \sigma_X) \cdot (x - m_X)$ називають **прямою середньоквадратичної регресії** Y на X .

Аналогічно, **пряма середньоквадратичної регресії** X на Y має вигляд: $x - m_X = r_{XY} \cdot (\sigma_X / \sigma_Y) \cdot (y - m_Y)$, де $r_{XY} \cdot (\sigma_X / \sigma_Y)$ – коефіцієнт регресії X на Y . Якщо $r_{XY} = 1$, то ВВ Y і X пов'язані лінійною функціональною залежністю і обидві прямі регресії збігаються.

Якщо і функція регресії X на Y : $M(X/y) = \phi(y)$, і функція регресії Y на X : $M(Y/x) = \varphi(x)$ – лінійні, то ВВ X і Y пов'язані лінійною кореляційною залежністю. У цьому випадку графіки функцій регресії є прямі. Ці прямі збігаються з прямими середньоквадратичної регресії.

Задача 24. За незгрупованими даними x_i і y_i ($i = 1, 2, \dots, 10$) результатів досліджень ВВ X і Y скласти вибіркове рівняння прямої лінії регресії Y на X . В системі координат xOy побудувати графік прямої лінії регресії та показати результати досліджень.

x_i	-3,0	-0,7	0,9	1,3	2,0	2,8	3,6	4,5	4,8	5,9
y_i	-2,1	1,4	2,9	3,7	4,1	5,7	6,4	7,3	7,5	8,3

Розв'язування. Рівняння прямої лінії регресії $y = ax + b$, де коефіцієнти a і b знайдемо за методом найменших квадратів за допомогою системи двох рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha \sum_{i=1}^n x_i + n \cdot b = \sum_{i=1}^n y_i \\ \alpha \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{cases} \quad \text{Знайдемо суми, що входять до системи:}$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = -3,0 + (-0,7) + 0,9 + 1,3 + 2,0 + 2,8 + 3,6 + 4,5 + 4,8 + 5,9 = 22,1$$

$$\sum_{i=1}^{10} y_i = -2,1 + 1,4 + 2,9 + 3,7 + 4,1 + 5,7 + 6,4 + 7,3 + 7,5 + 8,3 = 45,2$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{10} x_i^2 &= (-3,0)^2 + (-0,7)^2 + 0,9^2 + 1,3^2 + (2,0)^2 + 2,8^2 + 3,6^2 + 4,5^2 + 4,8^2 + \\ &+ 5,9^2 = 114,89 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{10} x_i y_i &= (-3,0) \cdot (-2,1) + (-0,7) \cdot 1,4 + 0,9 \cdot 2,9 + 1,3 \cdot 3,7 + 2,0 \cdot 4,1 + 2,8 \cdot 5,7 + \\ &+ 3,6 \cdot 6,4 + 4,5 \cdot 7,3 + 4,8 \cdot 7,5 + 5,9 \cdot 8,3 = 177,76 \end{aligned}$$

Одержимо систему двох лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 22,1 \cdot \alpha + 10 \cdot b = 45,2 \\ 114,89 \cdot \alpha + 22,1 \cdot b = 177,76 \end{cases} \quad \text{Розв'яжемо систему за формулами}$$

Крамера:

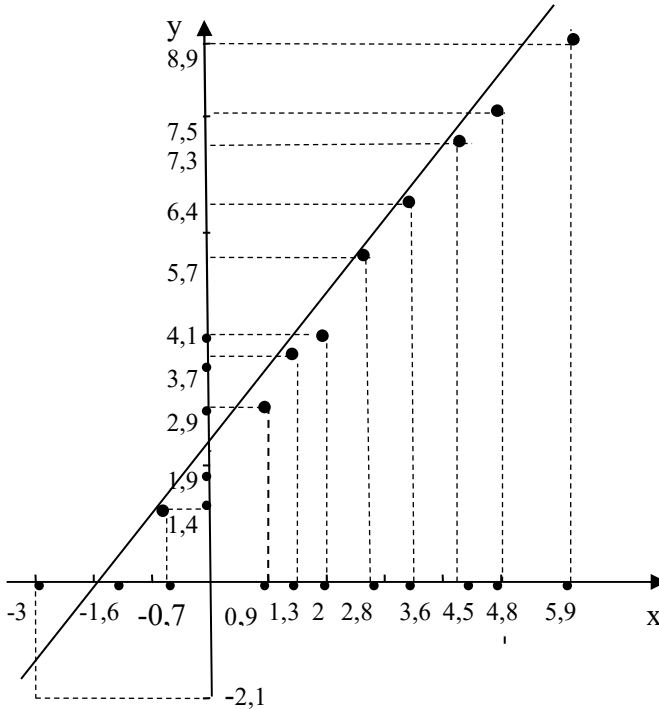
$$\Delta = \begin{vmatrix} 22,1 & 10 \\ 114,89 & 22,1 \end{vmatrix} = 22,1^2 - 10 \cdot 114,89 = -660,49$$

$$\Delta_\alpha = \begin{vmatrix} 45,2 & 10 \\ 177,76 & 22,1 \end{vmatrix} = 45,2 \cdot 22,1 - 10 \cdot 177,76 = -778,68$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} 22,1 & 45,2 \\ 114,89 & 177,76 \end{vmatrix} = 22,1 \cdot 177,76 - 45,2 \cdot 114,89 = -1264,532$$

$$\alpha = \frac{\Delta_{\alpha}}{\Delta} = \frac{-778,68}{-660,49} \approx 1,1789 \quad b = \frac{\Delta_b}{\Delta} = \frac{-1264,532}{-660,49} \approx 1,9145$$

Отже, вибіркове рівняння лінії регресії має вигляд:
 $y = 1,1789 x + 1,9145$.



1.9 Статистичне оброблення результатів спостережень

Генеральною сукупністю називають вихідну безліч об'єктів, з якої здійснюється вибірка.

Вибіркою або **вибірковою сукупністю** називають сукупність випадково відібраних об'єктів.

Обсяг сукупності (вибіркової або генеральної) – число елементів даної множини.

Нехай з генеральної сукупності витягнута вибірка і проводяться спостереження за випадковою величиною X , причому значення x_1

спостерігалось n_1 раз, значення $x_2 - n_2$ раз, ..., значення $x_k - n_k$ раз, $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ – обсяг вибірки. Можливі значення випадкової величини $X: x_1, x_2, \dots, x_k$ прийнято називати **варіантами**, а послідовність варіант, записану в порядку зростання, – **варіаційним рядом**. Різниця між максимальним і мінімальним елементами вибірки називають **розмахом вибірки**. Числа $n_1, n_2, \dots, n_k$ називаються **частотами**, а $w_i = n_i / n$ – **відносними частотами**, сума яких дорівнює одиниці. Зазвичай статистичний ряд записується у вигляді таблиці:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_k	або	X	x_1	x_2	$\dots$	x_k
n_i	n_1	n_2	$\dots$	n_k		w_i	w_1	w_2	$\dots$	w_k

У тому випадку, якщо число значень випадкової величини X велике або є підстави вважати, що випадкова величина є неперервною і може прийняти будь-яке значення з деякого проміжку, будують **інтервальний статистичний ряд** у вигляді таблиці. Значення варіант групують за проміжкам (зазвичай однакової довжини), у першому рядку вказується проміжками, у другому – число спостережень, що потрапили в даний проміжок.

Для визначення оптимальної довжини часткового проміжку можна використовувати формулу Стерджеса. Нехай значення випадкової величини X розташовуються на відрізку $[a, b]$, обсяг вибірки – n . Довжина часткового інтервалу $\Delta = (b - a) / (1 + 3,32 \cdot \lg(n))$, число інтервалів $k = 1 + 3,32 \cdot \lg(n)$ (береться найближче до $[3,32 \cdot \lg(n)]$ ціле), перший інтервал починається в точці $x_{\min} = a - \Delta/2$.

Для наочності часто використовують графічне зображення статистичних рядів: для дискретного ряду – полігон, для інтервального ряду – гістограму.

Полігон частот (відносних частот) являє собою ламану лінію, відрізки якої з'єднують точки (x_1, n_1) , (x_2, n_2) , ..., (x_k, n_k) або (x_1, w_1) , (x_2, w_2) , ..., (x_k, w_k) .

Гістограмою частот (відносних частот) називається сукупність прямокутників, основами яких служать часткові інтервали довжиною $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ і висотами $h_i = n_i / \Delta x_i$ ($h_i = w_i / \Delta x_i$). Площа всієї гістограми частот дорівнює n (обсягу вибірки), а площа всієї гістограми відносних частот дорівнює 1. Гістограма і полігон можуть служити деяким наближенням графіка невідомої щільності розподілу $f(x)$ випадкової величини X . Точність наближення зростає зі зростанням обсягу вибірки та кількості часткових інтервалів.

Статистичною або емпіричною функцією розподілу випадкової величини X за наявною вибіркою називається функція $F^*(x)$, що дорівнює відносній частоті події ($X < x$), тобто $F^*(x) = n_x / n$, де n_x – число варіант у вибірці, менших x ; n – обсяг вибірки.

Теоретичною функцією розподілу називається функція розподілу $F(x)$ випадкової величини X , обчислена за генеральної сукупності, тобто ймовірність події X ($X < x$).

Властивості емпіричної функції розподілу аналогічні властивостям теоретичної функції розподілу дискретної випадкової величини X ($F^*(x)$ – неспадна функція; $0 \leq F^*(x) \leq 1$; якщо x_1 – найменша варіанта, а x_k – найбільша, то $F^*(x) = 0$ при $x \leq x_1$ і $F^*(x) = 1$ при $x > x_k$).

Числові характеристики статистичного розподілу вибірки

1. **Вибіркове середнє** – середнє арифметичне значень вибірки:

$$\bar{x}_e = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i \cdot x_i = \sum_{i=1}^k w_i \cdot x_i$$

Використовують також позначення: $\bar{x}$, $M^*(X)$, m_x^* .

2. **Вибіркова мода** M_o^* – найбільш ймовірне значення у вибірці (варіанта з найбільшою частотою).

3. **Вибіркова медіана** M_e^* – значення випадкової величини, що припадає на середину варіаційного ряду. Якщо обсяг вибірки парний,

$n=2m$, то $M_e^* = (x_m + x_{m+1})/2$, якщо непарний, $n=2m+1$, то $M_e^* = x_{m+1}$.

4. **Вибіркова дисперсія** – середнє значення квадрата відхилення $x_i - \bar{x}_e$:

$$D_e = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i \cdot (x_i - \bar{x}_e)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i \cdot x_i^2 - (\bar{x}_e)^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$$

5. **Вибіркове середнє квадратичне відхилення** – $\sigma_e = \sqrt{D_e}$

6. **Виправлена вибірка дисперсія** – $s^2 = \frac{n}{n-1} D_e$

7. **Виправлене вибіркве середнє квадратичне відхилення** – $s = \sqrt{s^2}$.

8. **Початковий вибірковий момент порядку k :**

$$\nu_k^*[X] = \overline{x^k} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i)^k.$$

9. **Центральний вибірковий момент порядку k :**

$$\mu_k^*[X] = \overline{(x - \bar{x})^k} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^k.$$

1.10 Інтервальні оцінки параметрів. Довірчі інтервали

Існують два види оцінок параметрів розподілу (числових характеристик) досліджуваної ознаки генеральної сукупності за даними вибірки – точкові та інтервальні.

Точкова оцінка невідомого параметра Θ – випадкова функція $\Theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$, значення якої для будь-якої реалізації вибірки приймають за наближене значення параметра Θ ,

$$\Theta = \Theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Інтервальна оцінка невідомого параметра Θ – випадкова функція $\Theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ така, що інтервал $(\underline{\alpha}, \bar{\alpha})$ включає в себе (покриває) невідомий параметр Θ з імовірністю γ . Сам інтервал носить назву **довірчого інтервалу**. Число $\gamma = 1 - \alpha$, $0 < \gamma < 1$ називається **довірчою**

ймовірністю оцінки (надійністю, коефіцієнтом довіри) , а α – **рівнем значущості**. Чим ближче γ до одиниці, тим надійніше оцінка (зазвичай вибирають $\gamma=0,9; 0,95$ або $0,99$).

Величини $\underline{\alpha}$ та $\bar{\alpha}$ називаються **довірчими межами**. Вони є функціями вибірових значень $\underline{\alpha} = \underline{\alpha}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ і, отже, є випадковими величинами.

Приклади довірчих інтервалів.

1. Довірчий інтервал для математичного сподівання a нормальної випадкової величини при відомій дисперсії σ^2 має вигляд

$$\bar{x}_e - t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \alpha < \bar{x}_e + t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

тут $t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \delta$ – точність оцінки; n – обсяг вибірки; t_γ – значення аргументу функції Лапласа $\Phi(t_\gamma)$, при якому $\Phi(t_\gamma) = \gamma/2$, t_γ визначається по заданій довірчій ймовірності γ за допомогою таблиці 3.2.

2. Довірчий інтервал для математичного сподівання a нормальної випадкової величини за невідомої дисперсії σ^2 має вигляд:

для $n < 30$

$$\bar{x}_e - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} < \alpha < \bar{x}_e + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}},$$

де величина t_γ визначається за таблицею 3.3: $t_\gamma = t(\gamma, n)$ (γ – задана довірча ймовірність, n – обсяг вибірки);

для $n \geq 30$

$$\bar{x}_e - u_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} < \alpha < \bar{x}_e + u_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}},$$

де величина $u_{\alpha/2}$ – значення аргументу функції Лапласа $\Phi(u_{\alpha/2})$, при якому $\Phi(u_{\alpha/2}) = \gamma/2$, визначається за заданою довірчою ймовірністю за допомогою таблиці 3.2.

Оцінка s обчислюється за формулою:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_e)^2}$$

3. Довірчий інтервал для дисперсії σ^2 нормальної випадкової величини має вигляд:

для $n < 50$

якщо математичне сподівання a відоме, то $s_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2$ і

$$\frac{(n-1)s_0^2}{\chi_{\alpha/2;n}^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s_0^2}{\chi_{1-\alpha/2;n}^2};$$

якщо математичне сподівання a невідоме, то

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_e)^2 \text{ і } \frac{(n-1)s^2}{\chi_{\alpha/2;n-1}^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\alpha/2;n-1}^2},$$

де n – обсяг вибірки; s – виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення, $\chi_1^2 = \chi_{1-\alpha/2;n-1}^2$ і $\chi_2^2 = \chi_{\alpha/2;n-1}^2$ визначаються при ступенях свободи $k = n - 1$ з рівності:

$P(\chi^2 > \chi_1^2) = 1 - \alpha/2 = (1 + \gamma)/2$ і $P(\chi^2 > \chi_2^2) = \alpha/2 = (1 - \gamma)/2$ за допомогою таблиці 3.4. Для знаходження довірчого інтервалу для середнього квадратичного відхилення σ можна користуватися формулою:

$$s \sqrt{\frac{(n-1)}{\chi_{\alpha/2;n-1}^2}} < \sigma < s \sqrt{\frac{(n-1)}{\chi_{1-\alpha/2;n-1}^2}}.$$

Позначимо через $\gamma_1 = \sqrt{\frac{(n-1)}{\chi_{\alpha/2;n-1}^2}}$ і $\gamma_2 = \sqrt{\frac{(n-1)}{\chi_{1-\alpha/2;n-1}^2}}$. Тоді за

таблицею 3.5 можна знайти γ_1 та γ_2 .

для $n \geq 50$

$$\frac{s}{1 + \frac{u_{\alpha/2}}{\sqrt{2n}}} < \sigma < \frac{s}{1 - \frac{u_{\alpha/2}}{\sqrt{2n}}},$$

де $u_{\alpha/2}$ – квантіль стандартного нормального розподілу, відповідний довірчий ймовірності $1 - \alpha$.

4. Нехай n – число незалежних випробувань, m – число настання події A , p – ймовірність настання події A в кожному окремому випробуванні. Розглянемо випадок, коли n досить велике, а значення p не дуже близько до нуля або до одиниці так, що можна скористатися асимптотикою Муавра–Лапласа. При цьому довірчий інтервал для p має вигляд:

$$\frac{m}{n + (u_\gamma)^2} < p < \frac{m + (u_\gamma)^2}{n + (u_\gamma)^2}$$

u_γ визначається за заданою довірчою ймовірністю γ за допомогою таблиці 3.6.

Розглянемо окремо випадок $m = 0$. При цьому нижня довірча межа дорівнює нулю, верхня $1 - \sqrt[n]{1 - \gamma}$. Аналогічно, при $m = n$ нижня і верхня довірчі межі рівні відповідно $\sqrt[n]{1 - \gamma}$ і одиниці.

Задача 25. Відомі дисперсія $\sigma^2 = 26,1$ нормального розподілу випадкової величини X , вибіркве середнє $\bar{x}_s = 56,85$ та обсяг вибірки $n = 20$. Знайти довірчий інтервал для математичного сподівання a нормальної випадкової величини при відомій дисперсії по заданій довірчій імовірності $\gamma = 0,95$.

Розв’язування. Знайдемо шуканий інтервал за формулою:

$$\bar{x}_s - t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_s + t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

t_γ – значення аргументу функції Лапласа $\Phi(t_\gamma)$, при якому $\Phi(t_\gamma) = \gamma/2$. $\Phi(t_\gamma) = 0,95/2 = 0,475$. За допомогою таблиці 3.2 маємо $t_\gamma = 2,086$. $\sigma = \sqrt{26,1} = 5,109$. Підставимо дані в формулу:

$$56,85 - 2,086 \frac{5,109}{\sqrt{20}} < \alpha < 56,85 + 2,086 \frac{5,109}{\sqrt{20}}.$$

Довірчий інтервал для математичного сподівання a :
 $55,708 < a < 57,992$.

1.11 Перевірка статистичних гіпотез

Будь-яке твердження, висловлене щодо невідомого закону генеральної сукупності або щодо числових характеристик цього закону (якщо відомий закон розподілу), називається **гіпотезою**.

Основною (нульовою) гіпотезою називають висунуту гіпотезу H_0 , а **альтернативною (конкуруючою) гіпотезою** H_1 називають гіпотезу, яка суперечить висунутій.

Гіпотеза називається **простою**, якщо відповідь на неї однозначна («ознака розподілена нормально», «дисперсія розподілу дорівнює 3» і т.п.). Якщо відповідь неоднозначна, гіпотеза називається складною.

Перевірку справедливості гіпотез проводять статистичними методами, тому їх називають статистичними. У ході перевірки гіпотез можуть бути допущені помилки першого і другого роду.

Помилкою першого роду називають помилку, яка припускається у випадку, коли **відкинута правильна основна гіпотеза** (H_0 відкинута, хоча вона правильна).

Помилкою другого роду називають помилку, яка припускається в разі **прийняття неправильної основної гіпотези** (H_0 прийнята, хоча вона неправильна).

Випадкова величина X , що служить для перевірки гіпотези H_0 , називається **статистичним критерієм**, або просто критерієм K . Спостереженим значенням $X_{\text{спост}}$ називають значення критерію, обчислене за вибіркою.

Критичною областю S називається множина значень критерію, за яких основна гіпотеза H_0 відхиляється.

Областю прийняття гіпотези (допустимою областю) $\bar{S}$ називається множина значень критерію, за яких основна гіпотеза H_0 не відхиляється.

Критичні точки $k_{кр}$ поділяють критичну область і область прийняття гіпотези.

Правостороння критична область визначається з рівності $P(K > k_{кр}) = \alpha$, **лівостороння критична область** – з рівності $P(K < k_{кр}) = \alpha$, а **двостороння критична область** – з рівності $P(K < k_1) + P(K > k_2) = \alpha$, де α називається рівнем значущості; k_1 , k_2 – відповідно ліва і права критичні точки. Найчастіше двосторонню критичну область будують як симетричну, визначаючи k_1 і k_2 з рівнянь $P(K < k_1) = \alpha/2$ і $P(K > k_2) = \alpha/2$. На практиці при перевірці гіпотез звичайно задається рівень значущості $\alpha = 0,05; 0,01; 0,001$.

Основний принцип перевірки статистичних гіпотез полягає в наступному: якщо $X_{спост}$ потрапляє в критичну область, то основну гіпотезу H_0 відхиляють і приймають альтернативну гіпотезу H_1 , якщо $X_{спост}$ належить області прийняття гіпотези, то гіпотезу H_0 приймають, а гіпотезу H_1 відхиляють.

Для кожного виду гіпотез, що перевіряються, розроблені відповідні критерії. Найчастіше використовуються величини, які мають нормальний розподіл, розподіл χ^2 (Пірсона), t – розподіл Стьюдента, F – розподіл Фішера-Снедекора.

Перевірка гіпотези про нормальний розподіл генеральної сукупності за допомогою критерію Пірсона

Нехай закон розподілу генеральної сукупності невідомий, але є підстави припускати, що він має певний вигляд, зокрема те, що

генеральний розподіл – нормальний. Це твердження носить характер гіпотези і має бути піддано статистичній перевірці.

Для перевірки гіпотези H_0 : закон розподілу має даний вигляд (наприклад, нормальний та ін) використовується спеціально підібрана випадкова величина, яка називається критерієм згоди.

Критерій згоди є критерієм перевірки гіпотези про передбачуваний закон невідомого розподілу. Є декілька критеріїв згоди: χ^2 (хі-квадрат) Пірсона, Колмогорова, Мізеса-Смирнова та ін.

Розглянемо критерій χ^2 Пірсона.

Нехай вибірка подається інтервальним статистичним рядом. Для вивчення випадкової величини X проведено n дослідів, діапазон значень величини X , що спостерігалися, розбитий на q інтервалів,

довжиною $h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3,32 \cdot \lg(n)}$. Складемо таблицю:

Інтервали	$[x_1; x_2)$	$[x_2; x_3)$	...	$[x_q; x_{q+1}]$
Середина інтервалу $x'_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$	x'_1	x'_2	...	x'_q
Частоти n_i	n_1	n_2	...	n_q
Відносна частота $w_i = \frac{n_i}{n}$	w_1	w_2	...	w_q

де n_i – кількість експериментальних даних у i – інтервалі, $\sum_{i=1}^q n_i = n$,

$\sum_{i=1}^q w_i = 1$. Емпірична функція розподілу $F^*(x) = \frac{n_x}{n}$, де n_x – число

варіант, менших x ; n – обсяг вибірки, $F^*(x) = 0$ при $x \leq x_{\min}$ і

$F^*(x) = 1$ при $x > x_{\max}$.

Числові характеристики вибірки знаходимо за формулами:

$$\bar{x}_g = \sum_{i=1}^q x_i' \cdot w_i, \quad D_g = \sum_{i=1}^q (x_i')^2 \cdot w_i - (\bar{x}_g)^2, \quad \sigma_g = \sqrt{D_g}, \quad \text{виправлена}$$

статистична дисперсія $s^2 = \frac{n}{n-1} D_g$, коефіцієнт варіації

$$V^* = \frac{s}{\bar{x}_g} \cdot 100\%.$$

Відповідно до гіпотези, щільність розподілу ймовірностей має

$$\text{вигляд: } f(x) = \frac{1}{\sigma_g \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - \bar{x}_g)^2}{2\sigma_g^2}}. \quad \text{Графік цієї функції називається}$$

вирівнювальною кривою.

$$\text{Функція розподілу } F(x) = \Phi\left(\frac{x - \bar{x}_g}{\sigma_g}\right) + 0,5. \quad \text{Перевіряємо}$$

узгодженість експериментальних даних з гіпотезою про нормальний розподіл ВВ X .

$$\text{Визначаємо } \chi^2_{\text{спост}} = \sum_{i=1}^q \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}, \quad \text{де ймовірності потрапляння}$$

ВВ у відповідний інтервал обчислимо за формулою

$$p_i = P(x_i \leq X < x_{i+1}) = \Phi\left(\frac{x_{i+1} - \bar{x}}{S}\right) - \Phi\left(\frac{x_i - \bar{x}}{S}\right), \quad \text{де } \Phi(x) - \text{інтегральна}$$

функція Лапласа, і розглянемо величину $\chi^2 = \sum_{i=1}^q \frac{n}{p_i} (p_i^* - p_i)^2$, яка характеризує ступінь розбіжності теоретичних і емпіричних даних.

Враховуючи, що $p_i^* = \frac{m_i}{n}$, отримаємо

$$\chi^2_{\text{спост}} = \sum_{i=1}^q \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$$

Можна показати, що при $n \rightarrow \infty$ розподіл цієї ВВ, незалежно від того, який закон розподілу генеральної сукупності, прагне до

розподілу Пірсона χ^2 з числом ступенів свободи $\nu = q - 1 - k$, де k – число параметрів генерального розподілу, що оцінюються на основі спостережених даних. Якщо перевіряється згода вибіркового розподілу з розподілом Пуассона, єдиний параметр якого оцінюється за вибірковими даними, то $\nu = q - 2$, якщо перевіряється згода з нормальним розподілом, для якого за вибірковими даними оцінюються два параметри $\bar{x}$ і σ , то $\nu = q - 3$ і т.д.

При повному збігу теоретичного та експериментального розподілів $\chi^2 = 0$, інакше $\chi^2 > 0$. Обравши рівень значущості α , знаходимо табличне критичне значення $\chi_{кр}^2$, при $\chi_{спост}^2 < \chi_{кр}^2$ приймаємо гіпотезу H_0 , при $\chi_{спост}^2 \geq \chi_{кр}^2$ відхиляємо гіпотезу H_0 про вид розподілу.

У зв'язку з асимптотичним характером закону Пірсона χ^2 повинні виконуватися наступні умови:

а) вибірка повинна утворюватися в результаті випадкового відбору;

б) обсяг вибірки n повинен бути достатньо великим (практично не менше 50 одиниць);

в) чисельність кожної групи має бути не менше 5 (якщо ця умова не виконується, проводиться об'єднання малочисельних інтервалів).

Задача 26. За даними вибірки для випадкової величини X :

200	209	192	205	197	191	207	165	183	200
185	169	214	165	185	209	185	202	215	172
193	214	176	217	188	191	224	190	167	189
201	208	192	186	170	191	201	192	214	189
168	179	202	192	173	180	200	189	181	172

треба а) записати статистичний та інтервальний статистичний ряди; б) побудувати полігон та гістограму частот; в) записати статистичну (емпіричну) функцію розподілу та побудувати її графік; г) знайти

вибіркове середнє і вибіркову дисперсію та коефіцієнт варіації V^* ;
 д) при рівні значущості $\alpha = 0,05$ перевірити гіпотезу про узгодженість емпіричного розподілу теоретичному (нормальному).

Розв'язування. Обсяг вибірки – 50. Упорядкуємо дані вибірки за зростанням (ранжируємо вибірку).

165	165	165	168	168	170	170	170	173	176
180	181	184	185	185	185	186	186	189	189
189	190	190	191	191	191	193	194	194	197
197	197	200	200	200	202	202	204	205	205
205	207	208	209	211	214	214	215	217	224

а) Запишемо статистичний ряд, де x_i – можливі значення ВВ X ,

n_i – частота відповідних значень x_i :

x_i	165	168	170	173	176	180	181	184	185	186	189
n_i	3	2	3	1	1	1	1	1	3	2	3

x_i	190	191	193	194	197	200	202	204	205	207	208
n_i	2	3	1	2	3	3	2	1	3	1	1

x_i	209	211	214	215	217	224
n_i	1	1	2	1	1	1

Виберемо найбільше та найменше значення x_i : $x_{\max} = 224$,
 $x_{\min} = 165$. Визначимо довжину інтервалу:

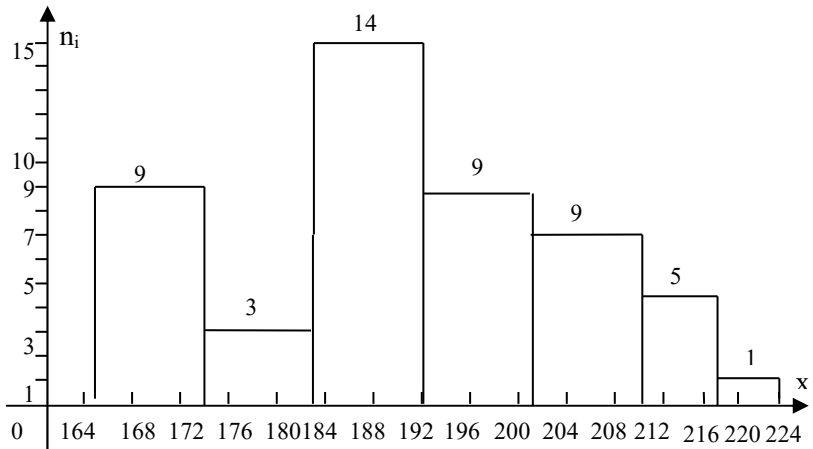
$$\Delta = \frac{224 - 165}{1 + 3,32 \cdot \lg 50} \approx \frac{59}{6,64} \approx 8,88 \approx 9, \quad q \approx 6,64 \approx 7.$$

Побудуємо інтервальний статистичний ряд.

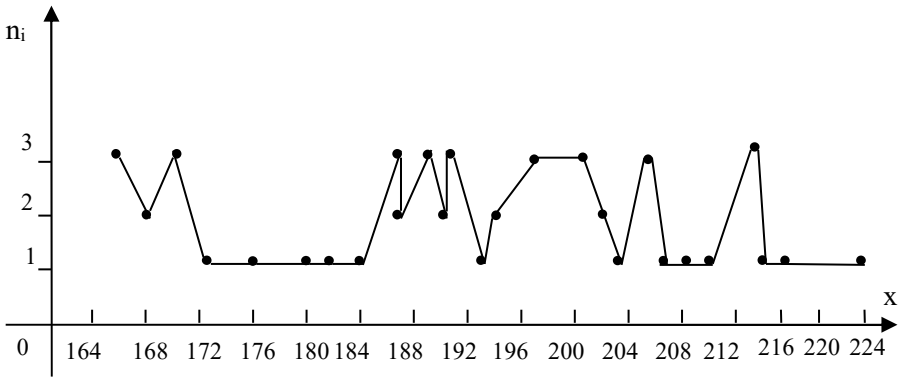
Інтервал	Середина інтервалу $x'_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$	Частоти n_i	Відносні частоти $w_i = \frac{n_i}{n}$	Щільності відносних частот $H_i = \frac{w_i}{\Delta}$
[165,174)	169,5	9	0,18	0,02
[174,183)	178,5	3	0,06	0,007
[183,192)	187,5	14	0,28	0,031
[192,201)	196,5	9	0,18	0,02
[201,210)	205,5	9	0,18	0,02
[210,219)	214,5	5	0,1	0,01
[219,224]	221,5	1	0,02	0,002
$q = 7$		$\sum_i n_i = 50$	$\sum_i w_i = 1$	

б) Побудуємо полігон і гістограму частот:

Графік гістограми частот має вигляд:



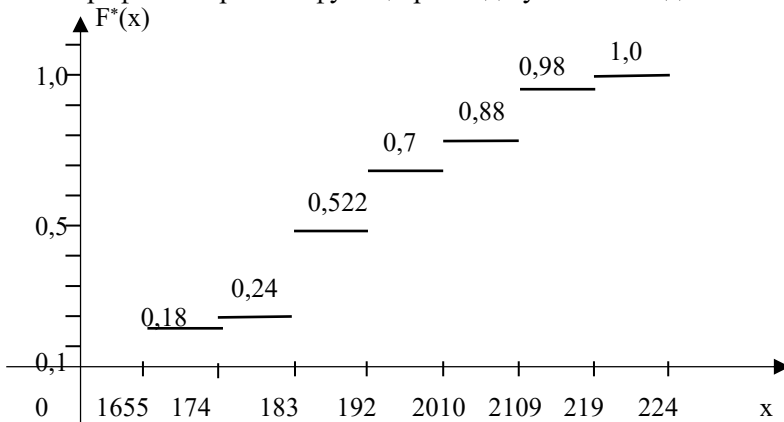
Графік полігона частот має вигляд:



в) Запишемо емпіричну функцію розподілу:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x < 165 \\ 0,18, & 165 \leq x < 174 \\ 0,24, & 174 \leq x < 183 \\ 0,52, & 183 \leq x < 192 \\ 0,7, & 192 \leq x < 201 \\ 0,88, & 201 \leq x < 210 \\ 0,98, & 210 \leq x < 219 \\ 1, & 219 \leq x \leq 224 \end{cases}$$

Графік емпіричної функції розподілу має вигляд:



г) Знайдемо вибіркове середнє і вибірккову дисперсію та коефіцієнт варіації V^* .

Вибіркове середнє:

$$\bar{x}_e = \sum_{i=1}^q x_i' \cdot w_i = 169,5 \cdot 0,18 + 178,5 \cdot 0,06 + 187,5 \cdot 0,28 + 196,5 \cdot 0,18 + \\ + 205,5 \cdot 0,18 + 214,5 \cdot 0,1 + 221,5 \cdot 0,02 = 191,96.$$

Вибіркова дисперсія:

$$D_e = \sum_{i=1}^q (x_i')^2 \cdot w_i - (\bar{x}_e)^2 = (169,5)^2 \cdot 0,18 + (178,5)^2 \cdot 0,06 + (187,5)^2 \cdot 0,28 + \\ + (196,5)^2 \cdot 0,18 + (205,5)^2 \cdot 0,18 + (214,5)^2 \cdot 0,1 + (221,5)^2 \cdot 0,02 - \\ - (191,96)^2 = 212,2084.$$

Виправлена вибірккова дисперсія:

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_e = \frac{50}{49} \cdot 212,2084 \approx 216,5392.$$

Виправлене вибірккове середнє квадратичне відхилення:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{216,5392} \approx 14,7153.$$

$$\text{Коефіцієнт варіації } V^* = \frac{s}{\bar{x}_e} \cdot 100\% = \frac{14,7153}{191,96} \cdot 100\% \approx 7,666\%.$$

д) при рівні значущості $\alpha = 0,05$ перевірити гіпотезу про узгодженість емпіричного розподілу теоретичному (нормальному). Відповідно до гіпотези, щільність розподілу ймовірностей має вигляд:

$$f(x) = \frac{1}{14,7153\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-191,96)^2}{2(14,7153)^2}}, \text{ а функція розподілу -}$$

$$F(x) = \frac{1}{14,7153\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(z-191,96)^2}{2(14,7153)^2}} dz = \Phi\left(\frac{x-191,96}{14,7153}\right) + 0,5.$$

Значення критерію $\chi^2_{\text{снот}}$, що спостерігається, визначається формулою:

$$\chi^2_{\text{сном}} = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}, \text{ де } p_i = \Phi\left(\frac{x_{i+1} - \bar{x}_e}{s}\right) - \Phi\left(\frac{x_i - \bar{x}_e}{s}\right).$$

Знайдемо ймовірності p_i . Значення функції $\Phi(x)$ знаходимо за таблицею 3.2. Маємо

$$p_1 = \Phi\left(\frac{174 - 191,96}{14,7153}\right) - \Phi\left(\frac{165 - 191,96}{14,7153}\right) = \Phi(-1,22) - \Phi(-1,83) = -\Phi(1,22) + \Phi(1,83) = -0,3883 + 0,4664 = 0,0781,$$

$$p_2 = \Phi\left(\frac{183 - 191,96}{14,7153}\right) - \Phi\left(\frac{174 - 191,96}{14,7153}\right) = \Phi(-0,61) - \Phi(-1,22) = -\Phi(0,61) + \Phi(1,22) = -0,2291 + 0,3883 = 0,1592,$$

$$p_3 = \Phi\left(\frac{192 - 191,96}{14,7153}\right) - \Phi\left(\frac{183 - 191,96}{14,7153}\right) = \Phi(0,003) - \Phi(-0,61) = \Phi(0,003) + \Phi(0,61) = 0 + 0,2291 = 0,2291,$$

$$p_4 = \Phi\left(\frac{201 - 191,96}{14,7153}\right) - \Phi\left(\frac{192 - 191,96}{14,7153}\right) = \Phi(0,61) - \Phi(0,003) = 0,2291,$$

$$p_5 = \Phi\left(\frac{210 - 191,96}{14,7153}\right) - \Phi\left(\frac{201 - 191,96}{14,7153}\right) = \Phi(1,23) - \Phi(0,61) = 0,3907 - 0,2291 = 0,1616,$$

$$p_6 = \Phi\left(\frac{219 - 191,96}{14,7153}\right) - \Phi\left(\frac{210 - 191,96}{14,7153}\right) = \Phi(1,84) - \Phi(1,23) = 0,4671 - 0,3907 = 0,0764,$$

$$p_7 = \Phi\left(\frac{224 - 191,96}{14,7153}\right) - \Phi\left(\frac{219 - 191,96}{14,7153}\right) = \Phi(2,18) - \Phi(1,84) = 0,4854 - 0,4671 = 0,0183.$$

Обчислимо значення критерію $\chi^2_{\text{сном}}$, що спостерігається

$$\begin{aligned} \chi^2_{\text{сном}} &= \frac{(9 - 3,905)^2}{3,905} + \frac{(3 - 7,96)^2}{7,96} + \frac{(14 - 11,455)^2}{11,455} + \frac{(9 - 11,455)^2}{11,455} + \\ &+ \frac{(9 - 8,08)^2}{8,08} + \frac{(5 - 3,82)^2}{3,82} + \frac{(1 - 0,915)^2}{0,915} = 6,6476 + 3,0907 + 0,5654 + \\ &+ 0,5261 + 0,1048 + 0,3645 + 0,0079 = 11,307 \end{aligned}$$

При $\alpha = 0,05$ з числом ступенів свободи $\nu = q - 1 - k$, де k – число параметрів генерального розподілу, що оцінюються на основі спостережених даних (у нашому прикладі $q = 7$ і $k = 2$), $\nu = 7 - 1 - 2 = 4$. Знаходимо за таблицею 3.4 $\chi^2_{кр}(0,05; 4) = 9,5$. Тому що $\chi^2_{спост} > \chi^2_{кр}$, гіпотеза про нормальний закон розподілу випадкової величини X не приймається (відкидається).

2. Індивідуальні завдання

Завдання 1

1.1 Ймовірність прибуткової діяльності для першої фірми дорівнює 0,7; для другої – 0,5; для третьої ця ймовірність у три рази менша від суми ймовірностей для першої та другої фірм. Знайти ймовірність того, що прибутковими будуть а) тільки одна фірма; б) тільки дві фірми; в) всі три фірми; г) хоча б одна фірма.

1.2 Два стрілки провели по одному пострілу. Ймовірність влучити у першого стрільця 0,8, у другого – 0,9. Знайти ймовірність того, що: а) тільки один стрілець влучить у мішень; б) обидва стрільця влучать у мішень; в) обидва стрільця промахнуться; г) хоча б один з стрільців влучить у мішень.

1.3 Ймовірність своєчасної сплати податків для 1-го підприємства дорівнює 0,8; для другого – 0,6; для третього – є розв'язком рівняння $3p^2 + 4p - 4 = 0$. Знайти ймовірність своєчасної сплати податків: а) тільки одним підприємством; б) двома підприємствами; в) трьома підприємствами; г) хоча б одним підприємством.

1.4 Троє студентів складають іспит. Ймовірність того, що перший складе іспит дорівнює 0,9, другий – 0,95, третій – 0,8. Знайти ймовірність того, що: а) двоє студентів складуть іспит; б) усі троє студентів складуть іспит; в) тільки один студент складе іспит; г) хоча б один студент складе іспит.

1.5 Від аеровокзалу відправились 2 автобуси експреса до трапів літаків. Ймовірність своєчасного прибуття в аеропорт першого автобуса – 0,9, другого – 0,95. Знайти ймовірність того, що: а) обидва автобуса прийдуть своєчасно; б) обидва автобуса запізняться; в) тільки один автобус прибуде своєчасно; г) хоча б один автобус прибуде своєчасно.

1.6 Ймовірність виконання договору для 1-го підприємства становить 0,6; для 2-го є розв'язком рівняння $5p^2 + 6p - 8 = 0$; а для 3-го – 60% від суми ймовірностей для 1-го та 2-го підприємств. Знайти ймовірність виконання договору: а) тільки одним підприємством; б) двома підприємствами; в) трьома; г) хоча б одним підприємством.

1.7 Три стрілки провели залпи по мішені. Ймовірність влучення у ціль у першого стрілка дорівнює 0,8, у другого і третього відповідно 0,7 та 0,9. Знайти ймовірність того, що: а) тільки один із них влучить у ціль; б) двоє влучать у ціль; в) усі троє влучать у ціль; г) хоча б один із стрільців влучить у ціль.

1.8. Ймовірність повного розрахунку за енергоносії для 1-го заводу дорівнює 0,5; для другого на 20% більше, а для 3-го – є розв'язком рівняння $3p^2 + 7p - 6 = 0$. Знайти ймовірність розрахунку за енергоносії: а) тільки одним заводом; б) двома заводами; в) трьома заводами; г) хоча б одним заводом.

1.9 З трьох гармат провели залп по цілі. Ймовірність влучення у ціль при одному пострілі з першої гармати дорівнює 0,9, з другої – 0,7, з третьої – 0,85. Знайти ймовірність того, що: а) тільки один снаряд влучить у ціль; б) тільки два снаряди влучать у ціль; в) усі три снаряди влучать у ціль; г) хоча б один із снарядів влучить у ціль.

1.10 Для сигналізації про аварію встановлено два незалежно працюючих сигналізатора. Ймовірність того, що при аварії перший сигналізатор спрацює, дорівнює 0,8, для другого – 0,7. Знайти ймовірність того, що: а) спрацюють обидва сигналізатора; б) обидва не спрацюють; в) спрацює тільки один сигналізатор; г) спрацює хоча б один із сигналізаторів.

1.11 Робітник обслуговує три верстати. Ймовірність того, що протягом години верстат не вимагатиме уваги робітника дорівнює: для першого верстата 0,9 для другого верстата – 0,8; для третього – 0,85. Знайти ймовірність того, що: а) протягом години жоден верстат не буде вимагати уваги робітника; б) хоча б один не буде вимагати уваги робітника протягом години; в) тільки один верстат не буде вимагати уваги; г) два верстати не будуть вимагати уваги робітника.

1.12 В телеательє в наявності 4 кінескопи. Ймовірність того, що кінескоп витримає гарантійний термін відповідно дорівнює 0,8; 0,85; 0,9; 0,95. Знайти ймовірність того, що: а) навмання взятий кінескоп витримає термін; б) хоч би один кінескоп витримає термін; в) два кінескопи витримують гарантійний термін; г) усі кінескопи витримують гарантійний термін.

1.13 Трьом покупцям пальто 54 розміру може знадобитись відповідно з ймовірністю 0,25; 0,4; 0,35. Визначити ймовірність того, що пальто цього розміру знадобиться: а) тільки одному покупцеві; б) знадобиться двом покупцям; в) знадобиться хоч би одному покупцеві; г) не знадобиться нікому.

1.14 Мисливець вистрілив три рази по цілі, що віддаляється. Ймовірність попадання в ціль на початку стрільби дорівнює 0,8, а після кожного пострілу зменшується на 0,1. Знайти ймовірність того, що мисливець: а) попаде один раз; б) промахнеться всі три рази; в) попаде хоча б один раз; г) попаде два рази.

1.15 Екзаменаційний білет складається з трьох питань. Ймовірність того, що студент знає відповідь на перше питання – 0,9, на друге – 0,85, на третє – 0,8. Знайти ймовірність того що студент відповість: а) тільки на одне питання; б) тільки на два питання; в) на всі питання; г) хоча б на одне питання.

1.16. Ймовірність банкрутства для першої фірми – це додатний розв'язок рівняння $5p^2 - 2p = 0$, для другої фірми ця ймовірність на 20% більша, а для третьої – середнє арифметичне ймовірностей 1-ї і

другої фірм. Знайти ймовірність що збанкрутує: а) тільки одна фірма; б) тільки 2 фірми; в) усі три фірми; г) хоча б одна.

1.17 Кожна із чотирьох несумісних подій може відбутися відповідно з ймовірностями: 0,012; 0,010; 0,006 і 0,002. Знайти ймовірність того, що в результаті дослідів відбудеться: а) тільки одна подія; б) дві події; в) усі події; г) хоч би одна подія.

1.18 Повідомлення можна передати листом із ймовірністю 0,5; по телефону – із ймовірністю 0,6 і по факсу – із ймовірністю, яка є розв'язком рівняння $10p^2 - 29p + 18 = 0$. Знайти ймовірність отримати повідомлення якщо воно передано: а) тільки одним способом; б) тільки двома способами; в) усіма трьома способами; г) хоча б одним.

1.19 Три фірми виконують одне і теж замовлення. Ймовірність того, що перша фірма виконає замовлення у визначений термін 0,75. Ймовірність виконання замовлення для другої фірми є розв'язком рівняння $5p^2 + p - 4 = 0$, а для третьої – дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що замовлення виконають: а) тільки одна фірма; б) тільки дві фірми; в) усі три; г) хоча б одна.

1.20 Три студента беруть участь у конкурсі, відповідаючи на питання. Ймовірність того, що 1-й знає відповіді дорівнює 0,7; ймовірність відповісти для другого є розв'язком рівняння $10p^2 + p - 9 = 0$; а для третього – середнє арифметичне перших двох. Знайти ймовірність що на питання дадуть відповідь: а) тільки один студент; б) два студента; в) усі три студента; г) хоча б один студент.

1.21 Один стрілець із 150 пострілів попадає 50 раз, другий – 100 раз, третій – 90 раз. Всі стрільці зробили по одному пострілу. Знайти ймовірність того, що: а) всі три стрільці влучають; б) влучають тільки два; в) хоч один стрілець влучить; г) влучить тільки один стрілець.

1.22 Із трьох гармат провели залпи по цілі. Ймовірність попадання в ціль при одному пострілі із першої гармати – 0,85, із другої – 0,9, із

третьої – 0,75. Знайти ймовірність того, що: а) один снаряд попаде в ціль; б) тільки два снаряда попадуть в ціль; в) три снаряда попадуть в ціль г) хоча б один снаряд попаде в ціль.

1.23 Перша фірма може одержати запланований прибуток з ймовірністю 0,7; для 2-ї ця ймовірність є розв'язком рівняння $5p^2 - 13p + 6 = 0$; для 3-ї ймовірність дорівнює середньому арифметичному перших двох. Визначити ймовірність одержання запланованого прибутку: а) тільки однією фірмою; б) двома; в) усіма фірмами; г) хоча б однією фірмою.

1.24 Студент шукає формулу в 2-х довідниках. Ймовірність того, що формула знаходиться в першому довіднику – 0,8, а в другому – 0,7. Знайти ймовірність того, що студент знайде формулу: а) в одному довіднику; б) в двох довідниках; в) у жодному не знайде; г) хоча б в одному довіднику.

1.25 В цеху працюють три автомати. Ймовірність того, що автомати на протязі часу T вийдуть з ладу, для першого – 0,1, для другого – 0,2, для третього – 0,3. Знайти ймовірність того, що на протязі часу T із ладу вийдуть: а) тільки один автомат; б) два автомати; в) три автомати; г) хоча б один автомат.

1.26 Для сигналізації про аварії встановлено два незалежно працюючих сигналізатори. Ймовірність, що спрацює при аварії перший сигналізатор – 0,99, а другий – 0,91. Знайти ймовірність того, що при аварії спрацює: а) один сигналізатор; б) два сигналізатора; в) жодний не спрацює; г) хоча б один сигналізатор.

1.27 Робітник обслуговує три верстати, які працюють незалежно. Ймовірність того, що на протязі зміни верстати вимагають ремонту, для першого верстату – 0,8, для другого – 0,7, для третього – 0,9. Знайти ймовірність того, що за зміну потрібно ремонтувати: а) один верстат; б) два верстати; в) три верстати; г) хоча б один верстат.

1.28 Студент шукає формулу в трьох довідниках. Ймовірність того, що формула знаходиться в першому довіднику – 0,6, в другому – 0,8, в

третьому – 0,9. Знайти ймовірність того, що студент знайде формулу:
а) тільки в одному довіднику; б) в двох довідниках; в) в трьох довідниках; г) хоча б в одному довіднику.

1.29 В майстерні працюють два мотори незалежно один від одного. Ймовірність виходу з ладу протягом години дорівнює відповідно для першого – 0,1, а для другого – 0,05. Визначити ймовірність того, що протягом години: а) тільки один мотор буде працювати; б) обидва мотори будуть працювати; в) жодний мотор працювати не буде; г) хоча б один мотор буде працювати.

1.30 Ймовірність того, що справним є 1-й комп'ютер дорівнює 0,7; для 2-го ця ймовірність є розв'язком рівняння $5p^2 + 2p - 3 = 0$; для 3-го дорівнює 0,9. Визначити ймовірність того, що справним є: а) один комп'ютер; б) два комп'ютери; в) три комп'ютери; г) хоча б один справний.

Завдання 2. Деталі для збірки вузлу виготовляються на двох станках, з яких перший виробляє n % деталей, а другий – $(100-n)$ %. Перший станок виробляє в середньому m_1 % бракованих деталей, а другий – m_2 %. Знайти ймовірність того, що: а) навмання взята деталь якісна; б) взята бракована деталь виготовлена на першому станку (для непарних варіантів) і а) навмання взята деталь бракована; б) взята якісна деталь виготовлена на другому станку (для непарних варіантів).

2.1	$n=70$;	$m_1=5$;	$m_2=1$;	2.16	$n=65$;	$m_1=1$;	$m_2=3$;
2.2	$n=80$;	$m_1=3$;	$m_2=2$;	2.17	$n=80$;	$m_1=3$;	$m_2=1$;
2.3	$n=80$;	$m_1=4$;	$m_2=3$;	2.18	$n=65$;	$m_1=1$;	$m_2=4$;
2.4	$n=40$;	$m_1=3$;	$m_2=4$;	2.19	$n=70$;	$m_1=4$;	$m_2=1$;
2.5	$n=30$;	$m_1=1$;	$m_2=5$;	2.20	$n=45$;	$m_1=2$;	$m_2=1$;
2.6	$n=20$;	$m_1=2$;	$m_2=3$;	2.21	$n=55$;	$m_1=4$;	$m_2=2$;
2.7	$n=60$;	$m_1=5$;	$m_2=2$;	2.22	$n=60$;	$m_1=3$;	$m_2=2$;
2.8	$n=80$;	$m_1=4$;	$m_2=1$;	2.23	$n=70$;	$m_1=1$;	$m_2=4$;

2.9	$n=20;$	$m_1=1;$	$m_2=4;$	2.24	$n=60;$	$m_1=2;$	$m_2=5;$
2.10	$n=40;$	$m_1=2;$	$m_2=5;$	2.25	$n=80;$	$m_1=3;$	$m_2=1;$
2.11	$n=60;$	$m_1=3;$	$m_2=2;$	2.26	$n=70;$	$m_1=2;$	$m_2=3;$
2.12	$n=55;$	$m_1=1;$	$m_2=3;$	2.27	$n=55;$	$m_1=2;$	$m_2=1;$
2.13	$n=75;$	$m_1=2;$	$m_2=4;$	2.28	$n=60;$	$m_1=1;$	$m_2=4;$
2.14	$n=70;$	$m_1=3;$	$m_2=2;$	2.29	$n=65;$	$m_1=2;$	$m_2=5;$
2.15	$n=60;$	$m_1=2;$	$m_2=3;$	2.30	$n=70;$	$m_1=3;$	$m_2=1;$

Завдання 3. Гайки для збирального цеху виготовляє станок-автомат. За допомогою експерименту встановлено, що 10% продукції станка-автомата виявляється непридатною для використання. Знайти ймовірність того, що придатних буде:

3.1	а)	із 3 гайок 2	б)	із 100	гайок 81	в)	від 198 до 207 із 225
3.2	а)	із 4 гайок 2	б)	із 64	гайок 60	в)	від 168 до 189 із 198
3.3	а)	із 5 гайок 2	б)	із 81	гайок 70	в)	від 120 до 126 із 148
3.4	а)	із 6 гайок 2	б)	із 49	гайок 42	в)	від 99 до 116 із 128
3.5	а)	із 4 гайок 3	б)	із 36	гайок 27	в)	від 150 до 160 із 169
3.6	а)	із 5 гайок 3	б)	із 121	гайок 99	в)	від 27 до 33 із 36
3.7	а)	із 6 гайок 3	б)	із 144	гайок 120	в)	від 42 до 46 із 49
3.8	а)	із 5 гайок 1	б)	із 169	гайок 150	в)	від 70 до 74 із 81
3.9	а)	із 4 гайок 1	б)	із 196	гайок 168	в)	від 60 до 74 із 81
3.10	а)	із 3 гайок 1	б)	із 225	гайок 198	в)	від 81 до 93 із 100
3.11	а)	із 7 гайок 5	б)	із 210	гайок 192	в)	від 140 до 152 із 170
3.12	а)	із 7 гайок 6	б)	із 56	гайок 48	в)	від 126 до 140 із 150
3.13	а)	із 6 гайок 4	б)	із 140	гайок 124	в)	від 132 до 142 із 160
3.14	а)	із 5 гайок 2	б)	із 186	гайок 168	в)	від 86 до 98 із 110
3.15	а)	із 4 гайок 3	б)	із 168	гайок 146	в)	від 74 до 82 із 90
3.16	а)	із 5 гайок 4	б)	із 96	гайок 84	в)	від 68 до 76 із 94
3.17	а)	із 5 гайок 2	б)	із 200	гайок 183	в)	від 70 до 91 із 105
3.18	а)	із 6 гайок 4	б)	із 39	гайок 37	в)	від 110 до 136 із 148
3.19	а)	із 3 гайок 2	б)	із 48	гайок 45	в)	від 37 до 43 із 46
3.20	а)	із 5 гайок 1	б)	із 75	гайок 71	в)	від 142 до 159 із 168
3.21	а)	із 4 гайок 2	б)	із 87	гайок 82	в)	від 42 до 56 із 68
3.22	а)	із 6 гайок 3	б)	із 120	гайок 114	в)	від 98 до 116 із 138

3.23	а)	із 5 гайок 3	б)	із 132	гайок 127	в)	від 82 до 96 із 112
3.24	а)	із 3 гайок 1	б)	із 115	гайок 109	в)	від 54 до 68 із 78
3.25	а)	із 6 гайок 2	б)	із 67	гайок 61	в)	від 51 до 65 із 81
3.26	а)	із 5 гайок 4	б)	із 79	гайок 72	в)	від 112 до 131 із 145
3.27	а)	із 4 гайок 3	б)	із 85	гайок 79	в)	від 85 до 99 із 115
3.28	а)	із 4 гайок 1	б)	із 69	гайок 65	в)	від 27 до 35 із 42
3.29	а)	із 5 гайок 2	б)	із 59	гайок 53	в)	від 17 до 25 із 32
3.30	а)	із 6 гайок 1	б)	із 94	гайок 89	в)	від 62 до 71 із 75

Завдання 4. Знайти закон розподілу дискретної випадкової величини X , яка приймає тільки два значення x_1 і x_2 . Ймовірність значення x_1 дорівнює p_1 , також відоме математичне сподівання $M(X)$ та дисперсія $D(X)$.

№ вар.	p_1	$M(X)$	$D(X)$	№ вар.	p_1	$M(X)$	$D(X)$
1.	0,8	1,2	0,16	16.	0,9	1,1	0,09
2.	0,9	1,2	0,36	17.	0,1	2,8	0,36
3.	0,7	1,9	1,89	18.	0,2	2,6	0,64
4.	0,6	1,8	0,96	19.	0,3	2,4	0,84
5.	0,7	1,3	0,21	20.	0,8	1,4	0,64
6.	0,8	1,8	2,56	21.	0,4	2,2	0,96
7.	0,7	2,3	0,21	22.	0,7	1,6	0,84
8.	0,9	2,2	0,36	23.	0,3	2,7	0,21
9.	0,5	2,2	2,16	24.	0,6	2,2	0,23
10.	0,9	2,3	0,81	25.	0,9	2,1	0,09
11.	0,1	1,9	0,09	26.	0,4	2,6	0,24
12.	0,2	1,8	0,16	27.	0,1	2,9	0,09
13.	0,3	1,7	0,21	28.	0,2	2,8	0,16
14.	0,4	1,6	0,24	29.	0,8	2,2	0,16
15.	0,6	1,4	0,24	30.	0,8	2,4	0,64

Завдання 5. На основі заданої функції розподілу $F(x)$ випадкової величини X потрібно визначити: а) щільність розподілу $f(x)$;

б) математичне сподівання $M(X)$ та середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$; в) ймовірність попадання випадкової величини X на інтервал (α, β) ; г) графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$.

Функція розподілу для варіантів **1-10**:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2 & \text{при } a < x \leq b; \\ 1 & x > b \end{cases}$$

для варіантів **11-20**:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^4 & \text{при } a < x \leq b; \\ 1 & x > b \end{cases}$$

№ вар.	a	b	α	β
1, 11	2	4	3	4
2, 12	1	4	2	3
3, 13	6	7	6	6,5
4, 14	0	4	2	3
5, 15	3	5	4	5
6, 16	2	6	3	5
7, 17	3	4	3	3,5
8, 18	3	6	4	5
9, 19	4	9	6	7
10, 20	5	7	5	6

Функція розподілу для варіантів **21-30**:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \left(\frac{x}{b}\right)^{3/2} & \text{при } a < x \leq b; \\ 1 & x > b \end{cases}$$

№ вар.	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
b	5	3	2	1	4	8	7	6	9	10
α	1	0	0	0	1	0	0	1	3	2
β	2	2	1	0,5	3	2	3	2	4	3

Завдання 6. Відомі математичне сподівання a і середнє квадратичне відхилення σ нормального розподілу випадкової величини X . Знайти ймовірність того, що :

- 1) X прийме значення, яке належить інтервалу (α, β) ;
- 2) абсолютна величина відхилення $|x - a|$ буде менше δ .

№ вар.	a	σ	α	β	δ	№ вар.	a	σ	α	β	δ
1.	2	6	8	14	3	16.	4	1	5	6	0,5
2.	3	5	8	13	2,5	17.	5	1	6	7	0,5
3.	1	4	5	9	2	18.	5	3	8	11	1,5
4.	4	3	7	10	1,5	19.	6	2	8	10	1
5.	5	2	7	9	1	20.	7	2	9	11	1
6.	6	3	9	12	1,5	21.	8	3	11	14	1,5
7.	7	4	11	15	2	22.	7	3	10	13	1,5
8.	8	5	13	18	2,5	23.	6	1	7	8	0,5
9.	9	6	15	21	3	24.	9	2	11	13	1
10.	10	7	17	24	3,5	25.	9	3	12	15	1,5
11.	2	2	4	6	1	26.	10	3	13	16	1,5
12.	1	3	4	7	1,5	27.	7	1	8	9	0,5
13.	3	4	7	11	2	28.	8	2	10	12	1
14.	2	3	5	8	1,5	29.	8	4	12	16	2
15.	4	2	6	8	1	30.	10	2	12	14	1

Завдання 7. Відомі середнє квадратичне відхилення σ нормального розподілу випадкової величини X , вибіркове середнє $\bar{x}_g$ та обсяг вибірки n . Знайти довірчий інтервал для математичного сподівання a нормальної випадкової величини при відомій дисперсії по заданій довірчій імовірності $\gamma = 0,95$.

№ варіанту	σ	$\bar{x}_g$	n
1.	20	7,92	100
2.	18	11,92	81
3.	16	10,92	64
4.	14	8,92	49
5.	10	9,92	25

№ варіанту	σ	$\bar{x}_e$	n
6.	8	14,92	16
7.	22	13,92	121
8.	12	12,92	36
9.	24	6,92	144
10.	26	15,92	169
11.	12	11,92	36
12.	8	9,92	16
13.	18	17,92	81
14.	24	15,92	144
15.	20	20,92	100
16.	10	7,92	25
17.	16	8,92	64
18.	26	13,92	169
19.	14	10,92	49
20.	22	6,92	121
21.	24	9,92	144
22.	20	11,92	100
23.	18	12,92	81
24.	10	20,92	25
25.	26	8,92	169
26.	14	15,92	49
27.	22	14,92	121
28.	12	10,92	36
29.	8	16,92	16
30.	16	13,92	64

Завдання 8. За даними вибірки об'єму $n = 50$ для випадкової величини X : треба а) записати статистичний та інтервальний статистичний ряди; б) побудувати полігон та гістограму частот; в) записати статистичну (емпіричну) функцію розподілу та побудувати її графік; г) знайти вибіркове середнє і вибіркovu дисперсію та коефіцієнт варіації V^* ; д) при рівні значущості $\alpha = 0,05$ перевірити гіпотезу про узгодженість емпіричного розподілу теоретичному (нормальному).

Варіант 1

10	16	13	30	36	15	33	33	32	32
14	23	23	23	22	21	22	20	19	17
19	20	21	25	27	28	27	25	21	21
19	20	23	25	27	28	29	25	24	24
38	20	24	25	26	28	29	26	25	24

Варіант 2

5	17	18	19	19	39	39	39	37	37
9	21	27	29	27	27	24	22	20	22
10	21	29	30	31	34	34	30	26	23
11	20	28	30	33	34	34	31	26	25
40	12	14	15	16	39	39	37	37	37

Варіант 3

57	98	89	63	66	67	86	75	77	79
87	84	83	76	78	79	69	74	72	79
88	86	82	84	77	79	70	73	72	71
60	84	86	84	75	76	80	79	73	71
99	92	63	65	85	83	76	78	79	74

Варіант 4

12	32	28	22	21	23	18	34	37	20
13	29	22	19	19	19	22	28	12	25
16	31	21	19	23	19	13	26	12	27
17	33	27	19	19	23	13	29	14	26
40	14	15	15	35	24	24	31	14	25

Варіант 5

7	17	34	24	22	23	24	21	17	16
12	21	27	24	26	24	23	30	32	18
20	21	27	30	24	25	27	36	30	19
15	32	30	26	24	24	27	21	27	13
42	17	30	25	24	22	33	21	38	11

Варіант 6

55	91	72	67	61	73	79	82	84	83
56	95	70	68	73	74	80	81	89	90
93	93	66	78	74	78	81	90	87	88
92	93	95	62	67	78	90	90	86	90
97	91	93	95	65	78	81	79	85	84

Варіант 7

14	39	34	36	18	22	23	25	25	24
19	28	27	27	27	26	28	26	28	26
20	28	29	30	26	29	33	33	31	30
21	27	29	30	29	32	32	32	31	31
42	15	35	37	21	24	25	24	24	25

Варіант 8

9	11	13	17	21	22	23	23	18	9
10	11	14	23	28	30	36	37	19	14
10	12	15	24	29	31	34	33	20	15
12	12	16	23	26	29	35	32	20	16
44	39	9	18	25	27	28	28	17	13

Варіант 9

53	74	76	76	83	84	80	78	76	94
72	75	79	60	67	70	66	70	77	71
73	75	64	61	69	66	65	65	81	72
71	76	79	79	63	68	67	69	82	73
95	74	76	85	86	88	80	78	76	58

Варіант 10

16	39	20	24	26	27	27	20	19	17
18	33	21	22	29	29	29	22	36	18
18	32	20	25	30	27	31	23	35	19
19	35	21	26	31	31	29	25	34	18
44	19	20	23	28	29	27	26	38	17

Варіант 11

11	37	35	27	30	30	21	26	31	15
16	39	35	29	21	25	25	28	34	19
17	40	35	29	22	23	22	29	34	20
18	31	35	28	30	24	24	29	35	36
46	31	26	27	30	30	24	29	33	45

Варіант 12

51	89	92	60	62	71	82	86	84	70
55	89	92	63	64	71	84	75	77	70
88	93	58	65	66	74	75	76	78	74
93	92	59	67	69	81	86	79	80	81
93	92	93	68	69	83	84	80	80	83

Варіант 13

18	27	33	36	35	34	39	40	21	30
23	31	33	36	36	39	40	41	22	30
25	32	33	37	37	36	35	35	24	30
29	27	31	32	32	32	32	33	27	30
46	28	29	29	29	29	27	27	45	31

Варіант 14

13	46	34	22	21	29	32	31	22	13
14	38	19	21	27	29	31	32	19	14
15	15	36	21	26	27	30	30	36	16
17	39	34	19	25	27	27	27	34	16
48	13	41	36	22	23	24	22	42	17

Варіант 15

49	74	75	77	70	62	64	65	66	68
53	75	74	77	68	71	68	66	65	68
80	82	82	84	55	56	57	58	60	78
90	78	76	68	70	72	71	63	72	70
91	78	76	70	70	72	62	64	63	71

Варіант 16

20	47	46	45	44	24	26	33	33	33
44	44	30	37	38	37	40	37	43	37
28	29	31	37	38	40	41	41	43	38
47	33	35	38	38	40	42	42	43	31
48	22	46	45	44	25	27	35	35	35

Варіант 17

15	41	42	43	44	21	22	23	24	29
46	26	30	31	33	34	36	37	36	32
40	30	31	32	33	36	37	39	39	34
18	30	31	32	33	34	36	37	37	34
50	28	28	28	27	27	27	26	26	26

Варіант 18

47	48	52	52	53	54	54	55	55	85
52	56	62	65	71	78	80	73	64	48
52	58	63	69	72	79	81	74	65	48
48	56	58	69	70	69	76	75	65	52
89	48	53	60	61	62	62	62	62	48

Варіант 19

22	45	34	35	36	36	36	39	39	47
44	41	34	37	33	26	33	35	34	40
43	39	40	37	33	27	28	35	37	40
45	39	34	36	33	29	29	33	37	40
50	39	40	35	31	32	32	33	32	25

Варіант 20

17	50	49	48	46	38	39	41	32	33
49	46	50	49	46	41	34	24	26	35
48	38	46	50	45	41	36	31	25	27
48	38	39	45	50	32	33	27	31	27
52	44	44	45	44	38	41	35	36	34

Варіант 21

45	70	63	65	58	59	57	65	73	50
75	70	63	68	58	60	62	62	64	78
77	72	63	68	68	61	52	55	68	70
76	72	64	67	65	68	52	55	68	70
87	80	70	72	72	64	58	58	58	82

Варіант 22

24	46	43	38	39	39	33	34	35	35
47	42	39	34	35	28	29	28	26	28
40	37	39	33	39	29	31	26	26	31
41	39	39	34	34	28	31	27	27	27
52	45	43	39	34	31	26	26	27	27

Варіант 23

19	45	47	48	39	40	40	40	40	43
23	43	37	34	35	34	35	34	35	35
50	41	36	34	30	31	32	29	26	31
44	35	41	35	30	31	32	24	27	29
54	35	35	41	35	38	32	25	28	41

Варіант 24

43	84	74	75	68	67	78	77	76	85
84	80	75	74	72	56	60	54	70	85
80	75	67	68	74	60	50	53	56	82
80	74	69	61	62	65	66	55	62	82
85	84	72	62	69	62	63	64	70	82

Варіант 25

26	33	38	39	41	41	36	35	35	29
31	33	38	41	40	43	45	43	39	35
35	36	38	40	39	46	45	48	43	36
35	36	38	41	40	47	45	49	43	36
54	31	35	39	40	43	45	49	45	51

Варіант 26

21	25	47	37	32	33	27	28	26	22
22	47	37	40	33	33	27	28	28	23
22	41	40	40	32	33	27	30	28	23
22	42	40	32	32	32	35	29	37	23
56	22	23	47	43	44	45	36	37	22

Варіант 27

41	42	72	70	68	68	60	61	83	61
69	63	64	53	58	48	49	64	69	63
69	63	64	53	47	51	52	55	60	63
69	64	53	55	58	55	58	56	68	62
83	75	74	69	69	68	61	61	71	62

Варіант 28

28	54	54	53	48	51	45	46	46	46
31	53	53	50	51	42	43	38	43	43
54	53	49	51	45	42	37	38	33	35
54	53	49	45	45	42	43	38	34	39
56	48	50	51	45	47	42	39	33	47

Варіант 29

23	54	29	48	35	35	37	39	39	27
28	50	33	35	39	44	42	44	42	46
31	33	51	39	39	42	45	42	47	47
32	34	34	35	39	45	42	45	47	42
58	49	52	35	35	42	42	47	42	39

Варіант 30

39	70	65	67	58	59	59	59	62	72
63	52	53	40	40	55	46	41	46	52
64	52	46	40	40	41	41	43	42	53
74	62	46	46	46	46	41	42	42	55
81	77	68	53	55	45	50	50	50	62

3. Довідковий матеріал

Таблиця 3.1. – Значення функції $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081

Продовження таблиці 3.1

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблиця 3.2 – Значення функції $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,12	0,0478	0,24	0,0948	0,36	0,1406
0,01	0,0040	0,13	0,0517	0,25	0,0987	0,37	0,1443
0,02	0,0080	0,14	0,0557	0,26	0,1026	0,38	0,1480
0,03	0,0120	0,15	0,0596	0,27	0,1064	0,39	0,1517
0,04	0,0160	0,16	0,0636	0,28	0,1103	0,40	0,1554
0,05	0,0199	0,17	0,0675	0,29	0,1141	0,41	0,1591
0,06	0,0239	0,18	0,0714	0,30	0,1179	0,42	0,1628
0,07	0,0279	0,19	0,0753	0,31	0,1217	0,43	0,1664
0,08	0,0319	0,20	0,0793	0,32	0,1255	0,44	0,1700
0,09	0,0359	0,21	0,0832	0,33	0,1293	0,45	0,1736
0,10	0,0398	0,22	0,0871	0,34	0,1331	0,46	0,1772
0,11	0,0438	0,23	0,0910	0,35	0,1368	0,47	0,1808
0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686	1,44	0,4251
0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708	1,45	0,4265

Продовження таблиці 3.2

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729	1,46	0,4279
0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749	1,47	0,4292
0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770	1,48	0,4306
0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790	1,49	0,4319
0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810	1,50	0,4332
0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830	1,51	0,4345
0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849	1,52	0,4357
0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869	1,53	0,4370
0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883	1,54	0,4382
0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907	1,55	0,4394
0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925	1,56	0,4406
0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944	1,57	0,4418
0,62	0,2324	0,94	0,3264	1,26	0,3962	1,58	0,4429
0,63	0,2357	0,95	0,3289	1,27	0,3980	1,59	0,4441
0,64	0,2389	0,96	0,3315	1,28	0,3997	1,60	0,4452
0,65	0,2422	0,97	0,3340	1,29	0,4015	1,61	0,4463
0,66	0,2454	0,98	0,3365	1,30	0,4032	1,62	0,4474
0,67	0,2486	0,99	0,3389	1,31	0,4049	1,63	0,4484
0,68	0,2517	1,00	0,3413	1,32	0,4066	1,64	0,4495
0,69	0,2549	1,01	0,3438	1,33	0,4082	1,65	0,4505
0,70	0,2580	1,02	0,3461	1,34	0,4099	1,66	0,4515
0,71	0,2611	1,03	0,3485	1,35	0,4115	1,67	0,4525
0,72	0,2642	1,04	0,3508	1,36	0,4131	1,68	0,4535
0,73	0,2673	1,05	0,3531	1,37	0,4147	1,69	0,4545
0,74	0,2703	1,06	0,3554	1,38	0,4162	1,70	0,4554
0,75	0,2734	1,07	0,3577	1,39	0,4177	1,71	0,4564
0,76	0,2764	1,08	0,3599	1,40	0,4192	1,72	0,4573
0,77	0,2794	1,09	0,3621	1,41	0,4207	1,73	0,4582
0,78	0,2823	1,10	0,3643	1,42	0,4222	1,74	0,4591
0,79	0,2852	1,11	0,3665	1,43	0,4236	1,75	0,4599
1,76	0,4608	1,97	0,4756	2,36	0,4909	2,78	0,4973
1,77	0,4616	1,98	0,4761	2,38	0,4913	2,80	0,4974
1,78	0,4625	1,99	0,4767	2,40	0,4918	2,82	0,4976

Продовження таблиці 3.2

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,79	0,4633	2,00	0,4772	2,42	0,4922	2,84	0,4977
1,80	0,4641	2,02	0,4783	2,44	0,4927	2,86	0,4979
1,81	0,4649	2,04	0,4793	2,46	0,4931	2,88	0,4980
1,82	0,4656	2,06	0,4803	2,48	0,4934	2,90	0,4981
1,83	0,4664	2,08	0,4812	2,50	0,4938	2,92	0,4982
1,84	0,4671	2,10	0,4821	2,52	0,4941	2,94	0,4984
1,85	0,4678	2,12	0,4830	2,54	0,4945	2,96	0,4985
1,86	0,4686	2,14	0,4838	2,56	0,4948	2,98	0,4986
1,87	0,4693	2,16	0,4846	2,58	0,4951	3,00	0,49865
1,88	0,4699	2,18	0,4854	2,60	0,4953	3,20	0,49931
1,89	0,4706	2,20	0,4861	2,62	0,4956	3,40	0,49966
1,90	0,4713	2,22	0,4868	2,64	0,4959	3,60	0,499841
1,91	0,4719	2,24	0,4875	2,66	0,4961	3,80	0,499928
1,92	0,4726	2,26	0,4881	2,68	0,4963	4,00	0,499968
1,93	0,4732	2,28	0,4887	2,70	0,4965	4,50	0,499997
1,94	0,4738	2,30	0,4893	2,72	0,4967	5,00	0,499997
1,95	0,4744	2,32	0,4898	2,74	0,4969		
1,96	0,4750	2,34	0,4904	2,76	0,4971		

Таблиця 3.3. – Значення $t_\gamma = t(\gamma, n)$

n	γ		
	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61
6	2,57	4,03	6,86
7	2,45	3,71	5,96
8	2,37	3,50	5,41
9	2,31	3,36	5,04
10	2,26	3,25	4,78
11	2,23	3,17	4,59
12	2,20	3,11	4,44
13	2,18	3,06	4,32
14	2,16	3,01	4,22
15	2,15	2,98	4,14
16	2,13	2,95	4,07

Продовження таблиці 3.3

n	γ		
	0,95	0,99	0,999
17	2,12	2,92	4,02
18	2,11	2,90	3,97
19	2,10	2,88	3,92
20	2,093	2,861	3,883
25	2,064	2,797	3,745
30	2,045	2,756	3,659
35	2,032	2,720	3,600
40	2,023	2,708	3,558
45	2,016	2,692	3,527
50	2,009	2,679	3,502
60	2,001	2,662	3,464
70	1,996	2,649	3,439
80	1,991	2,640	3,418
90	1,987	2,633	3,403
100	1,984	2,627	3,392
120	1,980	2,617	3,374
∞	1,960	2,576	3,291

Таблиця 3.4 – Критичні точки розподілу Пірсона χ^2

ν	Рівень значущості α						
	0,999	0,995	0,99	0,98	0,975	0,95	0,9
1	0,05157	0,04393	0,03157	0,03628	0,03982	0,00393	0,0158
2	0,00200	0,0100	0,0201	0,0404	0,0506	0,1030	0,211
3	0,0243	0,0717	0,1150	0,185	0,216	0,352	0,584
4	0,0908	0,207	0,297	0,429	0,484	0,711	1,064
5	0,210	0,412	0,554	0,752	0,831	1,145	1,610
6	0,381	0,676	0,872	1,134	1,237	1,635	2,204
7	0,598	0,989	1,239	1,564	1,690	2,167	2,833
8	0,857	1,344	1,646	2,032	2,180	2,733	3,490
9	1,152	1,735	2,088	2,532	2,700	3,325	4,168
10	1,479	2,156	2,558	3,059	3,274	3,240	4,865
11	1,834	2,603	3,053	3,609	3,816	4,575	5,578
12	2,214	3,074	3,571	4,178	4,404	5,226	6,304
13	2,617	3,565	4,107	4,765	5,009	5,892	7,042
14	3,041	4,075	4,660	5,368	5,629	6,57	7,790

Продовження таблиці 3.4

v	Рівень значущості α						
	0,999	0,995	0,99	0,98	0,975	0,95	0,9
15	3,483	4,601	5,229	5,985	6,262	7,261	8,547
16	3,942	5,142	5,812	6,614	6,908	7,962	9,312
17	4,416	5,697	6,408	7,255	7,654	8,672	10,085
18	4,905	6,265	7,015	7,906	8,231	9,390	10,865
19	5,407	6,844	7,633	8,567	8,907	10,117	11,651
20	5,921	7,434	8,620	9,237	9,591	10,871	12,433
21	6,447	8,034	8,897	9,915	10,283	11,591	13,240
22	6,983	8,643	9,542	10,600	10,982	12,338	14,041
23	7,529	9,260	10,196	11,293	11,688	13,091	14,848
24	8,035	9,886	10,856	11,992	12,401	13,848	15,659
25	8,649	10,520	11,524	12,697	13,120	14,611	16,173
26	9,222	11,160	12,198	13,409	13,844	15,379	17,292
27	9,803	11,808	12,879	14,125	14,573	16,151	18,114
28	10,391	12,461	13,565	14,847	15,308	16,928	18,937
29	10,986	13,121	14,256	15,574	16,047	17,708	19,768
30	11,588	13,787	14,953	16,306	16,791	18,493	20,599

v	Рівень значущості α						
	0,80	0,75	0,70	0,50	0,30	0,25	0,20
1	0,0642	0,102	0,148	0,455	1,074	1,323	1,642
2	0,446	0,575	0,713	1,386	2,408	2,773	3,219
3	1,005	1,213	1,424	2,366	3,665	4,108	4,642
4	1,649	1,923	2,195	3,357	4,878	5,385	5,989
5	2,343	2,675	3,000	4,351	6,064	6,626	7,289
6	3,070	3,455	3,828	5,348	7,231	7,81	8,558
7	3,822	4,255	4,671	6,346	8,383	9,037	9,803
8	4,594	5,071	5,527	7,344	9,524	10,219	11,030
9	5,380	5,899	6,393	8,343	10,656	11,389	12,242
10	6,179	6,737	7,267	9,342	11,781	12,549	13,412
11	6,989	7,58	8,148	10,341	12,899	13,701	14,631
12	7,807	8,438	9,034	11,340	14,011	14,845	15,812
13	8,634	9,299	9,926	12,340	15,119	15,984	16,985
14	9,467	10,165	10,821	13,339	16,222	17,117	18,151
15	10,307	11,036	11,721	14,339	17,322	18,245	19,311
16	11,152	11,912	12,624	15,338	18,418	19,369	20,465
17	12,002	12,892	13,531	16,338	19,511	20,489	21,615
18	12,857	13,675	14,440	17,338	20,601	21,605	22,760
19	13,716	14,562	15,352	18,338	21,689	22,718	23,900
20	14,578	15,452	16,266	19,337	22,775	23,828	25,038

Продовження таблиці 3.4

v	Рівень значущості α						
	0,80	0,75	0,70	0,50	0,30	0,25	0,20
21	15,445	16,344	17,182	20,337	23,858	24,935	26,171
22	16,314	17,240	18,101	21,337	24,939	26,039	27,301
23	17,187	18,137	19,021	22,337	26,018	27,141	28,429
24	18,062	19,037	19,943	23,337	27,096	28,241	29,553
25	18,940	19,939	20,887	24,336	28,172	29,339	30,675
26	19,820	20,843	21,792	25,336	29,246	30,434	31,795
27	20,703	21,749	22,719	26,136	30,319	31,528	32,912
28	21,588	22,657	23,617	27,336	31,391	32,620	34,027
29	22,475	23,567	24,577	28,336	32,461	33,711	35,139
30	23,364	24,478	25,508	28,336	33,530	34,800	36,250

v	Рівень значущості α						
	0,10	0,05	0,025	0,02	0,01	0,005	0,001
1	2,706	3,841	5,024	5,412	6,635	7,879	10,827
2	4,605	5,991	7,378	7,824	9,210	10,597	13,815
3	6,251	7,815	9,348	9,837	11,345	12,838	16,268
4	7,779	9,488	11,143	11,668	13,277	14,860	18,465
5	9,236	11,070	12,839	13,388	15,086	16,750	20,517
6	10,645	12,592	14,449	15,033	16,812	18,548	22,457
7	12,017	14,067	16,013	16,622	18,475	20,278	24,322
8	13,362	15,507	17,535	18,168	20,090	21,955	26,125
9	14,648	16,919	19,023	19,679	21,666	23,589	27,877
10	15,987	18,307	20,483	21,161	23,209	25,188	29,588
11	17,275	19,675	21,920	22,618	24,725	26,757	31,264
12	18,549	21,026	23,337	24,054	26,217	28,300	32,909
13	19,812	22,362	24,736	25,472	27,688	29,819	34,528
14	21,064	23,685	26,119	26,873	29,141	31,319	36,123
15	22,307	24,996	27,488	28,259	30,578	32,801	37,697
16	23,542	26,296	28,845	29,633	32,000	34,267	39,252
17	24,769	27,587	30,191	30,995	33,409	35,718	40,790
18	25,989	28,869	31,526	32,346	34,805	37,156	42,312
19	27,204	30,144	32,852	33,678	36,191	38,582	43,820
20	28,412	31,140	34,170	35,020	37,566	39,997	45,315
21	29,615	32,671	35,479	36,343	38,932	41,401	46,797
22	30,813	33,924	36,781	37,659	40,289	42,796	48,268
23	32,007	35,172	38,076	38,968	41,638	44,181	49,768
24	33,196	36,415	39,364	40,270	42,980	45,558	51,170
25	34,382	37,652	40,046	41,566	44,314	46,928	52,620
26	35,563	38,885	41,923	42,856	45,642	48,290	54,052
27	36,741	40,113	43,194	44,140	46,963	49,645	55,476

Продовження таблиці 3.4

v	Рівень значущості α						
	0,10	0,05	0,025	0,02	0,01	0,005	0,001
28	37,916	41,337	44,461	45,419	48,278	50,993	56,893
29	39,087	42,557	45,722	46,693	49,588	52,336	58,302
30	40,256	43,773	46,979	47,962	50,892	53,672	59,703

Таблиця 3.5 – Довірчі інтервали для σ . Нижні γ_1 та верхні γ_2 границі довірчого інтервалу

$$\gamma_1 s < \sigma < \gamma_2 s \quad \left(s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_g)^2} \right).$$

P v=n-1	0,99		0,98		0,95		0,90	
	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2
1	0,356	159	0,388	79,8	0,446	31,9	0,510	15,9
2	0,434	14,1	0,466	9,97	0,521	6,28	0,578	4,40
3	0,483	6,47	0,514	5,11	0,566	3,73	0,620	2,92
4	0,519	4,39	0,549	3,67	0,599	2,87	0,649	2,37
5	0,546	3,48	0,576	3,00	0,624	2,45	0,672	2,090
6	0,569	2,98	0,597	2,62	0,644	2,202	0,690	1,916
7	0,588	2,66	0,616	2,377	0,661	2,035	0,705	1,797
8	0,604	2,440	0,631	2,205	0,675	1,916	0,718	1,711
9	0,618	2,277	0,644	2,076	0,688	1,826	0,729	1,645
10	0,630	2,154	0,656	1,977	0,699	1,755	0,739	1,593
11	0,641	2,056	0,667	1,898	0,708	1,698	0,748	1,550
12	0,651	1,976	0,677	1,833	0,717	1,651	0,755	1,515
13	0,660	1,910	0,685	1,779	0,725	1,611	0,762	1,485
14	0,669	1,854	0,693	1,733	0,732	1,577	0,769	1,460
15	0,676	1,806	0,700	1,694	0,739	1,548	0,775	1,437
16	0,683	1,764	0,707	1,659	0,745	1,522	0,780	1,418
17	0,690	1,727	0,713	1,629	0,750	1,499	0,785	1,400
18	0,696	1,695	0,719	1,602	0,756	1,479	0,790	1,385
19	0,702	1,666	0,725	1,578	0,760	1,460	0,794	1,370
20	0,707	1,640	0,730	1,556	0,765	1,444	0,798	1,358
21	0,712	1,617	0,734	1,536	0,769	1,429	0,802	1,346
22	0,717	1,595	0,739	1,519	0,773	1,416	0,805	1,335
23	0,722	1,576	0,743	1,502	0,777	1,402	0,809	1,326
24	0,726	1,558	0,747	1,487	0,781	1,391	0,812	1,316

Продовження таблиці 3.5

P v=n-1	0,99		0,98		0,95		0,90	
	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2
25	0,730	1,541	0,751	1,473	0,784	1,380	0,815	1,308
26	0,734	1,526	0,755	1,460	0,788	1,371	0,818	1,300
27	0,737	1,512	0,758	1,448	0,791	1,361	0,820	1,293
28	0,741	1,499	0,762	1,436	0,794	1,352	0,823	1,286
29	0,744	1,487	0,765	1,426	0,796	1,344	0,825	1,279
30	0,748	1,475	0,768	1,417	0,799	1,337	0,828	1,274
40	0,774	1,390	0,792	1,344	0,821	1,279	0,847	1,228
50	0,793	1,336	0,810	1,297	0,837	1,243	0,861	1,199
60	0,808	1,299	0,824	1,265	0,849	1,217	0,871	1,179
70	0,820	1,272	0,835	1,241	0,858	1,198	0,879	1,163
80	0,829	1,250	0,844	1,222	0,866	1,183	0,886	1,151
90	0,838	1,233	0,852	1,207	0,873	1,171	0,892	1,141
100	0,845	1,219	0,858	1,195	0,878	1,161	0,897	1,133
200	0,887	1,15	0,897	1,13	0,912	1,11	0,925	1,09

Таблиця 3.6 – Значення u_γ , що задовольняє рівності $2\Phi(u_\gamma) = \gamma$

γ	0,9	0,95	0,98	0,99	0,998
u_γ	1,645	1,960	2,326	2,576	3,09

Література.

1. Вища математика: 3б. задач: У 2 ч. Ч. 1: Звичайні диференціальні рівняння. Операційне числення. Ряди. Рівняння мат. фізики. Стійкість за Ляпуновим. Елементи теорії ймовірностей і мат. статистики. Методи оптимізації і задачі керування. Варіаційне числення. Числові методи: Навч. посібник для студ. вищ. техн. навч. закл. / П.П. Овчинников, П.С.Кропив'янський, С.П. Полушкін та ін.; За заг. ред. П.П. Овчинникова. – К.: Техніка, 2004. – 376 с.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высш. школа, 1977. – 479 с.
3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высш. школа, 1977. – 400 с.
4. Гурский Е.И. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике. – Мн.: Выш. школа, 1984. – 223 с.
5. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 2: Учебное пособие для студентов вузов. - М.: Высш. школа, 1980. – 365 с.
6. Индивидуальные задания по высшей математике. Операционное исчисление. Элементы теории устойчивости. Теория вероятности. Математическая статистика. Ч.4. / Под ред. А.П. Рябушко. – Минск : В.ш., 2007. –336 с.
7. Коноваленко И.Н., Филиппова А.А. Теория вероятностей и математическая статистика.-М.: Высшая школа, 1973. –368 с.
8. Овчинников П.П., Михайленко В.М. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч. 2: Диференціальні рівняння. Операційне числення. Ряди та їх застосування. Стійкість за Ляпуновим. Рівняння математичної фізики. Оптимізація і керування. Теорія ймовірностей. Числові методи; За заг. ред. П.П. Овчинникова. – К.: Техніка, 2004. – 792 с.
9. Сборник задач по математике для вузов. Специальные курсы. Под ред. А.В.Ефимова. – М.: «Наука», 1984. – 608 с.