МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет «Запорізька політехніка»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до лабораторних робіт з дисципліни
"Методологія наукових досліджень"
для магістрів спеціальностей
151 "Автоматизація та комп'ютерно інтегровані технології"
(освітні програми "Автоматизація, мехатроніка та робототехніка", "Комп’ютерно-інтегровані технології в екологічних приладах та системах"),
172 "Телекомунікації та радіотехніка" (освітні програми "Радіоелектронні апарати та засоби", "Інтелектуальні технології мікросистемної радіоелектронної техніки")
усіх форм навчання

2023

Методичні вказівки до лабораторних робіт з дисципліни "Методологія наукових досліджень" для магістрів спеціальностей 151 "Автоматизація та комп'ютерно інтегровані технології" (освітні програми "Автоматизація, мехатроніка та робототехніка", "Комп'ютерно-інтегровані технології в екологічних приладах та системах"), 172 "Телекомунікації та радіотехніка" (освітні програми "Радіоелектронні апарати та засоби", "Інтелектуальні технології мікросистемної радіоелектронної техніки") усіх форм навчання / Уклад. : Ірина ПОСПЕЄВА, Наталія ФУРМАНОВА – Запоріжжя : НУЗП, 2023. – 117 с.

Укладачі: Ірина ПОСПЕЄВА, ст. викладач
Наталія ФУРМАНОВА, канд. техн. наук, доцент каф. ІТЕЗ

Рецензент: Тетяна БУГРОВА, канд. техн. наук, доцент каф. РТТ

Відповідальний за випуск: Микола ЄФИМЕНКО, д.т.н, зав. каф. ІТЕЗ

Затверджено
на засіданні кафедри ІТЕЗ
протокол № 8 від 01.06.23 р.

Рекомендовано до видання
НМК ФРЕТ
протокол № 7 від 02.06.23 р.

ЗМІСТ

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Мета лабораторного практикуму: засвоїти математичні методи оптимізації та кореляційно-регресійного аналізу; отримати навички їх застосування для вирішення практичних задач при наукових дослідженнях.

Лабораторний практикум розподілений на два цикли.

До першого циклу відносяться три роботи.

Лабораторна робота 1. Розв'язання задачі лінійного програмування графічним методом.

Лабораторна робота 2. Розв'язання задачі лінійного програмування симплекс-методом.

Лабораторна робота 3. Розв'язання транспортної задачі методом потенціалів.

У циклі розглядаються методи математичного лінійного програмування для розв'язання задач оптимізації багатоваріантних об’єктів.

До другого циклу відносяться дві роботи.

Лабораторна робота 4. Обробка результатів вимірювань.

Лабораторна робота 5. Кореляційно-регресійний аналіз.

У циклі розглядаються методи обробки результатів прямих і опосередкованих вимірювань засобами теорій ймовірності та математичнох статистики, а також елементи кореляційно-регресійного аналізу для побудови простих та множинних лінійних і нелінійних регресійних моделей.

При виконанні робіт студенти повинні ознайомитися з теоретичним матеріалом, наведеним у даних методичних вказівках, конспекті лекцій з дисципліни [1] і рекомендований літературі, та розв’язати поставлену задачу вказаним методом.

Кожен студент виконує індивідуальне завдання згідно з варіантом.

1 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 1. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЛП ГРАФІЧНИМ МЕТОДОМ

Мета роботи: ознайомитися з графічним методом розв'язання задач лінійного програмування (ЛП) та отримати практичні навички його використання.

1.1 Геометрична інтерпретація задач ЛП

Графічний метод розв'язання задач ЛП заснований на геометричній інтерпретації задачі лінійного програмування.

Нехай симетрична задача ЛП задана у двовимірному просторі, тобто обмеження містять дві змінні.

Знайти максимальне значення функції

$$f(x) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 \to max, \qquad (1.1)$$

при обмеженнях виду:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 \le b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 \le b_2 \\ \dots \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 \le b_n, \end{cases} \qquad (1.2)$$

за умови невід’ємності змінних: $x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0$

Система (1.1) за умови (1.2) може бути несумісна. У цьому випадку задача ЛП не має розв’язків.

Припустимо, що система (1.1) за умови (1.2) сумісна.

Кожна з нерівностей (1.1) та (1.2) являє визначає напівплощину, обмежену відповідною прямою:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 = b_2 \\ \dots \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 = b_n \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Поведінка цільової функції (1.1) в рамках двовимірної ілюстрації може бути охарактеризована за допомогою ліній рівня (множини точок з її області визначення, в яких функція приймає одне і те ж фіксоване значення $c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 = const$).

Градієнтом функції *f(x)* називається вектор, що вказує напрямок найбільш швидкого зростання функції і, відповідно, орієнтований перпендикулярно лініям рівня.

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \qquad (1.3)$$

Для лінійної функції двох змінних лінія рівня являє собою пряму, перпендикулярну вектору **c**, що є градієнтом цієї функції. Отже, якщо лінія рівня визначається рівнянням $f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 = const$, то цей вектор має вигляд $c = \nabla(c_1 x_1 + c_2 x_2) = (c_1, c_2)$ і вказує напрямок зростання функції.

Якщо побудувати багатокутник системи обмежень (1.2) і графік функції $f(x) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 = const$, то задачі лінійного програмування можна дати наступну інтерпретацію:

«Знайти точку багатокутника розв’язків, в якій пряма $c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 = const$ є опорною та функція *f(x)* при цьому досягає максимуму».

Таким чином, з геометричної точки зору задача максимізації зводиться до визначення такої точки області багатокутника обмежень, через яку проходить лінія рівня, що відповідає найбільшому з можливих значень.

Останнє означає, що для знаходження точки екстремуму в задачі ЛП слід спочатку побудувати лінію рівня для деякого довільного значення цільової функції. Потім необхідно здійснювати її паралельне пересування (так, щоб вона залишалася перпендикулярною вектору **c**) доти, поки не буде досягнена така точка області допустимих розв’язків, з якої зміщення в напрямку вектору **c** було б неможливе.

Такий метод розв’язання отримав назву графічного.

Розв’язання задачі пошуку мінімуму лінійної функції здійснюється аналогічно, з тією лише різницею, що зміщення за лініями рівня повинно проводитися в напрямку, протилежному градієнту цільової функції, тобто по вектору **(-c)**.

Слід відмітити, що, якщо багатокутник розв’язків обмежений, то пряма $c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 = const$ по відношенню до нього стає опорною двічі, набуваючи у двох протилежних точках максимального та мінімального значення.

Координати точки кожної опорної точки можна визначити, розв'язуючи систему рівнянь прямих, що обмежують область, та перетином яких є ця точка.

Якщо ж багатокутник розв'язків являє собою необмежену багатокутну область, то можливі два випадки.

Випадок 1. Пряма $c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 = const$, пересуваючись у напрямку вектору **с** чи протилежно йому, постійно перетинає багатокутник розв'язків і у жодній точці не є опорною відносно нього. У цьому випадку лінійна функція не обмежена на багатокутнику розв'язків як згори, так і знизу, та система не має рішень.

Випадок 2. Пряма $c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 = const$, пересуваючись, все ж таки стає опорною відносно багатокутника розв'язків. Тоді в залежності від виду області лінійна функція може бути обмеженою згори та необмеженою знизу, обмеженою знизу та необмеженою згори, або обмеженою як згори, так і знизу. У такому випадку задача може або мати розв'язок, або не мати його.

Розглянемо ще випадок, коли область розв'язків існує, а пряма $c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 = const$ паралельна одній з прямих, що її обмежують, і є опорною для точок, які лежать на ній.

Випадок 3. В цьому випадку задача має безліч розв'язків, які відповідають одному й тому ж екстремальному значенню цільової функції. У цьому випадку у якості розв'язку обирають довільну точку на відрізку прямої, шо обмежує область розв'язків, та розраховують значення цільової функції для цієї точки.

Наприкінці слід відмітити, що графічний метод має певні обмеження та застосовується тільки при розв'язанні симетричних задач двовимірного простору і лише деяких задач тривимірного простору, тому що досить важко побудувати багатогранник розв'язків, що утворюється в результаті перетину напівпросторів. Задачу для простору розмірності більше трьох зобразити графічно неможливо.

1.2 Приклади розв'язання задачі ЛП графічним методом

1.2.1 Приклад 1

Знайти максимальне значення цільової функції $f(x)$ при заданій системі обмежень:

$$f(x) = -2x_1 + 5x_2 \rightarrow max \qquad (1.4)$$

на множині $D = \{x \in R^2 \mid$

$$7x_1 + 2x_2 \geq 14$$
$$5x_1 + 6x_2 \leq 30 \qquad (1.5)$$
$$3x_1 + 8x_2 \geq 24$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Рішення

На площині $x_1 0 x_2$ побудуємо область розв'язків, обмежену прямими:

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 = 14 \\ 5x_1 + 6x_2 = 30 \\ 3x_1 + 8x_2 = 24 \end{cases} \qquad (1.6)$$

та осями координат:

$x_1 = 0,$

$x_2 = 0$

Прямі (1.6) зручно будувати за відрізками, які вони відсікають на осях координат. Для цього представимо рівняння прямих (1.6) у нормованому вигляді:

$$\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{7} = 1$$
$$\frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{5} = 1 \qquad (1.7)$$
$$\frac{x_1}{8} + \frac{x_2}{3} = 1$$

Кожна з прямих розділяє площину на дві $x_1 0 x_2$ напівплощини, при цьому умові (1.5) відповідає область, яка знаходиться у першій напівчверті координатної площини.

Як видно з рис. 1.1, умові (1.5) відповідає область, обмежена трикутником АВС.

Для знаходження екстремального значення цільової функції $f(x)$ (1.4) у області розв'язків ABC побудуємо вектор $\overline{grad}\ f(x) = \bar{c}(-2; 5)$ та пряму $-2x_1 + 5x_2 = 0$.

Переміщуємо пряму $-2x_1 + 5x_2 = 0$ за напрямком вектору $\overline{grad}\ f(x)$ до граничної точки області розв'язків (трикутник ABC). Як видно з рис. 1.1, цією точкою є точка **B**.

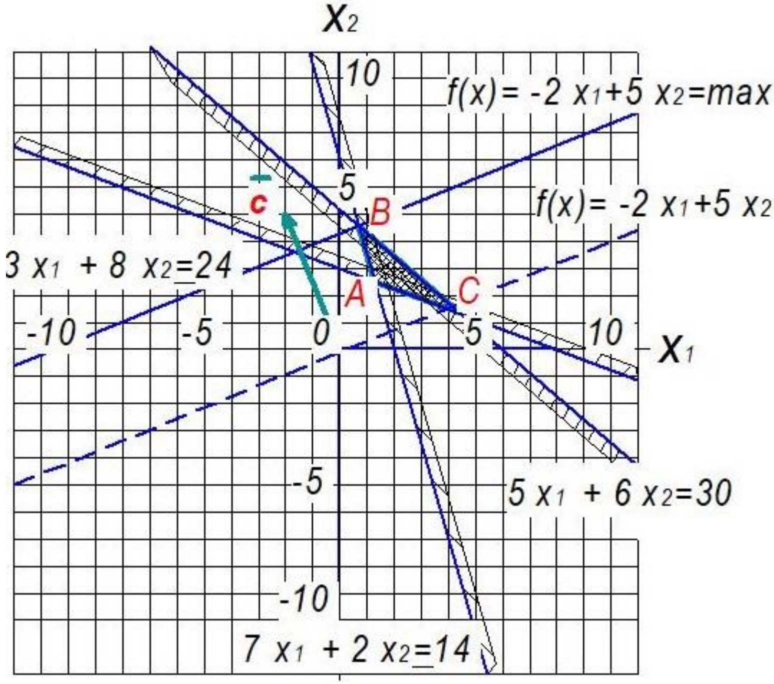


Рисунок 1.1 – Розв'язання ЗЛП графічним методом (приклад 1)

Знаходимо координати точки B як точки перетину прямих:

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 = 14 \\ 5x_1 + 6x_2 = 30 \end{cases} \tag{1.8}$$

$$\begin{cases} -21x_1 - 6x_2 = -42 \\ 5x_1 + 6x_2 = 30 \end{cases}$$

$-16x_1 = -12; \quad x_1 = 0,75;$

$$x_2 = \frac{14 - 7 \cdot 0{,}75}{2} = 4{,}375$$

Таким чином, координати опорної точки, що відповідає максимальному значенню цільової функції: *B(0,75; 4,375)*.

Значення цільової функції у цій точці:

$f(x)_{max} = -2 \cdot 0{,}75 + 5 \cdot 4{,}375 = 20{,}375$

Результат розв'язання задачі.

У області розв'язків, заданій системою обмежень (1.5) цільова функція (1.4) досягає максимального значення у точці *B(0,75; 4,375)*.

$f(x)_{max} = 20{,}375$

1.2.2 Приклад 2

Завдання

Знайти мінімальне значення цільової функції *f(x)* при заданій системі обмежень:

$f(x) = x_1 + x_2 \rightarrow min$ (1.9)

на множині $D = \{x \in R^2 \mid$

$2x_1 + 4x_2 \leq 16$

$-4x_1 + x_2 \leq 8$ (1.10)

$x_1 + 3x_2 \geq 9$

$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$

Рішення

На площині $x_1 0 x_2$ побудуємо область розв'язків, обмежену прямими:

$2x_1 + 4x_2 = 16$

$-4x_1 + x_2 = 8$ (1.11)

$x_1 - 3x_2 = 9$

та осями координат:

$x_1 = 0,$

$x_2 = 0$

Прямі (1.11) будуємо за відрізками, які вони відсікають на осях координат. Для цього представимо рівняння прямих (1.11) у нормованому вигляді:

$$\frac{x_1}{8}+\frac{x_2}{4}=1$$

$$\frac{x_1}{-2}+\frac{x_2}{8}=1 \qquad (1.12)$$

$$\frac{x_1}{9}+\frac{x_2}{-3}=1$$

Кожна з прямих розділяє площину на дві $x_1 0 x_2$ напівплощини, при цьому умові (1.10) відповідає область, яка знаходиться у першій напівчверті координатної площини.

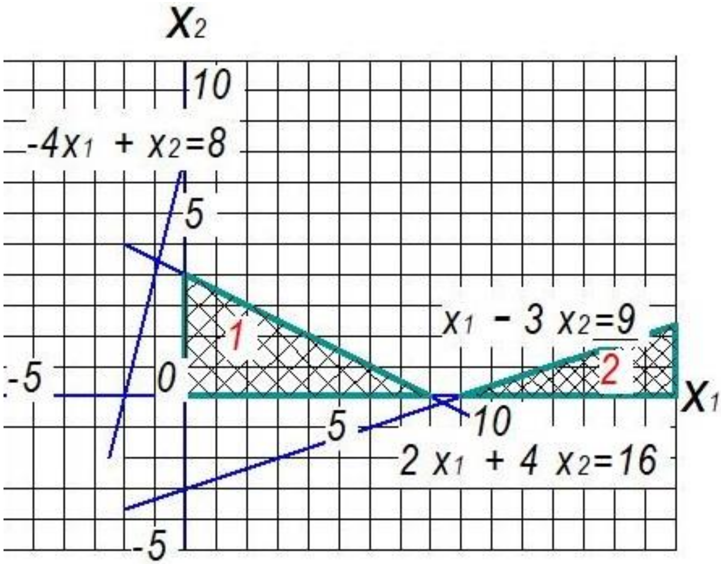


Рисунок 1.2 – Розв’язання ЗЛП графічним методом (приклад 2)

Як видно з рис. 1.2, умові (1.10) не відповідає жодна область, тобто система (1.10) не сумісна.

Задача не має розв’язків.

.

1.3 Завдання до роботи

Знайти максимальне та мінімальне значення цільової функції графічним методом.

Варіант 1 $f(x) = 50\,x_1 + 40\,x_2 + 20$

$2\,x_1 + 5\,x_2 \leq 20$

$5\,x_1 + 5\,x_2 \leq 40$

$5\,x_1 + 6\,x_2 \leq 30$

$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0$

Варіант 2 $f(x) = x_1 + x_2 + 50$

$x_1 + 2\,x_2 \leq 14$

$-5\,x_1 + 3\,x_2 \leq 15$

$4\,x_1 + 6\,x_2 \geq 24$

$x_1 > 0;\ x_2 \geq 0$

Варіант 3 $f(x) = 4\,x_1 + 6\,x_2 + 30$

$3\,x_1 + x_2 \geq 9$

$x_1 + 2\,x_2 \geq 8$

$x_1 + 6\,x_2 \geq 12$

$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0$

Варіант 4 $f(x) = 3\,x_1 + 4\,x_2 + 8$

$2\,x_1 + x_2 \leq 16$

$x_1 + x_2 \leq 10$

$x_1 \leq 7$

$x_2 \leq 6$

$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0$

Варіант 5 $f(x) = 3\,x_1 - 2\,x_2 + 30$

$7\,x_1 + 2\,x_2 \geq 14$

$7\,x_1 + 6\,x_2 \leq 42$

$-x_1 + 2\,x_2 \geq 2$

$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0$

Варіант 6 $f(x) = x_1 + x_2 + 25$

$0 \leq x_1 \leq 1$

$0 \leq x_2 \leq 2$

$0 \leq x_1 + x_2 \leq 3$

$-1 \leq x_1 - x_2 \leq 0$

Варіант 7 $f(x) = 3x_1 + 4x_2 - 15$

$3x_1 + 4x_2 \le 12$

$0 \le x_1 \le 3$

$0 \le x_2 \le 5$

Варіант 8 $f(x) = 2x_1 + 3x_2 + 20$

$x_1 + x_2 \le 4$

$3x_1 + x_2 \ge 4$

$x_1 + 5x_2 \ge 4$

$0 \le x_1 \le 3$

$0 \le x_2 \le 3$

Варіант 9 $f(x) = x_1 + x_2 + 16$

$2x_1 + x_2 \ge 3$

$x_1 + 3x_2 \ge 4$

$x_1 + 2x_2 \le 8$

$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0$

Варіант 10 $f(x) = x_1 + 2x_2 + 12$

$8x_1 + 3x_2 \ge 12$

$-x_1 + x_2 \le 3$

$x_1 + x_2 \le 7$

$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 1$

Варіант 11 $f(x) = x_1 + x_2 + 25$

$x_1 + 2x_2 \le 14$

$-5x_1 + 3x_2 \le 15$

$4x_1 + 6x_2 \le 24$

$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0$

Варіант 12 $f(x) = 2x_1 + 3x_2 + 5$

$x_1 + x_2 \le 4$

$6x_1 - 2x_2 \le 8$

$x_1 + 5x_2 \ge 4$

$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0$

Варіант 13 $f(x) = x_1 + x_2 + 8$

$x_1 + 2x_2 \le 10$

$x_1 + 2x_2 \ge 2$

$2x_1 + x_2 \le 10$

$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0$

Варіант 14 $f(x) = 5x_1 + 2x_2 + 16$
$2x_1 + 5x_2 \le 20$
$0 \le x_1 \le 7$
$0 \le x_2 \le 5$

Варіант 15 $f(x) = x_1 + x_2 + 10$
$x_1 + 3x_2 \ge 9$
$2x_1 + 1x_2 \le 16$
$-4x_1 + 2x_2 \le 8$
$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0$

Варіант 16 $f(x) = 5x_1 - 10x_2 - 20$
$-2x_1 + x_2 \le 1$
$-x_1 + x_2 \le 2$
$3x_1 + x_2 \le 8$
$-2x_1 + 3x_2 \ge -9$
$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0$

Варіант 17 $f(x) = 3x_1 + 4x_2 + 35$
$-x_1 + x_2 \le 1$
$-x_1 + x_2 \ge -1$
$x_1 + x_2 \le 3$
$0 \le x_1 \le 1{,}5$
$x_2 \ge 0$

Варіант 18 $f(x) = x_1 + 2x_2 + 5$
$x_1 - x_2 \le 1$
$-x_1 + x_2 \le 1$
$x_1 + x_2 \le 2$
$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0$

Варіант 19 $f(x) = 2x_1 - 3x_2 + 2{,}5$
$-4x_1 + 5x_2 \le 20$
$-2x_1 + x_2 \ge 6$
$x_1 + x_2 \le 6$
$5x_1 + x_2 \le 9$
$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0$

Варіант 20 $f(x) = 2x_1 + 3x_2 + 6$
$-4x_1 + 5x_2 \le 20$
$5x_1 + 5x_2 \le 40$
$5x_1 + 6x_2 \le 30$
$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0$

Варіант 21 $f(x) = 8x_1 + 6x_2 + 15$

$-8x_1 + 14x_2 \geq 14$

$x_1 + 5x_2 \leq 10$

$5x_1 - 9x_2 \geq 5$

$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0$

Варіант 22 $f(x) = 5x_1 + x_2 + 6$

$2x_1 - 9x_2 \geq 18$

$2x_1 + 4x_2 \geq 3$

$5x_1 + 3x_2 \geq 30$

Варіант 23 $f(x) = 3x_1 + 2x_2 + 11$

$-4x_1 + 5x_2 \leq 29$

$3x_1 + x_2 \leq 14$

$5x_1 + 2x_2 \geq 30$

$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0$

Варіант 24 $f(x) = 10x_1 - 8x_2 + 15$

$x_1 + 11x_2 \geq 11$

$3x_1 - x_2 \leq 12$

$5x_1 - x_2 \leq 11$

$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0$

Варіант 25 $f(x) = x_1 + x_2 + 20$

$x_1 + x_2 \leq 3$

$2x_1 + x_2 \geq 2$

$-1 \leq x_1 - x_2 \geq 2$

$0 \leq x_1 \leq 1$

$0 \leq x_2 \leq 2$

1.4 Зміст звіту

1.4.1 Тема та мета роботи.

1.4.2 Короткі теоретичні відомості.

1.4.3 Розв’язання задачі ЛП графічним методом згідно з варіантом.

1.4.4 Висновки.

2 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 2. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЛП СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ

Мета роботи: ознайомитися з симплекс-методом розв'язання задач ЛП та отримати практичні навички його використання.

2.1 Теоретичні відомості

2.1.1 Суть симплекс-методу. Допустимі та базисні розв'язки

Симплекс-метод - це метод послідовного переходу від одного базисного розв'язку (вершини багатогранника розв'язків) системи обмежень задачі лінійного програмування до іншого базисного розв'язку доти, доки функція мети не прийме оптимального значення (максимуму або мінімуму).

Симплекс-метод є універсальним методом, яким можна розв'язати будь-яку задачу лінійного програмування, тоді як графічний метод придатний лише системи обмежень із двома змінними.

Симплекс у n-вимірному просторі являє собою найпростіший багатогранник: $R^n \to (n+1)$ - гранник (рис. 2.1)

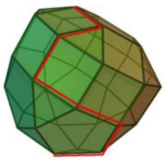


Рисунок 2.1 – Багатогранник обмежень симплекс-методу

При цьому кожній кутовій точці багатогранника розв'язків відповідає ***опорний план*** задачі ЛП.

Перед тим, як перейти до алгоритму симплекс-методу, введемо декілька визначень.

Нехай є система m обмежень із n змінними ($m < n$).

Допустимим розв'язком є розв'язок, який містить m ***основних*** (***базисних***) змінних і $n - m$ ***неосновних*** (***небазисних***, або ***вільних***) змінних. При цьому основні (базисні) змінні, як правило, відмінні від нуля, тобто є додатними числами. Неосновні змінні в базисному розв'язку дорівнюють нулю.

Базисний розв’язок - розв’язок системи рівнянь $\overline{x} = (x_1, x_2, ... x_k, 0, ...0)$, якщо вектори умов при його ***ненульових*** компонентах лінійно-незалежні.

Оскільки оптимальний розв’язок досягається в кутовій точці області допустимих розв’язків, то шукати ***оптимальний розв’язок*** слід серед ***опорних розв’язків***.

Спочатку слід знайти довільний опорний розв’язок, який є однією з вершин багатогранника розв’язків (рис. 2.1). Разом з сусідніми з нею вершинами вона утворює симплекс в просторі вільних змінних.

Далі слід переходити до сусідньої вершини симплекса з кращим значенням критерію, рухаючись за одним з ребер симплекса (краще по ребру, ближчому до вектору градієнта функції).

2.1.2 Алгоритм симплекс методу

Крок 1. Привести задачу лінійного програмування до ***канонічної форми***.

Для цього слід:

– перенести вільні члени у праву частину;

– якщо серед вільних членів у правій частині виявляться від’ємні, то відповідне рівняння чи нерівність слід помножити на –1;

– в кожне обмеження у вигляді нерівності ввести додаткові змінні: зі знаком "плюс", якщо у вихідній нерівності знак "менше або дорівнює", та зі знаком "мінус", якщо у вихідній нерівності знак "більше або дорівнює".

Канонічна форма ЗЛП:

$$F(\bar{x}) = c_1 \cdot x_1 + \dots + c_m \cdot x_m + c_{m+1} \cdot x_{m+1} \dots + c_n \cdot x_n \rightarrow \max (min)$$

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + \dots + a_{1m} \cdot x_m + a_{1m+1} \cdot x_{m+1} \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + \dots + a_{2m} \cdot x_m + a_{2m+1} \cdot x_{m+1} \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + \dots + a_{mm} \cdot x_m + a_{mm+1} \cdot x_{m+1} \dots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, n} \end{cases} \qquad (2.1)$$

Крок 2. Якщо в отриманій системі m рівнянь, то m змінних прийняти за основні, виразити основні змінні через неосновні та знайти відповідний базисний розв’язок. Якщо знайдений базисний розв’язок виявиться допустимим, перейти до допустимого базисного розв’язку.

Крок 3. Виразити лінійну форму через неосновні змінні допустимого базисного розв’язку.

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_m + a'_{1m+1} \cdot x_{m+1} \dots + a'_{1n} \cdot x_n = b'_1 \\ 0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_m + a'_{2m+1} \cdot x_{m+1} \dots + a'_{2n} \cdot x_n = b'_2 \\ \dots \\ 0 \cdot x_1 + \dots + 1 \cdot x_m + a'_{mm+1} \cdot x_{m+1} \dots + a'_{mn} \cdot x_n = b'_m \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, n} \end{cases} \qquad (2.2)$$

Якщо знаходиться максимум (мінімум) лінійної форми й у її вираженні немає неосновних змінних з від’ємними (додатними) коефіцієнтами, то критерій оптимальності виконаний і отримане базисний розв’язок є оптимальним – розв’язання закінчене.

Якщо при знаходженні максимуму (мінімуму) лінійної форми в її вираженні є одна або кілька неосновних змінних з від’ємними (додатними) коефіцієнтами, перейти до нового базисного розв’язку.

Крок 4. З неосновних змінних, що входять у лінійну форму з від’ємними (додатними) коефіцієнтами, вибирають ту, якій відповідає найбільший (за модулем) коефіцієнт, переводять її в основні та повертаються до кроку 2.

При розв’язанні задачі ЛП симплекс-методом слід враховувати наступні умови.

Якщо допустимий базисний розв’язок дає оптимум цільової функції (критерій оптимальності виконаний), а у її вираженні через неосновні змінні відсутня хоча б одна з них, то отриманий оптимальний розв’язок не єдиний.

Якщо у виразі цільової функції у разі її максимізації є неосновна змінна з від’ємним коефіцієнтом (у разі мінімізації - з додатним), а в усі рівняння системи обмежень цього кроку зазначена змінна входить також з від’ємними коефіцієнтами або відсутня, то лінійна форма за даної системи обмежень не обмежена і її максимальне (мінімальне) значення записують як $F_{max} = \infty$ ($F_{min} = -\infty$) .

2.1.3 Розв'язання задачі ЛП симплекс-методом за допомогою таблиць

Розглянемо розв'язок задачі ЛП симплекс-методом за допомогою таблиць. У симплекс-таблиці можна виділити наступні блоки (див. табл. 2.1).

Таблиця 2.1 - Основні блоки симплекс-таблиці

		Коефіцієнти c_j цільової функції)	
$C_б$	БЗ	Шапка матриці (найменування невідомих)	b
Коефіцієнти цільової функції при базисних невідомих	Найменування базисних змінних	Поточна матриця технологічних змінних	Підсумковий стовпець (значення базисних змінних b_i)
		Оціночний рядок (оцінки Δ_j)	Значення цільової функції

Симплекс-таблиця будується для будь-якого опорного розв'язку.

Нехай опорний розв'язок $\overline{x}^{(l)} = (x_1^l, x_2^l, \ldots x_m^l, \ldots 0, \ldots 0)$.

Симплекс-таблиця для цього розв'язку має вигляд табл. 2.2.

Таблиця 2.2 - Симплекс-таблиця для заданого опорного розв'язку

	F	c_1	c_2	…	c_m	c_{m+1}	…	c_s	…	c_j	…	c_n	
$C_б$	БЗ	x_1	x_2	…	x_m	x_{m+1}	…	x_s	…	x_j	…	x_n	b
c_1	x_1	1	0	…	0	a_{1m+1}	…	a_{1s}	…	a_{1j}	…	a_{1n}	b'_1
c_2	x_2	0	1	…	0	a_{2m+1}	…	a_{2s}	…	a_{2j}	…	a_{2n}	b'_2
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
c_k	x_k	0	0	…	0	a_{km+1}	…	a_{ks}	…	a_{kj}	…	a_{kn}	b'_k
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
c_i	x_i	0	0	…	0	a_{im+1}	…	a_{is}	…	a_{ij}	…	a_{in}	b'_i
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
c_m	x_m	0	0	…	1	a_{mm+1}	…	a_{ms}	…	a_{mj}	…	a_{mn}	b'_m
	F	0	0	…	0	Δ_{m+1}	…	Δ_s	…	Δ_j	…	Δ_n	F(x)

Розглянемо послідовність знаходження оптимального розв'язку за допомогою симплекс-таблиці.

2.1.3.1 ***Перевірка умови оптимальності.*** Умова оптимальності (визначається для небазисних змінних):

$$\begin{cases} \text{для задачі на максимум:} \\ \Delta_j = \left(\sum c_{бi} \cdot a_{ij}\right) - c_j \geq 0 \\ \text{для задачі на мінімум:} \\ \Delta_j = \left(\sum c_{бi} \cdot a_{ij}\right) - c_j \leq 0 \end{cases} \qquad (2.3)$$

2.1.3.2 Якщо є стовпці, для яких умова (2.3) не виконується, то то розв'язок не оптимальний. Вибираємо серед них стовпець s, для якого $\left|\Delta_j\right| = max$. Назвемо його ***стовпцем дозволу***.

Небазисна змінна з цього стовпця додається до базисних змінних.

2.1.3.3 ***Рядок дозволу*** вибирається за допомогою оцінки θ, яка дорівнює відношенню вільних членів до додатніх коефіцієнтів стовпця дозволу:

$$\vartheta = \frac{b_k}{a_{ks}}; a_{ks} > 0 \qquad (2.4)$$

Рядок дозволу відповідає умові θ_{min}.

Базисна змінна, що знаходиться у цьому рядку, виводиться зі списку базисних змінних.

Елемент, що знаходиться на перетині стовпця дозволу та рядка дозволу, називається ***елементом дозволу***.

2.1.3.4 ***Поточна симплекс-таблиця перетворюється*** за наступними правилами:

- елементи рядку дозволу діляться на елемент дозволу:

$$a_{kj}^{l+1} = \frac{a_{kj}^{l}}{a_{ks}^{l}}; b_k^{l+1} = \frac{b_k^{l}}{a_{ks}^{l}}, \qquad (2.5)$$

- стовпець дозволу замінюється одиничним;
- всі інші елементи симплекс-таблиці можуть бути перераховані за правилом чотирикутника.

На діагоналі, що з'єднує шуканий елемент з елементом дозволу, подумки будується чотирикутник. Нове значення будь-якого елемента дорівнює попередньому значенню мінус добуток елементів на протилежній діагоналі, поділений на елемент дозволу:

$$a_{ij}^{l+1} = a_{ij}^{l} - \frac{a_{kj}^{l} \cdot a_{is}^{l}}{a_{ks}^{l}},$$
$$b_{i}^{l+1} = b_{i}^{l} - \frac{b_{k}^{l} \cdot a_{is}^{l}}{a_{ks}^{l}} \qquad (2.6)$$

2.1.3.5 У новому опорному плані ***базисні змінні*** $\left(x_1^{l+1} \cdots x_m^{l+1}\right)$ прирівнюються до перерахованих вільних членів $\left(b_1^{l+1} \cdots b_m^{l+1}\right)$, а ***небазисні*** приймаються рівними нулю.

2.1.3.6 ***Нова симплекс-таблиця*** перевіряється на умову оптимальності. Якщо умова виконується, її опорний план приймається за оптимальний. Якщо ні – процедура повторюється з пункту 2.1.3.2.

2.2 Приклад розв’язання задачі ЛП симплекс-методом

2.2.1 Вихідні дані

На виготовлення 1 м^2 склотканини типу А, В і С потрібно три види сировини (І, ІІ і ІІІ) та деякий час обробки на спеціальному обладнанні. Дані про норми витрат сировини та час обробки у місяць наведені в табл. 2.3.

Ринок збуту склотканини вважається необмеженим. Скласти план випуску склотканини, при якому дохід від її реалізації буде максимальним.

Таблиця 2.3 - Вихідні дані задачі ЛП

	A	B	C	Ліміт
Сировина I	5	2	3	300
Сировина II	4	6	5	316
Сировина II	3	8	6	360
Час обробки	5	6	6	392
Ціна 1 м^2	9	6	8	

2.2.2 Математична модель задачі

Складемо математичну модель даної задачі і приведемо її до канонічного вигляду.

Нехай:

x_1 - місячний обсяг випуску склотканини типу А;

x_2 - місячний обсяг випуску склотканини типу В;

x_3 - місячний обсяг випуску склотканини типу С,

причому x_1 , x_2, x_3 - невід'ємні: $x_j \geq 0, j = \overline{1,3}$.

Знайти такий план випуску, при якому дохід від її реалізації:

$F = 9 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 8 \cdot x_3 \rightarrow max,$

за умови, що витрати сировини і часу обробки на виробництво склотканини А, В і С не перевищують відповідних лімітів:

$$5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \leq 300$$
$$4 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 \leq 316$$
$$3 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 \leq 360$$
$$5 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 \leq 392$$

Приведемо задачу до канонічного вигляду. Для цього введемо чотири невід'ємні змінні x_4, x_5, x_6, x_7 (за кількістю нерівностей у системі обмежень) і додамо кожну з них до лівої частини відпоівідної нерівності, в результаті чого отримаємо систему рівнянь:

$$5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + x_4 = 300$$
$$4 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 + x_5 = 316$$
$$3 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 + x_6 = 360$$
$$5 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 + x_7 = 392$$

Економічний сенс додаткових змінних - кількість невикористаного сировини і часу по кожному виду склотканини.

Додамо ці змінні в цільову функцію з нульовими коефіцієнтами.

Задача у канонічній формі має вигляд:

$$F = 9 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 8 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 \to max$$

$$5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + x_4 = 300$$

$$4 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 + x_5 = 316$$

$$3 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 + x_6 = 360$$

$$5 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 + x_7 = 392$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,7}$$

2.2.3 Визначення базису та початкового опорного плану

Запишемо систему обмежень у векторній формі:

$$\overline{P_1} \cdot \overline{X_1} + \overline{P_2} \cdot \overline{X_2} + \overline{P_3} \cdot \overline{X_3} + \overline{P_4} \cdot \overline{X_4} + \overline{P_5} \cdot \overline{X_5} + \overline{P_6} \cdot \overline{X_6} + \overline{P_7} \cdot \overline{X_7} = \overline{P_0}$$

де $\bar{P}_0 = \begin{bmatrix} 300 \\ 316 \\ 360 \\ 392 \end{bmatrix}$;

$$\bar{P}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}; \bar{P}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix}; \bar{P}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}; \bar{P}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \bar{P}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \bar{P}_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \bar{P}_7 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Базисні вектори: $\bar{P}_4$; $\bar{P}_5; \bar{P}_6; \bar{P}_{7.}$

Вихідний опорний план: $\bar{X} = (0; 0; 0; 300; 316; 360; 392)$

Цільова функція для опорного плану:

$$F = 9 \cdot 0 + 6 \cdot 0 + 8 \cdot 0 + 0 \cdot 300 + 0 \cdot 316 + 0 \cdot 360 + 0 \cdot 392 = 0$$

2.2.4 Перша симплекс-таблиця. Перевірка умови оптимальності

Складемо першу симплекс-таблицю (табл. 2.4) та перевіримо вихідний опорний план на оптимальність.

Таблиця 2.4 – Перша симплекс-таблиця

$C_б$	БЗ	9	6	8	0	0	0	0	P_0	θ
		P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7		
0	P_4	5	2	3	1	0	0	0	300	60
0	P_5	4	6	5	0	1	0	0	316	79
0	P_6	3	8	6	0	0	1	0	360	120
0	P_7	5	6	6	0	0	0	1	392	78,4
		-9	-6	-8	0	0	0	0	0	

$\Delta_1 = 0 \cdot 5 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 5 - 9 = -9$

$\Delta_2 = 0 \cdot 2 + 0 \cdot 6 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 6 - 6 = -6$

$\Delta_3 = 0 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 6 + 0 \cdot 6 - 8 = -8$

Розв’язок не є оптимальним, оскільки умова оптимальності для задачі на максимум (2.3) не виконана.

Вибираємо значення $|\Delta_j| = \max$.

В даному випадку це значення $|\Delta_1| = 9$.

Стовпець P_1 є стовпцем дозволу, тому змінну x_1 введемо в розряд базисних.

Визначимо змінну, яку будемо виводити з базисних.

Знайдемо оцінки θ для додатних значень стовпця P_1.

$\theta_{min} = \theta_1 = 60$.

Рядок 1 є рядком дозволу.

Виводимо з базису змінну x_4.

Елемент дозволу: $a_{11} = 5$.

Складаємо другу симплекс-таблицю, перерахувавши її значення за формулами (6.25), (6.26).

2.2.5 Друга симплекс-таблиця. Перевірка умови оптимальності

Друга симплекс-таблиця наведена у табл. 2.5.

Таблиця 2.5 – Друга симплекс-таблиця

$C_б$	БЗ	9	6	8	0	0	0	0	P_0	θ
		P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7		
9	P_1	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0	0	60	100
0	P_5	0	$\frac{22}{5}$	$\frac{13}{5}$	$-\frac{4}{5}$	1	0	0	76	$29\frac{3}{13}$
0	P_6	0	$\frac{34}{5}$	$\frac{21}{5}$	$-\frac{3}{5}$	0	1	0	180	$42\frac{6}{7}$
0	P_7	0	4	3	-1	0	0	1	92	$30\frac{2}{3}$
		0	$-\frac{12}{5}$	$-\frac{13}{5}$	$\frac{9}{5}$	0	0	0	540	

З табл. 2.5 другий опорний план:

$\bar{X} = (60; 0; 0; 0; 76; 180; 92)$

Цільова функція для опорного плану:

$$F = 9 \cdot 60 + 6 \cdot 0 + 8 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 76 + 0 \cdot 180 + 0 \cdot 92 = 540$$

Перевіримо опорний план на оптимальність.

$$\Delta_2 = 9 \cdot \frac{2}{5} + 0 \cdot \frac{22}{5} + 0 \cdot \frac{34}{5} + 0 \cdot 4 - 6 = -\frac{12}{5}$$

$$\Delta_3 = 9 \cdot \frac{3}{5} + 0 \cdot \frac{13}{5} + 0 \cdot \frac{21}{5} + 0 \cdot 3 - 8 = -\frac{13}{5}$$

$$\Delta_4 = 9 \cdot \frac{1}{5} - 0 \cdot \frac{4}{5} - 0 \cdot \frac{3}{5} - 0 \cdot 1 - 0 = \frac{9}{5}$$

Розв’язок не є оптимальним, оскільки умова оптимальності для задачі на максимум (2.3) не виконана.

Вибираємо значення $|\Delta_j| = \max$.

В даному випадку це значення $|\Delta_3| = \frac{13}{5}$.

Стовпець P_3 є стовпцем дозволу, тому змінну x_3 введемо в розряд базисних.

Визначимо змінну, яку будемо виводити з базисних.

Знайдемо оцінки θ для додатних значень стовпця P_3.

$\theta_{min} = \theta_2 = 29\frac{3}{13}$.

Рядок 2 є рядком дозволу. Виводимо з базису змінну x_5.

Елемент дозволу: $a_{32} = \frac{13}{5}$.

У останньому рядку є від'ємні оцінки, тому розв'язок не є оптимальним. Складаємо третю симплекс-таблицю, перерахувавши її значення за формулами (2.5), (2.6).

2.2.6 Третя симплекс-таблиця. Перевірка умови оптимальності

Третя симплекс-таблиця наведена у табл. 2.6.

З табл. 2.6 третій опорний план:

$$\bar{X} = \left(\frac{552}{13}; 0; \frac{380}{13}; 0; 0; \frac{744}{13}; \frac{56}{13}\right)$$

Цільова функція для опорного плану:

$$F = 9 \cdot \frac{552}{13} + 6 \cdot 0 + 8 \cdot \frac{380}{13} + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 76 + 0 \cdot \frac{744}{13} + 0 \cdot \frac{56}{13} = 616$$

Перевіримо опорний план на оптимальність.

Таблиця 2.6 – Третя симплекс-таблиця

$C_б$	БЗ	9	6	8	0	0	0	0	P_0
		P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	
9	P_1	1	$-\frac{8}{13}$	0	$\frac{5}{13}$	$-\frac{3}{13}$	0	0	$\frac{552}{13}$
8	P_3	0	$\frac{22}{13}$	1	$-\frac{4}{13}$	$\frac{5}{13}$	0	0	$\frac{380}{13}$
0	P_6	0	$-\frac{4}{13}$	0	$\frac{9}{13}$	$-\frac{21}{13}$	1	0	$\frac{744}{13}$
0	P_7	0	$-\frac{14}{13}$	0	$-\frac{1}{13}$	$-\frac{15}{13}$	0	1	$\frac{56}{13}$
		0	2	0	1	1	0	0	616

$$\Delta_2 = -9 \cdot \frac{8}{13} + 8 \cdot \frac{22}{13} - 0 \cdot \frac{4}{13} - 0 \cdot \frac{14}{13} - 6 = 2$$

$$\Delta_4 = 9 \cdot \frac{5}{13} + 8 \cdot \frac{4}{13} - 0 \cdot \frac{9}{13} + 0 \cdot \frac{1}{13} - 0 = 1$$

$$\Delta_5 = -9 \cdot \frac{3}{13} + 8 \cdot \frac{5}{13} - 0 \cdot \frac{21}{13} - 0 \cdot \frac{15}{13} - 0 = 1$$

Оскільки умова оптимальності для задачі на максимум (2.3) виконана, розв'язок є оптимальним.

Таким чином, для забезпечення максимального прибутку слід виготовляти в місяць:

$\frac{552}{13} \approx 42{,}46$ м^2 склотканини типу А;

$\frac{380}{13} \approx 29{,}23$ м^2 склотканини типу С.

Склотканину типу В не виготовляти.

При цьому сировина типу І та ІІ буде використана повністю.

$\frac{744}{13}$ одиниці сировини ІІІ та $\frac{56}{13}$ годин часу обробки залишаться невикористаними.

Прибуток від реалізації становить: F = 616 грн.

2.3 Розв'язання задачі ЛП за допомогою надбудови Пошук рішення

Знайдемо розв'язок задачі ЛП, розглянутої у попередньому прикладі, симплекс-методом.

На новому листі MS Excel введемо дані згідно рис. 2.2.

	A	B	C	D	E	F	G
1	c =	9	6	8			
2	x =	0	0	0			
3	F =	0					
4							
5	5	2	3	=	0	≤	300
6	4	6	5	=	0	≤	316
7	3	8	6	=	0	≤	360
8	5	6	6	=	0	≤	392
9							

Рисунок 2.2 – Вихідні дані для розв'язання задачі ЛП симплекс-методом

Формули для обчислень показані на рис. 2.3.

	A	B	C	D	E	F	
1		c = 9	6	8			
2		x = 0	0	0			
3		F = =СУММПРОИЗВ(B2:D2;B1:D1)					
4							
5	5	2	3	=	=СУММПРОИЗВ(A5:C5;B2:D2)	≤	300
6	4	6	5	=	=СУММПРОИЗВ(A6:C6;B2:D2)	≤	316
7	3	8	6	=	=СУММПРОИЗВ(A7:C7;B2:D2)	≤	360
8	5	6	6	=	=СУММПРОИЗВ(A8:C8;B2:D2)	≤	392

Рисунок 2.3 - Формули для розв'язання задачі ЛП симплекс-методом

Встановимо курсор на комірку B3 з формулою для обчислення значення цільової функції та викликаємо надбудову **Пошук рішення**.

У діалоговому вікні, що відкриється, зробимо налаштування відповідно рис. 2.4.

При цьому слід увімкнути прапорець ***Зробити змінні без обмежень невід'ємними***, а також обрати метод рішення ***Пошук рішення лінійних задач симплекс-методом***.

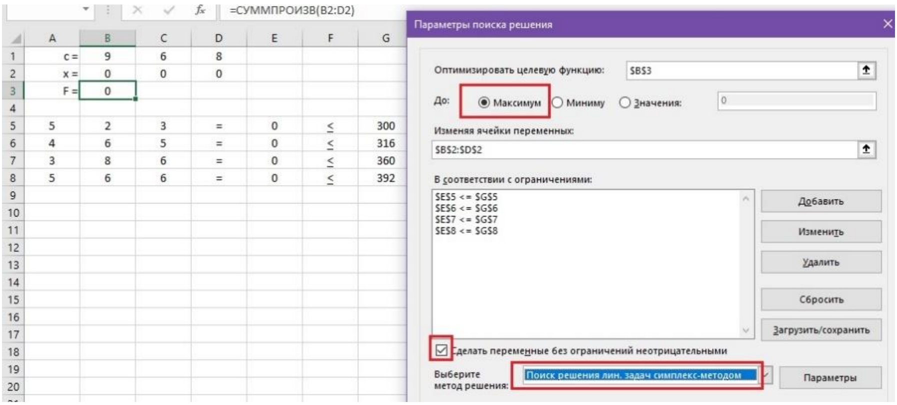


Рисунок 2.4 – Налаштування параметрів у діалоговому вікні **Пошук рішення**

По закінченні налаштувань слід натиснути ***Знайти рішення***, після чого в комірках B2 - B4 з'являться значення вхідних параметрів x_i, які відповідають максимальному значенню цільової функції (комірка B1) для заданої системи обмежень.

Результати рішення показані на рис. 2.5.

	A	B	C	D	E	F	G
1	c =	9	6	8			
2	x =	42,46154	0	29,23077			
3	F =	616					
4							
5	5	2	3	=	300	≤	300
6	4	6	5	=	316	≤	316
7	3	8	6	=	302,7692	≤	360
8	5	6	6	=	387,6923	≤	392

Рисунок 2.5 – Результати розв’язання задачі ЛП симплекс-методом

Як бачимо, результат співпадає з отриманим раніше.

2.4 Завдання до роботи

2.4.1 Розв’язати задачу ЛП симплекс-методом.

На виготовлення двох видів продукції (П1 і П2) використовується три види ресурсів А1, А2, А3. Запаси ресурсів, норми їх витрат і прибуток від реалізації 1 кг продукції задані в таблиці 2.7 з урахуванням варіантів.

За допомогою симплекс-методу знайти такий план виробництва, який забезпечить максимальний прибуток.

2.4.2 Дати економічне обґрунтування отриманим результатам.

2.4.3 Розв’язати задачу ЛП за допомогою надбудови **Пошук рішення** MS Excel. Порівняти отримані результати.

2.5 Зміст звіту

2.5.1 Тема та мета роботи.

2.5.2 Короткі теоретичні відомості.

2.5.3 Розв’язання задачі ЛП симплекс-методом згідно з варіантом.

2.5.4 Економічне обґрунтування отриманих результатів.

2.5.5 Розв’язання задачі ЛП допомогою надбудови **Пошук рішення** MS Excel.

2.5.6 Висновки.

Таблиця 2.7 - Варіанти завдань

Вар.	Витрати ресурсів на од. продукції						Наявність ресурсів			Прибуток	
	A_1		A_2		A_3		A_1	A_2	A_3		
	$П_1$	$П_2$	$П_1$	$П_2$	$П_1$	$П_2$				$П_1$	$П_2$
1	13	7	17	16	4	9	361	520	248	11	8
2	1	1	4	7	1	4	18	93	48	24	36
3	3	2	2	3	1	1	101	99	37	27	24
4	4	13	5	6	11	5	379	197	335	25	12
5	3	1	9	4	3	4	45	144	96	9	8
6	8	6	2	4	5	7	250	180	120	18	7
7	3	7	12	10	9	16	120	215	140	12	11
8	7	4	6	18	4	12	234	326	250	16	21
9	2	9	8	7	3	18	150	424	328	9	13
10	4	10	16	9	7	6	300	212	116	4	7
11	10	12	15	4	8	9	220	168	358	15	8
12	5	5	10	8	6	3	145	136	214	21	18
13	8	10	7	3	2	5	360	228	182	8	9
14	4	6	4	6	5	8	215	154	310	10	14
15	6	8	9	5	9	4	118	99	200	14	12
16	5	3	2	11	1	5	324	162	140	22	8
17	2	9	6	12	12	10	280	327	100	7	9
18	8	12	11	20	16	20	160	118	194	9	6
19	12	16	4	10	7	12	146	240	205	18	16
20	15	20	12	6	8	14	78	360	175	6	8
21	6	18	5	4	4	6	118	180	108	16	9
22	11	3	7	5	9	5	230	154	258	8	4
23	16	7	18	8	3	4	164	312	186	14	13
24	8	8	20	12	6	8	256	276	252	5	6
25	9	6	4	16	14	3	148	268	176	7	5

3 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 3. РОЗВ'ЯЗАННЯ ТРАНСПОРТНИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ ПОТЕНЦІАЛІВ

Мета роботи: ознайомитися з розв'язанням транспортних задач методом потенціалів та отримати практичні навички його використання.

3.1 Теоретичні відомості

3.3.1 Суть транспортної задачі

Транспортна задача (задача Монжа - Канторовича) являє собою задачу ЛП спеціального виду, суть якої полягає у знаходженні оптимального плану перевезень однорідного продукту з однорідних пунктів постачання в однорідні пункти споживання на однорідних транспортних засобах з мінімальними витратами перевезення.

Для класичної транспортної задачі існує декілька типів критеріїв оптимальності:

– критерій вартості (досягнення мінімуму сумарних витрат на перевезення);

– критерій відстані (досягнення мінімуму сумарної довжини перевезення);

– критерій часу (досягнення мінімуму сумарного часу перевезення).

3.1.2 Математична модель транспортної задачі

Математична модель класичної транспортної задачі може бути представлена у наступному вигляді.

Нехай у m пунктах постачання A_i ($i = 1 \dots m$) знаходиться деякий вантаж у об’ємах відповідно $a_1, a_2, \dots a_m$.

Цей вантаж слід доставити n споживачам B_j ($j = 1 \dots n$) у об’ємах відповідно $b_1, b_2, \dots b_n$.

Вартість перевезення одиниці вантажу з пункту A_i до пункту B_j задана матрицею C_{ij}:

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2j} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

де c_{ij} – вартість перевезення вантажа з пункту A_i до пункту B_j.

Кількість об’єму вантажу, який перевозиться з пункту A_i до пункту B_j, задана матрицею X_{ij}:

$$X_{ij} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1j} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2j} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{i1} & x_{i2} & \dots & x_{ij} & \dots & x_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mj} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

$$x_{ij} \geq 0;$$

Необхідно скласти такий план перевезення вантажу з пунктів A_i (i = 1…m) до пунктів B_j (j = 1…n), щоб цільова функція $f\,(x_{ij})$ була мінімальною:

$$f(x_{ij}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \to min \quad (3.3)$$

Необхідною умовою розв’язання транспортної задачі є умова балансу, згідно з якою сумарний об’єм пропозицій (вантажів, наявних у пунктах постачання) повинен дорівнювати сумарному об’єму попиту на вантажі у пунктах споживання:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \quad (3.4)$$

Якщо умова (3.4) не виконується, транспортна задача є незбалансованою (відкритою), і її треба приводити до збалансованого вигляду за наступними правилами:

– якщо $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, то вводиться фіктивний пункт споживання B_{n+1};

– якщо $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, то вводиться фіктивний пункт постачання A_{m+1}.

Наявність ***фіктивного пункту споживання*** означає, що весь призначений для нього вантаж залишається у відповідних пунктах постачання, тобто, вантаж не перевозиться й $c_{i,n+1} = 0$, $(i = 1 \ldots m)$.

Наявність ***фіктивного пункту постачання*** означає, що у пунктах споживання, вантаж до яких повинен бути перевезений саме з нього, буде відповідна нестача, тобто, вантаж не перевозиться й $c_{m+1,\, j} = 0$, $(j = 1 \ldots n)$.

3.1.3 Транспортна таблиця

У загальному вигляді під назвою «транспортна задача» розуміють широке коло задач з єдиною математичною моделлю, які відносяться до задачі ЛП і можуть бути вирішені методами оптимізації.

Однак, існують спеціальні методи розв’язання транспортної задачі, які дозволяють суттєво спростити її розв'язання.

Одним з таких методів є ***метод потенціалів***, який можна трактувати як різновид симплексних процедур. Він являє собою ітеративний процес, на кожному кроці якого розглядається деякий поточний базисний план, перевіряється його оптимальність та, при необхідності, визначається перехід до «кращого» базисного плану.

Процес розв’язання транспортної задачі зручно оформляти у вигляді послідовності таблиць.

Якщо привести умови транспортної задачі до канонічної форми задачі ЛП, то отримаємо матрицю розмірністю $(m + n) \times mn$, з якої формується ***транспортна таблиця***.

Рядки транспортної таблиці відповідають пунктам постачання A_i , а стовпці - пунктам споживання B_j.

В останній клітині кожного рядка зазначають a_i - об’єм запасу вантажу у даному пункті постачання.

В останній клітині кожного стовпця зазначають b_j - об’єм потреби вантажу у даному пункті споживання.

Усі клітини таблиці, крім тих, які розташовані в нижньому рядку і правому стовпці, містять інформацію про перевезення вантажу з i-го пункту в j-й:

– у лівому верхньому кутку: c_{ij} - вартість перевезення одиниці вантажу між цими пунктами;

– у центральній частині: x_{ij} - кількість об’єму вантажу, який перевозиться між цими пунктами;

– в правому нижньому кутку (для вільних клітин): оцінки s_{ij}, за якими перевіряється умова оптимальності.

Клітини, які містять нульові перевезення ($x_{ij} = 0$), називають ***вільними***, а ненульові ($x_{ij} > 0$) – ***зайнятими*** (***базисними***).

3.1.4 Формування первісного опорного плану

Розв’язання транспортної задачі починається з формування первісного допустимого базисного плану за допомогою одного з спеціальних методів (північно-західного кута, мінімальної вартості, подвійної переваги та ін.).

3.1.4.1 Метод північно-західного кута

Метод північно-західного кута полягає у тому, що заповнення транспортної таблиці починається з лівої верхньої (умовно званої «північно-західної») клітини (1,1), рухаючись потім від неї за рядком вправо або за стовпцем униз.

У клітину (1,1) заноситься значення $x_{11} = \min(a_1; b_1)$.

Якщо $\boldsymbol{a_1 > b_1}$**,** то $x_{11} = b_1$ і перший споживач буде повністю задоволений. Інші елементи цього стовпця $x_{i1} = 0$ для $i = (2\ldots m)$.

Рухаючись праворуч за першим рядком таблиці, у сусідню клітину заноситься значення $x_{12} = \min(a_1 - b_1; b_2)$.

Якщо $a_1 - b_1 < b_2$, то $x_{12} = a_1 - b_1$, при цьому запаси першого постачальника вичерпані. Інші елементи цього рядку $x_{1j} = 0$ для $j = (3\ldots n)$.

Після цього процес повторюється для наступного постачальника, поки не будуть вичерпані усі ресурси.

Якщо $\boldsymbol{a_1 < b_1}$, то $x_{11} = a_1$, запас першого споживача вичерпаний, інші елементи цього рядку рядку $x_{1j} = 0$ для $j = (2\ldots n)$.

Рухаючись вниз за першим стовпцем таблиці, у сусідню клітину заноситься значення $x_{21} = \min(a_2; b_1 - a_1)$.

Якщо $b_1 - a_1 < a_2$, то $x_{21} = b_1 - a_1$, при цьому другий споживач буде повністю задоволений. Інші елементи цього стовпця $x_{i2} = 0$ для $i = (3\ldots m)$.

Після цього процес повторюється для наступного споживача, поки вантаж всіх постачальників не буде розподілений між споживачами.

3.1.4.2 Метод мінімальної вартості

Сутність ***методу мінімальної вартості*** полягає у тому, що попередньо проглядаються тарифи таблиці та насамперед заповнюється клітина з мінімальним значенням вартості. У цю клітину записується максимально можливе значення поставки.

Після цього із розгляду виключають рядок, що відповідає постачальнику, запаси якого повністю витрачені, або стовпець, який відповідає споживачеві, попит якого повністю задоволений.

З клітин таблиці, що залишилися, знову вибирають клітину з найменшою вартістю. Процес розподілу закінчується, коли запаси постачальників вичерпані, а попит споживачів повністю задоволений. В результаті отримуємо опорний план, який має містити завантажені клітини.

3.1.4.3 Метод подвійної переваги

Сутність методу подвійної переваги полягає у тому, що під час заповнення опорного плану у кожному рядку й у кожному стовпці вибираються комірки з найменшими тарифами.

Спочатку віддають перевагу клітинам з мінімальними тарифами як за рядком, так і за стовпцем (подвійна перевага), а потім вже тільки за рядком або за стовпцем.

У процесі заповнення транспортної таблиці можуть одночасно виключатися рядок і стовпець. Так буває, коли повністю вичерпується запас вантажу та повністю задовольняється попит (вироджена задача).

В такому випадку у одну з вільних клітин слід записати число 0 – «нуль завантаження», умовно вважаючи цю клітину зайнятою. Однак число 0 записується в ті вільні клітини, які не утворюють циклів із раніше зайнятими клітинами.

В результаті отримуємо початковий опорний план:

$$X_{ij} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1j} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2j} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{i1} & x_{i2} & \dots & x_{ij} & \dots & x_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mj} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

де $x_{ij} \geq 0$ для базисних клітин;
$x_{ij} = 0$ для вільних клітин.

3.1.5 Перевірка умови оптимальності опорного плану за допомогою методу потенціалів

Для того, щоб опорний план (3.5) був оптимальним, необхідно і достатньо існування чисел (потенціалів) u_i, $i = (1\dots m)$ та v_j, $j = (1\dots n)$, таких, що:

- для кожної базисної клітки ($x_{ij} \geq 0$) сума потенціалів повинна дорівнювати вартості перевезення одиниці вантажу:

$$u_i + v_j = c_{ij}; \tag{3.6}$$

- для кожної вільної клітки ($x_{ij} = 0$) сума потенціалів повинна бути меншою або дорівнювати вартості перевезення одиниці вантажу:

$$u_i + v_j \leq c_{ij}. \tag{3.7}$$

Таким чином, для перевірки плану оптимальності необхідно спочатку побудувати систему потенціалів.

Систему потенціалів можна побудувати лише невиродженого опорного плану, тобто такого, який містить $m+n-1$ ненульових базисних клітин.

Для такого плану можна скласти $m+n-1$ лінійно-незалежних рівнянь типу (3.6) з $m+n$ невідомими u_i, v_j.

Оскільки рівнянь на одне менше, ніж змінних, то система є невизначеною і одному невідомому (зазвичай u_1) надають нульового значення. Після цього решта потенціалів визначається однозначно.

Після визначення потенціалів для вільних клітин розраховуються оцінки s_{ij}:

$$s_{ij} = c_{ij} - \left(u_i + v_j\right) \tag{3.8}$$

Оцінка s_{ij} показує, наскільки вартість перевезення для клітини ij більше вартості перевезення базисної клітини i-го рядку або j-го стовпця.

Враховуючи (3.7), умова оптимальності:

$$s_{ij} \geq 0 \qquad (3.9)$$

Якщо умова (3.9) виконується для усіх вільних клітин, опорний план вважається оптимальним.

Якщо умова (3.9) не виконується хоча б для однієї вільної клітини, опорний план неоптимальний і підлягає оптимізації.

3.1.6 Оптимізація опорного плану

Якщо опорний план не оптимальний, слід його оптимізувати, тобто, вилучити одну з базисних клітин та ввести замість неї до базису одну з вільних клітин, для якої умова (3.9) не виконується.

Серед вільних клітин, для яких $s_{ij} < 0$, додавати до базису слід ту, у якої $|s_{ij}| = max$

Перерозподіл вантажу у новому опорному плані відбувається за циклом.

Для визначення кількості одиниць вантажу, що підлягають перерозподілу, слід відзначити знаком «+» вільну клітину, яку треба додати до базису.

Це означає, що клітина приєднується до зайнятих клітин, в результаті чого зайнятих клітин стає $m + n$, тому з'являється цикл, всі вершини якого, крім клітини, позначеної знаком «+», перебувають у зайнятих клітинах, причому цей цикл єдиний.

Слід відшукати цей цикл і, починаючи рух від клітини, позначеної знаком "+", по черзі проставити знаки "-" і "+".

Після цього серед клітин, позначених знаком «–», слід знайти ту, для якої $x_{ij} = min$. Величина $x_{ij\ min}$ визначатиме, скільки одиниць вантажу можна перерозподілити за знайденим циклом.

Значення $x_{ij\ min}$ записується у незайняту клітину, позначену знаком "+", та додається до об’ємів перевезень, що знаходяться в клітинах, позначених знаком «+», й віднімається з об’ємів перевезень, розташованих у клітинах, позначених знаком «-».

Якщо значенню $x_{ij\ min}$ відповідає кілька базисних клітин, то при відніманні слід залишати у відповідних клітинах нульові перевезення у такій кількості, щоб у знов отриманому опорному плані зайнятих клітин було $m + n - 1$.

Для нового опорного плану складається нова система потенціалів і він також підлягає перевірці на оптимальність. Якщо отриманий план знову виявився неоптимальним, процес повторюють доти, доки всі незайняті клітини не задовольнятимуть умові (3.9).

3.2 Приклад розв’язання транспортної задачі методом потенціалів

3.2.1 Вихідні дані

Три метизних заводи (пункти постачання) постачають кріпильні деталі, які використовуються при складанні електронних блоків на чотирьох радіозаводах (пунктах споживання). Кількість готової продукції на складах метизних заводів, потреба у метизах на радіозаводах та вартість перевезення між ними наведені у табл. 3.1.

Знайти план перевезення, при якому забезпечується перевезення метизів з усіх метизних заводів та їх доставка усім радіозаводам при мінімальній сумарній вартості перевезення.

Таблиця 3.1 – Вихідні дані до задачі

Пункти постачання	Пункти споживання				Наявність метизів,кг
	B1	B2	B3	B4	
A1	2	9	6	7	30
A1	3	5	4	2	10
A3	3	5	4	9	25
Потреба у метизах, кг	45	15	60	10	

3.2.2 Перевірка умови балансу та складання математичної моделі задачі

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = 30 + 10 + 25 = 65$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_j = 45 + 15 + 60 + 10 = 130$$

Умова балансу (3.4) не виконується, транспортна задача є незбалансованою, і її треба привести до збалансованого вигляду.

Оскільки $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, вводимо фіктивний пункт постачання A_4 з кількістю вантажу:

$$a_4 = 130 - 65 = 65$$

Остаточно математична модель задачі має наступний вигляд.

Знайти такий опорний план перевезення вантажу:

$$x_{ij} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{bmatrix},$$

$x_{ij} \geq 0$,

при якому цільова функція:

$$f(x_{ij}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \to min$$

за умови:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_{i,}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

де:

$a_i = (30 \quad 10 \quad 25 \quad 65)$,

$b_j = (45 \quad 15 \quad 60 \quad 10)$,

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} 2 & 9 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.2.3 Початковий опорний план

Складемо початковий опорний план двома методами - методом мінімальної вартості та методом північно-західного кута – і порівняємо результати.

Оскільки $m = 4$; $n = 4$, кількість базисних елементів:

$m + n - 1 = 7$.

Початковий опорний план, складений ***методом мінімальної вартості***, наведений у табл. 3.2.

Таблиця 3.2 - Початковий опорний план, складений методом мінімальної вартості

	B_1	B_2	B_3	B_4	b_j
A_1	2 30	9	6	7	30
A_2	3 0	5	4	2 10	10
A_3	3 15	5	4 10	9	25
A_4	0	0 15	0 50	0	65
a_i	45	15	60	10	130

Опорний план:

$$x_{ij} = \begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \\ 15 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 15 & 50 & 0 \end{bmatrix}$$

Сумарна вартість перевезення:

$$f(x_{ij}) = 2 \cdot 30 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 15 + 4 \cdot 10 + 0 \cdot 50 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 15 = 165$$

Початковий опорний план, складений ***методом північно-західного кута,*** наведений у табл. 3.3.

Опорний план:

$$x_{ij} = \begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 15 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 55 & 10 \end{bmatrix} \qquad (3.10)$$

Сумарна вартість перевезення:

$$f(x_{ij}) = 2 \cdot 30 + 3 \cdot 10 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 15 + 4 \cdot 5 + 0 \cdot 55 + 0 \cdot 10 = 200$$

Таблиця 3.3 - Початковий опорний план, складений методом північно-західного кута

	B_1	B_2	B_3	B_4	b_j
A_1	2 30	9	6	7	30
A_2	3 10	5	4	2	10
A_3	3 5	5 15	4 5	9	25
A_4	0	0	0 55	0 10	65
a_i	45	15	60	10	130

Як бачимо, варіант опорного плану, складений методом мінімальної вартості, більш наближений до оптимального.

3.2.4 Перевірка опорного плану та пошук оптимального розв'язку

Заповнимо першу транспортну таблицю на основі опорного плану, складеного за методом північно-західного кута, та перевіримо опорний план на оптимальність.

Перша транспортна таблиця наведена у табл. 3.4.

Перевіримо опорний план (3.10) на оптимальність за допомогою методу потенціалів.

Визначимо потенціали за умовою (3.6) для базисних клітин.

Нехай $u_1 = 0$

$u_1 + v_1 = 2$; $v_1 = 2 - u_1 = 2 – 0 = 2$

$u_2 + v_1 = 3$; $u_2 = 3 - v_1 = 3 – 2 = 1$

$u_3 + v_1 = 3$; $u_3 = 3 - v_1 = 3 – 2 = 1$

$u_3 + v_2 = 5$; $v_2 = 5 – u_3 = 5 – 1 = 4$

$u_3 + v_3 = 4$; $v_3 = 4 – u_3 = 4 – 1 = 3$
$u_4 + v_3 = 0$; $u_4 = 0 - v_3 = 0 – 3 = -3$
$u_4 + v_4 = 0$; $v_4 = 0 – u_4 = 0 + 3 = 3$

Таблиця 3.4 – Перша транспортна таблиця

U_i ↓	V_j→	2	4	3	3	
		B_1	B_2	B_3	B_4	b_j
0	A_1	2 30	9 5	6 3	7 4	30
1	A_2	3 - 10	5 0	4 0	2 + -2	10
1	A_3	3 + 5	5 15	4 - 5	9 5	25
-3	A_4	0 1	0 -1	0 + 55	0 - 10	65
	a_i	45	15	60	10	130

Для вільних клітин визначимо оцінки s_{ij} за формулою (3.8) та перевіримо умову оптимальності (3.9).

$s_{12} = c_{12} – (u_1 + v_2) = 9 – (0 + 4) = 5$
$s_{13} = c_{13} – (u_1 + v_3) = 6 – (0 + 3) = 3$
$s_{14} = c_{14} – (u_1 + v_4) = 7 – (0 + 3) = 4$
$s_{22} = c_{22} – (u_2 + v_2) = 5 – (1 + 4) = 0$
$s_{23} = c_{23} – (u_2 + v_3) = 4 – (1 + 3) = 0$
$s_{24} = c_{24} – (u_2 + v_4) = 2 – (1 + 3) = -2$
$s_{34} = c_{34} – (u_3 + v_4) = 9 – (1 + 3) = 5$
$s_{41} = c_{41} – (u_4 + v_1) = 0 – (-3 + 2) = 1$
$s_{42} = c_{42} – (u_4 + v_2) = 0 – (-3 + 4) = -1$

Як видно з табл. 3.4, опорний план не оптимальний.

Введемо до базису клітину *2-4*, для якої $|s_{ij}|_{max} = 2$.

Відмітимо цю клітину знаком "+", складемо для неї цикл, який проходить через вершини базисних клітин, та проставимо у цих клітинах по черзі позначки "-" і "+". Цикл показаний у табл. 3.4.

Як видно з табл. 3.4, базисна клітина циклу з позначкою "-", для якої $x_{ij\ \min} = 5$, це клітина *3-3*. Видалимо її з базису та складемо новий опорний план. Новий опорний план наведений у табл. 3.5.

Таблиця 3.5 – Друга транспортна таблиця

U_i ↓	V_j→	2	4	1	1	
		B_1	B_2	B_3	B_4	b_j
0	A_1	2 30	9 5	6 5	7 6	30
1	A_2	3 - 5	5 0	4 2	2 + 5	10
1	A_3	3 + 10	5 - 15	4 2	9 7	25
-1	A_4	0 -1	0 + -3	0 60 0	0 - 5 0	65
	a_i	45	15	60	10	130

Опорний план для табл. 3.5:

$$x_{ij} = \begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 5 \\ 10 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 60 & 5 \end{bmatrix} \qquad (3.11)$$

Сумарна вартість перевезення:

$$f(x_{ij}) = 2 \cdot 30 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 10 + 5 \cdot 15 + 0 \cdot 60 + 0 \cdot 10 = 190$$

Перевіримо опорний план (3.11) на оптимальність за допомогою методу потенціалів.

Нехай $u_1 = 0$

$u_1 + v_1 = 2;\ v_1 = 2 - u_1 = 2 – 0 = 2$

$u_2 + v_1 = 3;\ u_2 = 3 - v_1 = 3 – 2 = 1$

$u_2 + v_4 = 2$; $v_4 = 2 – u_2 = 2 - 1 = 1$
$u_3 + v_1 = 3$; $u_3 = 3 - v_1 = 3 – 2 = 1$
$u_3 + v_2 = 5$; $v_2 = 5 – u_3 = 5 – 1 = 4$
$u_4 + v_4 = 0$; $u_4 = 0 – v_4 = 0 – 1 = -1$
$u_4 + v_3 = 0$; $v_3 = 0 – u_4 = 0 + 1 = 1$

Для вільних клітин визначимо оцінки s_{ij} за формулою (3.8) та перевіримо умову оптимальності (3.9).

$s_{12} = c_{12} – (u_1 + v_2) = 9 – (0 + 4) = 5$
$s_{13} = c_{13} – (u_1 + v_3) = 6 – (0 + 1) = 5$
$s_{14} = c_{14} – (u_1 + v_4) = 7 – (0 + 1) = 6$
$s_{22} = c_{22} – (u_2 + v_2) = 5 – (1 + 4) = 0$
$s_{23} = c_{23} – (u_2 + v_3) = 4 – (1 + 1) = 2$
$s_{33} = c_{33} – (u_3 + v_3) = 4 – (1 + 1) = 2$
$s_{34} = c_{34} – (u_3 + v_4) = 9 – (1 + 1) = 7$
$s_{41} = c_{41} – (u_4 + v_1) = 0 – (-1 + 2) = -1$
$s_{42} = c_{42} – (u_4 + v_2) = 0 – (-1 + 4) = -2$

Як видно з табл. 3.5, опорний план не оптимальний.

Введемо до базису клітину *4-2*, для якої $|s_{ij}|_{max} = 2$.

Відмітимо цю клітину знаком "+", складемо для неї цикл, який проходить через вершини базисних клітин, та проставимо у цих клітинах по черзі позначки "-" і "+". Цикл показаний у табл. 3.5.

Як видно з табл. 3.5, базисних клітин циклу з позначкою "-", для яких $x_{ij\ \min} = 5$, дві: клітина *2-1* та клітина *4-4*. Видалимо з базису клітину *2-1*, для якої c_{ij} менше, та складемо новий опорний план.

Новий опорний план наведений у табл. 3.6.

Опорний план для табл. 3.6:

$$x_{ij} = \begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \\ 15 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 60 & 0 \end{bmatrix} \qquad (3.12)$$

Сумарна вартість перевезення:

$$f\,(x_{ij}) = 2 \cdot 30 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 15 + 5 \cdot 10 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 60 + 0 \cdot 0 = 175$$

Перевіримо опорний план (3.12) на оптимальність за допомогою методу потенціалів.

Таблиця 3.6 – Третя транспортна таблиця

U_i ↓	V_j→	2	4	4	4	
		B_1	B_2	B_3	B_4	b_j
0	A_1	2 30	9 5	6 2	7 3	30
-2	A_2	3 3	5 3	4 2	2 10	10
1	A_3	3 15	5 - 10	4 + -1	9 4	25
-4	A_4	0 2	0 + 5	0 - 60	0 0	65
	a_i	45	15	60	10	130

Нехай $u_1 = 0$

$u_1 + v_1 = 2$; $v_1 = 2 - u_1 = 2 – 0 = 2$

$u_3 + v_1 = 3$; $u_3 = 3 - v_1 = 3 – 2 = 1$

$u_3 + v_2 = 5$; $v_2 = 5 – u_3 = 5 – 1 = 4$

$u_4 + v_2 = 0$; $u_4 = 0 – v_2 = 0 – 4 = -4$

$u_4 + v_3 = 0$; $v_3 = 0 – u_4 = 0 + 4 = 4$

$u_4 + v_4 = 0$; $v_4 = 0 – u_4 = 0 + 4 = 4$

$u_2 + v_4 = 2$; $u_2 = 2 - v_4 = 2 – 4 = -2$

Для вільних клітин визначимо оцінки s_{ij} за формулою (3.8) та перевіримо умову оптимальності (3.9).

$s_{12} = c_{12} – (u_1 + v_2) = 9 – (0 + 4) = 5$

$s_{13} = c_{13} – (u_1 + v_3) = 6 – (0 + 4) = 2$

$s_{14} = c_{14} – (u_1 + v_4) = 7 – (0 + 4) = 3$

$s_{21} = c_{21} – (u_2 + v_1) = 3 – (-2 + 2) = 3$

$s_{22} = c_{22} – (u_2 + v_2) = 5 – (-2 + 4) = 3$

$s_{23} = c_{23} – (u_2 + v_3) = 4 – (-2 + 4) = 2$

$s_{33} = c_{33} – (u_3 + v_3) = 4 – (1 + 4) = -1$

$s_{34} = c_{34} – (u_3 + v_4) = 9 – (1 + 4) = 4$

$s_{41} = c_{41} - (u_4 + v_1) = 0 - (-4 + 2) = 2$

Як видно з табл. 3.6, опорний план не оптимальний.

Введемо до базису клітину *3-3*, для якої $|s_{ij}|_{max} = 1$.

Відмітимо цю клітину знаком "+", складемо для неї цикл, який проходить через вершини базисних клітин, та проставимо у цих клітинах по черзі позначки "-" і "+". Цикл показаний у табл. 3.6.

Як видно з табл. 3.6, базисна клітина циклу з позначкою "-", - *3-2*. Видалимо її з базису та складемо новий опорний план.

Новий опорний план наведений у табл. 3.7.

Таблиця 3.7 – Четверта транспортна таблиця

U_i ↓	V_j→	2	3	3	3	
		B_1	B_2	B_3	B_4	b_j
0	A_1	2 30	9 6	6 3	7 4	30
-1	A_2	3 2	5 3	4 2	2 10	10
1	A_3	3 15	5 1	4 10	9 5	25
-3	A_4	0 1	0 15	0 50	0 0	65
	a_i	45	15	60	10	130

Опорний план для табл. 6.16:

$$x_{ij} = \begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \\ 15 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 15 & 50 & 0 \end{bmatrix} \qquad (3.13)$$

Сумарна вартість перевезення:

$$f(x_{ij}) = 2 \cdot 30 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 15 + 4 \cdot 10 + 0 \cdot 15 + 0 \cdot 50 + 0 \cdot 0 = 165$$

Перевіримо опорний план (3.13) на оптимальність за допомогою методу потенціалів.

Нехай $u_1 = 0$

$u_1 + v_1 = 2$; $v_1 = 2 - u_1 = 2 – 0 = 2$

$u_3 + v_1 = 3$; $u_3 = 3 - v_1 = 3 – 2 = 1$

$u_3 + v_3 = 4$; $v_3 = 4 – u_3 = 4 – 1 = 3$

$u_4 + v_3 = 0$; $u_4 = 0 – v_3 = 0 – 3 = -3$

$u_4 + v_2 = 0$; $v_2 = 0 – u_4 = 0 + 3 = 3$

$u_4 + v_4 = 0$; $v_4 = 0 – u_4 = 0 + 3 = 3$

$u_2 + v_4 = 2$; $u_2 = 2 - v_4 = 2 – 3 = -1$

Для вільних клітин визначимо оцінки s_{ij} за формулою (3.8) та перевіримо умову оптимальності (3.9).

$s_{12} = c_{12} – (u_1 + v_2) = 9 – (0 + 3) = 6$

$s_{13} = c_{13} – (u_1 + v_3) = 6 – (0 + 3) = 3$

$s_{14} = c_{14} – (u_1 + v_4) = 7 – (0 + 3) = 4$

$s_{21} = c_{21} – (u_2 + v_1) = 3 – (-1 + 2) = 2$

$s_{22} = c_{22} – (u_2 + v_2) = 5 – (-1 + 3) = 3$

$s_{23} = c_{23} – (u_2 + v_3) = 4 – (-1 + 3) = 2$

$s_{32} = c_{32} – (u_3 + v_2) = 5 – (1 + 3) = 1$

$s_{34} = c_{34} – (u_3 + v_4) = 9 – (1 + 3) = 5$

$s_{41} = c_{41} – (u_4 + v_1) = 0 – (-3 + 2) = 1$

Як видно з табл. 3.7, умова оптимальності (3.9) виконується для усіх вільних клітин, тому опорний план (3.13) є оптимальним.

3.2.5 Результати розв’язання задачі

В результаті оптимізації початкового опорного плану за методом потенціалів отримали оптимальний розв’язок задачі:

$$x_{ij} = \begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \\ 15 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 15 & 50 & 0 \end{bmatrix}$$

Таким чином, слід перевозити:

30 кг метизів з метизного заводу A_1 до радіозаводу B_1;

10 кг метизів з метизного заводу A_2 до радіозаводу B_4;

15 кг метизів з метизного заводу A_3 до радіозаводу B_1;

10 кг метизів з метизного заводу A_3 до радіозаводу B_3.

Потреби у метизах для радіозаводів B_1 та B_4 будуть задовільнені цілком.

На радіозаводі В$_3$ буде нестача метизів у кількості 50 кг, а до радіозаводу В$_2$ метизи взагалі доставлені не будуть; їм слід почекати або пошукати інших постачальників.

3.3 Розв’язання транспортної задачі за допомогою надбудови Пошук рішення

Знайдемо розв’язок транспортної задачі, наведеної вище, за допомогою надбудови **Пошук рішення** MS Excel.

На новому листі MS Excel введемо дані згідно рис. 3.1.

При цьому у комірки A1:D4 введені дані для збалансованої задачі, у комірки A7:D10 – початковий опорний план, складений методом північно-західного кута.

	A	B	C	D	E
1	2	9	6	7	30
2	3	5	4	2	10
3	3	5	4	9	25
4	0	0	0	0	65
5	45	15	60	10	
6					
7	30				30
8	10				10
9	5	15	5		25
10			55	10	65
11	45	15	60	10	
12					
13	F=	200			

Рисунок 3.1 – Вихідні дані для транспортної задачі

Червоним шрифтом виділені значення вхідних параметрів x_i, які будуть змінюватися у процесі пошуку розв’язку (їх початкові значення дорівнюють нулю), ***синім*** шрифтом – коефіцієнти цільової функції та системи обмежень, а ***зеленим*** – результати обчислень рівнянь системи обмежень та цільової функції.

Формули для обчислень показані на рис. 3.2.

	A	B	C	D	E
1	2	9	6	7	30
2	3	5	4	2	10
3	3	5	4	9	25
4	0	0	0	0	65
5	45	15	60	10	
6					
7	30				=СУММ(A7:D7)
8	10				=СУММ(A8:D8)
9	5	15	5		=СУММ(A9:D9)
10			55	10	=СУММ(A10:D10)
11	=СУММ(A7:A10)	=СУММ(B7:B10)	=СУММ(C7:C10)	=СУММ(D7:D10)	
12					
13	F=	=СУММПРОИЗВ(A1:D4;A7:D10)			

Рисунок 3.2 – Формули для обчислень для транспортної задачі

Встановимо курсор на комірку В13 з формулою для обчислення значення цільової функції та викликаємо надбудову **Пошук рішення**.

У діалоговому вікні, що відкриється, зробимо налаштування відповідно рис. 3.3.

Результати рішення показані на рис. 3.4.

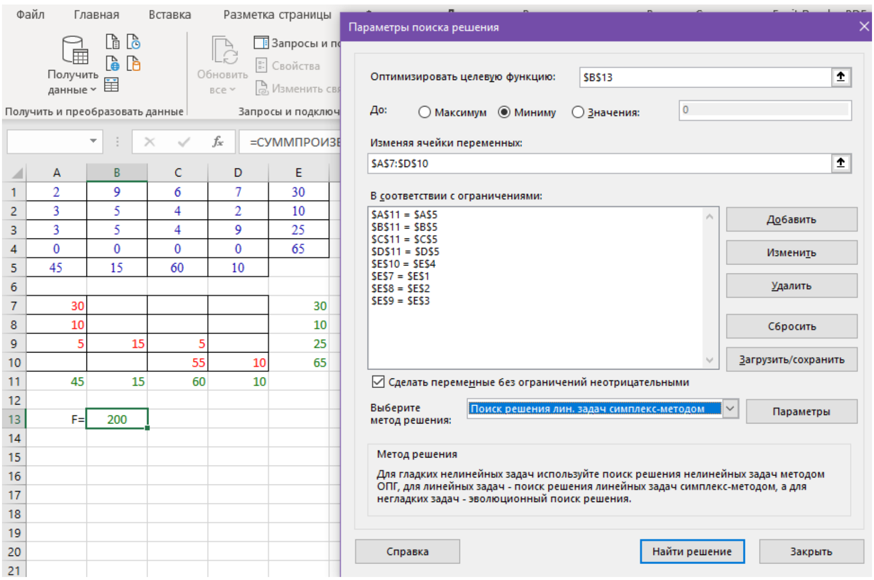


Рисунок 3.3 – Налаштування діалогового вікна **Пошук рішення** для транспортної задачі

	A	B	C	D	E	F
1	2	9	6	7	30	
2	3	5	4	2	10	
3	3	5	4	9	25	
4	0	0	0	0	65	
5	45	15	60	10		
6						
7	30	0	0	0	30	
8	0	0	0	10	10	
9	15	0	10	0	25	
10	0	15	50	0	65	
11	45	15	60	10		
12						
13	F=	165				
14						

Рисунок 3.4 - Результати розв’язку транспортної задачі

Як бачимо, результат співпадає з отриманим раніше.

3.4 Завдання до роботи

3.4.1 Розв’язати транспортну задачу.

На трьох складах крупного підприємства (пунктах постачання) знаходяться деталі для складання електронних пристроїв. Складання пристроїв відбувається у чотирьох цехах (пунктах споживання). Кількість деталей на складах, потреба у них у складальних цехах та вартість доставки наведені у табл. 3.8.

Знайти план доставки деталей зі складів до цехів, при якому забезпечується мінімальна сумарна вартість доставки.

При виконанні задачі початковий опорний план скласти двома методами:

– методом мінімальної вартості;

– методом північно-західного кута.

Для розв’язання задачі у якості початкового опорного плану взяти складений ***методом північно-західного кута***.

Оптимальний опорний план порівняти з початковим опорним планом, складеним методом мінімальної вартості. Зробити висновки.

Таблиця 3.8 – Вихідні дані до задачі

Варіант 1					
Склади	Цехи				Наявність деталей
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	4	7	5	420
A_2	3	11	6	8	380
A_3	2	7	3	4	400
Потреба у деталях	150	350	420	200	
Варіант 2					
Склади	Цехи				Наявність деталей
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	1	8	6	300
A_2	4	2	3	5	120
A_3	5	5	1	2	140
Потреба у деталях	100	50	150	210	
Варіант 3					
Склади	Цехи				Наявність деталей
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	9	5	4	3	120
A_2	3	2	6	8	180
A_3	2	5	7	1	250
Потреба у деталях	240	100	180	170	
Варіант 4					
Склади	Цехи				Наявність деталей
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	10	6	8	4	150
A_2	3	1	3	6	300
A_3	5	4	9	1	120
Потреба у деталях	85	95	150	165	

Продовження табл. 3.8

Варіант 5					
Склади	Цехи				Наявність деталей
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	4	7	2	200
A_2	3	5	9	1	120
A_3	8	6	11	2	180
Потреба у деталях	250	150	140	65	
Варіант 6					
Склади	Цехи				Наявність деталей
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7	6	1	8	115
A_2	3	5	4	6	155
A_3	1	2	3	4	125
Потреба у деталях	135	100	95	75	
Варіант 7					
Склади	Цехи				Наявність деталей
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	3	6	4	100
A_2	3	2	8	3	120
A_3	8	7	4	6	200
Потреба у деталях	130	150	100	95	
Варіант 8					
Склади	Цехи				Наявність деталей
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	11	12	12	10	55
A_2	15	4	9	12	75
A_3	10	8	9	6	105
Потреба у деталях	75	85	100	120	

Продовження табл. 3.8

Варіант 9					
Склади	Цехи				Наявність деталей
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	8	3	9	75
A_2	4	7	9	3	55
A_3	7	3	10	5	60
Потреба у деталях	15	35	65	80	
Варіант 10					
Склади	Цехи				Наявність деталей
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1	6	2	1	95
A_2	3	1	5	4	120
A_3	7	2	1	3	200
Потреба у деталях	125	185	90	110	
Варіант 11					
Склади	Цехи				Наявність деталей
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	8	9	5	6	300
A_2	4	3	8	6	120
A_3	7	8	6	5	250
Потреба у деталях	100	150	90	45	
Варіант 12					
Склади	Цехи				Наявність деталей
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	4	2	5	100
A_2	6	3	7	2	200
A_3	8	3	9	1	300
Потреба у деталях	50	180	175	200	

Продовження табл. 3.8

Варіант 13					
Склади	Цехи				Наявність деталей
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	1	7	5	220
A_2	4	6	8	2	115
A_3	2	3	4	10	125
Потреба у деталях	180	75	140	100	
Варіант 14					
Склади	Цехи				Наявність деталей
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	10	4	6	7	25
A_2	7	3	2	8	250
A_3	5	6	7	6	120
Потреба у деталях	85	55	110	30	
Варіант 15					
Склади	Цехи				Наявність деталей
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	8	2	5	135
A_2	2	6	7	8	155
A_3	5	3	8	2	205
Потреба у деталях	80	70	140	100	
Варіант 16					
Склади	Цехи				Наявність деталей
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	8	6	7	4	115
A_2	5	3	2	9	200
A_3	7	6	7	3	180
Потреба у деталях	65	40	120	85	

Продовження табл. 3.8

Варіант 17					
Склади	Цехи				Наявність деталей
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	10	11	9	6	35
A_2	2	4	5	12	15
A_3	8	3	7	10	50
Потреба у деталях	40	25	15	85	
Варіант 18					
Склади	Цехи				Наявність деталей
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	6	7	4	80
A_2	7	3	6	5	60
A_3	8	5	8	3	45
Потреба у деталях	20	15	50	35	
Варіант 19					
Склади	Цехи				Наявність деталей
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	3	6	6	125
A_2	4	6	8	7	65
A_3	8	7	9	3	170
Потреба у деталях	65	105	35	40	
Варіант 20					
Склади	Цехи				Наявність деталей
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	3	7	4	155
A_2	5	2	5	8	85
A_3	3	5	7	6	115
Потреба у деталях	120	80	65	75	

Продовження табл. 3.8

Варіант 21					
Склади	Цехи				Наявність деталей
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	6	7	5	3	210
A_2	6	8	3	6	120
A_3	4	7	2	9	140
Потреба у деталях	75	85	100	75	
Варіант 22					
Склади	Цехи				Наявність деталей
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	10	11	7	100
A_2	7	12	5	8	130
A_3	6	9	4	8	80
Потреба у деталях	50	75	85	40	
Варіант 23					
Склади	Цехи				Наявність деталей
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	8	5	9	6	220
A_2	2	6	3	7	100
A_3	4	6	7	5	80
Потреба у деталях	100	50	60	80	
Варіант 24					
Склади	Цехи				Наявність деталей
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	4	7	2	150
A_2	6	3	8	5	65
A_3	7	2	6	3	185
Потреба у деталях	130	140	100	50	

Продовження табл. 3.8

Варіант 25					
Склади	Цехи				Наявність деталей
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	1	3	2	200
A_2	4	5	4	4	210
A_3	8	3	7	6	150
Потреба у деталях	180	220	150	80	

3.4.2 Дати економічне обґрунтування отриманим результатам.

3.4.3 Розв'язати задачу за допомогою надбудови **Пошук рішення** MS Excel. Порівняти отримані результати.

3.5 Зміст звіту

3.5.1 Тема та мета роботи.

3.5.2 Короткі теоретичні відомості.

3.5.3 Розв'язання транспортної задачі згідно з варіантом.

3.5.4 Економічне обґрунтування отриманих результатів.

3.5.5 Розв'язання задачі ЛП допомогою надбудови **Пошук рішення** MS Excel.

3.5.6 Висновки.

4 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 4. ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАНЬ

Мета роботи: ознайомитися з методами обробки результатів прямих та опосередкованих вимірювань з метою визначення середнього значення та повної похибки вимірюваної величини.

4.1 Теоретичні відомості

4.1.1 Обробка результатів прямих вимірювань

Прямим називається вимірювання, при якому значення вимірювальної величини визначається безпосередньо за допомогою засобів вимірювання.

Нижче наведена послідовність обробки результатів прямих вимірювань.

4.1.1.1 Усунути з вибірки очевидні промахи (описки) та відомі систематичні похибки.

4.1.1.2 Упорядкувати вибірку у порядку зростання її елементів та розрахувати її розмах за формулою:

$$R = x_{max} - x_{min} \tag{4.1}$$

4.1.1.3 Провести перевірку вибірки на наявність грубих похибок.

Для виявлення результатів, що містять грубі похибки, існують різні статистичні методи (критерії), в основі яких лежить припущення, що результати спостережень належать генеральної сукупності, елементи якої розподілені за нормальним законом.

Розглянемо ***критерій u_i***, який дозволяє визначити, містить крайній елемент вибірки грубу похибку, або ні, ***за величиною відносної відстані між крайнім та найближчим до нього сусідним елементом*** упорядкованої вибірки ($x_1 = x_{min} \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n = x_{max}$).

Критерій ґрунтується на аналізі відношення:

$$u_i = \frac{|x_{i+1} - x_i|}{R}, \tag{4.2}$$

Якщо $u_i > u_{P,n}$ при $i = 1$ або $i = n - 1$, де $u_{P,n}$ – коефіцієнт, який залежить від довірчої ймовірності P та числа спостережень n у вибірці (див. табл. 4.1), то x_{min} або x_{max} є елементом вибірки, який містить грубу похибку і повинен бути видалений з таблиці результатів спостережень.

Таблиця 4.1 - Коефіцієнти $u_{P,n}$ для довірчої ймовірності P = 95%

n	3	4	5	7	10	15	20	30	100
$u_{P,n}$	0,94	0,76	0,64	0,51	0,41	0,34	0,30	0,26	0,20

Якщо $x_n = x_{max}$ або $x_1 = x_{min}$ не містить грубої похибки, то перевірку на наявність у вибірці елементів, що містять грубу похибку, припиняють. В іншому випадку перевірку повторюють, зіставляючи елемент x_{n-1} з x_{n-2} і, якщо потрібно, x_2 з x_3, і т.ін.

4.1.1.4 Обчислити вибіркове середнє $\bar{x}$ за формулою:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}, \tag{4.3}$$

4.1.1.5 Обчислити вибіркове середнє квадратичне відхилення середнього за формулою:

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i-1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n \cdot (n-1)}}. \tag{4.4}$$

4.1.1.6 Задатися довірчою ймовірністю P у діапазоні від 0,9 до 0,99. Зазвичай у інженерних розрахунках прийнято вибирати P = 0,95.

4.1.1.7 Визначити випадкову похибку за формулою:

$$\Delta x = t_{P,n} \cdot S_{\bar{x}}, \tag{4.5}$$

де $t_{P,n}$ – коефіцієнт Стьюдента.

Значення коефіцієнта Стьюдента $t_{P,n}$ в залежності від кількості спостережень n при заданій довірчій ймовірності наведені у додатку А. При цьому слід враховувати, що ці значення надані для рівня значущості α, який являє собою ймовірність відкинути вірну гіпотезу та дорівнює:

$$\alpha = 1 - P. \tag{4.6}$$

P – довірча ймовірність, або рівень довіри, являє собою ймовірність прийняти вірну гіпотезу. Так, для довірчої ймовірності P = 95% = 0,95 α = 0,05.

4.1.1.8 Визначити верхню межу похибки приладу θ_x.

Вона визначається в залежності від класу точності засобу вимірювання.

Якщо межа похибки виражена у вигляді наведеної похибки (тобто у відсотках від верхньої межі вимірювань, діапазону вимірювань або довжини шкали приладу), а також у вигляді відносної похибки (тобто у відсотках від дійсного значення величини), то клас точності позначають числом, що відповідає значенню похибки. Наприклад, класу точності 0,1 відповідає похибка 0,1%.

Точність багатьох показуючих приладів (амперметри, вольтметри, манометри та ін.) формується за наведеною похибкою, вираженою у відсотках від верхньої межі вимірів.

4.1.1.9 Розрахувати повну похибку результату виміру за формулою:

$$\Delta\bar{x} = \sqrt{\Delta x^2 + \theta_x^2}. \qquad (4.7)$$

4.1.1.10 Обчислити відносну похибку $\delta_x = \frac{\Delta\bar{x}}{\bar{x}} \cdot 100\%$.

4.1.1.11 Округлити числові значення повної похибки та результату вимірювання.

При округленні використовують наступні правила.

Правило 1. Попередньо результат та похибку записують у нормальному вигляді: загальний показник ступеня виносять за дужку або замінюють відповідною приставкою: мікро, мілі, кіло, мега та ін.

Наприклад:

x = 0,18 м ± 0,01 м = (18 ± 1) $\cdot$ 10^{-2} м = 18 см ± 1 см.

Заборонено записувати у вигляді:

x = 18$\cdot10^{-2}$ м ± 10$\cdot10^{-3}$ м, або x = 0,18 м ± 1 $\cdot$ 10^{-2} м.

Показник 10^1 не виноситься.

Правило 2. Якщо результат у подальшому буде використаний в обчисленнях, то, щоб уникнути накопичення похибок з допомогою округлень, похибку округлюють до двох значущих цифр за будь-якої першої.

При проміжних обчисленнях величин $S_{\bar{x}}^2$ (з яких згодом витягуватиметься квадратний корінь для знаходження $S_{\bar{x}}$) слід зберігати не менш 4 значущих цифр.

Правило 3. Якщо результат вимірювання є остаточним і не буде використаний для обчислення інших величин, то довірчу похибку Δ_x округляють до першої цифри, якщо вона дорівнює або більше 2, або до двох значущих цифр, якщо перша дорівнює 0 та 1.

Правило 4. Середнє значення $\bar{x}$ округлюють до розряду, яким закінчується округлена похибка Δ_x (див. табл. 4.2).

Таблиця 4.2 – Результати округління середнього значення

Неокруглений результат	**Округлений результат**
2257,81±62	(22,6±0,6) · 10^2
(8,254±0,0345) · 10^{-3}	(8,25±0,03) · 10^{-3}
94,1612±0,0167	94,161±0,017
5,39±0,794	5,39±0,79
5,39±0,79	5,4±0,8

Якщо похибка округлюється до двох значущих цифр, але друга з них дорівнює нулю, то цей нуль зберігається, а у відповідному йому розряді результату записується значуща цифра, наприклад:

x = 3,48 ± 0,10.

4.1.1.12 Записати остаточний результат у вигляді:

$$x = \bar{x}' \pm \Delta\bar{x}, P = P_0, \delta_x = \frac{\Delta\bar{x}}{\bar{x}} \cdot 100\% \qquad (4.8)$$

4.1.2 Обробка результатів опосередкованих вимірювань

Нехай деяка величина f залежить від величин $x, y, z, ...$, визначених прямими вимірюваннями, причому вид цієї залежності $f = f(x, y, z, ...)$ відомий. Враховуючи, що величини $x, y, z, ...$ вимірюються з певними похибками, величина f також має похибку, яку необхідно визначити.

Існує два методи визначення похибки опосередкованої величини f: метод ***перенесення похибок***, який ще називається методом ***середніх***, і ***вибірковий*** метод.

4.1.2.1 Обробка результатів опосередкованих вимірювань методом перенесення похибок

Даний метод використовується у випадку, коли кожна з величин *x*, *y*, *z*, що являють собою аргументи функції, вимірюється незалежно від інших у своїй серії дослідів, і ці величини утворюють вибірки, близькі одна до одної.

Кількість дослідів у серіях не обов'язково повинна бути однаковою, необхідна лише незмінність умов для прямо вимірюваної величини у своїй серії, незмінність умов для f у всіх серіях та взаємна незалежність усіх дослідів.

4.1.2.1.1 За формулами прямих вимірювань визначити величини $\bar{x}, \Delta\bar{x}$; $\bar{y}, \Delta\bar{y}$; $\bar{z}, \Delta\bar{z}$ з урахуванням приладових похибок.

4.1.2.1.2 Розрахувати значення функції $\bar{f} = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

4.1.2.1.3. Обчислити часткові похідні від функції в точці $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$:

$$a_x = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}, a_y = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}, a_z = \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}} \tag{4.9}$$

Якщо функція f легко логарифмується, обчислити часткові похідні в точці $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ від її логарифма:

$$b_x = \left.\frac{\partial(lnf)}{\partial x}\right|_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}, b_y = \left.\frac{\partial(lnf)}{\partial y}\right|_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}, b_z = \left.\frac{\partial(lnf)}{\partial z}\right|_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}} \tag{4.10}$$

4.1.2.1.4 За формулою перенесення похибок обчислити повну похибку функції:

$$\Delta f = \sqrt{(a_x \Delta\bar{x})^2 + \left(a_y \Delta\bar{y}\right)^2 + (a_z \Delta\bar{z})^2}. \tag{4.11}$$

Якщо функція f легко логарифмується, обчислити повну похибку за еквівалентною формулою:

$$\Delta\bar{f} = \bar{f}\sqrt{(b_x \Delta\bar{x})^2 + \left(b_y \Delta\bar{y}\right)^2 + (b_z \Delta\bar{z})^2}.. \tag{4.12}$$

4.1.2.1.5 Записати результат вимірювання та округлити його.

4.1.2.2 Алгоритм обробки результатів опосередкованих вимірювань вибірковим методом

Даний метод застосовується у тому випадку, якщо спільно виміряні значення аргументів функції x_i, y_i, z_i не утворюють вибірок, але можна створити вибірку значень функції $\{f_i\}$.

4.1.2.2.1 За кожним набором спільно виміряних значень аргументів розрахувати значення функції $f_i = f(x_i, y_i, z_i)$.

4.1.2.2.2 Обробити отриману вибірку $\{f_i\}$ згідно з алгоритмом обробки даних прямих вимірювань, знаходячи середнє значення $\bar{f}$ та випадкову похибку функції Δf.

4.1.2.2.3 Вивести вирази для часткових похідних від функції:

$$a_x(x,y,z) = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}; a_y(x,y,z) = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}; \quad a_z(x,y,z) = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}. \qquad (4.13)$$

Якщо функція легко логарифмується, вивести вирази від її логарифму:

$$b_x(x,y,z) = \frac{\partial\big(lnf(x,y,z)\big)}{\partial x}; b_y(x,y,z) = \frac{\partial\big(lnf(x,y,z)\big)}{\partial x}; \quad b_z(x,y,z) = \frac{\partial\big(lnf(x,y,z)\big)}{\partial x}. \qquad (4.14)$$

4.1.2.2.4 Якщо передбачається, що приладові похибки вимірюваних величин можуть бути різними у різних дослідах¸то за кожним набором спільно виміряних значень аргументів та їх приладових похибок розрахувати приладову похибку функції за формулою:

$$\theta_{fi} = |a_x(x_i,y_i,z_i)|\theta_{xi} + \left|a_y(x_i,y_i,z_i)\right|\theta_{yi} + |a_z(x_i,y_i,z_i)|\theta_{zi}. \qquad (4.15)$$

Якщо функція легко логарифмується, скористатися формулою:

$$\theta_{fi} = |b_x(x_i,y_i,z_i)|\theta_{xi} + \left|b_y(x_i,y_i,z_i)\right|\theta_{yi} + |b_z(x_i,y_i,z_i)|\theta_{zi} \qquad (4.16)$$

де f_i – значення функції, яке відповідає даному набору аргументів (його не слід плутати з рядком значень $f\uparrow_i$, які впорядковані за зростанням).

4.1.2.2.5 Якщо приладові похибки аргументів однакові у всіх дослідах, або при знаходженні максимальних за всією серією дослідів значень приладових похибок $\theta_x = max\ \theta_{xi}$, $\theta_y = max\ \theta_{yi}$, $\theta_z = max\ \theta_{zi}$, то для визначення приладової похибки величини f можна використовувати вирази (4.17), (4.18):

$$\theta_f = \bar{a}_x\theta_x + \bar{a}_y\theta_y + \bar{a}_z\theta_z, \qquad (4.17)$$

де $\theta_x = max\ \theta_{xi}$, $\theta_y = max\ \theta_{yi}$, $\theta_z = max\ \theta_{zi}$ – найбільші значення верхніх меж приладових похибок аргументів у серії дослідів;

$$\bar{a}_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|a_{xi}|\,;\ \bar{a}_y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|a_{yi}|\,;\ \bar{a}_z = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|a_{zi}|\,; \qquad (4.18)$$

4.1.2.2.6 Обчислити середню приладову похибку функції:

$$\theta_f = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|\theta_{fi}| \qquad (4.19)$$

4.1.2.2.7 Визначити повну похибку функції:

$$\Delta\bar{f} = \theta_f + \Delta f$$

4.1.2.2.8 Записати результат вимірювань та округлити його.

4.2 Приклади обробки результатів вимірювань

4.2.1 Приклад обробки результатів прямих вимірювань

У табл. 4.3 наведені результати прямих вимірювань струму через *p-n* перехід напівпровідникового діода $I_{пр}$ (мА) при значенні напруги $U_{пр}$ = 0,3 В.

Таблиця 4.3 - Результати прямих вимірювань випадкової величини $I_{пр}$

$I_{пр\ i}$	12,8	12,7	13,1	13,0	12,9

Кількість вимірів n = 5.

Вимірювання проводилися міліамперметром Е535 класу точності 0,5 з кінцевим значенням діапазону вимірювань 50 мА.

Визначити остаточний результат прямих вимірювань для довірчої ймовірності P = 0,95.

Розв'язання

Для проведення розрахунків складемо табл. 4.4, з якої 4.4 визначимо:

$\bar{I}_{пр} = 12{,}9$;

R = 12,9 – 12,3 = 0,6

Для n = 5 з табл. 4.1 визначимо $u_{P,n}$ = 0,64.

$u_{P,n} \cdot R$ = 0,64·0,6 = 0,384

Умова $u_i < u_{P,n} \cdot R$ виконується для усіх i.

Таблиця 4.4 – Результати обробки прямих вимірювань

i	1	2	3	4	5	$\sum$	Сер
$I_{\text{пр}\ i}$, *мА*	12,5	12,6	12,3	12,7	12,9	63,0	12,6
$I_{\text{пр}}\uparrow_i$	12,3	12,5	12,6	12,7	12,9		
$u_i = I_{\text{пр}_{i+1}} - I_{\text{пр}_i}$	0,2	0,1	0,1	0,2			
$\Delta I_{\text{пр}_i} = I_{\text{пр}_i} - \bar{I}_{\text{пр}}$	-0,3	-0,1	0	0,1	0,3	0	
$(\Delta I_{\text{пр}_i})^2$	0,09	0,01	0	0,01	0,09	0,20	

З додатку А для рівня значущості $\alpha = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$ та обсягу виборки n = 5 визначимо коефіцієнт Стьюдента $t_{P,n} = 2{,}01$.

$$S_{\bar{I}_{\text{пр}}} = \sqrt{\frac{0{,}2000}{5 \cdot 4}} = 0{,}1000$$

$$\Delta I_{\text{пр}} = 2{,}01 \cdot 0{,}1000 = 0{,}2010$$

Визначимо приладову похибку.

$\theta_I = 0{,}005 \cdot 50 = 0{,}2500$

$$\Delta \bar{I}_{\text{пр}} = \sqrt{0{,}2010^2 + 0{,}2500^2} = 0{,}3211;$$

$$I_{\text{пр}} = 12{,}6 \pm 0{,}3211$$

$$\delta_{I_{\text{пр}}} = \frac{0{,}3211}{12{,}6} \cdot 100\% = 2{,}5\%$$

Остаточний результат з урахуванням округлення:

$$I_{\text{пр}} = 12{,}6\ \text{мА} \pm 0{,}3\ \text{мА};\ P = 95\%;\ \delta_x = 2{,}5\%$$

4.2.2 Приклад обробки результатів опосередкованих вимірювань методом перенесення похибок

Був проведений експеримент з визначення прискорення вільного падіння g (м/с^2) за результатами 5 незалежних вимірювань періоду коливання математичного маятника T (с) та його довжини l (м). Результати прямих вимірювань вказаних величин наведені у табл. 4.5.

Вимірювання періоду коливань проводилося секундоміром другого класу точності з основною похибкою θ_T = 0,06 с.

Вимірювання довжини маятника проводилося за допомогою механічного лічильника довжини ИДРМ-Э-У з основною похибкою θ_l = 0,01 м.

Визначити остаточний результат опосередкованих вимірювань прискорення вільного падіння g (м/с^2) для довірчої ймовірності P=0,95. Опосередковану похибку вимірювань визначити методом перенесення похибок.

Таблиця 4.5 – Результати незалежних вимірювань періоду коливання математичного маятника T та його довжини l

T_i, с	1,766	1,788	1,779	1,787	1,770
l_i, м	0,780	0,812	0,790	0,803	0,785

Розв'язання

Формула, що пов'язує вказані величини:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \tag{4.20}$$

Виражаючи g через період коливань T та довжину l, отримуємо формулу для обчислення прискорення вільного падіння g:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} \tag{4.21}$$

Спочатку розрахуємо остаточні результати прямих вимірювань періоду коливань та довжини маятника.

Для проведення розрахунків періоду коливань складемо табл. 4.6, для проведення розрахунків довжини маятника - табл. 4.7.

Таблиця 4.6 – Результати обробки вимірювань періоду коливань

i	1	2	3	4	5	Середнє
$T\uparrow_i$	1,766	1,770	1,779	1,787	1,788	1,778
$T_{i+1} - T_i$	0,004	0,009	0,008	0,001		Σ
$\Delta T_i = T_i - \bar{T}$	-0,012	-0,008	0,001	0,009	0,010	0
$(\Delta T_i)^2$	$14,4\cdot10^{-5}$	$6,4\cdot10^{-5}$	$10\cdot10^{-5}$	$8,1\cdot10^{-5}$	$0,1\cdot10^{-5}$	$39\cdot10^{-5}$

З табл. 4.6 визначимо:

$\bar{T} = 1{,}778$; R = 1,788 – 1,766 = 0,022

Для n = 5 з табл. 6.1 визначимо $u_{P,n} = 0{,}64$.

$u_{P,n} \cdot R$ = 0,64·0,022 = 0,014

Умова $u_i < u_{P,n} \cdot R$ виконується для усіх i.

З додатку А для рівня значущості $\alpha = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$ та обсягу виборки n = 5 визначимо коефіцієнт Стьюдента $t_{P,n}$ = 2,01.

$$S_{\bar{T}} = \sqrt{\frac{39 \cdot 10^{-5}}{5 \cdot 4}} = 0{,}0044$$

$\Delta T = 2{,}01 \cdot 0{,}0044 = 0{,}0089$

Приладова похибка: θ_T = 0,06 с

$\Delta\bar{T} = \sqrt{0{,}0089^2 + 0{,}06^2} = 0{,}0607;$

Остаточний результат з урахуванням округлення:

$T = 1{,}78$ с $\pm$ 0,06 с

Таблиця 4.7 – Результати обробки вимірювань довжини маятника

i	1	2	3	4	5	Середнє
$l\uparrow_i$	0,780	0,785	0,790	0,803	0,812	0,794
$l_{i+1} - l_i$	0,005	0,005	0,013	0,009		Σ
$\Delta l_i = l_i - \bar{l}$	-0,014	-0,009	-0,004	0,009	0,018	0
$(\Delta l_i)^2$	$19{,}6\cdot10^{-5}$	$8{,}1\cdot10^{-5}$	$1{,}6\cdot10^{-5}$	$8{,}1\cdot10^{-5}$	$32{,}4\cdot10^{-5}$	$69{,}8\cdot10^{-5}$

З табл. 4.7 визначимо:

$\bar{l} = 0{,}794;$

R = 0,812 – 0,780 = 0,032

Для n = 5 з табл. 6.1 визначимо $u_{P,n} = 0{,}64$.

$u_{P,n} \cdot R$ = 0,64·0,032 = 0,021

Умова $u_i < u_{P,n} \cdot R$ виконується для усіх i.

З додатку А для рівня значущості $\alpha = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$ та обсягу виборки n = 5 визначимо коефіцієнт Стьюдента $t_{P,n}$ = 2,01.

$$S_{\bar{l}} = \sqrt{\frac{69{,}8 \cdot 10^{-5}}{5 \cdot 4}} = 0{,}0059$$

$\Delta l = 2{,}01 \cdot 0{,}0059 = 0{,}0119$

Приладова похибка: $\theta_l = 0{,}01$ м

$\Delta\bar{l} = \sqrt{0{,}0119^2 + 0{,}0100^2} = 0{,}0155;$

Остаточний результат з урахуванням округлення:

$l = 0{,}79$ м $\pm\ 0{,}02$ м

За результатами розрахунків результатів прямих вимірювань визначимо:

$$\bar{g} = g(\bar{l}, \bar{T}) = \frac{4\pi^2\bar{l}}{\bar{T}^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 0{,}79}{1{,}79^2} = 9{,}8434$$

Для визначення похибки використовуємо метод повного диференціалу:

$$a_l = \frac{\partial g}{\partial l} = \frac{4\pi^2}{\bar{T}^2};\ a_T = \frac{\partial g}{\partial T} = \frac{-8\pi^2\bar{l}}{\bar{T}^3}$$

$$\Delta g = \sqrt{\left(a_l\Delta\bar{l}\right)^2 + \ (a_T\Delta\bar{T})^2} = \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{\bar{T}^2}\Delta\bar{l}\right)^2 + \left(\frac{-8\pi^2\bar{l}}{\bar{T}^3}\ \Delta\bar{T}\right)^2} =$$

$$= \frac{4\pi^2\bar{l}}{\bar{T}^2}\sqrt{\left(\frac{\Delta\bar{l}}{\bar{l}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\bar{T}}{\bar{T}}\right)^2} =$$

$$= \frac{4\pi^2 \cdot 0{,}79}{1{,}78^2}\sqrt{\left(\frac{0{,}02}{0{,}79}\right)^2 + \left(\frac{0{,}06}{1{,}78}\right)^2} = 0{,}4150$$

Остаточний результат з урахуванням округлення:

$$g = 9{,}8\ ^{\text{м}}/_{\text{с}^2} \pm 0{,}4\ ^{\text{м}}/_{\text{с}^2}; P = 95\%; n = 5$$

4.2.3 Приклад обробки результатів опосередкованих вимірювань вибірковим методом

Був проведений експеримент з визначення теплової потужності *Ф* (Дж/с), тобто кількості теплоти Q, що виділяється у одиницю часу t (с), при проходженні електричного струму I (А) через резистор опором R (Ом).

Вимірювання струму проводилися цифровим амперметром класу точності 0,1 з кінцевим значенням діапазону вимірювань 5 А.

Вимірювання опору проводилися цифровим омметром класу точності 0,1 з кінцевим значенням діапазону вимірювань 10 Ом.

Визначити остаточний результат опосередкованих вимірювань теплової потужності Φ (Дж/с) для довірчої ймовірності P = 0,95. Опосередковану похибку вимірювань визначити вибірковим методом.

Результати спільних вимірювань струму I та опору резистора R наведені у табл. 4.8.

Таблиця 4.8 – Результати спільних вимірювань струму I та опору резистора R

I_i, А	4,42	4,41	4,43	4,45	4,44
R_i, Ом	6,55	6,57	6,54	6,51	6,49

Розв'язання

Максимальні значення приладових похибок:

$\Theta_I = max\ \theta_{Ii}$ = 0,001·5 = 0,005 А;

$\Theta_R = max\ \theta_{Ri}$ = 0,001·10 = 0,01 Ом.

Теплову потужність визначимо з закону Джоуля-Ленца:

$$Q = I^2 \cdot R \cdot t, \text{звідки}$$

$$\Phi = \frac{Q}{t} = I^2 \cdot R \qquad (4.21)$$

Розрахунки наведені у табл. 4.9.

Таблиця 4.9 – Результати опосередкованих вимірювань теплової потужності Φ вибірковим методом

i	1	2	3	4	5	Середнє або Σ
I_i, А	4,42	4,41	4,43	4,45	4,44	
R_i, Ом	6,55	6,57	6,54	6,51	6,49	
Φ_i, Дж/с	127,963	127,774	128,347	128,914	127,941	128,188
$\Delta\Phi_i = \Phi_i - \overline{\Phi}$	-0,2245	-0,4140	0,1589	0,7263	-0,2467	0
$(\Delta\Phi_i)^2$	0,05042	0,1714	0,02524	0,52754	0,0609	0,8354
$\Theta_{\Phi i}$	0,4849	0,4842	0,4860	0,4877	0,4853	0,4856

З табл. 4.9 визначимо $\overline{\Phi} = 128{,}148$.

Для вилучення грубих помилок проранжуємо значення Φ_i та визначимо критерій u_i. Розрахунки наведені у табл. 4.10.

Таблиця 4.10 – Розрахунки для вилучення грубих помилок

<table>
<tr><td>i</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>$\Phi\uparrow_i$</td><td colspan="2">127,774</td><td colspan="2">127,941</td><td colspan="2">127,963</td><td colspan="2">128,347</td><td>128,914</td></tr>
<tr><td>$\Phi_{i+1}-\Phi_i$</td><td colspan="3">0,167</td><td colspan="2">0,022</td><td colspan="2">0,383</td><td colspan="2">0,576</td></tr>
</table>

З табл. 4.10 визначимо

R = 128,914 – 127,774 = 1,140

Для $n = 5$ з табл. 4.1 визначимо $u_{P,n} = 0{,}64$.

$u_{P,n}\cdot R = 0{,}64\cdot 1{,}140 = 0{,}729$

Умова $u_i < u_{P,n}\cdot R$ виконується для усіх i.

З додатку А для рівня значущості $\alpha = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$ та обсягу виборки $n = 5$ визначимо коефіцієнт Стьюдента $t_{P,n} = 2{,}01$.

$$S_{\overline{\Phi}} = \sqrt{\frac{0{,}8354}{4\cdot 5}} = 0{,}2044$$

$$\Delta\Phi = 2{,}01\cdot 0{,}2044 = 0{,}4119$$

Для визначення приладової похибки використовуємо метод логарифмування функції: $ln\left(\Phi(I,R)\right) = 2\cdot lnI + lnR$

$$b_I = \frac{\partial(ln\Phi)}{\partial I} = \frac{2}{I};\ b_R = \frac{\partial(ln\Phi)}{\partial R} = \frac{1}{R};$$

$$\theta_{\Phi i} = \Phi_i\cdot\left(\left|\frac{2\cdot\theta_I}{I_i}\right| + \left|\frac{\theta_R}{R_i}\right|\right).$$

Розрахунки наведені у табл. 4.9.

З табл. 4.9: $\theta_\Phi = 0{,}4856$

Повна похибка: $\Delta\overline{\Phi} = 0{,}4119 + 0{,}4856 = 0{,}8974$

Остаточний результат з урахуванням округлення:

$$g = 128{,}2\ \text{Дж/с} \pm 0{,}9\ \text{Дж/с};\ P = 95\%;\ n = 5$$

4.3 Завдання до роботи

У табл. 4.11 наведені результати вимірювань власної резонансної частоти f_p (Гц) друкованої плати, маса якої m (кг) визначена в результаті серії зважувань.

Для визначення резонансної частоти застосований генератор сигналів низької частоти Г3-137 з основною похибкою установки частоти $\theta_f = 5\cdot 10^{-5}$ Гц.

Маса плати визначена зважуванням на вагах 2 класу точності з основною похибкою вимірювань $\theta_m = 2 \cdot 10^{-5}$ кг.

За результатами прямих вимірювань визначити остаточний результат опосередкованих вимірювань жорсткості плати k (Н/м) для довірчої ймовірності $P = 0{,}95$.

По завершенні розрахунків остаточний результат представити у несистемних одиницях кН/м.

Залежність між параметрами вимірювань задана формулою (4.22):

$$f_p = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{4.22}$$

З (4.22) отримаємо вираз для визначення жорсткості k:

$$k = 4\pi^2 \cdot f_p^2 \cdot m \tag{4.23}$$

Опосередковану похибку вимірювань визначити:

– для ***непарних*** варіантів, вважаючи вимірювання незалежними, ***методом перенесення похибок***;

– для ***парних*** варіантів, вважаючи вимірювання залежними, ***вибірковим методом***.

Таблиця 4.11 – Результати вимірювань f_p (Гц) та m (кг)

Варіант 1					
fp_i, Гц	151,55	152,44	150,63	150,92	152,27
m_i, кг	0,215	0,221	0,212	0,216	0,218
Варіант 2					
fp_i, Гц	151,51	152,54	150,55	150,95	152,41
m_i, кг	0,213	0,215	0,220	0,198	0,204
Варіант 3					
fp_i, Гц	151,49	152,59	150,51	150,65	152,48
m_i, кг	0,212	0,214	0,224	0,199	0,197
Варіант 4					
fp_i, Гц	151,47	152,64	150,47	150,98	152,55
m_i, кг	0,211	0,209	0,208	0,199	0,207
Варіант 5					
fp_i, Гц	151,45	152,69	150,43	150,995	152,62
m_i, кг	0,210	0,206	0,212	0,201	0,203

Продовження табл. 4.11

Варіант 6					
fp_i, Гц	151,43	152,74	150,39	151,01	152,69
m_i, кг	0,209	0,203	0,206	0,202	0,207
Варіант 7					
fp_i, Гц	151,41	152,79	150,35	151,03	152,76
m_i, кг	0,208	0,200	0,210	0,213	0,209
Варіант 8					
fp_i, Гц	151,39	152,84	150,31	151,04	152,83
m_i, кг	0,207	0,197	0,214	0,200	0,199
Варіант 9					
fp_i, Гц	151,37	152,89	150,27	151,06	152,90
m_i, кг	0,206	0,194	0,208	0,198	0,192
Варіант 10					
fp_i, Гц	151,56	152,42	150,66	150,86	152,23
m_i, кг	0,217	0,227	0,219	0,224	0,228
Варіант 11					
fp_i, Гц	151,54	152,47	150,62	150,88	152,30
m_i, кг	0,216	0,224	0,221	0,222	0,225
Варіант 12					
fp_i, Гц	151,52	152,52	150,58	150,89	152,37
m_i, кг	0,215	0,221	0,225	0,223	0,220
Варіант 13					
fp_i, Гц	151,50	152,57	150,54	150,91	152,44
m_i, кг	0,214	0,217	0,229	0,218	0,216
Варіант 14					
fp_i, Гц	151,48	152,62	150,50	150,92	152,51
m_i, кг	0,213	0,214	0,223	0,216	0,212
Варіант 15					
fp_i, Гц	151,46	152,67	150,46	150,94	152,58
m_i, кг	0,212	0,211	0,217	0,214	0,208
Варіант 16					
fp_i, Гц	151,44	152,72	150,42	150,95	152,65
m_i, кг	0,211	0,208	0,221	0,212	0,214
Варіант 17					
fp_i, Гц	151,42	152,77	150,38	150,97	152,72
m_i, кг	0,210	0,205	0,215	0,212	0,200

Продовження табл. 4.11

Варіант 18					
fp_i, Гц	151,40	152,82	150,34	150,98	152,79
m_i, кг	0,209	0,202	0,212	0,208	0,206
Варіант 19					
fp_i, Гц	151,38	152,87	150,30	151,00	152,86
m_i, кг	0,208	0,199	0,203	0,206	0,192
Варіант 20					
fp_i, Гц	151,57	152,40	150,69	150,80	152,19
m_i, кг	0,219	0,211	0,212	0,216	0,218
Варіант 21					
fp_i, Гц	151,55	152,45	150,65	150,82	152,26
m_i, кг	0,218	0,228	0,226	0,229	0,224
Варіант 22					
fp_i, Гц	151,53	152,50	150,61	150,83	152,33
m_i, кг	0,217	0,215	0,210	0,217	0,220
Варіант 23					
fp_i, Гц	151,51	152,55	150,57	150,85	152,40
m_i, кг	0,216	0,222	0,214	0,215	0,216
Варіант 24					
fp_i, Гц	151,49	152,60	150,53	150,86	152,47
m_i, кг	0,215	0,219	0,218	0,213	0,212
Варіант 25					
fp_i, Гц	151,47	152,65	150,49	150,88	152,54
m_i, кг	0,214	0,216	0,212	0,211	0,218

4.4 Зміст звіту

4.4.1 Тема та мета роботи.

4.4.2 Короткі теоретичні відомості.

4.4.3 Розрахунки параметрів опосередкованих вимірювань жорсткості друкованої плати k (Н/м).

4.4.4 Остаточні результати опосередкованих вимірювань жорсткості друкованої плати k (кН/м).

4.4.5 Висновки.

5 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 5. КОРЕЛЯЦІЙНО-РЕГРЕСІЙНИЙ АНАЛІЗ

Мета роботи: ознайомитися з основами кореляційно-регресійного аналізу, видами регресії; отримати практичні навички складання лінійних та нелінійних регресійних моделей для парної та множинної регресії та оцінки їх параметрів.

5.1 Теоретичні відомості

5.1.1 Рівняння регресії. Види регресії

Регресійну залежність можна визначити наступним чином.

Нехай задані результати спостережень між залежною змінною та m незалежними змінними, які являють собою випадкові величини зі спільним розподілом ймовірностей:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}, X_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \cdots \\ x_{1n} \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ \cdots \\ x_{2n} \end{pmatrix}, \dots, X_m = \begin{pmatrix} x_{m1} \\ x_{m2} \\ \cdots \\ x_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (5.1)$$

де Y – вектор залежної змінної;

$X_1, X_2, \dots X_m$ – вектори незалежних змінних;

n – кількість спостережень.

Якщо для кожного набору значень $X_1=x_1, X_2=x_2, \dots X_m = x_m$ визначено умовне математичне очікування $y(x_1, x_2, \dots x_m) =$ E(Y| X_1 x_1, $X_2=x_2, \dots X_m=x_m$), то функція $y(x_1, x_2, \dots x_m)$ називається ***регресією*** величини Y за величинами $X_1, X_2, \dots X_m$, а її графік - ***лінією регресії*** Y за $X_1, X_2, \dots X_m$, або рівнянням регресії.

Для з'ясування питання, наскільки точно регресійний аналіз оцінює зміну Y при зміні $X_1, X_2, \dots X_m$, використовується середня величина ***дисперсії*** Y при різних наборах значень $X_1, X_2, \dots X_m$ (тобто міра розсіювання залежної змінної навколо лінії регресії).

Якщо залежна змінна залежить від однієї незалежної змінної, то така регресія називається ***простою*** (***парною***).

Якщо залежна змінна залежить від декількох незалежних змінних, то така регресія називається ***множинною*** (***багатофакторною***).

За формою залежності розрізняють ***лінійну*** і ***нелінійну*** регресію.

5.1.2 Метод найменших квадратів

На практиці лінія регресії найчастіше відшукується для лінійної функції:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + \cdots + b_m \cdot x_m \tag{5.2}$$

де m – кількість незалежних змінних.

Для цього використовується ***метод найменших квадратів*** (МНК), суть якого полягає у мінімізації суми квадратів відхилень реальних значень y від їх оцінок $\hat{y}$:

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2, \tag{5.3}$$

де n – об'єм вибірки.

Цей підхід заснований на тому, що сума, яка фігурує в наведеному вираженні, набуває мінімального значення саме для того випадку, коли $Y = y(x_1, x_2, \ldots x_m)$.

Для розв'язання задачі регресійного аналізу за допомогою МНК вводиться поняття функції нев'язки:

$$\sigma(\bar{b}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 \tag{5.4}$$

Умова мінімуму функції нев'язки:

$$\frac{\partial\sigma(\bar{b})}{\partial b_j} = 0; j = 0 \ldots m\,, \tag{5.5}$$

або:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} b_j \cdot x_{ij} + b_0 \cdot m\,,$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot x_{ik} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} b_j \cdot x_{ij} \cdot x_{ik} + b_0 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_{ik}\,, \tag{5.6}$$

$k = 1, \ldots m$

Отримана система є системою $N+1$ лінійних рівнянь з $N+1$ невідомими $b_0, b_1, \ldots b_m$.

Якщо представити вільні члени лівої частини рівнянь (5.6) матрицею (5.7), а коефіцієнти при невідомих у правій частині –

матрицею (5.8), то отримуємо матричне рівняння $A*B=C$, яке вирішується методом Гауса.

$$C = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot x_{i1} \\ \dots \\ \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot x_{in} \end{pmatrix}, \quad (5.7)$$

$$A = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_{i1} & \sum_{i=1}^{n} x_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{n} x_{im} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{i1} & \sum_{i=1}^{n} (x_{i1} \cdot x_{i1}) & \sum_{i=1}^{n} (x_{i2} \cdot x_{i1}) & \dots & \sum_{i=1}^{n} (x_{im} \cdot x_{i1}) \\ \sum_{i=1}^{n} x_{i2} & \sum_{i=1}^{n} (x_{i1} \cdot x_{i2}) & \sum_{i=1}^{n} (x_{i2} \cdot x_{i2}) & \dots & \sum_{i=1}^{n} (x_{im} \cdot x_{i2}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^{n} x_{im} & \sum_{i=1}^{n} (x_{i1} \cdot x_{im}) & \sum_{i=1}^{n} (x_{i2} \cdot x_{im}) & \dots & \sum_{i=1}^{n} (x_{im} \cdot x_{im}) \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

Матриця рішень (5.9) є матрицею, яка містить коефіцієнти рівняння лінії регресії:

$$B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

5.1.3 Оцінка параметрів регресійної моделі

5.1.3.1 Оцінка тісноти зв’язку регресійної моделі

Оцінити тісноту зв’язку регресійної моделі можна за допомогою коефіцієнта кореляції R.

Коефіцієнт кореляції визначається за формулою:

$$R = \sqrt{1 - \frac{\sigma_u^2}{\sigma_y^2}}, \tag{5.10}$$

де $\sigma_u{}^2$ – дисперсія залишків;

σ_y^2 – дисперсія залежної змінної.

Дисперсія залежної змінної визначається за формулою:

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \left[Y^T \cdot Y - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i \right)^2 \right] \tag{5.11}$$

Дисперсія залишків визначається за формулою:

$$\sigma_v^2 = \frac{U^T \cdot U}{n - m - 1}, \tag{5.12}$$

де V – вектор залишків;

$$V = Y - \hat{Y} = Y - X \cdot B \tag{5.13}$$

5.1.3.2 Оцінка частки впливу заданого факторного показника на результативний показник

Для оцінки частки впливу заданого факторного показника на результативний показник використовується коефіцієнт детермінації R^2.

Для простої регресії він показує, наскільки варіація залежної змінної визначається варіацією фактору.

Для множинної регресії він показує, яку частку займає вплив на результативний показник заданого факторного показника у загальному впливі усіх факторних показників.

5.1.3.3 Оцінка значущості параметрів регресійної моделі

Значущість коефіцієнта кореляції можна визначити за t-критерієм Стьюдента, який розраховується за формулою:

$$t_R = \frac{R}{\sigma_R}, \tag{5.14}$$

де σ_R – довірчі границі коефіцієнта кореляції; розраховується за формулою:

$$\sigma_R = \frac{1 - R^2}{\sqrt{n - m - 1}} \qquad (5.15)$$

Розрахункове значення t_R слід порівняти з табличним значенням критерія Стьюдента $t_{(\alpha,\ k)}$, де α - рівень значущості; k – число ступенів вільності, яке являє собою різницю між об'ємом вибірки, за якою обчислюється вибіркова чисельна характеристика, та кількістю зв'язків, накладених на вибіркові значення:

$$k = n - m - 1$$

Табличні значення критерію Стьюдента наведені у додатку Б.

Якщо $t_R > t_{(\alpha,k)}$, то з ймовірністю $p=1-\alpha$ можна стверджувати, що ***коефіцієнт кореляції значущий.***

Значущість коефіцієнтів регресійної моделі можна визначити за t-критерієм Стьюдента, який для кожного коефіцієнта розраховується за формулою:

$$t_{b_j} = \frac{\left|b_j\right|}{\sigma_{b_j}}; j = 0 \dots m\,, \qquad (5.16)$$

де σ_{b_j} визначається за формулою:

$$\sigma_{b_j} = \sqrt{\sigma_v^2 \cdot b_{jj}}\,, \qquad (5.17)$$

де b_{jj} – j-й елемент головної діагоналі матриці $(X^T \cdot X)^{-1}$.

Розрахункове значення t_{b_j} слід порівняти з табличним значенням критерія Стьюдента $t_{(\alpha,\ k)}$.

Якщо $t_{b_j} > t_{(\alpha,k)}$, то з ймовірністю $p=1-\alpha$ можна стверджувати, що ***коефіцієнт регресійної моделі значущий.***

5.1.3.4 Оцінка адекватності регресійної моделі

Адекватність регресійної моделі оцінюється за F-критерієм Фішера, який визначається за формулою:

$$F_p = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{n - m}{m - 1} \qquad (5.18)$$

Розрахункове значення F_p слід порівняти з табличним значенням критерія Фішера $F_{(\alpha;\, k1;\, k2)}$, де α - рівень значущості; k_1, k_2 – числа ступенів вільності.

$$k_1 = m; k_2 = n - m - 1$$

Якщо $F_p > F_{(\alpha;\, k1;\, k2)}$, то з ймовірністю $p=1-\alpha$ можна стверджувати, що регресійна модель ***адекватно*** описує задане явище. Табличні значення критерію Фішера наведені у додатку Б.

Слід зауважити, що для однофакторної моделі $m = 1$, і тоді формула (5.18) приймає спрощений вигляд:

$$F_p = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot (n - 2) \tag{5.19}$$

5.1.4 Проста лінійна регресія

Нехай y_i - емпірична результативна ознака для заданого фактору x_i.

Для простої лінійної регресії рівняння (5.2) можна записати у вигляді:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 \cdot x \tag{5.20}$$

Коефіцієнти b_0 і b_1 є оцінками відповідних параметрів регресії $\hat{b}_0$ і $\hat{b}_1$ у лінійній моделі:

$$y = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 \cdot x + v\,, \tag{5.21}$$

де v – стохастична складова; $v_i = y_i - \hat{y}_i$.

Для простої лінійної регресії при застосуванні МНК коефіцієнти регресії можна знайти з системи рівнянь:

$$\begin{cases} b_0 \cdot n + b_1 \cdot \sum_{i=1}^{n}(x_i) = \sum_{i=1}^{n}(y_i)\ , \\ b_0 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i) + b_1 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i^2\right) = \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i \cdot y_i)\,, \end{cases} \tag{5.22}$$

де $i = \overline{1 \ldots n}$ – кількість спостережень.

Дисперсію залежної змінної можна визначити за спрощеною формулою:

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{n-1}, \tag{5.23}$$

де y_i – поточне значення залежної змінної;

$\bar{y}$ – середня залежної змінної; $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i)}{n}$

Дисперсію залишків можна визначити за спрощеною формулою:

$$\sigma_v^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(v_i)^2}{n-2} \tag{5.24}$$

5.1.5 Нелінійна регресія

Нелінійна регресія – це вид регресійного аналізу, в якому експериментальні дані моделюються функцією, що є нелінійною комбінацією параметрів моделі та залежить від однієї і більш незалежних змінних.

Наприклад, поліноміальна регресія має вигляд:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2 + \dots + b_m \cdot x^m \tag{5.25}$$

Підбір функції регресії здійснюється з урахуванням теоретичних міркувань щодо досліджуваних явищ.

Нелінійну регресію можна привести до лінійної форми шляхом замін.

У якості прикладу розглянемо поліноміальну регресію за формулою (5.26).

Введемо наступні заміни:

$$x = x_1; x^2 = x_2; \dots\ x^m = x_m \tag{5.26}$$

Підставивши заміни (5.27) у просту поліноміальну регресію (5.26), отримаємо множинну лінійну регресію:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + \dots + b_m \cdot x_m \tag{5.27}$$

Заміни для перетворення деяких нелінійних залежностей у просту лінійну форму наведені у табл. 5.1, у множинну лінійну форму – у табл. 5.2.

Таблиця 5.1 - Приведення нелінійних залежностей у просту лінійну форму

Початкова функція	**До якого вигляду зводиться**	**Заміна змінних**
$y = A \cdot e^{kx}$	$z = b_0 + b_1 \cdot x$	$z = lny;\ b_0 = lnA;\ b_1 = k$
$y = A \cdot x^{b_1}$	$z = b_0 + b_1 \cdot u$	$z = lny;\ b_0 = lnA;\ u = lnx$
$y = b_0 + A \cdot x^n$	$y = b_0 + b_1 \cdot z$	$z = x^n;\ b_1 = A$
$y = b_0 + \frac{b_1}{x}$	$y = b_0 + b_1 \cdot x$	$u = \frac{1}{x}$
$y = b_0 + \frac{b_1}{x^b}$	$y = b_0 + b_1 \cdot x$	$u = \frac{1}{x^b}$
$y = b_0 + b_1 \cdot \sqrt[n]{x}$	$y = b_0 + b_1 \cdot x$	$u = \sqrt[n]{x}$
$y = \frac{1}{b_0 + b_1 \cdot x^n}$	$z = b_0 + b_1 \cdot u$	$z = \frac{1}{y}; u = x^n$
$y = \frac{x}{b_0 x + b_1}$	$z = b_0 + b_1 \cdot u$	$z = \frac{1}{y}; u = \frac{1}{x}$
$y = b_0 x^{-m} + b_1 x^n$	$z = b_0 + b_1 \cdot u$	$z = yx^m; u = x^{m+n}$
$y = b_1 \cdot lnx + b_0$	$y = b_0 + b_1 \cdot u$	$u = lnx$
$y = \frac{1}{b_1 e^{-x} + b_0}$	$z = b_0 + b_1 \cdot u$	$z = \frac{1}{y}; u = e^{-x}$
$y = \\ = b_0 cosx \\ + b_1 sinx$	$z = b_0 + b_1 \cdot u$	$z = \frac{y}{cosx}; u = tgx$

Таблиця 5.2 - Приведення нелінійних залежностей у множинну лінійну форму

Початкова функція	**До якого вигляду зводиться**	**Заміна змінних**
$y = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m$	$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_mx_m$	$x_1 = x; x_2 = x^2; \dots; x_m = x^m$
$y == b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \cdots + \frac{b_m}{x^m}$	$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_mx_m$	$x_1 = \frac{1}{x}; x_2 = \frac{1}{x^2}; \dots; x_m = \frac{1}{x^m}$
$y = A{x_1}^{b_1}{x_2}^{b_2} \dots {x_m}^{b_m}$	$z = b_0 + b_1u_1 + b_2u_2 + \cdots + a_mu_m$	$z = lny;\ b_0 = lnA;$ $u_1 = lnx_1; u_2 = lnx_2; \dots; u_m = lnx_m$

5.2 Приклади складання регресійних моделей та оцінки їх параметрів

5.2.1 Приклад 1. Проста лінійна регресія

У табл. 5.3 наведені результати вимірювань величини струму через резистор *I, A* (результативний показник y) в залежності від прикладеної напруги *U*, *В* (факторний показник x).

За допомогою МНК скласти лінійну регресійну модель у вигляді аналітичної залежності *I = f (U)* та оцінити її параметри.

Обчислити значення струму *I* при значенні напруги *U* = 60 В.

Результати проміжних розрахунків наведені у табл. 5.3.

5.2.1.1 Визначимо коефіцієнти регресії для чого, використовуючи розрахунки, наведені у табл. 5.3, складемо систему рівнянь (5.21) за методом найменших квадратів:

$$\begin{cases} b_0 \cdot 9 + b_1 \cdot 267 = 266 \\ b_0 \cdot 267 + b_1 \cdot 8591 = 8667 \end{cases}$$

Результат розв’язання: $b_0 = -4{,}79;\ b_1 = 1{,}16.$

Таблиця 5.3 – Вихідні дані та розрахунки для побудови простої лінійної регресії за методом найменших квадратів

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ
x	18	20	23	25	28	32	37	40	44	267
y	12	17	23	29	29	34	37	38	47	266
x^2	324	400	529	625	784	1024	1369	1600	1936	8591
xy	216	340	529	725	812	1088	1369	1520	2068	8667
$\hat{y}$	16,0	18,4	21,8	24,2	27,6	32,3	38,0	41,5	46,1	
$y-\bar{y}$	-17,6	-12,6	-6,6	-0,6	-0,6	4,4	7,4	8,4	17,4	
$(y-\bar{y})^2$	308,2	157,6	43,0	0,3	0,3	19,8	55,4	71,3	304,3	960,2
v	-4,0	-1,4	1,2	4,8	1,4	1,7	-1,0	-3,5	0,9	
v^2	16,39	1,86	1,35	23,49	1,89	3,04	1,09	12,38	0,72	62,22

Таким чином, регресійна модель має вигляд:

$$\hat{y} = -4{,}79 + 1{,}16 \cdot x$$

Значення коефіцієнта b_1 = 1,16 визначає кут нахилу прямої рівняння регресії до осі абсцис. Фізично він дорівнює значенню опору резистора *R, Ом*.

Значення b_0 = -4,79 пов'язане з систематичною похибкою вимірювань (впливом сторонніх факторів).

5.2.1.2 Оцінимо тісноту зв'язку регресійної моделі.

За формулами (5.23) та (5.24) визначимо дисперсії залежної змінної та залишків:

$$\sigma_{\hat{y}}^2 = \frac{960{,}2}{8} = 120{,}03$$

$$\sigma_v^2 = \frac{62{,}22}{7} = 8{,}89$$

За формулою (5.10) визначимо коефіцієнт кореляції:

$$R = \sqrt{1 - \frac{8{,}89}{120{,}03}} = 0{,}967$$

Оскільки коефіцієнт кореляції наближується до 1, це свідчить про те, що між змінними існує дуже тісний зв'язок.

5.2.1.3 Оцінимо частку впливу факторного показника на результативний показник.

Оскільки коефіцієнт кореляції R дорівнює 0,967, то коефіцієнт детермінації відповідно дорівнює: R^2 = 0,935.

Це свідчить про те, що варіація результативного показника на 93,5% визначається варіацією факторного показника.

5.2.1.4 Оцінимо значущість коефіцієнта кореляції, для чого за формулою (5.14) розрахуємо t-критерій Стьюдента для коефіцієнта кореляції. Попередньо розрахуємо довірчі границі коефіцієнта кореляції за формулою 5.15.

$$\sigma_R = \frac{1 - 0{,}935}{\sqrt{9-1-1}} = 0{,}024$$

$$t_R = \frac{0{,}967}{0{,}024} = 39{,}48$$

Табличне значення критерію Стьюдента визначаємо для рівня значущості α = 0,05 та числа ступенів вільності n-m-1 = 7.

$t_{(0,05;7)}$ = 1,89.

Оскільки $t_R > t_{(0{,}05;7)}$, то з ймовірністю $p = 0{,}95$ можна стверджувати, що коефіцієнт кореляції значущий.

5.2.1.5 Оціним значущість коефіцієнтів регресії для чого за формулою (7.16) розрахуємо для них t-критерії Стьюдента.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 18 \\ 1 & 20 \\ 1 & 23 \\ 1 & 25 \\ 1 & 28 \\ 1 & 32 \\ 1 & 37 \\ 1 & 40 \\ 1 & 44 \end{pmatrix}, X^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 18 & 20 & 23 & 25 & 28 & 32 & 37 & 40 & 44 \end{pmatrix},$$

$$X^T \cdot X = \begin{pmatrix} 45 & 1534 \\ 267 & 8591 \end{pmatrix}, (X^T \cdot X)^{-1} = \begin{pmatrix} -0{,}374 & 0{,}067 \\ 0{,}012 & -0{,}002 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{b_0} = \sqrt{8{,}89 \cdot 0{,}374} = 1{,}82, \sigma_{b_1} = \sqrt{8{,}89 \cdot 0{,}002} = 0{,}13,$$

$$t_{b_0} = \frac{4{,}79}{1{,}82} = 2{,}63, t_{b_1} = \frac{1{,}16}{0{,}13} = 8{,}78$$

Табличне значення критерію Стьюдента для рівня значущості $\alpha = 0{,}05$ та числа ступенів вільності $n\text{-}m\text{-}1 = 7$ $t_{(0,05;7)} = 1{,}89$.

Оскільки $t_{b_j} > t_{(0,05;7)}$ для обох коефіцієнтів, то з ймовірністю $p = 0{,}95$ можна стверджувати, що обидва коефіцієнти регресії значущі.

5.2.1.6 Оцінимо адекватність регресійної моделі, для чого за формулою (5.18) розрахуємо F-критерій Фішера:

$$F_p = \frac{0{,}935}{1 - 0.935} \cdot 7 = 100{,}69$$

Табличне значення F-критерію визначаємо для рівня значущості $\alpha = 0{,}05$ та числа ступенів вільності $m=1$ та $n\text{-}m\text{-}1=7$.

$F_{(0,05;1;7)} = 5{,}59$.

Оскільки $F_R > F_{(0,05;1;7)}$, то з ймовірністю $p = 0{,}95$ можна стверджувати, що регресійна модель адекватно описує задане явище.

5.2.1.7 Визначимо значення струму I при значенні напруги U = 60 В:

$$I = -4{,}79 + 1{,}16 \cdot 60 = 64{,}67(A)$$

5.2.2 Приклад 2. Двофакторна лінійна регресія

У табл. 5.4 наведені експериментальні результати визначення конвективного коефіцієнта тепловіддачі від поверхні корпусу радіоелектронного апарата α, Вт/(м^2·К) (результативний показник y) при різних значеннях перегріву корпусу Δt, К (факторний показник x_1) та швидкості охолоджуючого потоку w, м/с (факторний показник x_2).

На основі експериментальних даних побудувати двофакторну лінійну модель у вигляді аналітичної залежності $\alpha = f\ (\Delta t,\ w)$ та оцінити її параметри.

Обчислити значення конвективного коефіцієнта тепловіддачі α для перегріву корпусу Δt = 70 К при швидкості охолоджуючого потоку w = 8 м/с.

Таблиця 5.4 - Вихідні дані для побудови двофакторної лінійної регресійної моделі

№	y_i	x_{1i}	x_{2i}
1	8,94	0	0,5
2	18,04	12	1,0
3	23,58	24	2,0
4	27,93	36	3,0
5	34,64	48	5,0
6	46,71	60	10,0
Σ	159,84	120	21,5

Двофакторну лінійну модель шукаємо у вигляді:

$$y = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2$$

5.2.2.1 Розрахуємо коефіцієнти регресійної моделі матричним методом.

На основі вихідних даних сформуємо матриці незалежних змінних X, залежної змінної Y та транспоновані до них X^T і Y^T.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0,5 \\ 1 & 12 & 1,0 \\ 1 & 24 & 2,0 \\ 1 & 36 & 3,0 \\ 1 & 48 & 5,0 \\ 1 & 60 & 10,0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 8,94 \\ 18,04 \\ 23,58 \\ 27,93 \\ 34,64 \\ 46,71 \end{pmatrix},$$

$$X^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 12 & 24 & 36 & 48 & 60 \\ 8,94 & 18,04 & 23,58 & 27,93 & 34,64 & 46,71 \end{pmatrix},$$

$$Y^T = (8,94 \quad 18,04 \quad 23,58 \quad 27,93 \quad 34,64 \quad 46,71)$$

Знайдемо добутки матриць:

$$X^T \cdot X = \begin{pmatrix} 6 & 180 & 21,5 \\ 180 & 7900 & 1008 \\ 21,5 & 1008 & 139,3 \end{pmatrix},$$

$$X^T \cdot Y = \begin{pmatrix} 159,8 \\ 6253,2 \\ 739,8 \end{pmatrix}$$

Знайдемо обернену матрицю:

$$(X^T \cdot X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0,579 & -0,023 & 0,074 \\ -0,023 & 0,002 & -0,015 \\ 0,074 & -0,015 & 0,101 \end{pmatrix}$$

За отриманими результатами розрахуємо вектор параметрів моделі:

$$B = (X^T \cdot X)^{-1} \cdot (X^T \cdot Y) = \begin{pmatrix} 10,10 \\ 0,42 \\ 1,11 \end{pmatrix}$$

Регресійна модель має вигляд:

$$\hat{y} = 10,10 + 0,42 \cdot x_1 + 1,11 \cdot x_2$$

5.2.2.2 Оцінимо тісноту зв'язку отриманої моделі.

Визначимо добуток матриць: $Y^T \cdot Y = 5123,22$.

Визначимо дисперсію результативного показника за формулою (5.11):

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{6-1} \cdot \left[5123,22 - \frac{1}{6}(159,84)^2\right] = 173,01$$

Визначимо дисперсію залишків за формулою (5.12). Попередньо визначимо вектор залишків за формулою (5.13):

$$V = \begin{pmatrix} 8,94 \\ 18,04 \\ 23,58 \\ 27,93 \\ 34,64 \\ 46,71 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0,5 \\ 1 & 12 & 1,0 \\ 1 & 24 & 2,0 \\ 1 & 36 & 3,0 \\ 1 & 48 & 5,0 \\ 1 & 60 & 10,0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10,10 \\ 0,42 \\ 1,11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,71 \\ 1,80 \\ 1,21 \\ -0,58 \\ -1,11 \\ 0,39 \end{pmatrix}$$

$$V^T = (-1,71 \quad 1,80 \quad 1,21 \quad -0,58 \quad -1,11 \quad 0,39),$$

$$V^T \cdot V = 9,37.$$

Дисперсія залишків:

$$\sigma_v^2 = \frac{9,37}{6-2-1} = 3,12$$

Визначимо коефіцієнт множинної кореляції за формулою (5.10):

$$R = \sqrt{1 - \frac{3,12}{173,01}} = 0,994$$

Оскільки коефіцієнт множинної кореляції більший за 0,9, зв'язок між залежною та незалежними змінними можна вважати дуже тісним.

5.2.2.3 Оцінимо частку впливу факторних показників x_1, x_2 на результативний показник y.

Оскільки коефіцієнт кореляції R дорівнює 0,994, то коефіцієнт детермінації відповідно дорівнює: R^2 = 0,989.

Це свідчить про те, що побудована модель регресії пояснює варіацію значень результативної змінної щодо свого середнього рівня на 98,9%, тобто 98,9% загальної дисперсії результативної змінної пояснюється варіацією факторних змінних, включених до моделі регресії.

5.2.2.4 Перевіримо значущість коефіцієнта множинної кореляції за t-критерієм Стьюдента.

Визначимо довірчі границі коефіцієнта множинної кореляції за формулою (5.15):

$$\sigma_R = \frac{1 - 0,989}{\sqrt{6 - 2 - 1}} = 0,006$$

Розрахуємо критерій Стьюдента за формулою (5.14):

$$t_R = \frac{0,994}{0,006} = 158,97$$

Табличне значення критерію Стьюдента визначаємо для рівня значущості α = 0,05 та числа ступенів вільності n-m-1 = 3.

$t_{(0,05;3)}$ = 2,35.

Оскільки $t_R > t_{(0,05;3)}$, то з ймовірністю $p = 0,95$ можна стверджувати, що коефіцієнт кореляції значущий.

5.2.2.5 Оцінимо значущість коефіцієнтів регресії за t-критерієм Стьюдента.

Для цього обчислимо значення критерію Стьюдента для кожного коефіцієнта регресії за формулами (5.16), (5.17):

$$\sigma_{b_0} = \sqrt{4,68 \cdot 0,579} = 1,65; \; t_{b_0} = \frac{10,10}{1,65} = 6,13$$

$$\sigma_{b_1} = \sqrt{4{,}68 \cdot 0{,}002} = 0{,}11;\; t_{b_1} = \frac{0{,}42}{0{,}11} = 3{,}88$$

$$\sigma_{b_2} = \sqrt{4{,}68 \cdot 0{,}100} = 0{,}69;\; t_{b_2} = \frac{1{,}11}{0{,}69} = 1{,}61$$

Оскільки для коефіцієнтів b_0, b_1 $t_b > t_{(0,05;3)}$, то з ймовірністю $p = 0{,}95$ можна стверджувати, що ці коефіцієнти значущі.

Оскільки для коефіцієнта b_2 $t_b < t_{(0,05;3)}$, то з ймовірністю $p = 0{,}95$ можна стверджувати, що цей коефіцієнт незначущий.

5.2.2.6 Оцінимо адекватність моделі за F-критерієм Фішера.

Розрахуємо F-критерій Фішера за формулою (5.18):

$$F_p = \frac{0{,}989}{1-0{,}989} \cdot \frac{6-2-1}{2} = 136{,}93$$

Табличне значення F-критерію визначаємо для рівня значущості $\alpha = 0{,}05$ та числа ступенів вільності $m=2$ та $n\text{-}m\text{-}1=3$.

$F_{(0,05;2;3)} = 9{,}55$.

Оскільки $F_R > F_{(0,05;2;3)}$, то з ймовірністю $p = 0{,}95$ можна стверджувати, що регресійна модель адекватно описує задане явище.

5.2.2.7 Обчислимо значення конвективного коефіцієнта тепловіддачі α для перегріву корпусу $\Delta t = 70$ К при швидкості охолоджуючого потоку $w = 8$ м/с:

$$\alpha = 10{,}10 + 0{,}42 \cdot 70 + 1{,}11 \cdot 8 = 48{,}29 \left(\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}\right)$$

5.2.3 Приклад 3. Двофакторна нелінійна регресія

На основі статистичних даних, наведених у табл. 5.5, побудувати двофакторну модель у вигляді виробничої регресії Кобба-Дугласа:

$$y = A \cdot {x_1}^{b_1} \cdot {x_2}^{b_2} \tag{5.28}$$

Оцінити параметри отриманої моделі.

Обчислити прогнозні дані у заданій точці.

Таблиця 5.5 - Вихідні дані для побудови двофакторної нелінійної регресійної моделі

№	y_i	x_{1i}	x_{2i}
1	69,5	21,1	52,1
2	75,9	23,6	57,0
3	79,9	24,4	60,7
4	84,6	24,8	65,7
5	89,0	27,0	69,9
6	95,6	28,6	74,6
7	99,8	31,0	77,8
8	103,1	33,4	78,0
9	107,5	33,7	83,0
10	111,9	34,9	86,9
11	114,5	35,2	89,2
12	120,9	36,4	94,6
13	122,8	37,2	97,0
прогноз		39,3	100,4

5.2.3.1 Перейдемо від нелінійної моделі до лінійної, використовуючи перетворення, наведені у табл. 5.2:

$$z = b_0 + b_1 \cdot u_1 + b_2 \cdot u_2 \qquad (5.29)$$

де $z = lny$;
$b_0 = lnA; A = e^{b_0}$
$u_1 = lnx_1;$
$u_2 = lnx_2.$

Дані, перераховані для лінійної моделі (5.29), наведені у табл. 5.6.

Таблиця 5.6 – Дані, перераховані для лінійної моделі

№	z_i	u_{1i}	u_{2i}
1	**2**	**3**	**4**
1	4,24	3,05	3,95
2	4,33	3,16	4,04
3	4,38	3,20	4,10
4	4,44	3,21	4,19
5	4,49	3,29	4,25

Продовження табл. 5.6

1	**2**	**3**	**4**
6	4,56	3,35	4,31
7	4,60	3,43	4,35
8	4,64	3,51	4,36
9	4,68	3,52	4,42
10	4,72	3,55	4,47
11	4,74	3,56	4,49
12	4,80	3,60	4,55
13	4,81	3,62	4,58
Σ	59,4	44,05	56,06

5.2.3.2 Розрахуємо коефіцієнти лінійної моделі матричним методом.

На основі вихідних даних сформуємо матриці незалежних змінних *U*, залежної змінної *Z* та транспоновані до них U^T і Z^T.

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 3,05 & 3,95 \\ 1 & 3,16 & 4,04 \\ 1 & 3,20 & 4,10 \\ 1 & 3,21 & 4,19 \\ 1 & 3,29 & 4,25 \\ 1 & 3,35 & 4,31 \\ 1 & 3,43 & 4,35 \\ 1 & 3,51 & 4,36 \\ 1 & 3,52 & 4,42 \\ 1 & 3,55 & 4,47 \\ 1 & 3,56 & 4,49 \\ 1 & 3,60 & 4,55 \\ 1 & 3,62 & 4,58 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} 4,24 \\ 4,33 \\ 4,38 \\ 4,44 \\ 4,49 \\ 4,56 \\ 4,60 \\ 4,64 \\ 4,68 \\ 4,72 \\ 4,74 \\ 4,80 \\ 4,81 \end{pmatrix},$$

Знайдемо добутки матриць:

$$U^T \cdot U = \begin{pmatrix} 13,0 & 44,1 & 56,0 \\ 44,1 & 149,7 & 190,4 \\ 56,0 & 190,4 & 242,2 \end{pmatrix},$$

$$U^T \cdot Z = \begin{pmatrix} 59{,}4 \\ 201{,}7 \\ 256{,}6 \end{pmatrix}$$

Знайдемо обернену матрицю:

$$(U^T \cdot U)^{-1} = \begin{pmatrix} 75{,}8 & 49{,}7 & -56{,}6 \\ 49{,}7 & 70{,}0 & -66{,}6 \\ -56{,}6 & -66{,}5 & 65{,}4 \end{pmatrix}$$

За отриманими результатами розрахуємо вектор параметрів моделі:

$$B = (U^T \cdot U)^{-1} \cdot (U^T \cdot Z) = \begin{pmatrix} 0{,}76 \\ 0{,}30 \\ 0{,}65 \end{pmatrix}$$

Лінійна модель має вигляд:

$$\hat{z} = 0{,}76 + 0{,}30 \cdot u_1 + 0{,}65 \cdot u_2$$

5.2.3.3 Перейдемо від лінійної моделі до нелінійної.

Попередньо визначимо коефіцієнт А:

$$A = e^{0{,}76} = 2{,}13$$

Таким чином, нелінійна модель має вигляд:

$$\hat{y} = 2{,}13 \cdot {x_1}^{0{,}30} \cdot {x_2}^{0{,}65} \qquad (5.30)$$

5.2.3.4 Оцінимо тісноту зв’язку отриманої моделі.

Визначимо добуток матриць: $Y^T \cdot Y = 5123{,}22$.

Визначимо дисперсію результативного показника за формулою (5.11):

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{13-1} \cdot \left[128667 - \frac{1}{13}(1275)^2\right] = 301{,}6$$

Визначимо дисперсію залишків за формулою (5.12). Попередньо визначимо вектор залишків, для чого за формулою (5.30) розрахуємо теоретичні значення результативного показника. Результати розрахунків наведенні у табл. 5.7.

Таблиця 5.7 – Розрахунки вектору залишків

x_{1i}	x_{2i}	$\hat{y}_i$	y_i	$v_i = y_i - \hat{y}_i$
21,1	52,1	69,2	69,5	0,3
23,6	57,0	75,8	75,9	0,1
24,4	60,7	79,8	79,9	0,1
24,8	65,7	84,4	84,6	0,2
27,0	69,9	90,1	89,0	-1,1
28,6	74,6	95,7	95,6	-0,1
31,0	77,8	100,6	99,8	-0,8
33,4	78,0	103,0	103,1	0,1
33,7	83,0	107,6	107,5	-0,1
34,9	86,9	112,0	111,9	-0,1
35,2	89,2	114,2	114,5	0,3
36,4	94,6	120,0	120,9	0,9
37,2	97,0	122,6	122,8	0,2

$$V^T \cdot V = 3{,}26$$

Дисперсія залишків:

$$\sigma_v^2 = \frac{3{,}26}{13 - 2 - 1} = 0{,}33$$

Визначимо коефіцієнт множинної кореляції за формулою (5.10):

$$R = \sqrt{1 - \frac{0{,}33}{301{,}60}} = 0{,}999$$

Оскільки коефіцієнт множинної кореляції наближається до 1, зв’язок між залежною та незалежними змінними можна вважати дуже тісним.

5.2.3.5 Оцінимо частку впливу факторних показників x_1, x_2 на результативний показник y.

Оскільки коефіцієнт кореляції R дорівнює 0,999, то коефіцієнт детермінації відповідно дорівнює: $R^2 = 0{,}998$.

Це свідчить про те, що побудована модель регресії пояснює варіацію значень результативної змінної щодо свого середнього рівня на 99,8%, тобто 99,8% загальної дисперсії результативної змінної пояснюється варіацією факторних змінних, включених до моделі регресії.

5.2.3.6 Перевіримо значущість коефіцієнта множинної кореляції за *t*-критерієм Стьюдента.

Визначимо довірчі границі коефіцієнта множинної кореляції за формулою (5.15):

$$\sigma_R = \frac{1-0{,}998}{\sqrt{13-2-1}} = 0{,}0003$$

Розрахуємо критерій Стьюдента за формулою (5.14):

$$t_R = \frac{0{,}998}{0{,}0003} = 2922$$

Табличне значення критерію Стьюдента визначаємо для рівня значущості $\alpha = 0{,}05$ та числа ступенів вільності $n\text{-}m\text{-}1 = 10$.

$t_{(0,05;10)} = 1{,}81$.

Оскільки $t_R \gg t_{(0{,}05;10)}$, то з ймовірністю $p = 0{,}95$ можна стверджувати, що коефіцієнт кореляції значущий.

5.2.3.7 Оцінимо значущість коефіцієнтів регресії нелінійної моделі за *t*-критерієм Стьюдента.

Попередньо запишемо матрицю X та визначимо матрицю $(X^T \cdot X)^{-1}$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 21{,}1 & 52{,}1 \\ 1 & 23{,}6 & 57{,}0 \\ 1 & 24{,}4 & 60{,}7 \\ 1 & 24{,}8 & 65{,}7 \\ 1 & 27{,}0 & 69{,}9 \\ 1 & 28{,}6 & 74{,}6 \\ 1 & 31{,}0 & 77{,}8 \\ 1 & 33{,}4 & 78{,}0 \\ 1 & 33{,}7 & 83{,}0 \\ 1 & 34{,}9 & 86{,}9 \\ 1 & 35{,}2 & 89{,}2 \\ 1 & 36{,}4 & 94{,}6 \\ 1 & 37{,}2 & 100{,}4 \end{pmatrix}$$

$$(X^T \cdot X)^{-1} = \begin{pmatrix} 2{,}613 & -0{,}118 & 0{,}014 \\ -0{,}118 & 0{,}076 & -0{,}029 \\ 0{,}014 & -0{,}029 & 0{,}011 \end{pmatrix}$$

Обчислимо значення критерію Стьюдента для кожного коефіцієнта регресії за формулами (5.16), (5.17):

$$\sigma_{b_0} = \sqrt{0{,}36 \cdot 2{,}613} = 0{,}97;\ t_{b_0} = \frac{2{,}13}{0{,}97} = 2{,}19$$

$$\sigma_{b_1} = \sqrt{0{,}36 \cdot 0{,}076} = 0{,}16;\ t_{b_1} = \frac{0{,}30}{0{,}16} = 1{,}86$$

$$\sigma_{b_2} = \sqrt{0{,}36 \cdot 0{,}011} = 0{,}06;\ t_{b_2} = \frac{0{,}65}{0{,}06} = 10{,}20$$

Для усіх коефіцієнтів $t_b > t_{(0{,}05;10)} = 1{,}81$, тому з ймовірністю $p = 0{,}95$ можна стверджувати, що усі коефіцієнти регресії значущі.

5.2.3.8 Оцінимо адекватність моделі за F-критерієм Фішера.

Розрахуємо F-критерій Фішера за формулою (5.18):

$$F_p = \frac{0{,}998}{1 - 0{,}998} \cdot \frac{13 - 2 - 1}{2} = 4620$$

Табличне значення F-критерію визначаємо для рівня значущості $\alpha = 0{,}05$ та числа ступенів вільності $m=2$ та $n\text{-}m\text{-}1=10$.

$F_{(0,05;2;10)} = 4{,}10$.

Оскільки $F_R \gg F_{(0{,}05;2;10)}$, то з ймовірністю $p = 0{,}95$ можна стверджувати, що регресійна модель адекватно описує задане явище.

5.2.3.9 Прогнозні дані у точці: $x_1 = 39{,}3;\ x_2 = 100{,}4$

$$\hat{y}_{\text{прогн.}} = 2{,}13 \cdot (39{,}3)^{0{,}30} \cdot (100{,}4)^{0{,}65} = 127{,}5$$

5.3 Застосування MS Excel для регресійного аналізу

5.3.1 Визначення параметрів лінійної регресії за допомогою спеціальних функцій MS Excel

У середовищі MS Excel є ряд спеціальних функцій категорії **Статистичні**, за допомогою яких можна визначити параметри лінійної регресії.

5.3.1.1 Визначення параметрів парної лінійної регресії

Деякі параметри лінійної парної регресії можна визначити за допомогою функцій **НАКЛОН**; **ОТРЕЗОК** та **КОРРЕЛ**.

Розглянемо приклад, наведений у пункті 5.2.1.

На новому листі MS Excel слід ввести значення змінних x_i, y_i з табл. 5.3.

Функція **НАКЛОН** повертає тангенс кута нахилу лінії лінійної регресії до осі x, тобто, коефіцієнт b_1. (рис. 5.1).

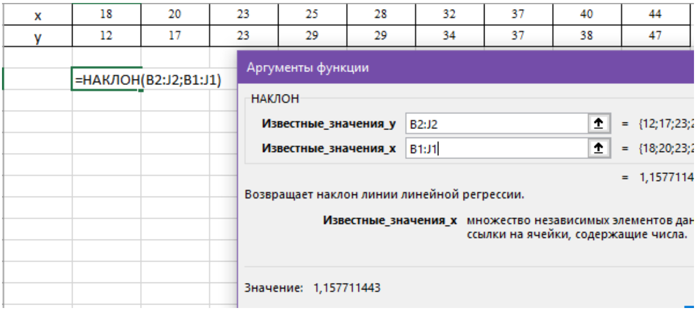


Рисунок 5.1 – Застосування функції **НАКЛОН** для визначення коефіцієнта b_1

Для наведеного прикладу результат дорівнює:

$b_1 = 1{,}157711 \approx 1{,}16$

Функція **ОТРЕЗОК** повертає відрізок, який відсікає лінія лінійної регресії на осі y, тобто, коефіцієнт b_0. (рис. 5.2).

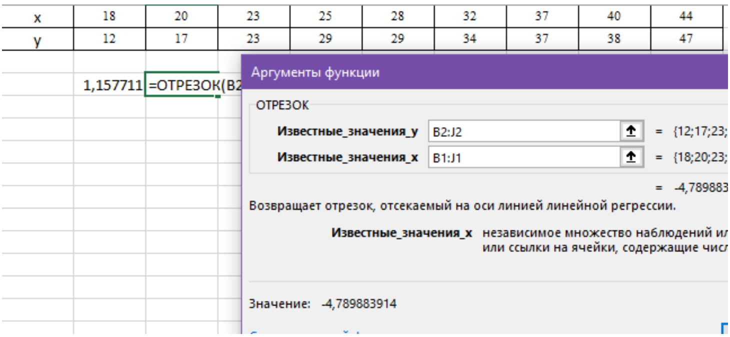


Рисунок 5.2 – Застосування функції **ОТРЕЗОК** для визначення коефіцієнта b_0

Для наведеного прикладу результат дорівнює:

$b_0 = -4{,}789883 \approx -4{,}79$

Функція **КОРРЕЛ** повертає коефіцієнт кореляції між двома множинами даних, тобто, коефіцієнт R (рис. 5.3).

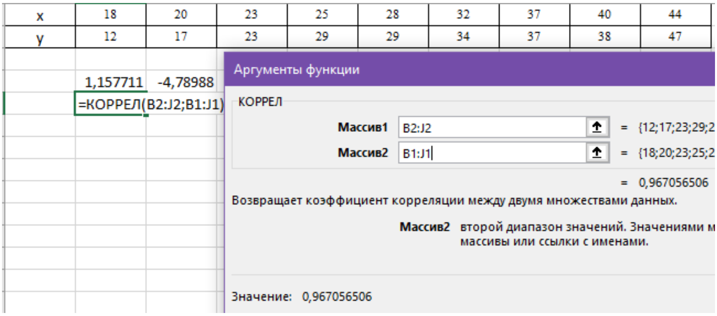


Рисунок 5.3 – Застосування функції **КОРРЕЛ** для визначення коефіцієнта кореляції R

Для наведеного прикладу результат дорівнює:

$R = 0{,}9670565 \approx 0{,}967$

Усі результати повністю співпадають з результатами розрахунків прикладу, наведеного у пункті 5.2.1.

5.3.1.2 Визначення параметрів довільної лінійної регресії

Для визначення параметрів як парної, так і множинної лінійної регресії можна застосувати функцію **ЛИНЕЙН**.

Функція **ЛИНЕЙН** повертає параметри лінійного наближення за методом найменших квадратів.

У вікні **Известные_значения_y** слід ввести діапазон комірок, у яких знаходяться значення фукнції y.

У вікні **Известные_значения_x** слід ввести повний діапазон комірок, у яких знаходяться значення всіх аргументів x_j. Якщо регресія парна, це буде один рядок, у іншому випадку виділяється діапазон, який містить усі значення аргументів.

У вікні **Конст** слід ввести "ИСТИНА", або "1", інакше коефіцієнт b_0 буде дорівнювати нулю.

У вікні **Статистика** слід ввести "ИСТИНА", або "1", інакше будуть виведені тільки коефіцієнти регресії без додаткової статистики.

Розглянемо приклад, наведений у пункті 5.2.2.

На новому листі MS Excel введемо значення змінних x_{1i}, x_{2i}, y_i з табл. 5.4 та налаштуємо діалогове вікно **Аргументи функції** відповідно до рис. 5.4.

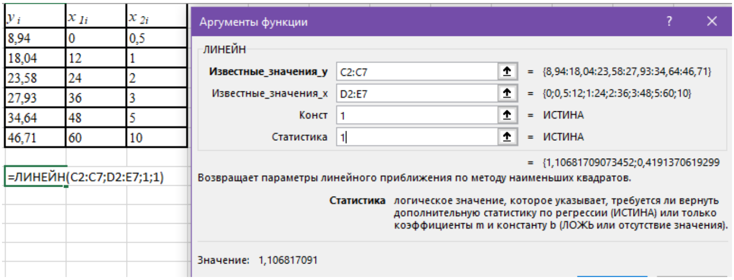
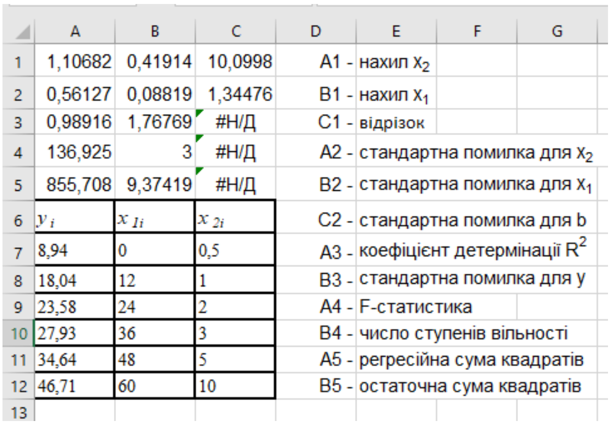


Рисунок 5.4 – Застосування функції **ЛИНЕЙН** для визначення параметрів множинної лінійної регресії

Результати наведені на рис. 5.5.



	A	B	C	D	E
1	1,10682	0,41914	10,0998	A1 -	нахил x_2
2	0,56127	0,08819	1,34476	B1 -	нахил x_1
3	0,98916	1,76769	#Н/Д	C1 -	відрізок
4	136,925	3	#Н/Д	A2 -	стандартна помилка для x_2
5	855,708	9,37419	#Н/Д	B2 -	стандартна помилка для x_1
6	y_i	x_{1i}	x_{2i}	C2 -	стандартна помилка для b
7	8,94	0	0,5	A3 -	коефіцієнт детермінації R^2
8	18,04	12	1	B3 -	стандартна помилка для y
9	23,58	24	2	A4 -	F-статистика
10	27,93	36	3	B4 -	число ступенів вільності
11	34,64	48	5	A5 -	регресійна сума квадратів
12	46,71	60	10	B5 -	остаточна сума квадратів
13					

Рисунок 5.5 – Результати розрахунків параметрів множинної лінійної регресії за допомогою функції **ЛИНЕЙН**

Коефіцієнти регресії: b_2 = 1,11; b_1 = 0,42; b_0 = 10,10

Регресійна модель має вигляд: $\hat{y} = 10{,}10 + 0{,}42 \cdot x_1 + 1{,}11 \cdot x_2$

Коефіцієнт детермінації R^2 = 0,989

F-критерій Фішера Fp = 136,93

Усі результати повністю співпадають з результатами розрахунків у пункті 5.2.2.

5.3.2 Застосування надбудови Пакет аналізу для кореляційно-регресійного аналізу

Для більш повного кореляційно-регресійного аналізу, окрім розглянутих вище фуній, MS Excel оснащений спеціальним інструментарієм **Регресія**, який є складовою частиною надбудови **Пакету аналізу**

5.3.2.1 Застосування надбудови Пакет аналізу для аналізу простої лінійної регресії

Розглянемо приклад 1, наведений у пункті 5.2.1.

На новому листі MS Excel слід ввести значення змінних x_i, y_i з табл. 5.3, відкрити діалогове вікно **Пакету аналізу**, де обрати інструментарій **Регресія** (див. рис. 5.6), після чого у знов відкритому діалоговому вікні ввести вихідні дані відповідно рис. 5.7.

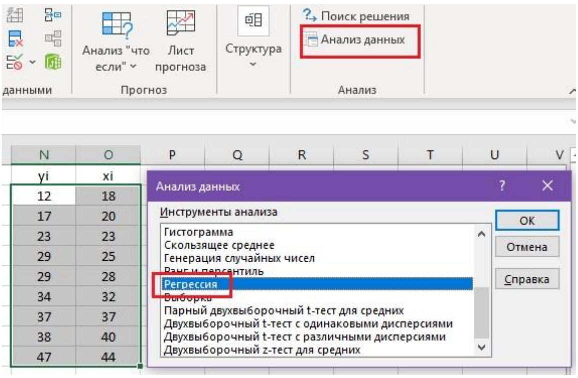


Рисунок 5.6 – Вибір інструментарію **Регресія**

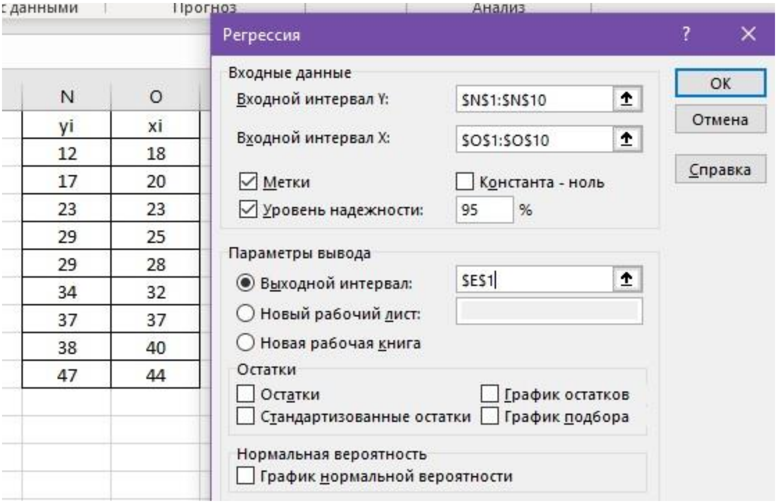


Рисунок 5.7 – Введення даних для парної регресії

У якості вхідних інтервалів для Y та X слід задати діапазони комірок з відповідними даними, включаючи заголовки.

У якості вихідного інтервалу слід вказати будь-яку вільну комірку, беручи до уваги факт, що вона є крайньою лівою верхньою коміркою результатів аналізу, тобто, таблиця з результатами, яка містить 18 рядків та 9 стовпців, буде відображена праворуч нижче, і її комірки не повинні перекриватися з комірками даних.

Оскільки для Y та X вказані інтервали з заголовками, слід встановити прапорець ***Мітки***.

Слід також вказати рівень надійності у відсотках. У розглянутому прикладі рівень значущості α = 0,05, що відповідає рівню надійності 95%.

Результати аналізу MS Excel виводить у вигляді таблиці, наведеної на рис. 5.8.

ВЫВОД ИТОГОВ

Регрессионная статистика	
Множественный R	0,967056506
R-квадрат	0,935198285
Нормированный R-квадрат	0,925940898
Стандартная ошибка	2,981467674
Наблюдения	9

Дисперсионный анализ

	df	SS	MS	F	Значимость F
Регрессия	1	897,9981758	897,9981758	101,021833	2,06889E-05
Остаток	7	62,22404643	8,889149491		
Итого	8	960,2222222			

	Коэффициенты	Стандартная ошибка	t-статистика	P-Значение	Нижние 95%	Верхние 95%	Нижние 95,0%	Верхние 95,0%
Y-пересечение	-4,789883914	3,558715815	-1,345958532	0,220273854	-13,20490964	3,625141808	-13,20490964	3,625141808
xi	1,157711443	0,115184145	10,0509618	2,06889E-05	0,88534422	1,430078666	0,88534422	1,430078666

yi	xi
12	18
17	20
23	23
29	25
29	28
34	32
37	37
38	40
47	44

Рисунок 5.8 – Результати аналізу парної регресії

Проаналізуємо отримані результати.

Вільний член рівняння регресії (***Y-перетин***): $b_0 \approx$ -4,79.

Коефіцієнт при незалежній змінній (***xi***): $b_1 \approx 1{,}16$.

Таким чином, рівняння лінійної регресії має вигляд:

$$\hat{y} = -4{,}79 + 1{,}16 \cdot x$$

Коефіцієнт кореляції $R \approx$ 0,96.

Коефіцієнт детермінації $R^2 \approx$ 0,93.

Як видно, усі результати збігаються з отриманими раніше.

Параметр ***Р-значення*** використовується для оцінки статистичної значимості коефіцієнтів регресії. Якщо Р-значення менше заданого рівня значущості α, то коефіцієнт є значущим на цьому рівні значущості, інакше коефіцієнт не значущий.

У даному прикладі Р-значення:

– для коефіцієнта b_0 дорівнює 0,22% або 0,0022;

– для коефіцієнта b_1 дорівнює $2 \cdot 10^{-5}$% або $2 \cdot 10^{-7}$.

Оскільки обидва значення менші за α = 0,05, це значить, що обидва коефіцієнти регресії значущі.

У частині таблиці **Дисперсійний аналіз** наведене значення F-критерію Фішера для ступенів вільності, що відповідають умові задачі.

В даному випадку n = 9; m = 2, тому ступені вільності:

$k_1 = m - 1 = 2 - 1 = 1$

$k_2 = n - m = 9 - 2 = 7$

Розрахункове значення F-критерію Фішера: $F_{(1,7)} = 101{,}02$.

Критичне значення статистики Фішера в Excel можна отримати, використовуючи функцію F.ОБР. Для заданих ймовірності та ступенів вільності $F_{(0{,}95;1;7)} = 5{,}59$.

Оскільки $F_{(1,7)} > F_{(0{,}95;1;7)}$, регресійна модель адекватна.

5.3.2.2 Застосування надбудови Пакет аналізу для аналізу множинної регресії

Розглянемо приклад двофакторної лінійної регресії, наведений у пункті 5.2.2.

На новому листі MS Excel слід ввести значення змінних x_i, y_i з табл. 5.4, відкрити діалогове вікно **Регресія** та ввести вихідні дані відповідно рис. 5.9.

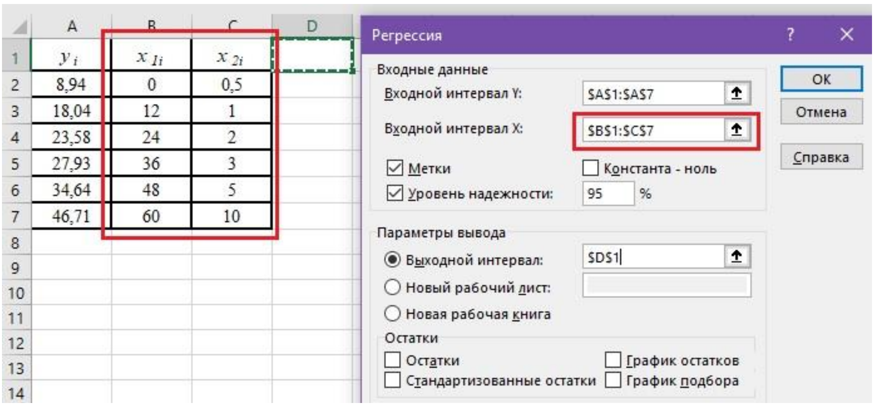


Рисунок 5.9 – Введення даних для аналізу двофакторної регресії

При цьому вхідний інтервал для двох вхідних факторів x_1 та x_2 задається спільною сукупністю комірок, тому ці дані повинні бути розташовані у сусідніх стовпцях.

Результати аналізу наведені на рис. 5.10.

D	E	F	G	H	I	J	K	L
ВЫВОД ИТОГОВ								
Регрессионная статистика								
Множественный R	0,994567154							
R-квадрат	0,989163825							
Нормированный R-квадрат	0,981939708							
Стандартная ошибка	1,767690268							
Наблюдения	6							
Дисперсионный анализ								
	df	*SS*	*MS*	*F*	*Значимость F*			
Регрессия	2	855,708	427,8542	136,9252253	0,001128013			
Остаток	3	9,37419	3,124729					
Итого	5	865,083						
	Коэффициенты	*артная о*	*татисти*	*P-Значение*	*Нижние 95%*	*ерхние 95%*	*жние 95,0*	*рхние 95,0%*
Y-пересечение	10,09979357	1,34476	7,510474	0,004891288	5,820163517	14,37942	5,820164	14,37942
x1i	0,419137062	0,08819	4,752924	0,017675509	0,138492726	0,699781	0,138493	0,699781
x2i	1,106817091	0,56127	1,97199	0,143169105	-0,679391889	2,893026	-0,67939	2,893026

Рисунок 5.10 – Результати аналізу двофакторної регресії

Проаналізуємо отримані результати.

Вільний член рівняння регресії (***Y-перетин***): $b_0 \approx 10{,}10$.

Коефіцієнти при незалежних змінних:

(x1i): $b_1 \approx 0{,}42$;

(x2i): $b_2 \approx 1{,}11$.

Таким чином, рівняння лінійної регресії має вигляд:

$$\hat{y} = 10{,}10 + 0{,}42 \cdot x_1 + 1{,}11 \cdot x_2$$

Коефіцієнт кореляції $R \approx 0{,}994$.

Коефіцієнт детермінації $R^2 \approx 0{,}989$.

Як видно, усі результати збігаються з отриманими раніше.

Параметр ***P-значення*** використовується для оцінки статистичної значимості коефіцієнтів регресії. Якщо P-значення менше заданого рівня значущості α, то коефіцієнт є значущим на цьому рівні значущості, інакше коефіцієнт не значущий.

Параметр P-значення:

– для коефіцієнта b_0 дорівнює 0,004% або 0,00004;

– для коефіцієнта b_1 дорівнює 0,017% або 0,00017;

– для коефіцієнта b_2 дорівнює 0,143% або 0,0014.

Оскільки усі P-значення менші за α = 0,05, це значить, що усі коефіцієнти регресії значущі.

Розрахункове значення F-критерію Фішера: $F_{(2,3)}$ = 136,92.

Критичне значення статистики Фішера отримаємо, використовуючи функцію F.ОБР. Для заданих ймовірності та ступенів вільності $F_{(0,95;2;3)} = 9{,}55$.

Оскільки $F_{(1,7)} > F_{(0,95;2;3)}$, регресійна модель адекватна.

5.4 Завдання до роботи

5.4.1 Проста лінійна регресія

У табл. 5.8 наведені результати вимірювань фізичної величини y (результативний показник) в залежності від фізичної величини x (факторний показник).

5.4.1.1 Скласти лінійну регресійну модель у вигляді аналітичної залежності $y = f\,(x)$.

5.4.1.2 Оцінити тісноту зв'язку отриманої моделі.

5.4.1.3 Оцінити частку впливу факторного показника x на результативний показник y.

5.4.1.3 Оцінити значущість коефіцієнта кореляції.

5.4.1.4 Оцінити значущість коефіцієнтів регресії.

5.4.1.5 Оцінити адекватність регресійної моделі.

5.4.1.6 Обчислити прогнозне значення величини y при заданому значенні фактору x. Зробити висновки.

5.4.1.7 Перевірити розрахунки у середовищі MS Excel:

– для ***непарних*** варіантів за допомогою статистичних функцій;

– для ***парних*** варіантів за допомогою інструментарію **Регресія** надбудови **Пакет аналізу**. Порівняти отримані результати.

Таблиця 5.8 – Вихідні дані до розрахунків

Варіант 1								
x	7,9	11,6	12,8	14,9	16,3	18,6	20,3	25,0
y	13,0	22,8	24,8	28,6	31,6	38,7	44,9	?
Варіант 2								
x	2	3	8	10	14	15	20	22
y	14,4	9,5	7,1	5,3	16,9	1,9	0,4	?
Варіант 3								
x	6,6	10,6	12,4	15,9	17,3	20,5	24,4	30,0
y	10,5	21,7	25,0	30,4	31,4	37,5	43,1	?

Продовження табл. 5.8

Варіант 4							
x	2,2	3,6	7,1	10,6	13,7	17,5	17,2	18,0
y	15,8	14,5	17.2	19,4	25,1	24,7	30,4	?
Варіант 5								
x	5,8	6,2	8,1	10,4	14,3	15,3	17,1	17,5
y	0,3	2,8	5,1	8,4	11,2	16,8	20,4	?
Варіант 6								
x	53	55	59	67	71	75	81	100
y	21,1	20,6	24,8	11,3	11,6	12,8	3,2	?
Варіант 7								
x	65,8	66,1	66,5	68,3	71,8	72,7	73,1	82,2
y	16,6	15,3	12,0	11,5	18,1	15,8	14,9	?
Варіант 8								
x	21	34	41	43	55	68	72	80
y	13	16	15	18	28	32	47	?
Варіант 9								
x	2,2	3,8	4,1	6,3	7,3	8,1	8,8	10,0
y	12	16	13	11	14	19	22	?
Варіант 10								
x	23,3	28,5	29,1	39,1	41,7	43,9	45,0	50,0
y	2,5	3,5	4,9	5,8	7,0	7,7	11,0	?
Варіант 11								
x	5	11	24	31	36	43	55	65
y	8	7	12	15	19	24	36	?
Варіант 12								
x	2,2	3,8	4,1	6,3	7,2	7,9	8,4	10,0
y	6,4	8,8	9,1	11.3	12,9	15,0	18,1	?
Варіант 13								
x	25,4	27,4	30,1	33,1	38,6	41,2	44,5	50,0
y	18,2	22,5	27,8	31,2	41,3	47,9	51,6	?
Варіант 14								
x	15	18	24	33	37	45	55	60
y	12	14	18	19	21	26	30	?

Продовження табл. 5.8

Варіант 15								
x	34	36	38	41	44	47	51	65
y	19	18	15	11	8	6	2	?
Варіант 16								
x	41,1	43,8	45,4	47,4	50,1	51,3	53,4	55,0
y	68,8	55,2	41,3	35,7	30,1	27,4	25,0	?
Варіант 17								
x	7,5	8,0	9,1	12.6	16,4	19,3	21,5	25,0
y	21,1	25,4	28,1	33,2	35,7	38,8	40,1	?
Варіант 18								
x	16	17	19	24	27	32	38	40
y	3,3	5,4	7,8	11,6	13,5	17,0	21,2	?
Варіант 19								
x	7,7	10,2	11,4	11,9	16,0	18,1	19,3	20,0
y	61,1	66,3	72,8	78,9	86,3	88,2	90,5	?
Варіант 20								
x	12	17	18	19	24	28	31	40
y	2	5	11	15	14	17	21	?
Варіант 21								
x	0,1	0,4	0,7	1,1	1,6	1,7	1,9	2,0
y	0,9	1,2	1,3	1,0	1,5	1,9	2,2	?
Варіант 22								
x	13,2	15,7	17,4	19,9	25,6	26,1	28,1	30,0
y	99,5	85,2	71,4	66,3	60,8	54,6	50,1	?
Варіант 23								
x	0,02	0,08	0,15	0,19	0,31	0,43	0,47	0,50
y	0,01	0,05	0,12	0,18	0,21	0,27	0,31	?
Варіант 24								
x	14	18	19	22	27	33	41	50
y	100	88	73	61	57	44	39	?
Варіант 25								
x	2,2	3,3	5,7	6,1	7,8	9,3	9,5	10,0
y	2.4	5,6	8,3	10,0	13,7	17,4	21,0	?

5.4.2 Множинна нелінійна регресія

У табл. 5.9 наведені статистичні дані результативного показника y та факторів x_1, x_2, які впливають на цей показник.

5.4.2.1 Скласти нелінійну регресійну модель у вигляді аналітичної залежності $y = f(x_1, x_2)$.

5.4.2.2 Оцінити тісноту зв'язку отриманої моделі.

5.4.2.3 Оцінити частку впливу кожного з факторних показників x_1, x_2 на результативний показник y.

5.4.2.3 Оцінити значущість коефіцієнта кореляції.

5.4.2.4 Оцінити значущість коефіцієнтів нелінійної регресії.

5.4.2.5 Оцінити адекватність регресійної моделі.

5.4.2.6 Обчислити прогнозне значення величини y при заданих значеннях факторів x_1, x_2. Зробити висновки.

Таблиця 5.9 – Вихідні дані до розрахунків

<table>
<tr><td colspan="10">Варіант 1</td></tr>
<tr><td>x_1</td><td>1,12</td><td>1,39</td><td>1,53</td><td>1,96</td><td>2,2</td><td>2,32</td><td>2,76</td><td>2,97</td><td>3,19</td></tr>
<tr><td>x_2</td><td>13,13</td><td>15,48</td><td>15,58</td><td>17,26</td><td>17,44</td><td>19,72</td><td>21,51</td><td>23,5</td><td>24,93</td></tr>
<tr><td>y</td><td>49,48</td><td>54,28</td><td>54,24</td><td>58,46</td><td>59,08</td><td>64,84</td><td>70,09</td><td>76,45</td><td>80,95</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Прогноз</td><td>x_1</td><td>4</td><td colspan="2" rowspan="2">Залежність</td><td colspan="4" rowspan="2">$y = b_0 + \frac{b_1}{x_1} + \frac{b_2}{x_2}$</td></tr>
<tr><td>x_2</td><td>25</td></tr>
<tr><td colspan="10">Варіант 2</td></tr>
<tr><td>x_1</td><td>10,0</td><td>12,0</td><td>8,0</td><td>9,0</td><td>14,3</td><td>15,5</td><td>13,6</td><td>18,6</td><td>16,1</td></tr>
<tr><td>x_2</td><td>14,0</td><td>13,0</td><td>13,5</td><td>15,0</td><td>12,0</td><td>15,8</td><td>15,5</td><td>15,6</td><td>17,0</td></tr>
<tr><td>y</td><td>38,0</td><td>37,9</td><td>38,5</td><td>39,0</td><td>38,8</td><td>40,0</td><td>39,5</td><td>45,0</td><td>43,0</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Прогноз</td><td>x_1</td><td>20</td><td colspan="2" rowspan="2">Залежність</td><td colspan="4" rowspan="2">$y = A \cdot {x_1}^{b_1} \cdot {x_2}^{b_2}$</td></tr>
<tr><td>x_2</td><td>20</td></tr>
<tr><td colspan="10">Варіант 3</td></tr>
<tr><td>x_1</td><td>52,06</td><td>52,63</td><td>54,1</td><td>57,86</td><td>58,44</td><td>61,71</td><td>66,06</td><td>68,23</td><td>78,11</td></tr>
<tr><td>x_2</td><td>21,06</td><td>22,85</td><td>24,73</td><td>29</td><td>31,07</td><td>35,48</td><td>35,9</td><td>39,93</td><td>41,57</td></tr>
<tr><td>y</td><td>5,62</td><td>5,51</td><td>5,645</td><td>5,812</td><td>5,947</td><td>6,092</td><td>6,11</td><td>6,46</td><td>6,356</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Прогноз</td><td>x_1</td><td>80</td><td colspan="2" rowspan="2">Залежність</td><td colspan="4" rowspan="2">$y = \sqrt{b_0 + b_1 ln x_1 + b_2 x_2}$</td></tr>
<tr><td>x_2</td><td>50</td></tr>
</table>

Продовження табл. 5.9

<table>
<tr><td colspan="10">Варіант 4</td></tr>
<tr><td>x_1</td><td>4,1</td><td>5,8</td><td>4,5</td><td>6,3</td><td>5,4</td><td>7,1</td><td>8,9</td><td>11,1</td><td>9,0</td></tr>
<tr><td>x_2</td><td>8,8</td><td>12,8</td><td>8,5</td><td>15,1</td><td>7,9</td><td>15,8</td><td>8,8</td><td>18,5</td><td>17,4</td></tr>
<tr><td>y</td><td>42,0</td><td>50,0</td><td>42,0</td><td>52,7</td><td>41,0</td><td>54,0</td><td>43,0</td><td>64,0</td><td>53,2</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Прогноз</td><td>x_1</td><td>12</td><td colspan="2" rowspan="2">Залежність</td><td colspan="4" rowspan="2">$y = A \cdot {x_1}^{b_1} \cdot {x_2}^{b_2}$</td></tr>
<tr><td>x_2</td><td>20</td></tr>
<tr><td colspan="10">Варіант 5</td></tr>
<tr><td>x_1</td><td>30,1</td><td>32,6</td><td>33,7</td><td>35,1</td><td>36,4</td><td>39,4</td><td>41,8</td><td>43,3</td><td>44,2</td></tr>
<tr><td>x_2</td><td>52,1</td><td>53,5</td><td>53,1</td><td>56,5</td><td>54,1</td><td>58,2</td><td>55,1</td><td>57,2</td><td>56,1</td></tr>
<tr><td>y</td><td>78,2</td><td>82,5</td><td>83,8</td><td>86,7</td><td>87</td><td>92,8</td><td>91,5</td><td>95,3</td><td>94,7</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Прогноз</td><td>x_1</td><td>50</td><td colspan="2" rowspan="2">Залежність</td><td colspan="4" rowspan="2">$y = A \cdot {x_1}^{b_1} \cdot {x_2}^{b_2}$</td></tr>
<tr><td>x_2</td><td>60</td></tr>
<tr><td colspan="10">Варіант 6</td></tr>
<tr><td>x_1</td><td>34,4</td><td>35,5</td><td>35,9</td><td>57,3</td><td>40,1</td><td>42,7</td><td>44,6</td><td>44,8</td><td>46,5</td></tr>
<tr><td>x_2</td><td>67,2</td><td>67,6</td><td>72,7</td><td>76,9</td><td>81</td><td>84,4</td><td>85,8</td><td>89,8</td><td>93,7</td></tr>
<tr><td>y</td><td>96,3</td><td>97,2</td><td>102,2</td><td>107,1</td><td>114</td><td>116,5</td><td>123,1</td><td>126,2</td><td>131</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Прогноз</td><td>x_1</td><td>40</td><td colspan="2" rowspan="2">Залежність</td><td colspan="4" rowspan="2">$y = A \cdot {x_1}^{b_1} \cdot {x_2}^{b_2}$</td></tr>
<tr><td>x_2</td><td>40</td></tr>
<tr><td colspan="10">Варіант 7</td></tr>
<tr><td>x_1</td><td>19,0</td><td>16,3</td><td>17,5</td><td>18,4</td><td>17,2</td><td>15,0</td><td>19,8</td><td>16,1</td><td>14,9</td></tr>
<tr><td>x_2</td><td>65,4</td><td>73,9</td><td>68,5</td><td>64,5</td><td>69,3</td><td>83,8</td><td>62,3</td><td>58,7</td><td>69,4</td></tr>
<tr><td>y</td><td>2,4</td><td>2,7</td><td>2,6</td><td>2,3</td><td>2,4</td><td>2,8</td><td>2,2</td><td>2,5</td><td>2,6</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Прогноз</td><td>x_1</td><td>20</td><td colspan="2" rowspan="2">Залежність</td><td colspan="4" rowspan="2">$y = b_0 + \frac{b_1}{x_1} + \frac{b_2}{x_2}$</td></tr>
<tr><td>x_2</td><td>70</td></tr>
<tr><td colspan="10">Варіант 8</td></tr>
<tr><td>x_1</td><td>36,4</td><td>39,4</td><td>41,8</td><td>43,3</td><td>44,2</td><td>46</td><td>47,8</td><td>49,5</td><td>49,7</td></tr>
<tr><td>x_2</td><td>54,1</td><td>58,2</td><td>55,1</td><td>57,2</td><td>56,1</td><td>56,1</td><td>57,1</td><td>58,7</td><td>58,1</td></tr>
<tr><td>y</td><td>87</td><td>92,8</td><td>91,5</td><td>95,3</td><td>94,7</td><td>96,7</td><td>99,5</td><td>102,9</td><td>102,6</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Прогноз</td><td>x_1</td><td>40</td><td colspan="2" rowspan="2">Залежність</td><td colspan="4" rowspan="2">$y = A \cdot {x_1}^{b_1} \cdot {x_2}^{b_2}$</td></tr>
<tr><td>x_2</td><td>40</td></tr>
</table>

Продовження табл. 5.9

Варіант 9									
x_1	15,0	18,6	16,2	15,7	17,9	16,3	17,7	16,8	17,5
x_2	94,0	78,0	87,5	90,2	84,8	95,9	91,0	84,7	88,2
y	2,7	2,5	2,9	2,9	2,6	2,7	2,7	2,5	2,7
Прогноз	x_1	25	***Залежність***		$y = b_0 + \frac{b_1}{x_1} + \frac{b_2}{x_2}$				
	x_2	100							
Варіант 10									
x_1	4,13	5,35	7,67	8,09	9,01	10,77	11,61	10,33	10,94
x_2	7,55	8,78	9,65	10,77	11,78	13,41	14,37	13,11	15,15
y	65,14	54,37	78,32	82,16	79,24	90,58	85,79	76,36	82,15
Прогноз	x_1	15	***Залежність***		$y = A \cdot {x_1}^{b_1} \cdot {x_2}^{b_2}$				
	x_2	20							
Варіант 11									
x_1	4,53	5,75	8,07	8,49	9,41	11,17	12,01	10,73	11,34
x_2	7,95	9,18	10,05	11,17	12,18	13,81	14,77	13,51	15,55
y	65,54	54,77	78,72	82,56	79,64	90,98	86,19	76,76	82,55
Прогноз	x_1	15	***Залежність***		$y = A \cdot {x_1}^{b_1} \cdot {x_2}^{b_2}$				
	x_2	18							
Варіант 12									
x_1	2	5	9	10	16	20	21	29	32
x_2	1,41	2,24	3,00	3,16	4,00	4,47	4,58	5,39	5,66
y	1,30	0,50	0,30	0,26	0,21	0,18	0,15	0,12	0,11
Прогноз	x_1	35	***Залежність***		$y = b_0 + \frac{b_1}{x_1} + \frac{b_2}{{x_2}^2}$				
	x_2	6							
Варіант 13									
x_1	4,93	6,15	8,47	8,89	9,81	11,57	12,41	11,13	11,74
x_2	8,35	9,58	10,45	11,57	12,58	14,21	15,17	13,91	15,95
y	65,94	55,17	79,12	82,96	80,04	91,38	86,59	77,16	82,95
Прогноз	x_1	15	***Залежність***		$y = A \cdot {x_1}^{b_1} \cdot {x_2}^{b_2}$				
	x_2	19							

Продовження табл. 5.9

Варіант 14									
x_1	5,5	6,2	6,0	7,4	5,8	8,3	6,2	9,5	7,5
x_2	14,1	11,4	14,0	14,4	17,7	16,1	18,6	21,8	20,5
y	43,9	41,2	46,0	57,6	47,8	59,6	56,7	69,1	77,9
Прогноз		x_1	10	***Залежність***		$y = A \cdot {x_1}^{b_1} \cdot {x_2}^{b_2}$			
		x_2	25						
Варіант 15									
x_1	5	7	10	11	13	16	18	21	25
x_2	1,71	1,91	2,15	2,22	2,35	2,52	2,62	2,76	2,92
y	7	18	56	75	125	236	336	535	904
Прогноз		x_1	30	***Залежність***		$y = b_0 + \frac{b_1}{x_1} + b_2 \cdot x_2^3$			
		x_2	4						
Варіант 16									
x_1	12,6	11,9	12,4	11,1	14,0	14,4	13,1	14,5	15,6
x_2	4,8	4,0	4,1	5,3	7,4	6,4	8,0	7,3	6,4
y	89,7	95,4	93,1	87,4	106,7	100,2	109,8	110,6	116,3
Прогноз		x_1	20	***Залежність***		$y = A \cdot {x_1}^{b_1} \cdot {x_2}^{b_2}$			
		x_2	5						
Варіант 17									
x_1	0,208	0,076	0,172	0,076	0,064	0,079	0,074	0,054	0,069
x_2	2,608	2,983	2,646	3,332	3,847	2,898	4,899	4,012	3,782
y	34,3	36,3	25,7	37,5	38,5	33,6	43,6	40,8	40,6
Прогноз		x_1	0,3	***Залежність***		$y = A \cdot {x_1}^{b_1} \cdot {x_2}^{b_2}$			
		x_2	5,0						
Варіант 18									
x_1	9,36	13,29	11,57	13,64	10,79	15,30	13,25	14,88	16,52
x_2	10,70	14,00	12,00	13,50	14,80	17,10	17,40	17,60	18,10
y	28,6	32,5	30,8	31,5	41,5	40,5	40,1	43,3	45,0
Прогноз		x_1	20	***Залежність***		$y = A \cdot {x_1}^{b_1} \cdot {x_2}^{b_2}$			
		x_2	20						

Продовження табл. 5.9

Варіант 19									
x_1	12,48	15,34	15,05	13,25	12,90	13,02	17,57	18,04	15,06
x_2	7,08	8,28	10,47	8,86	9,65	11,58	13,65	14,59	15,35
y	85,40	76,80	98,80	96,40	108,70	136,43	117,46	117,60	149,38
Прогноз	x_1	20	***Залежність***	$y = A \cdot x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2}$					
	x_2	20							
Варіант 20									
x_1	4,3	5,6	6,9	5,1	5,0	4,3	8,8	12,8	14,6
x_2	11,9	9,5	11,5	15,6	15,1	17,4	15,7	18,9	16,6
y	54,2	54,6	62,7	73,9	67,2	64,4	80,1	92,7	88,3
Прогноз	x_1	15	***Залежність***	$y = A \cdot x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2}$					
	x_2	20							
Варіант 21									
x_1	7,7	8,9	9,8	9,2	12,3	8,8	13,3	13,2	12,5
x_2	6,6	5,2	7,4	8,4	9,4	8,8	11,7	17,7	15,9
y	40,4	40,6	50	47,7	57,8	47,7	56,1	63,8	59,7
Прогноз	x_1	15	***Залежність***	$y = A \cdot x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2}$					
	x_2	20							
Варіант 22									
x_1	14,01	12,26	16,50	17,49	14,03	18,64	16,34	14,63	18,60
x_2	15,74	15,92	16,57	15,64	16,02	13,77	15,81	16,94	17,81
y	95,80	98,70	116,83	116,06	103,81	113,05	109,70	106,96	122,99
Прогноз	x_1	20	***Залежність***	$y = A \cdot x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2}$					
	x_2	25							
Варіант 23									
x_1	0,52	5,32	10,02	14,61	20,11	20,17	25,3	27,61	30,25
x_2	2,42	7,02	11,38	14,3	15,34	17,31	21,78	24,69	29,5
y	2,399	0,96	0,59	0,58	0,56	0,409	0,367	0,411	0,34
Прогноз	x_1	40	***Залежність***	$y = \frac{1}{b_0 + b_1 ln x_1 + b_2 x_2}$					
	x_2	40							

Продовження табл. 5.9

Варіант 24									
x_1	15,8	16,7	11,0	10,8	14,1	19,8	17,4	14,9	19,8
x_2	16,0	16,5	14,2	14,8	15,3	17,8	18,1	19,5	18,8
y	40,1	41,0	30,2	34,3	38,8	45,5	44,2	48,0	47,3
Прогноз	x_1	25	***Залежність***		$y = A \cdot {x_1}^{b_1} \cdot {x_2}^{b_2}$				
	x_2	25							

Варіант 25									
x_1	0,43	0,78	0,91	1,03	1,29	1,3	1,62	1,7	1,71
x_2	5,12	5,09	4,7	4,23	3,87	3,43	3,26	2,85	2,59
y	21,22	23,91	21,78	17,83	17,36	12,7	14,63	11,08	9,82
Прогноз		x_1	2	***Залежність***		$y = e^{b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2}$			

5.5 Зміст звіту

5.5.1 Тема та мета роботи.

5.5.2 Короткі теоретичні відомості.

5.5.3 Розрахунки та оцінка параметрів простої лінійної регресійної моделі методом найменших квадратів відповідно з варіантом.

5.5.4 Економічне обґрунтування отриманих результатів.

5.5.5 Розрахунки та оцінка параметрів простої лінійної регресійної моделі за допомогою надбудови **Аналіз даних** у середовищі MS Excel. Порівняння результатів.

5.5.6 Розрахунки та оцінка параметрів множинної нелінійної регресійної моделі відповідно з варіантом.

5.5.7 Економічне обґрунтування отриманих результатів.

5.5.8 Висновки.

ЛІТЕРАТУРА

1. Конспект лекцій з дисципліни "Методологія наукових досліджень" для магістрів спеціальностей 151 "Автоматизація та комп'ютерно інтегровані технології", 172 "Телекомунікації та радіотехніка" (освітні програми "Радіоелектронні апарати та засоби", "Інтелектуальні технології мікросистемної радіоелектронної техніки") усіх форм навчання / Уклад. : Ірина ПОСПЕЄВА, Наталія ФУРМАНОВА – Запоріжжя : НУЗП, 2023. – 327 с.

2. Гончаренко Я.В. Математичне програмування : монографія. К. : НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2010. 184 с.

3. Демиденко М.А. Математичне програмування : навч. посіб. Дніпропетровськ : НГУ, 2005. 110 с.

4. Літнарович Р.М. Побудова і дослідження математичної моделі за джерелами експериментальних даних методами регресійного аналізу : навч. посіб. Рівне: МЕГУ, 2011. 140 с.

5. Жильцов О.Б. Теорія ймовірностей та математична статистика у прикладах і задачах : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / за ред. Г.О. Михаліна. К. : ун-т ім.. Грінченка, 2015. 336 с.

6. Ржевський С.В. Вступ до економетрії : навч. посіб. для студентів економічних спеціальностей. Київ : ЄУФГМБ, 1999. 91 с.

ДОДАТОК А

КРИТИЧНІ ТОЧКИ РОЗПОДІЛУ СТЬЮДЕНТА

Число ступенів вільності k	Рівень значущості α (однорбічна критична область)			
	0,050	0,025	0,010	0,005
1	6,31	12,7	31,82	63,7
2	2,92	4,30	6,97	9,92
3	2,35	3,18	4,54	5,84
4	2,13	2,78	3,75	4,60
5	2,01	2,57	3,37	4,03
6	1,94	2,45	3,14	3,71
7	1,89	2,36	3,00	3,50
8	1,86	2,31	2,90	3,36
9	1,83	2,26	2,82	3,25
10	1,81	2,23	2,76	3,17
11	1,80	2,20	2,72	3,11
12	1,78	2,18	2,68	3,05
13	1,77	2,16	2,65	3,01
14	1,76	2,14	2,62	2,98
15	1,75	2,13	2,60	2,95
16	1,75	2,12	2,58	2,92
17	1,74	2,11	2,57	2,90
18	1,73	2,10	2,55	2,88
19	1,73	2,09	2,54	2,86
20	1,73	2,09	2,53	2,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83
22	1,72	2,07	2,51	2,82
23	1,71	2,07	2,50	2,81
24	1,71	2,06	2,49	2,80
25	1,71	2,06	2,49	2,79
26	1,71	2,06	2,48	2,78
27	1,71	2,05	2,47	2,77
28	1,70	2,05	2,46	2,76
29	1,70	2,05	2,46	2,76
30	1,70	2,04	2,46	2,75
40	1,68	2,02	2,42	2,70
60	1,67	2,00	2,39	2,66
120	1,66	1,98	2,36	2,62
∞	1,64	1,96	2,33	2,58

ДОДАТОК Б

КРИТИЧНІ ТОЧКИ РОЗПОДІЛУ ФІШЕРА-СНЕДЕКОРА

Рівень значущості $\alpha = 0,05$											
	k_1										
k_2	1	2	3	4	5	6	7	8	10	12	>50
1	161	200	216	225	230	234	237	239	242	244	254
2	18,5	19,0	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,39	19,41	19,53
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,78	8,74	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	5,96	5,91	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,74	4,68	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,06	4,00	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,63	3,57	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,34	3,28	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,13	3,07	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	2,97	2,91	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,86	2,79	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,0	2,92	2,85	2,76	2,69	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,67	2,60	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,60	2,53	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,55	2,48	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,49	2,42	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,45	2,38	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,57	2,51	2,41	2,34	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,38	2,31	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,31	2,60	2,50	2,45	2,35	2,28	1,84
50	4,03	3,28	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,03	1,95	1,44
>50	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	2,02	1,94	1,84	1,75	1,00