МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет « Запорізька політехніка »

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО РОЗРАХУНКОВИХ РОБІТ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ.

РОЗДІЛИ: «КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ», «КРИВОЛІНІЙНІ ТА ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ»

для студентів технічних спеціальностей
денної форми навчання

2025

Методичні вказівки до розрахункових робіт з вищої математики. Розділи: «Кратні інтеграли», «Криволінійні та поверхневі інтеграли» для студентів технічних спеціальностей денної форми навчання / Укл. : І. М. Килимник. – Запоріжжя : НУ «Запорізька політехніка», 2025. – 73 с.

Укладач: Килимник І.М., к. т. н., доцент

Рецензент: Онуфрієнко В.М., д. ф.-м. н., професор

Відповідальний за випуск: Килимник І.М., к. т. н., доцент

Затверджено на засіданні
кафедри «Математика»
НУ «Запорізька політехніка»
Протокол № 1 від 28.08.2025 р.

Рекомендовано НМК
Машинобудівного факультету
НУ «Запорізька політехніка»
Протокол № 2 від 30.09.2025 р.

ЗМІСТ

I. КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

1.1. Відомості з теорії

Таблиця невизначених інтегралів $\int f(u)\,du = F(u) + C$

1	$\int du = u + C$	2	$\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\ ;\alpha \neq -1$
2а	$\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$	2б	$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$
3	$\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + C$	4	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$
4а	$\int \mathrm{e}^u\, du = \mathrm{e}^u + C$	5	$\int \sin u\, du = -\cos u + C$
6	$\int \cos u\, du = \sin u + C$	7	$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$
8	$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$	9	$\int \operatorname{tg} u\, du = -\ln\lvert\cos u\rvert + C$
10	$\int \operatorname{ctg} u\, du = \ln\lvert\sin u\rvert + C$	11	$\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left\lvert\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right\rvert + C =$ $= \ln\left\lvert\frac{1}{\sin \mathrm{u}} - \operatorname{ctg} u\right\rvert + C$
12	$\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left\lvert\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C =$ $= \ln\left\lvert\frac{1}{\cos \mathrm{u}} - \operatorname{tg} u\right\rvert + C$	13	$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C$

14	$\int \frac{du}{u^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{u-a}{u+a}\right\|+C$	15	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\arcsin\frac{u}{a}+C$
16	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2\pm a^2}}=\ln\left\|u+\sqrt{u^2\pm a^2}\right\|+C$	17	$\int \sqrt{a^2-u^2}\,du=u\cdot\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{2}+$ $+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a}+C$
18	$\int \sqrt{u^2\pm a^2}\,du=u\cdot\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{2}\pm\frac{a^2}{2}\ln\left\|u+\sqrt{a^2-u^2}\right\|+C$		
19	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln\left\|f(x)\right\|+C$	20	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{(x)}}dx=2\sqrt{f(x)}+C$

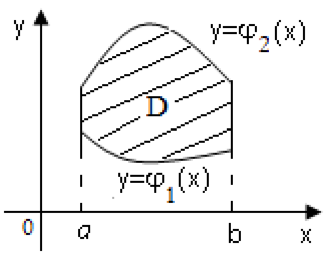
Обчислення подвійного інтеграла

Подвійний інтеграл у декартових координатах має вигляд:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy\,, \qquad (1.1)$$

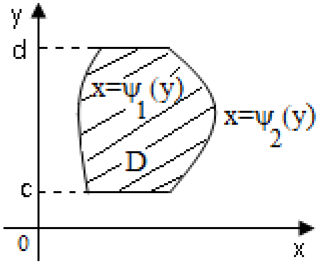
де $f(x,y)$ – підінтегральна функція двох змінних x та y, D – область інтегрування.

Подвійний інтеграл обчислюється за допомогою повторних (двократних) інтегралів:



Випадок 1.

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \qquad (1.2)$$



Випадок 2.

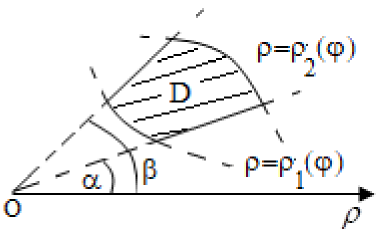
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \qquad (1.3)$$

Подвійний інтеграл у полярних координатах.

Перехід до полярних координат здійснюється за формулами:

$$x = \rho\cos\varphi,\ \ y = \rho\sin\varphi,\ \ dxdy = \rho d\rho d\varphi. \qquad (1.4)$$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho d\varphi d\rho. \qquad (1.5)$$



Для області D, яка обмежена двома променями $\varphi = \alpha$ і $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$ та двома кривими $\rho = \rho_1(\varphi)$ і $\rho = \rho_2(\varphi)$ $(\rho_1(\varphi) \le \rho_2(\varphi))$, то подвійний інтеграл обчислюється за формулою:

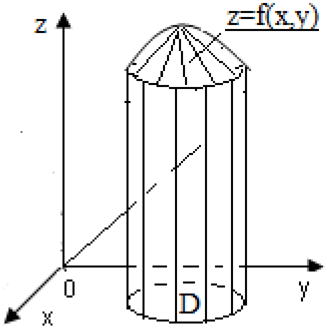
$$\iint_{D'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho d\varphi d\rho = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho. \qquad (1.6)$$

Застосування подвійного інтеграла.

1) Площа області D.

$$S = \iint_D dxdy. \qquad (1.7)$$

2) Об'єм циліндричного тіла, твірні якого паралельні осі Oz, яке обмежене знизу областю D, що лежить на площині xOy, а зверху поверхнею



$$z = f(x, y) \ (f(x, y) \geq 0, (x, y) \in D),$$

яка неперервна в області D, знаходиться за формулою

$$V = \iint_D f(x, y) dxdy. \tag{1.8}$$

3) Площа поверхні, яка задана рівнянням $z = f(x, y)$ і однозначно проектується на площину xOy в область D, а функції $f(x, y)$, $f_x'(x, y)$, $f_y'(x, y)$ неперервні в цій області, то площу Q цієї поверхні знаходять за формулою

$$Q = \iint_D \sqrt{1 + \left(f_x'(x, y)\right)^2 + \left(f_y'(x, y)\right)^2}\, dxdy. \tag{1.9}$$

Якщо поверхня проектується на координатні площини xOz або yOz, то формула відповідно змінюється.

4) Якщо $\gamma = \gamma(x, y)$ – поверхнева густина неоднорідної плоскої пластини D, то її маса m і координати центра маси $(x_c; y_c)$ знаходять за формулами:

$$m = \iint_D \gamma(x, y) dxdy, \tag{1.10}$$

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\iint_D x\gamma(x, y)dxdy}{m}, \quad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\iint_D y\gamma(x, y)dxdy}{m}, \tag{1.11}$$

де M_x, M_y – статичні моменти пластини відносно осей Ox та Oy відповідно.

Якщо пластина однорідна, то густина $\gamma = \text{const}$.

Обчислення потрійного інтеграла

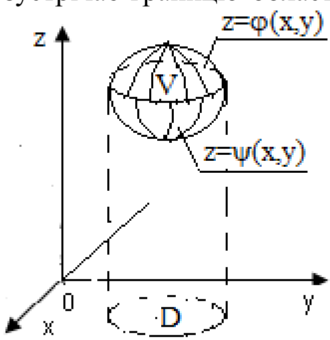
Потрійний інтеграл у декартових прямокутних координатах зводиться до обчислення трикратного інтеграла. Нехай функція $f(x, y, z)$ визначена та неперервна в замкненій області $V \in R^3$.

1) Якщо область V є прямокутний паралелепіпед, ребра якого паралельні осям координат: $V: \begin{cases} a \le x \le b \\ c \le y \le d \\ e \le z \le k \end{cases}$, то потрійний інтеграл обчислюється за формулою:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z) dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_e^k f(x,y,z) dz. \qquad (1.12)$$

Порядок інтегрування в правій частині формули може бути будь яким.

2) Якщо область V така, що кожна «вертикальна» пряма, зустрічає границю області V та має з нею не більше двох спільних точок, а область D є її проекцією на площину xOy і рівняння поверхонь, що обмежують область V зверху і знизу $z = \varphi(x, y)$ та $z = \psi(x, y)$ відповідно, то потрійний інтеграл записується за формулою



$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{\psi(x,y)}^{\varphi(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,. \tag{1.13}$$

Якщо область D обмежена лініями: $D\!:\begin{cases} a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \end{cases}$, то

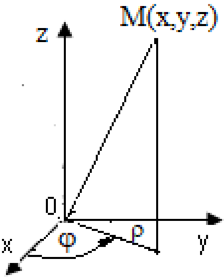
$$\iint\limits_D dxdy \int\limits_{\psi(x,y)}^{\varphi\varphi(x,y)} f(x,y,z)\,dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{\psi(x,y)}^{\varphi\varphi(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,. \tag{1.14}$$

Якщо область D обмежена лініями: $D\!:\begin{cases} c \le y \le d \\ x_1(y) \le x \le x_2(y) \end{cases}$, то

$$\iint\limits_D dxdy \int\limits_{\psi(x,y)}^{\varphi(x,y)} f(x,y,z)\,dz = \int\limits_c^d dx \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} dy \int\limits_{\psi(x,y)}^{\varphi(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,. \tag{1.15}$$

Потрійний інтеграл у циліндричних координатах.

Якщо область D є сектор, то потрійний інтеграл зручно обчислювати, перейшовши до циліндричних координат. Перехід здійснюється за формулами:



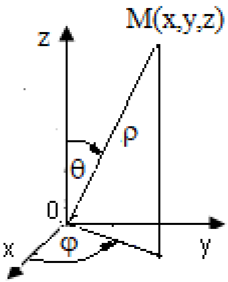
$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z, \\ dxdydz = \rho d\rho d\varphi dz. \end{cases}, \text{ де} \begin{cases} 0 \le \rho \le +\infty, \\ 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ -\infty \le z \le \infty. \end{cases} \tag{1.16}$$

Тоді

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V_1} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho d\rho d\varphi dz\,. \tag{1.17}$$

Потрійний інтеграл у сферичних координатах

Якщо область V є частиною сфери, то потрійний інтеграл зручно обчислювати, перейшовши до сферичних координат. Перехід здійснюється за формулами:



$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\varphi, \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi, \\ z = \rho \cos\theta, \\ dx\,dy\,dz = \rho^2 \sin\theta \, d\rho \, d\varphi \, d\theta, \end{cases} \tag{1.18}$$

де $\begin{cases} 0 \le \rho \le +\infty, \\ 0 \le \phi \le 2\pi, \\ 0 \le \theta \le \pi. \end{cases}$.

Тоді

$$\iiint_V f(x, y, z)dxdydz = \\ = \iiint_{V_1} f\left(\rho \sin\theta \cos\varphi, \rho \sin\theta \sin\varphi, \rho \cos\theta\right)\rho^2 \sin\theta d\rho d\varphi d\theta. \tag{1.19}$$

Зауваження: $\begin{cases} \rho^2 = \mathrm{x}^2 + y^2 + z^2 \\ \varphi = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} \\ \theta = \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \end{cases}$

1.2. Аудиторні завдання

1.2.1. Обчислити подвійний інтеграл по прямокутній області D:

1) $\iint\limits_D (x+2y)\,dx\,dy$, де $D:\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$.

Відповідь: 5.

2) $\iint\limits_D \sin(2x+y)\,dx\,dy$, де $D:\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$.

Відповідь: $\frac{1}{2}(\sin 1 + \sin 2 - \sin 3)$.

3) $\iint\limits_D (xy+y^2)\,dx\,dy$, де $D:\begin{cases} 1 \le x \le 3 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$.

Відповідь: $\frac{8}{3}$.

4) $\iint\limits_D \frac{x}{1+y^2}\,dx\,dy$, де $D:\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le \sqrt{3} \end{cases}$.

Відповідь: $\frac{\pi}{6}$.

5) $\iint\limits_D \mathrm{e}^{\,2x-3y}\,dx\,dy$, де $D:\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le \frac{1}{3} \end{cases}$.

Відповідь: $-\frac{1}{6}\left(\mathrm{e}^2-1\right)\cdot\left(\mathrm{e}^{-1}-1\right)$.

1.2.2. Подати подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ у вигляді повторного інтеграла по області D, обмеженої вказаними лініями:

1) $D:\begin{cases} y = x-4 \\ y^2 = 2x \end{cases}$. Відповідь: $\int\limits_{-2}^{4} dy \int\limits_{0{,}5\,y^2}^{y+4} f(x,y)\,dx$

2) $D:\begin{cases} y = \sqrt{x},\ y=0 \\ x+y=2 \end{cases}$. Відповідь: $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y^2}^{2-y} f(x,y)\,dx$

3) $D:\begin{cases} y = \sqrt{x},\ x=0 \\ x+y=2 \end{cases}$. Відповідь: $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{\sqrt{x}}^{2-x} f(x,y)\,dy$

1.2.3. Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі:

1) $\int\limits_{-3}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{9-y^2}}^{-0{,}75y} f(x,y)\,dx$, 2) $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-1}^{x^2+1} f(x,y)\,dy$.

1.2.4. Обчислити подвійний інтеграл по області D, обмеженої вказаними лініями:

1) $\iint\limits_D \left(\frac{y}{x}\right)^2 dxdy,$ де $D:\begin{cases} y=2,\ x=y \\ x=\dfrac{1}{y} \end{cases}$. Відповідь: $\dfrac{27}{64}$.

2) $\iint\limits_D (x-y)\,dx\,dy,$ де $D:\begin{cases} y=2 \\ y=x^2+1 \end{cases}$. Відповідь: $-\dfrac{32}{15}$.

3) $\iint\limits_D y(x+1)\,dx\,dy,$ де $D:\begin{cases} y=x^3 \\ y\le 4x \end{cases}$. Відповідь: $28\dfrac{4}{21}$.

1.2.5. Обчислити подвійний інтеграл по області D, використовуючи полярні координати. Знайти площу області D:

1) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, де $D:\begin{cases} x^2+y^2-2y=0 \\ x^2+y^2-8y=0 \\ 0\le x\le y \end{cases}$.

Відповідь: $3\sqrt{2}$; $S=3{,}75(2+\pi)$(кв.од.).

2) $\iint\limits_D \frac{y\,dxdy}{x^2+y^2}$, де $D:\begin{cases} x^2+y^2=-4x \\ x^2+y^2=-8x \\ y\le -\sqrt{3}x;\ y\ge -\frac{1}{\sqrt{3}}x \end{cases}$.

Відповідь: 1; $S=2\pi$ (кв.од.).

1.2.6. Обчислити площу плоскої пластини D, обмеженої заданими лініями:

1) $D:\begin{cases} y=\sqrt{x},\ x=0 \\ x+y=2 \end{cases}$. Відповідь: $S=\frac{5}{6}$(кв.од).

2) $D:\begin{cases} y^2=x-1 \\ y^2=3-x \end{cases}$. Відповідь: $S=\frac{8}{3}$(кв.од).

1.2.7. Обчислити площу плоскої пластини D в полярній системі координат: $D:\left(x^2+y^2\right)^3=a^2\left(x^4+y^4\right)$.

Відповідь: $\rho=\frac{a}{2}\sqrt{3+4\varphi}$; $S=0{,}75\pi a^2$ (кв.од).

1.2.8. Обчислити об'єм тіла V, обмеженого заданими поверхнями:

1) $V:\begin{cases} x^2+y^2=z \\ x+y=1 \\ x=0,\ y=0,\ z=0 \end{cases}.$ Відповідь: $S=\frac{1}{6}(\text{куб.од})$.

2) $V:\begin{cases} x+y+z=4 \\ x^2+y^2=1 \\ x^2+y^2=4,\ z=0 \end{cases}.$ Відповідь: $S=12\pi(\text{куб.од})$.

1.2.9. Обчислити площу поверхні I, відсіченою поверхнею II:

$\begin{cases} I:\ z=\sqrt{x^2+y^2} \\ II:\ x^2+y^2=2x \\ \text{(всерединіциліндра)} \end{cases}.$ Відповідь: $S=\pi\sqrt{2}(\text{куб.од})$.

1.2.10. Обчислити масу неоднорідної пластини D, обмеженої заданими лініями, якщо поверхнева густина у кожній її точці $\gamma=\gamma(x,y)$:

1) $D:\begin{cases} x=y^2 \\ y=x^2 \end{cases},\ \gamma=x^2-y.$ Відповідь: $m=\frac{31}{280}$ (од. маси) .

2) $D:\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2+y^2=4 \end{cases},\ \gamma=\frac{2}{x^2+y^2}.$ Відповідь: $m=4\pi\cdot\ln 4$ (од. маси).

1.2.11. Обчислити потрійний інтеграл по області V, обмеженої вказаними поверхнями:

1) $\iiint\limits_V \left(x^2 y - z\right) dx\,dy\,dz$, де $V:\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 1 \le y \le 2 \\ 2 \le z \le 4 \end{cases}$. Відповідь: $-\dfrac{32}{3}$.

2) $\iiint\limits_V \mathrm{e}^x\, y^2 z\, dx\,dy\,dz$, де $V:\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 3 \\ 0 \le z \le 2 \end{cases}$. Відповідь: $18(\mathrm{e}-1)$.

1.2.12. Обчислити об'єм тіла V за допомогою потрібного інтеграла, використовуючи циліндричні координати:

1) $V:\begin{cases} 2z = x^2 + y^2 \\ z = 2 \end{cases}$. Відповідь: $V = 4\pi$ (куб. од.).

2) $V:\begin{cases} x^2 + y^2 + \mathrm{z}^2 = 2z \\ x^2 + y^2 = \mathrm{z}^2 \end{cases}$. Відповідь: $V = \pi$ (куб. од.).

3) $V:\begin{cases} x^2 + y^2 = 3y \\ z = \sqrt{x^2 + y^2},\ z = 0 \end{cases}$. Відповідь: $V = 12$ (куб. од.).

1.2.13. Обчислити об'єм тіла V за допомогою потрійного інтеграла, використовуючи сферичні координати:

$$V:\begin{cases} 4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 9 \\ z \ge \sqrt{x^2 + y^2} \\ 0 \le y \le x \end{cases}.$$

Відповідь: $V = \dfrac{19\pi}{24}\left(2 - \sqrt{2}\right)$ (куб. од.).

1.3. Індивідуальні завдання

1.3.1. Обчислити подвійний інтеграл по прямокутній області D

1.	а)	$\iint\limits_D x^2 y dxdy$, $D:\begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$	б)	$\iint\limits_D (2x+3y)\, dxdy$, $D:\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$
2.	а)	$\iint\limits_D xy^2\, dxdy$, $D:\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 1 \le y \le 2 \end{cases}$	б)	$\iint\limits_D (3x+2y) dxdy$, $D:\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$
3.	а)	$\iint\limits_D \mathrm{e}^{2x+3y}\, dxdy$, $D:\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 3 \end{cases}$	б)	$\iint\limits_D (2x-5y) dxdy$, $D:\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$
4.	а)	$\iint\limits_D \mathrm{e}^{3x-2y}\, dxdy$, $D:\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$	б)	$\iint\limits_D (5x-3y) dxdy$, $D:\begin{cases} 0 \le x \le 3 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$
5.	а)	$\iint\limits_D \frac{x}{1+y^2} dxdy$, $D:\begin{cases} 0 \le x \le 4 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$	б)	$\iint\limits_D (3x-4y) dxdy$, $D:\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 3 \end{cases}$
6.	а)	$\iint\limits_D \frac{y^2}{1+x^2} dxdy$, $D:\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 1 \le y \le 2 \end{cases}$	б)	$\iint\limits_D (x-6y) dxdy$, $D:\begin{cases} 0 \le x \le 3 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$

7.	а)	$\iint\limits_D x^3 y^2\,dxdy$, $D:\begin{cases}1\le x\le 2\\ 0\le y\le 3\end{cases}$	б)	$\iint\limits_D (2x+5y)dxdy$, $D:\begin{cases}0\le x\le 3\\ 0\le y\le 3\end{cases}$
8.	а)	$\iint\limits_D \mathrm{e}^{2x-4y}\,dxdy$, $D:\begin{cases}1\le x\le 2\\ 1\le y\le 3\end{cases}$	б)	$\iint\limits_D (3x-5y)dxdy$, $D:\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1\end{cases}$
9.	а)	$\iint\limits_D \frac{3y}{1+x^2}dxdy$, $D:\begin{cases}0\le x\le 1\\ 1\le y\le 3\end{cases}$	б)	$\iint\limits_D (5x+3y)dxdy$, $D:\begin{cases}0\le x\le 3\\ 0\le y\le 4\end{cases}$
10.	а)	$\iint\limits_D x^2 y^3\,dxdy$, $D:\begin{cases}1\le x\le 4\\ 0\le y\le 1\end{cases}$	б)	$\iint\limits_D (2x-6y)dxdy$, $D:\begin{cases}0\le x\le 3\\ 0\le y\le 1\end{cases}$
11.	а)	$\iint\limits_D \mathrm{e}^{4x+3y}\,dxdy$, $D:\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le 2\end{cases}$	б)	$\iint\limits_D (y-3x)dxdy$, $D:\begin{cases}0\le x\le 2\\ 0\le y\le 3\end{cases}$
12.	а)	$\iint\limits_D x^3 y^3\,dxdy$, $D:\begin{cases}1\le x\le 2\\ 1\le y\le 2\end{cases}$	б)	$\iint\limits_D (x+7y)dxdy$, $D:\begin{cases}0\le x\le 3\\ 0\le y\le 1\end{cases}$
13.	а)	$\iint\limits_D \frac{y^3}{1+x^2}\,dxdy$, $D:\begin{cases}0\le x\le 1\\ 1\le y\le 3\end{cases}$	б)	$\iint\limits_D (3x+5y)dxdy$, $D:\begin{cases}0\le x\le 2\\ 0\le y\le 3\end{cases}$

14.	а)	$\iint\limits_D \frac{x^3}{1+y^2}\,dxdy$, $D:\begin{cases}1\le x\le 2\\ 0\le y\le 1\end{cases}$	б)	$\iint\limits_D (y-4x)\,dxdy$, $D:\begin{cases}0\le x\le 3\\ 0\le y\le 2\end{cases}$
15.	а)	$\iint\limits_D xy^3\,dxdy$, $D:\begin{cases}1\le x\le 4\\ 0\le y\le 2\end{cases}$	б)	$\iint\limits_D (5y-x)\,dxdy$, $D:\begin{cases}0\le x\le 2\\ 0\le y\le 2\end{cases}$
16.	а)	$\iint\limits_D x^2y^2\,dxdy$, $D:\begin{cases}0\le x\le 4\\ 0\le y\le 3\end{cases}$	б)	$\iint\limits_D (2x+4y)\,dxdy$, $D:\begin{cases}0\le x\le 3\\ 0\le y\le 4\end{cases}$
17.	а)	$\iint\limits_D \mathrm{e}^{5y-x}\,dxdy$, $D:\begin{cases}0\le x\le 3\\ 0\le y\le 4\end{cases}$	б)	$\iint\limits_D (y-2x)\,dxdy$, $D:\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le 3\end{cases}$
18.	а)	$\iint\limits_D \mathrm{e}^{2y-3x}\,dxdy$, $D:\begin{cases}1\le x\le 3\\ 2\le y\le 5\end{cases}$	б)	$\iint\limits_D (3y-2x)\,dxdy$, $D:\begin{cases}0\le x\le 2\\ 0\le y\le 3\end{cases}$
19.	а)	$\iint\limits_D x^4y^3\,dxdy$, $D:\begin{cases}0\le x\le 3\\ 1\le y\le 2\end{cases}$	б)	$\iint\limits_D (2y-5x)dxdy$, $D:\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le 2\end{cases}$
20.	а)	$\iint\limits_D \mathrm{e}^{3y-4x}\,dxdy$, $D:\begin{cases}1\le x\le 3\\ 2\le y\le 3\end{cases}$	б)	$\iint\limits_D (3x+y)dxdy$, $D:\begin{cases}0\le x\le 2\\ 0\le y\le 4\end{cases}$

21.	а)	$\iint\limits_D e^{3x+y}\,dxdy$, $D:\begin{cases}2\le x\le 3\\1\le y\le 3\end{cases}$	б)	$\iint\limits_D (4x+2y)\,dxdy$, $D:\begin{cases}0\le x\le 4\\0\le y\le 3\end{cases}$
22.	а)	$\iint\limits_D \frac{x^2}{1+y^2}\,dxdy$, $D:\begin{cases}3\le x\le 4\\0\le y\le 1\end{cases}$	б)	$\iint\limits_D (2x-7y)dxdy$, $D:\begin{cases}0\le x\le 2\\0\le y\le 1\end{cases}$
23.	а)	$\iint\limits_D e^{x-5y}\,dxdy$, $D:\begin{cases}1\le x\le 2\\0\le y\le 1\end{cases}$	б)	$\iint\limits_D (6x+y)\,dxdy$, $D:\begin{cases}0\le x\le 2\\0\le y\le 3\end{cases}$
24.	а)	$\iint\limits_D \frac{x^4}{1+y^2}\,dxdy$, $D:\begin{cases}0\le x\le 1\\0\le y\le 1\end{cases}$	б)	$\iint\limits_D (5x-2y)\,dxdy$, $D:\begin{cases}0\le x\le 3\\0\le y\le 3\end{cases}$
25.	а)	$\iint\limits_D xy^4\,dxdy$, $D:\begin{cases}2\le x\le 3\\2\le y\le 3\end{cases}$	б)	$\iint\limits_D (4x-3y)\,dxdy$, $D:\begin{cases}0\le x\le 2\\0\le y\le 2\end{cases}$
26.	а)	$\iint\limits_D x^3y^4dxdy$, $D:\begin{cases}0\le x\le 1\\0\le y\le 1\end{cases}$	б)	$\iint\limits_D (3x-2y)dxdy$, $D:\begin{cases}0\le x\le 1\\0\le y\le 4\end{cases}$
27.	а)	$\iint\limits_D \frac{y^4}{1+x^2}\,dxdy$, $D:\begin{cases}0\le x\le 1\\2\le y\le 3\end{cases}$	б)	$\iint\limits_D (2x-5y)\,dxdy$, $D:\begin{cases}0\le x\le 2\\0\le y\le 3\end{cases}$

28.	а)	$\iint\limits_D x^4 y\,dxdy$, $D:\begin{cases}0\le x\le 1\\ 3\le y\le 5\end{cases}$	б)	$\iint\limits_D (x+3y)\,dxdy$, $D:\begin{cases}0\le x\le 2\\ 0\le y\le 4\end{cases}$
29.	а)	$\iint\limits_D \mathrm{e}^{3x+2y}\,dxdy$, $D:\begin{cases}0\le x\le 3\\ 0\le y\le 2\end{cases}$	б)	$\iint\limits_D (7x-2y)\,dxdy$, $D:\begin{cases}0\le x\le 3\\ 0\le y\le 1\end{cases}$
30.	а)	$\iint\limits_D \dfrac{y^5}{1+x^2}dxdy$, $D:\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1\end{cases}$	б)	$\iint\limits_D (x+6y)\,dxdy$, $D:\begin{cases}0\le x\le 3\\ 0\le y\le 4\end{cases}$

1.3.2. Подати подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy$ у вигляді повторного інтеграла по області D, обмеженої вказаними лініями.

1.	$D:\begin{cases}y=\sqrt{4-x^2}\\ y=\sqrt{3x},\ x\ge 0\end{cases}$	2.	$D:\begin{cases}x^2+y^2=9,\ y\le 0\\ 3x-2y-6\le 0\end{cases}$
3.	$D:\begin{cases}x=\sqrt{8-y^2}\\ y=x,\ y\ge 0\end{cases}$	4.	$D:\begin{cases}y=\ln x\\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ y\le 1\end{cases}$
5.	$D:\begin{cases}x^2=2-y\\ x+y=0\end{cases}$	6.	$D:\begin{cases}y=\sqrt{2-x^2}\\ y\ge x^2\end{cases}$
7.	$D:\begin{cases}y=x^2-2\\ x=y\end{cases}$	8.	$D:\begin{cases}y=2x,\ y=x\\ y=1,\ y=3\end{cases}$
9.	$D:\begin{cases}x^2=2y,\ x\le 1\\ y^2=2x\end{cases}$	10.	$D:\begin{cases}y=\sqrt{9-x^2}\\ y\ge x,\ x\ge 0\end{cases}$

11.	$D:\begin{cases} y^2=2-x \\ x=y \end{cases}$	12.	$D:\begin{cases} x=\sqrt{2-y^2} \\ x=y^2,\ y\ge 0 \end{cases}$
13.	$D:\begin{cases} x+2y-12=0 \\ y^2=4x,\ y\ge 0 \end{cases}$	14.	$D:\begin{cases} x=y,\ x=1 \\ y=2x \end{cases}$
15.	$D:\begin{cases} y=-\sqrt{2-x^2} \\ y\ge x,\ y=0 \end{cases}$	16.	$D:\begin{cases} y=\sqrt{6-x^2} \\ x=\sqrt{y},\ y\ge 0 \end{cases}$
17.	$D:\begin{cases} y^2=2+x \\ y=-x \end{cases}$	18.	$D:\begin{cases} y=\sqrt{4-x^2} \\ y=4,\ 0\le x\le 2 \end{cases}$
19.	$D:\begin{cases} xy=1 \\ x=y,\ x=2 \end{cases}$	20.	$D:\begin{cases} x=\sqrt{2-y^2} \\ x^2=-y,\ y\le 0 \end{cases}$
21.	$D:\begin{cases} y^2=6-x \\ y=x,\ y\ge 0 \end{cases}$	22.	$D:\begin{cases} y^2=4x,\ y=2 \\ y^2=x \end{cases}$
23.	$D:\begin{cases} y=4-x^2 \\ x^2=y \end{cases}$	24.	$D:\begin{cases} x-y+2=0 \\ x^2+y^2=4,\ y\ge 0 \end{cases}$
25.	$D:\begin{cases} y=-\sqrt{4-x^2} \\ y-2=x^2,\ 0\le x\le 2 \end{cases}$	26.	$D:\begin{cases} y=x^2,\ x=2 \\ 4y=x^2 \end{cases}$
27.	$D:\begin{cases} x+y-6=0 \\ y=x^2,\ y\ge 0 \end{cases}$	28.	$D:\begin{cases} 3x-y-3=0 \\ 4-y=(x-1)^2 \end{cases}$
29.	$D:\begin{cases} y=\sqrt{4-x^2},\ y\ge 0 \\ 2x+3y\le 6 \end{cases}$	30.	$D:\begin{cases} x=-\sqrt{4-y^2} \\ 4-x=y^2 \end{cases}$

1.3.3. Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі

1.	$\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{x^3+1} f(x,y)dx$	2.	$\int\limits_{0}^{1,5} dy \int\limits_{2y^2}^{y+3} f(x,y)dx$

3.	$\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{2x} f(x,y)dy$	4.	$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{2y^2}^{3-y} f(x,y)dx$
5.	$\int\limits_{-6}^2 dx \int\limits_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)dy$	6.	$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{y^2+1} f(x,y)dx$
7.	$\int\limits_1^2 dx \int\limits_{x-2}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy$	8.	$\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{2-x^2} f(x,y)dy$
9.	$\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{e^y} f(x,y)dx$	10.	$\int\limits_0^3 dx \int\limits_{x^2-x}^{2x} f(x,y)dy$
11.	$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx$	12.	$\int\limits_0^1 dx \int\limits_{2x}^{3x} f(x,y)dy$
13.	$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^2}^{2+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$	14.	$\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^3}^{2-x^2} f(x,y)dy$
15.	$\int\limits_1^2 dy \int\limits_{\ln y}^{y} f(x,y)dx$	16.	$\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{2+\sqrt{y}} f(x,y)dx$
17.	$\int\limits_1^2 dx \int\limits_{3-x}^{2x} f(x,y)dy$	18.	$\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{3-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$
19.	$\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{4-\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$	20.	$\int\limits_{-2}^0 dy \int\limits_{y^2-4}^{2-y} f(x,y)dx$
21.	$\int\limits_0^2 dx \int\limits_{\sqrt{2x-x^2}}^{x^2+2} f(x,y)dy$	22.	$\int\limits_0^2 dy \int\limits_{\sqrt{2y}}^{5-\frac{3y}{2}} f(x,y)dx$
23.	$\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{2-x^2} f(x,y)dy$	24.	$\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{y^2-1}^{\frac{y^2}{2}} f(x,y)dx$

25.	$\int\limits_{0}^{4} dx \int\limits_{2\sqrt{x}}^{8-x} f(x,y)dy$	26.	$\int\limits_{0}^{\frac{8}{3}} dy \int\limits_{2y-2}^{\sqrt{4+y^2}} f(x,y)dx$
27.	$\int\limits_{0}^{4} dx \int\limits_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} f(x,y)dy$	28.	$\int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{y^2-1}^{2-y} f(x,y)dx$
29.	$\int\limits_{-4}^{0} dx \int\limits_{-\sqrt{4+x}}^{3+\frac{3}{4}x} f(x,y)dy$	30.	$\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{4-x^2} f(x,y)dy$

1.3.4. Обчислити подвійний інтеграл по області D, обмеженої вказаними лініями

1.	$\iint\limits_D (x^2+y)dxdy$	$D:\begin{cases} y=x^2 \\ x=y^2 \end{cases}$
2.	$\iint\limits_D xy^2\,dxdy$	$D:\begin{cases} y=x^2 \\ y=2x \end{cases}$
3.	$\iint\limits_D (x+y)dxdy$	$D:\begin{cases} y=x \\ x=y^2 \end{cases}$
4.	$\iint\limits_D x^2 y\,dxdy$	$D:\begin{cases} y=2-x \\ x=y,\ x\geq 0 \end{cases}$
5.	$\iint\limits_D (x^3-2y)dxdy$	$D:\begin{cases} y=x^2-1 \\ y\leq 0,\ x\geq 0 \end{cases}$
6.	$\iint\limits_D (y-x)dxdy$	$D:\begin{cases} y=x^2 \\ y=x \end{cases}$
7.	$\iint\limits_D x(1+y)dxdy$	$D:\begin{cases} 5y=x \\ x=y^2 \end{cases}$
8.	$\iint\limits_D (x+y)dxdy$	$D:\begin{cases} y=x^2-1 \\ y=1-x^2 \end{cases}$

9.	$\iint\limits_D x(y-1)dxdy$	$D:\begin{cases} y=x,\ x=3 \\ y=5x \end{cases}$
10.	$\iint\limits_D (x-2)y\,dxdy$	$D:\begin{cases} y=\frac{1}{2}x,\ x=2 \\ y=0 \end{cases}$
11.	$\iint\limits_D \left(x-y^2\right)dxdy$	$D:\begin{cases} y=x^2 \\ y=1 \end{cases}$
12.	$\iint\limits_D x^2 y\,dxdy$	$D:\begin{cases} y=2x^3,\ x=1 \\ y=0 \end{cases}$
13.	$\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy$	$D:\begin{cases} x=y^2 \\ x=1 \end{cases}$
14.	$\iint\limits_D xy\,dxdy$	$D:\begin{cases} y=-x^3,\ x\le 2 \\ y=0 \end{cases}$
15.	$\iint\limits_D (x+y)dxdy$	$D:\begin{cases} y=x^3,\ x=2 \\ y=0 \end{cases}$
16.	$\iint\limits_D x(2x+y)dxdy$	$D:\begin{cases} y=1-x^2 \\ y\ge 0 \end{cases}$
17.	$\iint\limits_D y(1-x)dxdy$	$D:\begin{cases} x=y,\ y^3=x \\ x=1 \end{cases}$
18.	$\iint\limits_D xy^3dxdy$	$D:\begin{cases} y^2=1-x \\ x\ge 0 \end{cases}$:
19.	$\iint\limits_D x(y+5)dxdy$	$D:\begin{cases} y=x+5,\ x\le 0 \\ x+y+5=0 \end{cases}$
20.	$\iint\limits_D (x-y)dxdy$	$D:\begin{cases} y=x^2-1 \\ y=3 \end{cases}$

21.	$\iint\limits_D (x+1)y^2\,dxdy$	$D:\begin{cases} y=3x^2 \\ y=3 \end{cases}$
22.	$\iint\limits_D xy^2 dxdy$	$D:\begin{cases} x=y,\ y=0 \\ x=1 \end{cases}$
23.	$\iint\limits_D \left(x^3+y\right)dxdy$	$D:\begin{cases} x+y=1,\ x\le 1 \\ x+y=2,\ x\ge 0 \end{cases}$
24.	$\iint\limits_D xy^3\,dxdy$	$D:\begin{cases} y=x^3,\ y=4x \\ y\ge 0 \end{cases}$
25.	$\iint\limits_D \left(x^3+3y\right)dxdy$	$D:\begin{cases} x+y=1 \\ y=x^2-1,\ x\ge 0 \end{cases}$
26.	$\iint\limits_D xy\,dxdy$	$D:\begin{cases} x+y=2 \\ y=\sqrt{x},\ y\ge 0 \end{cases}$
27.	$\iint\limits_D \frac{y^2}{x^2}dxdy$	$D:\begin{cases} y=x,\ xy=1 \\ y=2 \end{cases}$
28.	$\iint\limits_D y\left(1+x^2\right)dxdy$	$D:\begin{cases} y=x^3 \\ y\le 4x \end{cases}$
29.	$\iint\limits_D y^2(1+2x)dxdy$	$D:\begin{cases} x=1-y^2 \\ x=0 \end{cases}$
30.	$\iint\limits_D x\,\mathrm{e}^y dxdy$	$D:\begin{cases} y=\ln x,\ y=0 \\ x=2 \end{cases}$

1.3.5. Обчислити подвійний інтеграл по області D, використовуючи полярні координати. Знайти площу області D.

1.	$\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$	$D:$	$\begin{cases} x^2+y^2=1,\ y=\sqrt{3}x \\ x^2+y^2=4,\ y=0 \end{cases}$

2.	$\iint\limits_D \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$	$D:$	$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ y=x,\ y=\sqrt{3}x \end{cases}$
3.	$\iint\limits_D \sqrt{R^2-\left(x^2+y^2\right)}dxdy$	$D:$	$\begin{cases} x^2+y^2=Rx \\ y\le x \end{cases}$
4.	$\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt[4]{x^2+y^2}}$	$D:$	$\begin{cases} x^2+y^2=1, x^2+y^2=9 \\ y=\frac{x}{\sqrt{3}},\ y=x \end{cases}$
5.	$\iint\limits_D \frac{\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$	$D:$	$\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ y=\frac{x}{\sqrt{3}},\ x=0 \end{cases}$
6.	$\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$	$D:$	$\begin{cases} x^2+y^2=2y \\ y\ge x,\ x\ge 0 \end{cases}$
7.	$\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{5+x^2+y^2}}$	$D:$	$\begin{cases} x^2+y^2=4, x^2+y^2=16 \\ x=\sqrt{3}y,\ y=\sqrt{3}x,\ y\ge 0 \end{cases}$
8.	$\iint\limits_D \frac{y-2x}{x^2+y^2}dxdy$	$D:$	$\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ y\le\sqrt{3}\,x,\ y\ge 0 \end{cases}$
9.	$\iint\limits_D \frac{2y-5x}{x^2+y^2}dxdy$	$D:$	$\begin{cases} x^2+y^2=9, x^2+y^2=16 \\ x\ge 0,\ y\ge 0 \end{cases}$
10.	$\iint\limits_D \frac{y-4x}{x^2+y^2}dxdy$	$D:$	$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x=\sqrt{3}y,\ y=x,\ x\ge 0 \end{cases}$
11.	$\iint\limits_D \sqrt{x^2-y^2-9}\,dxdy$	$D:$	$\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$
12.	$\iint\limits_D \sqrt{9-\left(x^2+y^2\right)}dxdy$	$D:$	$\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ y=\sqrt{3}\,x,\ y=x \end{cases}$

13.	$\iint\limits_D \left(1 - x^2 - y^2\right) dxdy$	$D:$	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x,\ x^2 + y^2 = 4x \\ y = x,\ y = 0 \end{cases}$
14.	$\iint\limits_D \dfrac{4 - x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dxdy$	$D:$	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2y \\ x = 0,\ y = x \end{cases}$
15.	$\iint\limits_D \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}\, dxdy$	$D:$	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 4 \\ y = \sqrt{3}x,\ x = \sqrt{3}y \end{cases}$
16.	$\iint\limits_D \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdy$	$D:$	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y \ge -\sqrt{3}x,\ y \le x \end{cases}$
17.	$\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}\, \sin^2 \sqrt{x^2 + y^2}}$	$D:$	$\begin{cases} 1 \le x^2 + y^2 \le 0{,}25\pi^2 \\ y \le \sqrt{3}x,\ y \ge 0 \end{cases}$
18.	$\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}$	$D:$	$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 9 \\ y \ge -\dfrac{\sqrt{3}}{3}x,\ x \ge 0 \end{cases}$
19.	$\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}\, \cos^2 \sqrt{x^2 + y^2}}$	$D:$	$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 25 \\ y \le \sqrt{3}x,\ x \ge 0 \end{cases}$
20.	$\iint\limits_D \sin\left(x^2 + y^2\right) dxdy$	$D:$	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1,\ y \ge -\sqrt{3}x \\ x^2 + y^2 = 25,\ y \le 0 \end{cases}$
21.	$\iint\limits_D \operatorname{tg}\left(x^2 + y^2\right) dxdy$	$D:$	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y \le \sqrt{3}x,\ y \le 0 \end{cases}$
22.	$\iint\limits_D xy\, dxdy$	$D:$	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4,\ x^2 + y^2 = 16 \\ y = \dfrac{x}{\sqrt{3}},\ y = x \end{cases}$
23.	$\iint\limits_D 3^{x^2 + y^2}\, dxdy$	$D:$	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 4 \\ y = \sqrt{3}x,\ y = x \end{cases}$

24.	$\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{e^{x^2+y^2}}$	$D:$	$\begin{cases} y=\sqrt{1-x^2} \\ y=0,\ y\le x \end{cases}$
25.	$\iint\limits_D xy^2dxdy$	$D:$	$\begin{cases} x^2+y^2=2y \\ x^2+y^2=4y \end{cases}$
26.	$\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{x^2+y^2+2}$	$D:$	$\begin{cases} y=\sqrt{25-x^2} \\ y=\sqrt{3}x,\ x=\sqrt{3}y \end{cases}$
27.	$\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy$	$D:$	$\begin{cases} x^2+y^2=8x \\ y=0,\ y\le x \end{cases}$
28.	$\iint\limits_D \cos\left(x^2+y^2\right)dxdy$	$D:$	$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y\le\sqrt{3}x,\ y\ge -x \end{cases}$
29.	$\iint\limits_D \dfrac{\operatorname{tg}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$	$D:$	$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ \sqrt{3}y\le x,\ y\ge -x \end{cases}$
30.	$\iint\limits_D \dfrac{xy}{x^2+y^2}dxdy$	$D:$	$\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ y\ge -x,\ y\le x \end{cases}$

1.3.6. Обчислити площу плоскої пластини D, обмеженої заданими лініями.

1.	$D:\begin{cases} y^2=4x \\ x+y=3,\ y\ge 0 \end{cases}$	2.	$D:\begin{cases} y=6x^2 \\ x+y=2,\ x\ge 0 \end{cases}$
3.	$D:\begin{cases} y^2=x+2 \\ x=2 \end{cases}$	4.	$D:\begin{cases} x=-2y^2,\ x\le 0 \\ x=1-3y^2,\ y\ge 0 \end{cases}$
5.	$D:\begin{cases} y=\dfrac{8}{x^2+4} \\ x^2=4y \end{cases}$	6.	$D:\begin{cases} y=x^2+1 \\ x+y=3 \end{cases}$
7.	$D:\begin{cases} y^2=4x \\ x^2=4y \end{cases}$	8.	$D:\begin{cases} y=\cos x,\ y\ge 0 \\ y\le x+1 \end{cases}$

9.	$D:\begin{cases} x=\sqrt{4-y^2} \\ y=\sqrt{3}x,\ x\ge 0 \end{cases}$	10.	$D:\begin{cases} y=x^2+2 \\ x=2,\ y=x,\ x\ge 0 \end{cases}$
11.	$D:\begin{cases} y=4x^2 \\ 9y=x^2,\ y\le 2 \end{cases}$	12.	$D:\begin{cases} y=x^2 \\ y=-x \end{cases}$
13.	$D:\begin{cases} x=\frac{3}{4}y^2+1 \\ x=y^2 \end{cases}$	14.	$D:\begin{cases} y=\sqrt{2-x^2} \\ y=x^2 \end{cases}$
15.	$D:\begin{cases} y=x^2+4x \\ y=x+4 \end{cases}$	16.	$D:\begin{cases} x+y=5 \\ 2y=\sqrt{x},\ x\ge 0 \end{cases}$
17.	$D:\begin{cases} y=2x-x^2 \\ y=2^x,\ x=2,\ x=0 \end{cases}$	18.	$D:\begin{cases} y=-2x^2+2 \\ y\ge -6 \end{cases}$
19.	$D:\begin{cases} y^2=4x \\ x=y^2-3 \end{cases}$	20.	$D:\begin{cases} y=4-x^2 \\ y=x^2-2x \end{cases}$
21.	$D:\begin{cases} x=y^2+1 \\ x+y=3 \end{cases}$	22.	$D:\begin{cases} x^2=3y \\ y^2=3x \end{cases}$
23.	$D:\begin{cases} x=\cos y,\ x\ge 0 \\ x\le y+1 \end{cases}$	24.	$D:\begin{cases} x=4-y^2 \\ x-y+2=0 \end{cases}$
25.	$D:\begin{cases} x=\sqrt{2-y^2} \\ x=y^2 \end{cases}$	26.	$D:\begin{cases} \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1 \\ y\le \frac{1}{2}x,\ y\ge 0 \end{cases}$
27.	$D:\begin{cases} y^2=4-x,\ y=-2 \\ y=x+2,\ y=2 \end{cases}$	28.	$D:\begin{cases} y=\frac{3}{4}x^2+1 \\ y=x^2 \end{cases}$
29.	$D:\begin{cases} y^2=4-x \\ x=y^2 \end{cases}$	30.	$D:\begin{cases} xy=1,\ x^2=y \\ y=2,\ x=0 \end{cases}$

1.3.7. Обчислити площу плоскої пластини D в полярній системі координат.

1.	$D:\left(x^2+y^2\right)^3=a^2x^2y^2$	2.	$D:\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2+4y^2\right)$
3.	$D:\left(x^2+y^2\right)^3=a^2y^4$	4.	$D:\left(x^2+y^2\right)^3=a^2y^2\left(4x^2+3y^2\right)$
5.	$D:\left(x^2+y^2\right)^4=a^2x^3y^3$	6.	$D:\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(3x^2+y^2\right)$
7.	$D:\left(x^2+y^2\right)^3=a^2xy^3$	8.	$D:\left(x^2+y^2\right)^3=a^2\left(x^2-y^2\right)^2$
9.	$D:\left(x^2+y^2\right)^3=a^2x^3y$	10.	$D:\left(x^2+y^2\right)^3=a^2\left(x^4+x^2y^2+y^4\right)$
11.	$D:\left(x^2+y^2\right)^7=a^8x^4y^2$	12.	$D:\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(3x^2+y^2\right)$
13.	$D:\left(x^2+y^2\right)^5=a^6xy^3$	14.	$D:\left(x^2+y^2\right)^3=a^2y^2\left(x^2+3y^2\right)$
15.	$D:\left(x^2+y^2\right)^5=a^4x^2y^4$	16.	$D:\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2+2y^2\right)$
17.	$D:\left(x^2+y^2\right)^5=a^4x^4y^2$	18.	$D:\left(x^2+y^2\right)^7=a^8x^2y^4$
19.	$D:\left(x^2+y^2\right)^5=a^6x^3y$	20.	$D:\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right)$
21.	$D:\left(x^2+y^2\right)^2=ax^3$	22.	$D:\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(5x^2+7y^2\right)$
23.	$D:\left(x^2+y^2\right)^2=a^2xy$	24.	$D:\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2\left(x^2+3y^2\right)$
25.	$D:\left(x^2+y^2\right)^2=a^2y^3$	26.	$D:\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(3x^2-y^2\right)$
27.	$D:\left(x^2+y^2\right)^2=4ay^3$	28.	$D:\left(x^2+y^2\right)^3=a^2x^2\left(x^2+3y^2\right)$
29.	$D:\left(x^2+y^2\right)^3=a^2x^4$	30.	$D:\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-3y^2\right)$

1.3.8. Обчислити об’єм тіла V , обмеженого заданими поверхнями

1.	$V:\begin{cases} x^2+y^2=4y \\ z=6-x^2 \\ z=0 \end{cases}$	2.	$V:\begin{cases} z=-x^2-y^2+4 \\ x^2+y^2=2x \\ z=0 \end{cases}$

3.	$V:\begin{cases} y=5\sqrt{x},\ y=\frac{5}{3}x \\ z=x^2+y^2, \quad z=0 \end{cases}$	4.	$V:\begin{cases} x+y=6 \\ x=\sqrt{3y},\ z=4x \\ x=0,\ z=0 \end{cases}$
5.	$V:\begin{cases} x^2+y^2-z^2=0 \\ x^2+y^2=4y \\ z\geq 0 \end{cases}$	6.	$V:\begin{cases} z=2\sqrt{x} \\ y^2=4x \\ x=1,\ z=0 \end{cases}$
7.	$V:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ x^2+y^2\geq 2x \\ z\geq 0 \end{cases}$	8.	$V:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+y^2=y \\ z\geq 0 \end{cases}$
9.	$V:\begin{cases} x=\sqrt{y},\ x=2\sqrt{y} \\ z+y=4 \\ x\geq 0,\ z=0 \end{cases}$	10.	$V:\begin{cases} z=9-y^2,\ z=0 \\ 3x-4y-12=0 \\ x=0,\ y=0 \end{cases}$
11.	$V:\begin{cases} z=4-y^2 \\ y=x^2 \\ z=0 \end{cases}$	12.	$V:\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ y=x^2,\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$
13.	$V:\begin{cases} x^2+y^2=2x \\ z=x+2y \\ z=0 \end{cases}$	14.	$V:\begin{cases} z=x^2-y^2 \\ x=3 \\ z\geq 0 \end{cases}$
15.	$V:\begin{cases} x+z=2 \\ y=2\sqrt{x},\ y=\frac{1}{4}x^2 \\ z\geq 0 \end{cases}$	16.	$V:\begin{cases} x^2+y^2=4y \\ z^2=4-y \\ z\geq 0 \end{cases}$
17.	$V:\begin{cases} z=y^2,\ z=0 \\ 2x+3y=6 \\ x=0 \end{cases}$	18.	$V:\begin{cases} x^2+z^2=2x \\ y^2=x \\ z\geq 0 \end{cases}$

19.	$V:\begin{cases} z=(x-1)^2 \\ x=y^2 \\ z=0 \end{cases}$	20.	$V:\begin{cases} z=4-x^2 \\ x^2+y^2=4 \\ z=0 \end{cases}$
21	$V:\begin{cases} z=y^2+1 \\ x+y=1 \\ x=0,\ y=0,\ z=0 \end{cases}$	22.	$V:\begin{cases} z=3x^2,\ z=0 \\ 2x-y=0 \\ x+y=9 \end{cases}$
23.	$V:\begin{cases} z=x^2+3y^2 \\ x+y=1 \\ x=0,\ y=0,\ z=0 \end{cases}$	24.	$V:\begin{cases} 2-z=x^2+y^2 \\ x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$
25.	$V:\begin{cases} 1-z^2=y \\ y=2x,\ x=y \\ z=0 \end{cases}$	26.	$V:\begin{cases} x+y+2z=2 \\ x=\sqrt{y},\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$
27.	$V:\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ x+y=2,\ y=x \\ x=0,\ z=0 \end{cases}$	28.	$V:\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ x^2+y^2=4x \\ z=0 \end{cases}$
29.	$V:\begin{cases} z=3y \\ x+y=8 \\ x\ge 0,\ y\ge 0 \end{cases}$	30.	$V:\begin{cases} z+y=1 \\ y=x^2 \\ z=0 \end{cases}$

1.3.9. Обчислити площу поверхні I, відсіченою поверхнею II

1.	$\begin{cases} I: x+y+z=4 \\ II: x=0, x=2, y=0, y=2 \end{cases}$	2.	$\begin{cases} I:\ x^2+z^2=1 \\ II: x+y=1, x=0, y=0, z=0 \end{cases}$
3.	$\begin{cases} I: x+2y+3z=12 \\ II: x^2+y^2=2y \end{cases}$	4.	$\begin{cases} I: x+2y+z-12=0 \\ II: x^2+y^2=2x \end{cases}$

5.	$\begin{cases} I: x^2+z^2=4 \\ II: x+y=2, x=0, y=0, z=0 \end{cases}$	6.	$\begin{cases} I: z=x \\ II: x^2+y^2=16, z=0 \end{cases}$
7.	$\begin{cases} I: x+2y+3z=6 \\ II: x=0, x=4, y=0, y=1 \end{cases}$	8.	$\begin{cases} I: x^2+y^2+z^2=9 \\ II: x^2+y^2=4 \end{cases}$
9.	$\begin{cases} I: x+2y+z=4 \\ II: x=2y^2, z=0 \end{cases}$	10.	$\begin{cases} I: z=2x \\ II: x^2+y^2=4, z=0 \end{cases}$
11.	$\begin{cases} I: x^2=y^2+z^2 \\ II: y^2+z^2=2z \end{cases}$	12.	$\begin{cases} I: x^2+y^2+z^2=4 \\ II: x^2+y^2=1 \end{cases}$
13.	$\begin{cases} I: x^2=2z \\ II: x=2y, y=2x, x=2\sqrt{2} \end{cases}$	14.	$\begin{cases} I: x+2y+z=3 \\ II: y=x^2 \end{cases}$
15.	$\begin{cases} I: z^2=4x \\ II: y^2=4x, x=1 \end{cases}$	16.	$\begin{cases} I: x^2+y^2=25-z \\ II: x^2+y^2=9, z=0 \end{cases}$
17.	$\begin{cases} I: x^2+z^2=4 \\ II: y=z, z=y=0 \end{cases}$	18.	$\begin{cases} I: z=2y \\ II: x^2+y^2=1, z=0 \end{cases}$
19.	$\begin{cases} I: y^2=x^2+z^2 \\ II: x^2+z^2=2z \end{cases}$	20.	$\begin{cases} I: x=1-y^2-z^2 \\ II: y^2+z^2=1 \end{cases}$
21	$\begin{cases} I: z^2=x \\ II: y^2=x, x=2 \end{cases}$	22.	$\begin{cases} I: x^2+y^2+z^2=9 \\ II: x^2+y^2=1 \end{cases}$
23.	$\begin{cases} I: z=1-x^2-y^2 \\ II: x^2+y^2=1 \end{cases}$	24.	$\begin{cases} I: 2y=x^2+y^2 \\ II: x^2+z^2=1 \end{cases}$
25.	$\begin{cases} I: z=y \\ II: x^2+y^2=9, z=0 \end{cases}$	26.	$\begin{cases} I: x^2+y^2=2y \\ II: x^2+y^2=4-z, z=0 \end{cases}$

27.	$\begin{cases} I: x+z=9 \\ II: y^2=x,\ y^2=4x,\ z=0 \end{cases}$	28.	$\begin{cases} I: x^2+y^2=4 \\ II: z=0,\ y=0,\ x+y=2, \\ \quad x-y=2 \end{cases}$
29.	$\begin{cases} I: 2x+y+3z=6 \\ II: x=0, x=1, y=0, y=4 \end{cases}$	30.	$\begin{cases} I: x^2+y^2+z^2=16 \\ II: x^2+y^2=1 \end{cases}$

1.3.10. Обчислити масу неоднорідної пластини D, обмеженої заданими лініями, якщо поверхнева густина у кожній її точці $\gamma=\gamma(x,y)$

1.	$D:\begin{cases} x=2y;\ y=2x \\ xy=2\ (x\geq 0) \end{cases}$ $\gamma=x^2+y$	2.	$D:\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ x^2+y^2=2y \end{cases}$ $\gamma=\sqrt{x^2+y^2}$
3.	$D:\begin{cases} xy=4, x=2 \\ y=2x \end{cases}$ $\gamma=\dfrac{x^2}{y^2}$	4.	$D:\begin{cases} x^2+y^2=16 \\ x^2+y^2=-2x \end{cases}$ $\gamma=\sqrt{x^2+y^2}$
5.	$D:\begin{cases} y^2=2x \\ x+y=1{,}5 \end{cases}$ $\gamma=x^2+y^2$	6.	$D:\begin{cases} 2x+y=3 \\ y=x^2 \end{cases}$ $\gamma=x^2$
7.	$D:\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2+y^2=9 \end{cases}$ $\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+xy^2}}$	8.	$D:\begin{cases} xy=1,\ y=x \\ x=2 \end{cases}$ $\gamma=\dfrac{x^2}{y^2}$
9.	$D:\begin{cases} x=y,\ x=\dfrac{y}{2} \\ x+y=5 \end{cases}$ $\gamma=3x$	10.	$D:\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ x^2+y^2=2x \end{cases}$ $\gamma=\sqrt{x^2+y^2}$

11.	$D:\begin{cases} x^2+y^2=x \\ x^2+y^2=2x \end{cases}$ $\gamma=3\sqrt{x^2+y^2}$	12.	$D:\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ y\ge 0, x\ge 0 \end{cases}$ $\gamma=\mathrm{e}^{x^2+y^2}$
13.	$D:\begin{cases} x^2+y^2=1, y\ge 0 \\ x^2+y^2=4, x\ge 0 \end{cases}$ $\gamma=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$	14.	$D:\begin{cases} y=\dfrac{2}{x}, x=2y \\ y=2 \end{cases}$ $\gamma=\dfrac{y^2}{x^2}$
15.	$D:\begin{cases} x=2y^2, y=0 \\ x-y=1 \end{cases}$ $\gamma=y^2$	16.	$D:\begin{cases} x+y-2=0 \\ x=3y, y=x \end{cases}$ $\gamma=y+1$
17.	$D:\begin{cases} x^2+y^2=2y \\ x^2+y^2=4y \end{cases}$ $\gamma=11\sqrt{x^2+y^2}$	18.	$D:\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x^2+y^2=4x \end{cases}$ $\gamma=\sqrt{x^2+y^2}$
19.	$D:\begin{cases} 2y=\sqrt{x}, x+y=5 \\ y\ge 0, x\ge 0 \end{cases}$ $\gamma=y^2$	20.	$D:\begin{cases} x=y^2 \\ x+y=2 \end{cases}$ $\gamma=y-2$
21	$D:\begin{cases} y=x,\ y=x\sqrt{3} \\ x=0,\ x=2 \end{cases}$ $\gamma=\dfrac{x}{x^2+y^2}$	22.	$D:\begin{cases} y=2x^2,\ y=2x^2+1 \\ x=-1, x=1 \end{cases}$ $\gamma=x^2$
23.	$D:\begin{cases} x^2+y^2=2, y\ge 0 \\ x^2+y^2=4, x\ge 0 \end{cases}$ $\gamma=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$	24.	$D:\begin{cases} y=\sqrt{2-x^2} \\ y=x^2 \end{cases}$ $\gamma=2y$

25.	$D:\begin{cases} x=y^2,\ x=y^2+3 \\ y=-2,\ y=2 \end{cases}$ $\gamma=y^2$	26.	$D:\begin{cases} y=x,\ x=2 \\ y=3 \end{cases}$ $\gamma=2x^2+y^2$
27.	$D:\begin{cases} y=x^2-1 \\ x+y=1 \end{cases}$ $\gamma=2x+8$	28.	$D:\begin{cases} y^2=1-x \\ x=0 \end{cases}$ $\gamma=2-x-y$
29.	$D:\begin{cases} y=2x^2 \\ 4x+y=6 \end{cases}$ $\gamma=x^2$	30.	$D:\begin{cases} y=x^2+4x \\ y=x+4 \end{cases}$ $\gamma=x$

1.3.11. Обчислити потрійний інтеграл по області V, обмеженої вказаними поверхнями

1.	$\iiint\limits_V \left(2x^2+3y+z\right)dxdydz,$ $V:\begin{cases} 2\le x\le 3 \\ -1\le y\le 2 \\ 0\le z\le 4 \end{cases}$	2.	$\iiint\limits_V x^2yz\,dxdydz,$ $V:\begin{cases} 0\le x\le 1 \\ 0\le y\le 2 \\ 1\le z\le 2 \end{cases}$
3.	$\iiint\limits_V \left(x+y+4z^2\right)dxdydz,$ $V:\begin{cases} -1\le x\le 1 \\ 0\le y\le 2 \\ -1\le z\le 1 \end{cases}$	4.	$\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz,$ $V:\begin{cases} 0\le x\le 3 \\ -1\le y\le 2 \\ 0\le z\le 2 \end{cases}$
5.	$\iiint\limits_V x^2y^2z\,dxdydz,$ $V:\begin{cases} -1\le x\le 3 \\ 0\le y\le 2 \\ -2\le z\le 5 \end{cases}$	6.	$\iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz,$ $V:\begin{cases} 0\le x\le 1 \\ -1\le y\le 0 \\ 1\le z\le 2 \end{cases}$

7.	$\iiint\limits_V \left(2x - y^2 - z\right)dxdydz,$ $V:\begin{cases} 1 \le x \le 5 \\ 0 \le y \le 2 \\ -1 \le z \le 0 \end{cases}$	8.	$\iiint\limits_V 2xy^2 z dxdydz,$ $V:\begin{cases} 0 \le x \le 3 \\ -2 \le y \le 0 \\ 1 \le z \le 2 \end{cases}$
9.	$\iiint\limits_V 5xyz^2 dxdydz,$ $V:\begin{cases} -1 \le x \le 0 \\ 2 \le y \le 3 \\ 1 \le z \le 2 \end{cases}$	10.	$\iiint\limits_V \left(x^2 + y^2 - z\right)dxdydz,$ $V:\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 3 \\ -1 \le z \le 2 \end{cases}$
11.	$\iiint\limits_V (x + 2yz)dxdydz,$ $V:\begin{cases} -2 \le x \le 0 \\ 0 \le y \le 1 \\ 0 \le z \le 2 \end{cases};$	12.	$\iiint\limits_V \left(x + yz^2\right)dxdydz,$ $V:\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 2 \\ -1 \le z \le 3 \end{cases}$
13.	$\iiint\limits_V (xy + 3z)dxdydz,$ $V:\begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \\ 1 \le z \le 2 \end{cases}$	14.	$\iiint\limits_V \left(xy - z^2\right)dxdydz,$ $V:\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 1 \\ -1 \le z \le 3 \end{cases}$
15.	$\iiint\limits_V \left(x^3 + yz\right)dxdydz,$ $V:\begin{cases} -1 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 1 \\ 0 \le z \le 1 \end{cases}$	16.	$\iiint\limits_V \left(x^3 + y^2 - z\right)dxdydz,$ $V:\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ -1 \le y \le 0 \\ 0 \le z \le 1 \end{cases}$

17.	$\iiint\limits_V \left(2x^2 + y - z^3\right)dxdydz$, $V:\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ -2 \le y \le 1 \\ 0 \le z \le 1 \end{cases}$	18.	$\iiint\limits_V x^2 yz^2 dxdydz$, $V:\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 1 \le y \le 2 \\ -1 \le z \le 0 \end{cases}$
19.	$\iiint\limits_V (x + y - z)dxdydz$, $V:\begin{cases} 0 \le x \le 4 \\ 1 \le y \le 3 \\ -1 \le z \le 5 \end{cases}$	20.	$\iiint\limits_V \left(x + 2y + 3z^2\right)dxdydz$, $V:\begin{cases} -1 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 1 \\ -1 \le z \le 3 \end{cases}$
21.	$\iiint\limits_V \left(3x^2 + 2y + z\right)dxdydz$, $V:\begin{cases} 0 \le x \le 4 \\ 0 \le y \le 1 \\ -1 \le z \le 3 \end{cases}$	22.	$\iiint\limits_V (x - y)dxdydz$, $V:\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ -1 \le y \le 2 \\ 0 \le z \le 3 \end{cases}$
23.	$\iiint\limits_V x^3 yzdxdydz$, $V:\begin{cases} -1 \le x \le 2 \\ 1 \le y \le 3 \\ 0 \le z \le 1 \end{cases}$	24.	$\iiint\limits_V xy^2 z\, dxdydz$, $V:\begin{cases} -2 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 2 \\ 0 \le z \le 3 \end{cases}$
25.	$\iiint\limits_V xyz^2\, dxdydz$, $V:\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ -1 \le y \le 0 \\ 0 \le z \le 4 \end{cases}$	26.	$\iiint\limits_V xyz\, dxdydz$, $V:\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ -1 \le y \le 0 \\ 0 \le z \le 4 \end{cases}$

27.	$\iiint\limits_V \left(x + y - z^2\right)dxdydz$, $V:\begin{cases} -2 \le x \le 0 \\ 1 \le y \le 2 \\ 0 \le z \le 5 \end{cases}$	28.	$\iiint\limits_V \left(x + y^2 + z^2\right)dxdydz$, $V:\begin{cases} -1 \le x \le 0 \\ 0 \le y \le 1 \\ 2 \le z \le 3 \end{cases}$
29.	$\iiint\limits_V \left(x + y^2 - 2z\right)dxdydz$, $V:\begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ -2 \le y \le 3 \\ 0 \le z \le 1 \end{cases}$	30.	$\iiint\limits_V \left(x - y - z\right)dxdydz$, $V:\begin{cases} 0 \le x \le 3 \\ 0 \le y \le 1 \\ -2 \le z \le 1 \end{cases}$

1.3.12. Обчислити об'єм тіла V, обмеженого заданими поверхнями, за допомогою потрійного інтеграла, використовуючи циліндричні координати

1.	а)	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2y \\ z = 0,\ z = 1 - x^2 \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z = \sqrt{20 - x^2 - y^2} \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$
2.	а)	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4y \\ z = 0,\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z = 7{,}5\sqrt{x^2 + y^2} \\ z = 8{,}5 - x^2 - y^2 \end{cases}$
3.	а)	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8x \\ z = 0,\ z = 64 - x^2 - y^2 \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z = \sqrt{8 - x^2 - y^2} \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$
4.	а)	$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x = 0 \\ z = 0,\ z = 4 - y^2 \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z = \sqrt{64 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 = 60, z = 0, \\ \left(\textit{в середині циліндра}\right) \end{cases}$
5.	а)	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 6x \\ z = 0,\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z = \sqrt{2 - x^2 - y^2} \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$

6.	а)	$\begin{cases} x^2+y^2=6y \\ z=36-x^2-y^2 \\ z=0, (z\geq 0) \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z=3\sqrt{x^2+y^2} \\ z=10-x^2-y^2 \end{cases}$
7.	а)	$\begin{cases} x^2+y^2=4y \\ z=0,\ z=9-x^2 \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z=\sqrt{18-x^2-y^2} \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$
8.	а)	$\begin{cases} x^2+y^2=2y \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \\ z=0 \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z=\sqrt{100-x^2-y^2} \\ x^2+y^2=51, z=0 \\ (\textit{в середині циліндра}) \end{cases}$
9.	а)	$\begin{cases} x^2+y^2+2y=0 \\ z=4-x^2-y^2, z=0 \\ (\textit{в середині циліндра}) \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z=2\sqrt{x^2+y^2} \\ z=3-x^2-y^2 \end{cases}$
10.	а)	$\begin{cases} x^2+y^2=4x \\ z=0,\ z=4-y^2 \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z=\sqrt{16-x^2-y^2} \\ 6z=x^2+y^2 \end{cases}$
11.	а)	$\begin{cases} x^2+y^2=10x \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \\ z=0 \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2} \\ z=\sqrt{(x^2+y^2)/3} \end{cases}$
12.	а)	$\begin{cases} x^2+y^2=8y \\ z=64-x^2-y^2 \\ z=0 \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z=\sqrt{81-x^2-y^2} \\ x^2+y^2=45, z=0 \\ (\textit{в середині циліндра}) \end{cases}$
13.	а)	$\begin{cases} x^2+y^2=6x \\ z=0,\ z=9-y^2 \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2} \\ 3z=x^2+y^2 \end{cases}$
14.	а)	$\begin{cases} x^2+y^2=6y \\ z=0,\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z=6\sqrt{x^2+y^2} \\ z=16-x^2-y^2 \end{cases}$

15.	а)	$\begin{cases} x^2+y^2=6x, z=0 \\ z=36-x^2-y^2 \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z=\sqrt{32-x^2-y^2} \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$
16.	а)	$\begin{cases} x^2+y^2=2y \\ z=4-x^2-y^2, z=0 \\ (\textit{в середині циліндра}) \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z=\sqrt{64-x^2-y^2} \\ x^2+y^2=39, z=0 \\ (\textit{в середині циліндра}) \end{cases}$
17.	а)	$\begin{cases} x^2+y^2=4x \\ z=0,\ z=12-y^2 \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z=\sqrt{32-x^2-y^2} \\ 4z=x^2+y^2 \end{cases}$
18.	а)	$\begin{cases} x^2+y^2=8x \\ z=0,\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z=1{,}5\sqrt{x^2+y^2} \\ z=2{,}5-x^2-y^2 \end{cases}$
19.	а)	$\begin{cases} x^2+y^2=4x \\ z=0,\ z=16-x^2-y^2 \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z=\sqrt{45-x^2-y^2} \\ z=\sqrt{0{,}8(x^2+y^2)} \end{cases}$
20.	а)	$\begin{cases} x^2+y^2=4y \\ z=0,\ z=4-x^2 \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z=\sqrt{49-x^2-y^2} \\ x^2+y^2=33, z=0 \\ (\textit{в середині циліндра}) \end{cases}$
21.	а)	$\begin{cases} x^2+y^2=4x \\ z=0,\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z=\sqrt{36-x^2-y^2} \\ 9z=x^2+y^2 \end{cases}$
22.	а)	$\begin{cases} x^2+y^2=4y, z=0 \\ z=16-x^2-y^2 \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z=9\sqrt{x^2+y^2} \\ z=22-x^2-y^2 \end{cases}$
23.	а)	$\begin{cases} x^2+y^2+2x=0 \\ z=0,\ z=1-y^2 \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z=\sqrt{8-x^2-y^2} \\ z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{7}} \end{cases}$
24.	а)	$\begin{cases} x^2+y^2=12x \\ z=0,\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z=\sqrt{9-x^2-y^2} \\ x^2+y^2=5, z=0 \\ (\textit{в середині циліндра}) \end{cases}$

25.	а)	$\begin{cases} x^2+y^2+2x=0 \\ z=4-x^2-y^2,\ z=0 \\ (\textit{в середині циліндра}) \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z=\sqrt{90-x^2-y^2} \\ z=x^2+y^2 \end{cases}$
26.	а)	$\begin{cases} x^2+y^2=4y \\ z=0,\ z=6-x^2 \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z=12\sqrt{x^2+y^2} \\ z=28-x^2-y^2 \end{cases}$
27.	а)	$\begin{cases} x^2+y^2=10y \\ z=0,\ z=\sqrt{x^2+y^2} \\ (\textit{в середині циліндра}) \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z=\sqrt{9-x^2-y^2} \\ z=\sqrt{(x^2+y^2)/8} \end{cases}$
28.	а)	$\begin{cases} x^2+y^2=2x \\ z=0,\ z=4-x^2-y^2 \\ (\textit{в середині циліндра}) \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z=\sqrt{25-x^2-y^2} \\ x^2+y^2=21,\ z=0 \\ (\textit{в середині циліндра}) \end{cases}$
29.	а)	$\begin{cases} x^2+y^2=2x \\ z=0,\ z=1-y^2 \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z=\sqrt{64-x^2-y^2} \\ 12z=x^2+y^2 \end{cases}$
30.	а)	$\begin{cases} x^2+y^2=8y \\ z=0,\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$	б)	$\begin{cases} z=4{,}5\sqrt{x^2+y^2} \\ z=5{,}5-x^2-y^2 \end{cases}$

1.3.13. Обчислити об'єм тіла V, обмеженого заданими поверхнями, за допомогою потрійного інтеграла, використовуючи сферичні координати

1.	$V:\begin{cases} 1\le x^2+y^2+z^2\le 49 \\ -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{35}}\le z\le\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}} \\ -x\le y\le 0 \end{cases}$	2.	$V:\begin{cases} 16\le x^2+y^2+z^2\le 100 \\ z\le\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{24}} \\ -\sqrt{3}x\le y\le -\dfrac{x}{\sqrt{3}} \end{cases}$

3.	$V:\begin{cases} 4\le x^2+y^2+z^2\le 64 \\ \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{15}}\le z\le\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}} \\ -\sqrt{3}x\le y\le 0 \end{cases}$	4.	$V:\begin{cases} 4\le x^2+y^2+z^2\le 36 \\ z\ge-\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{63}} \\ 0\le y\le-\dfrac{x}{\sqrt{3}} \end{cases}$
5.	$V:\begin{cases} 16\le x^2+y^2+z^2\le 100 \\ \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{15}}\le z\le\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}} \\ \sqrt{3}x\le y\le 0 \end{cases}$	6.	$V:\begin{cases} 25\le x^2+y^2+z^2\le 100 \\ z\le-\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{99}} \\ \sqrt{3}x\le y\le-\sqrt{3}x \end{cases}$
7.	$V:\begin{cases} 1\le x^2+y^2+z^2\le 49 \\ 0\le z\le\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{24}} \\ y\le-\dfrac{x}{\sqrt{3}},\ y\le-\sqrt{3}x \end{cases}$	8.	$V:\begin{cases} 25\le x^2+y^2+z^2\le 121 \\ -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{24}}\le z\le 0 \\ y\ge-\dfrac{x}{\sqrt{3}},\ y\ge-\sqrt{3}x \end{cases}$
9.	$V:\begin{cases} 4\le x^2+y^2+z^2\le 64 \\ -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{35}}\le z\le\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}} \\ x\le y\le 0 \end{cases}$	10.	$V:\begin{cases} 1\le x^2+y^2+z^2\le 36 \\ z\ge\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{99}} \\ -\sqrt{3}x\le y\le\sqrt{3}x \end{cases}$
11.	$V:\begin{cases} 16\le x^2+y^2+z^2\le 100 \\ z\le\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}} \\ -\sqrt{3}x\le y\le-\dfrac{x}{\sqrt{3}} \end{cases}$	12.	$V:\begin{cases} 16\le x^2+y^2+z^2\le 64 \\ z\ge-\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{63}} \\ -\dfrac{x}{\sqrt{3}}\le y\le-\sqrt{3}x \end{cases}$

13.	$V:\begin{cases} 4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 49 \\ z \ge \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{99}} \\ y \le 0,\ y \le \sqrt{3}x \end{cases}$	14.	$V:\begin{cases} 36 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 121 \\ z \le -\sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{99}} \\ y \ge 0,\ y \ge \sqrt{3}x \end{cases}$
15.	$V:\begin{cases} 36 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 144 \\ -\sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{3}} \le z \le -\sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{15}} \\ 0 \le y \le -\sqrt{3}x \end{cases}$	16.	$V:\begin{cases} 36 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 144 \\ -\sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{24}} \le z \le 0 \quad , \\ y \ge \sqrt{3}x,\ y \ge \dfrac{x}{\sqrt{3}} \end{cases}$
17.	$V:\begin{cases} 9 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 81 \\ -\sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{3}} \le z \le \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{35}} \\ 0 \le y \le -x \end{cases}$	18.	$V:\begin{cases} 4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 64 \\ 0 \le z \le \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{24}} \\ y \le \sqrt{3}x,\ y \le \dfrac{x}{\sqrt{3}} \end{cases}$
19.	$V:\begin{cases} 36 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 144 \\ z \le \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{3}} \\ \sqrt{3}x \le y \le \dfrac{x}{\sqrt{3}} \end{cases}$	20.	$V:\begin{cases} 36 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 100 \\ z \ge -\sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{63}} \\ \dfrac{x}{\sqrt{3}} \le y \le \sqrt{3}x \end{cases}$
21.	$V:\begin{cases} 9 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 64 \\ z \ge \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{99}} \\ y \le \dfrac{x}{\sqrt{3}},\ y \le -\dfrac{x}{\sqrt{3}} \end{cases}$	22.	$V:\begin{cases} 49 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 144 \\ z \le -\sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{99}} \\ y \ge -\dfrac{x}{\sqrt{3}},\ y \ge \dfrac{x}{\sqrt{3}} \end{cases}$

23.	$V:\begin{cases} 64 \le x^2+y^2+z^2 \le 100 \\ -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}} \le z \le -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{15}} \\ 0 \le y \le x \end{cases}$	24.	$V:\begin{cases} 49 \le x^2+y^2+z^2 \le 169 \\ -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{24}} \le z \le 0 \\ y \ge 0,\ y \ge \dfrac{x}{\sqrt{3}} \end{cases}$
25.	$V:\begin{cases} 16 \le x^2+y^2+z^2 \le 100 \\ -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}} \le z \le \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{35}} \\ 0 \le y \le x \end{cases}$	26.	$V:\begin{cases} 9 \le x^2+y^2+z^2 \le 81 \\ 0 \le z \le \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{24}} \\ y \le 0,\ y \le \dfrac{x}{\sqrt{3}} \end{cases}$
27.	$V:\begin{cases} 64 \le x^2+y^2+z^2 \le 196 \\ z \le \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}} \\ -\dfrac{x}{\sqrt{3}} \le y \le 0 \end{cases}$	28.	$V:\begin{cases} 64 \le x^2+y^2+z^2 \le 144 \\ z \ge -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{63}} \\ 0 \le y \le \dfrac{x}{\sqrt{3}} \end{cases}$
29.	$V:\begin{cases} 16 \le x^2+y^2+z^2 \le 81 \\ z \ge \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{99}} \\ y \le 0,\ y \le -\sqrt{3}x \end{cases}$	30.	$V:\begin{cases} 16 \le x^2+y^2+z^2 \le 100 \\ 0 \le z \le \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{24}} \\ y \le 0,\ y \le -x/\sqrt{3} \end{cases}$

2. КРИВОЛІНІЙНІ ТА ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ

2.1. Відомості з теорії

Криволінійні інтеграли

Криволінійний інтеграл 1-го роду (по довжині дуги кривої) у декартових координатах має вигляд:

$$\int_L f(x, y)dl\ , \tag{2.1}$$

де функція $f(x, y)$ визначена і обмежена на кривій L, L – крива інтегрування.

Криволінійний інтеграл 1-го роду при обчисленні зводиться до визначеного інтегралу. При цьому треба враховувати, що межі інтегрування у визначеному інтегралі завжди «беруть» від «меншої» до «більшої», незалежно від заданого напрямку інтегрування.

1) Якщо крива L задана рівнянням $y = \varphi(x),\ a \le x \le b$, то

$$\int_L f(x, y)dl = \int_a^b f(x, \phi(x))\sqrt{1 + (\varphi'(x))^2}\,dx\ . \tag{2.2}$$

2) Якщо крива L задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [t_1, t_2]$, то

$$\int_L f(x, y)d\,l = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,d\,t\ . \tag{2.3}$$

3) Якщо крива L задана рівнянням $\rho = \rho(\varphi),\ \alpha \le \varphi \le \beta$, то

$$\int_L f(x, y)dl = \int_\alpha^\beta f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\,d\varphi\ . \tag{2.4}$$

4) У випадку просторової кривої , яка має рівняння $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$,

$t \in [t_1, t_2]$, матимемо

$$\int_L f(x,y,z)dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt\,. \qquad (2.5)$$

Застосування криволінійний інтеграл першого роду

1) Обчислення довжини кривої AB здійснюється за формулою:

$$L_{AB} = \int_{AB} dl\,. \qquad (2.6)$$

2) Маса матеріальної кривої AB з лінійною густиною $\gamma(x,y)$ обчислюється за формулою:

$$m = \int_{AB} \gamma(x,y)dl\,. \qquad (2.7)$$

Криволінійний інтеграл 2-го роду (по координатах) у декартових координатах має вигляд:

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy\,, \qquad (2.8)$$

де функції $P(x,y)$, $Q(x,y)$ визначені і обмежені на кривій L, L – крива інтегрування.

Криволінійний інтеграл 2-го роду змінює свій знак на протилежний при зміні напрямку шляху інтегрування:

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int_{BA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy\,. \qquad (2.9)$$

Обчислення криволінійний інтеграл 2-го роду

1) Якщо крива L задана рівнянням $y=\varphi(x)$, $a \le x \le b$, то

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b \left(P(x,\varphi(x)) + Q(x,\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\right)dx\,. \qquad (2.10)$$

2) Якщо крива L задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [t_1, t_2]$, то

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy =$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)\right)dt \qquad (2.11).$$

Формула Гріна

Якщо L – замкнений контур, який обмежує область D і функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ неперервні, разом із своїми частинними похідними 1-го порядку: $\frac{\partial Q}{\partial x}$ і $\frac{\partial P}{\partial y}$ в замкненій області D включаючи межу L, то справедлива формула Гріна:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy, \qquad (2.12)$$

де обхід контуру L вибирається таким, щоб область D залишалась зліва.

Відновлення функції $u(x, y)$ за її повним диференціалом

Якщо $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то значення інтеграла $\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ не залежить від форми кривої AB, яка сполучає точки A та B і $\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, а вираз $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = du$ – повний диференціал функції $u(x, y)$, яку можна відновити використовуючи формули:

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy+C \qquad (2.13)$$

або

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy+C, \qquad (2.14)$$

де (x_0, y_0) довільна фіксована точка, в якій визначені функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$. Зручно за точку $(x_0; y_0)$ брати точки $(0;0)$, $(0;1)$, $(1;0)$ або $(1;1)$.

Застосування криволінійного інтегралу 2-го роду

1) Площа плоскої фігури D, обмеженої кривою L, обчислюється за формулою:

$$S=\frac{1}{2}\oint_L x\,dy-y\,dx. \qquad (2.15)$$

2) Робота сили $\vec{F}=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж кривої L обчислюється за формулою:

$$A=\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy. \qquad (2.16)$$

Поверхневі інтеграли.

Поверхневий інтеграл 1-го роду у декартових координатах має вигляд:

$$\iint_S F(x,y,z)dS, \qquad (2.17)$$

де функція $F(x,y,z)$ визначена і обмежена на кусково-гладкій поверхні S.

Якщо гладка поверхня S задана рівнянням $z=f(x,y)$ і однозначно проектується на площину xOy в область D, то поверхневій інтеграл 1-го роду зводиться до подвійного інтегралу:

$$\iint_S F(x,y,z)dS = \iint_D F(x,y,f(x,y))\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy\,. \qquad (2.18)$$

Поверхню S можна проектувати на будь-яку координатну площину, залежно від умов. Подвійний інтеграл змінюється відповідно.

Поверхня σ, для якої виконується умова: якщо у довільну точку M поверхні σ після обходу довільного замкненого контуру L, розміщеного на поверхні σ, який не перетинає її межу, ми повертаємось з початковим напрямом нормалі $\vec{n}$, називається *двосторонньою поверхнею*.

Двостороння поверхня є орієнтована поверхня (вибрано сторону). Будемо вважати за додатний той напрям обходу контуру L, коли він залишається зліва.

Поверхневий інтеграл 2-го роду існує тільки для двосторонньої поверхні. На практиці найпоширенішим є поверхневий інтеграл 2-го роду вигляду:

$$\begin{aligned}&\iint_\sigma P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy = \\ &\quad = \iint_\sigma P(x,y,z)dydz + \iint_\sigma Q(x,y,z)dxdz + \iint_\sigma R(x,y,z)dxdy,\end{aligned} \qquad (2.19)$$

де функції $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ визначені та обмежені в точках поверхні σ.

Поверхневий інтеграл другого роду можна звести до поверхневого інтеграла першого роду:

$$\begin{aligned}&\iint_\sigma P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy = \\ &\quad = \iint_\sigma (P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma)d\sigma,\end{aligned} \qquad (2.20)$$

де α, β, γ – кути між нормаллю $\vec{n}$ до поверхні σ у довільній її точці та осями Ox, Oy, Oz відповідно.

Нехай поверхня σ задана рівнянням $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$, де область D_{xy} – проекція поверхні σ на площину xOy. Тоді

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z)dxdy = \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))dxdy. \qquad (2.21)$$

Знак "+" беремо у випадку, коли нормаль до поверхні утворює гострий кут з віссю Oz. Якщо кут тупий, то беремо "–".

Аналогічно, коли поверхня σ задана рівняннями $x = x(y, z)$, $y = y(x, z)$ відповідно, матимемо

$$\iint_{\sigma} P(x, y, z)dydz = \pm \iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z)dydz, \qquad (2.22)$$

$$\iint_{\sigma} Q(x, y, z)dxdz = \pm \iint_{D_{xz}} Q(x, y(x, z), z)dxdz, \qquad (2.23)$$

де D_{yz}, D_{xz} проекції поверхні σ відповідно на площини yOz та xOz відповідно. Знак "+" беремо у випадку, коли нормаль до поверхні утворює гострий кут з віссю Ox, Oy відповідно, а "–" – коли кут тупий.

Якщо поверхня σ задана рівнянням $F(x, y, z) = 0$, то одиничний вектор нормалі до поверхні обчислюється за формулою:

$$\vec{n}^{\,0} = \pm \frac{\left(F'_x, F'_y, F'_z\right)}{\sqrt{\left(F'_x\right)^2 + \left(F'_y\right)^2 + \left(F'_z\right)^2}}. \qquad (2.24)$$

Знак "±" відповідає двом сторонам поверхні σ.

2.2. Аудиторні завдання

2.2.1. Обчислити $\int\limits_L f(x, y)dl$ по заданій лінії L:

1) $f(x, y) = 3x - 2y$, де L – пряма AB: $A(2, 4)$, $B(-1, 1)$.

Відповідь: $10{,}5\sqrt{2}$.

2) $f(x, y) = y$, де $L: \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$, $t \in [0; \pi]$.

Відповідь: 4 .

3) $f(x, y) = \dfrac{1}{x - y}$, де $L: y = \dfrac{x}{2} - 2$, $x \in [0, 4]$.

Відповідь: $\sqrt{5}\ln 2$.

2.2.2. Обчислити масу параболи $y = x^2$ для $x \in [1; 2]$, якщо в кожній точці кривої густина дорівнює абсцисі.

Відповідь: $m = \dfrac{17\sqrt{17} - 1}{12}$ од. маси.

2.2.3. Обчислити $\int\limits_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ по заданій лінії L:

1) $P(x, y) = x^2 - 2y$, $Q(x, y) = y^2 + 2xy$, $L: y = x^2 + 1, |x| \le 1$.

Відповідь: $-\dfrac{2}{5}$.

2) $P(x,y)=4-y,\ Q(x,y)=x \quad L:\begin{cases} x=2(t-\sin t) \\ y=2(1-\cos t) \end{cases},\ t\in[0;\pi].$

Відповідь: 4π .

2.2.4. Застосувавши формулу Гріна обчислити

1) $\oint\limits_L y^2dx+(x+y)^2dy$, де L: контур трикутника з вершинами у точках $A(3;0)$, $B(3;3)$, $C(0;3)$.

Відповідь: 18 .

2) $\oint\limits_L xy^2dy-x^2dx$, де L: $x^2+y^2=4$.

Відповідь: 4π .

2.2.5. Обчислити інтеграл, перевіривши незалежність від шляху інтегрування

$$\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)}\left(3x^2+6xy^2\right)dx+\left(6x^2y+4y^3\right)dy.$$

Відповідь: 5 .

2.2.6. Відновити функцію $u(x,y)$ за її повним диференціалом

1) $du=4\left(x^2-y^2\right)\cdot(xdx-ydy).$

Відповідь: $u(x,y)=x^4+y^4-2x^2y^2+C$.

2) $du=\left(\dfrac{3}{x}-\dfrac{2x}{y}\right)dx+\left(\dfrac{3}{y}+\dfrac{x^2}{y^2}\right)dy$.

Відповідь: $u(x,y) = \ln x^3 + \ln y^3 - \dfrac{x^2}{y} + C_1,\ C_1 = C + 1$.

2.2.7. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = x^4$ і прямою $y = 1$.

Відповідь: $\mathrm{S} = 1{,}6$ кв. од.

2.2.8. Обчислити роботу сили $\vec{F} = (y + x, xy)$ при переміщенні матеріальної точки одиничної маси вздовж відрізка, що з'єднує точку $A(1;\,1)$ з точкою $B(3;3)$.

Відповідь: $\dfrac{50}{3}$ од. роботи.

2.2.9. Обчислити поверхневий інтеграл першого роду:

$$\iint_S (x + 2y - z)dS,$$

де S – частина площини $x + 2y + z = 2$ в першому октанті.

Відповідь: $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

2.2.10. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду:

$$\iint_\sigma (z + xy)dxdz,$$

де σ – нижня сторона площини $x + 2y + z = 1$, яка обмежена координатними площинами.

Відповідь: $-\dfrac{13}{18}$.

2.3. Індивідуальні завдання

2.3.1.Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L f(x, y)dl$, де L – відрізок прямої від точки $A_1(x_1, y_1)$ до точки $A_2(x_2, y_2)$.

1.	$f(x, y) = x + 7y$	$A_1(-2; 5)$	$A_2(3; 7)$
2.	$f(x, y) = 3x + 5y$	$A_1(3; 4)$	$A_2(5; 1)$
3.	$f(x, y) = -2x + 5y$	$A_1(-3; 2)$	$A_2(0; 5)$
4.	$f(x, y) = 5x + 2y$	$A_1(-2;7)$	$A_2(3; -3)$
5.	$f(x, y) = -4x + y$	$A_1(3; 1)$	$A_2(2, ; 7)$
6.	$f(x, y) = x + 4y$	$A_1(4; 0)$	$A_2(1; -4)$
7.	$f(x, y) = 2x + 3y$	$A_1(5; -7)$	$A_2(2; -1)$
8.	$f(x, y) = -5x + 2y$	$A_1(3;5)$	$A_2(7; 1)$
9.	$f(x, y) = x + 3y$	$A_1(2;5)$	$A_2(0; 3)$
10.	$f(x, y) = 2x - 4y$	$A_1(7; 2)$	$A_2(5; -3)$
11.	$f(x, y) = 5x + y$	$A_1(2; 5)$	$A_2(4; -3)$
12.	$f(x, y) = 3x + 5y$	$A_1(2; -1)$	$A_2(3; -2)$
13.	$f(x, y) = 7x + 6y$	$A_1(6; 5)$	$A_2(3; 6)$
14.	$f(x, y) = 6x + 2y$	$A_1(3; 5)$	$A_2(5; -2)$
15.	$f(x, y) = 2x - 5y$	$A_1(3; -7)$	$A_2(2; -6)$
16.	$f(x, y) = 2x - y$	$A_1(1, ; 2)$	$A_2(3; -1)$
17.	$f(x, y) = x + y$	$A_1(3; 1)$	$A_2(-2; 2)$
18.	$f(x, y) = -x - 2y$	$A_1(1; -3)$	$A_2(4; 5)$
19.	$f(x, y) = 3x - y$	$A_1(2; 1)$	$A_2(1; -3)$
20.	$f(x, y) = 5x + y$	$A_1(4; 2)$	$A_2(-3; 1)$

21.	$f(x,y)=-2x+3y$	$A_1(3;-3)$	$A_2(4;1)$
22.	$f(x,y)=-x+5y$	$A_1(7;2)$	$A_2(1;4)$
23.	$f(x,y)=3x+2y$	$A_1(4;-1)$	$A_2(2;7)$
24.	$f(x,y)=-2x+3y$	$A_1(3;2)$	$A_2(5;1)$
25.	$f(x,y)=x+3y$	$A_1(1;-3)$	$A_2(3;2)$
26.	$f(x,y)=x-3y$	$A_1(5;2)$	$A_2(-1;5)$
27.	$f(x,y)=7x-2y$	$A_1(3;5)$	$A_2(2;-3)$
28.	$f(x,y)=-3x+2y$	$A_1(2;-4)$	$A_2(3;-5)$
29.	$f(x,y)=-5x+3y$	$A_1(-2;5)$	$A_2(3;2)$
30.	$f(x,y)=-2x+y$	$A_1(1;5)$	$A_2(2;-4)$

2.3.2. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L f(x,y)\,dl$ по заданій лінії L.

1.	$f(x,y)=\dfrac{x}{y}$	$L:\begin{cases} x=2\sin t \\ y=2\cos t \end{cases}$	$t\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right]$
2.	$f(x,y)=x+y$	$L:\begin{cases} x=5\cos^2 t \\ y=5\sin^2 t \end{cases}$	$t\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$
3.	$f(x,y)=\dfrac{1}{xy}$	$L:\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$	$t\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right]$
4.	$f(x,y)=x$	$L:\begin{cases} x=2(t-\sin t) \\ y=2(1-\cos t) \end{cases}$	$t\in[0,2\pi]$
5.	$f(x,y)=xy^2$	$L:\begin{cases} x=3\cos t \\ y=3\sin t \end{cases}$	$t\in[\pi,2\pi]$
6.	$f(x,y)=\dfrac{y}{x}$	$L:\begin{cases} x=t \\ y=t^2 \end{cases}$	$t\in[1,3]$

7.	$f(x,y)=2x^2+3y$	$L:\begin{cases}x=6\cos^2 t\\ y=6\sin^2 t\end{cases}$	$t\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$
8.	$f(x,y)=x^2y$	$L:\begin{cases}x=2\cos^3 t\\ y=2\sin^3 t\end{cases}$	$t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$
9.	$f(x,y)=y^2$	$L:\begin{cases}x=3(t-\sin t)\\ y=3(1-\cos t)\end{cases}$	$t\in[0,2\pi]$
10.	$f(x,y)=x^2y+xy^2$	$L:\begin{cases}x=5\sin t\\ y=5\cos t\end{cases}$	$t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$
11.	$f(x,y)=\sqrt{2y}$	$L:\begin{cases}x=t\\ y=\frac{t^2}{2}\end{cases}$	$t\in[0,1]$
12.	$f(x,y)=x^2+y^2$	$L:\begin{cases}x=3(\cos t+t\sin t)\\ y=3(\sin t-t\cos t)\end{cases}$	$t\in[0,2\pi]$
13.	$f(x,y)=4\sqrt[3]{x}-3\sqrt[3]{y}$	$L:\begin{cases}x=\cos^3 t\\ y=\sin^3 t\end{cases}$	$t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$
14.	$f(x,y)=\sqrt{2y}$	$L:\begin{cases}x=2(t-\sin t)\\ y=2(1-\cos t)\end{cases}$	$t\in[0,2\pi]$
15.	$f(x,y)=4y+3x^2$	$L:\begin{cases}x=6\cos t\\ y=6\sin t\end{cases}$	$t\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi\right]$
16.	$f(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x}}$,	$L:\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos^2 t\\ y=\sqrt{2}\sin^2 t\end{cases}$	$t\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$
17.	$f(x,y)=\left(x^2+y^2\right)^2$	$L:\begin{cases}x=5\cos t\\ y=5\sin t\end{cases}$	$t\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$
18.	$f(x,y)=x+y$	$L:\begin{cases}x=8(t-\sin t)\\ y=8(1-\cos t)\end{cases}$	$t\in[0,2\pi]$
19.	$f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$	$L:\begin{cases}x=2(\cos t+t\sin t)\\ y=2(\sin t-t\cos t)\end{cases}$	$t\in[0,2\pi]$

20.	$f(x,y)=\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}$	$L:\begin{cases} x=4\cos^3 t \\ y=4\sin^3 t \end{cases}$	$t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$
21.	$f(x,y)=y\cdot e^{-x}$	$L:\begin{cases} x=\ln\left(1+t^2\right) \\ y=2arctg\,t-t \end{cases}$	$t\in[0,1]$
22.	$f(x,y)=y^{\frac{3}{2}}$	$L:\begin{cases} x=3(t-sint) \\ y=3(1-cos\,t) \end{cases}$	$t\in[0,2\pi]$
23.	$f(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$	$L:\begin{cases} x=3(1+cos\,t) \\ y=3\,sint \end{cases}$	$t\in[0,\pi]$
24.	$f(x,y)=xy$	$L:\begin{cases} x=3\,cos\,t \\ y=2\,sint \end{cases}$	$t\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$
25.	$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$	$L:\begin{cases} x=6(\cos t+t\sin t) \\ y=6(\sin t-t\cos t) \end{cases}$	$t\in[0,2\pi]$
26.	$f(x,y)=4x^2-y^2$	$L:\begin{cases} x=7\,cos^3\,t \\ y=7\,sin^3\,t \end{cases}$	$t\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$
27.	$f(x,y)=\sqrt{y}+\sqrt{y^3}$	$L:\begin{cases} x=6(t-sint) \\ y=6(1-cos\,t) \end{cases}$	$t\in[0,\pi]$
28.	$f(x,y)=y\sqrt{x^2+y^2}$	$L:\begin{cases} x=1+cos\,t \\ y=sint \end{cases}$	$t\in[0,\pi]$
29.	$f(x,y)=y+1$	$L:\begin{cases} x=5\,cos\,t \\ y=5(1+sint) \end{cases}$	$t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$
30.	$f(x,y)=3+\frac{1}{3}y^2$	$L:\begin{cases} x=4\,cos\,t \\ y=4\,sint \end{cases}$	$t\in\left[\pi,\frac{3}{2}\pi\right]$

2.3.3. Обчислити $\int\limits_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ по заданій лінії L.

1.	$\int\limits_L \left(x^2 - 2xy\right)dx + \left(y^2 - 2xy\right)dy$	L: $y = x^2$, від точки $A(-1;1)$ до точки $B(1;\ 1)$
2.	$\int\limits_L \left(x^2 + y^2\right)dx + 2xydy$	L: $y = x^3$, від точки $O(0;0)$ до точки $A(1;\ 1)$
3.	$\int\limits_L \left(x^2 + y\right)dy$	L: $y = 2 - x^2$, від точки $A\left(-\sqrt{2}\,;0\right)$ до точки $B(0;\ 2)$
4.	$\int\limits_L \left(x - 2xy^2\right)dx$	L: $x = 1 - y^2$, від точки $A(1;0)$ до точки $B(-3;\ 2)$
5.	$\int\limits_L x^2ydx + \left(y - xy^2\right)dy$	L: $y = -x^2 + 1$, від точки $A(0;1)$ до точки $B(2;\ -3)$
6.	$\int\limits_L xydx + (y - x)dy$	L: $y = x^3$, від точки $O(0;0)$ до точки $A(-1;\ -1)$
7.	$\int\limits_L (1 - xy)dx + (xy + 1)dy$	L: $y = -x^3$, від точки $A(1;-1)$ до точки $B(-1;\ 1)$
8.	$\int\limits_L xydx + \left(y - x^2\right)dy$	L: $y^2 = x$, від точки $O(0;0)$ до точки $A(4;\ 2)$
9.	$\int\limits_L (xy - 1)dx + x^2ydy$	L: $4 - 4x = y^2$, від точки $A(1;0)$ до точки $B(0;\ 2)$
10.	$\int\limits_L x^2ydx + \left(y^2 - x\right)dy$	L: $y = x^2$, від точки $O(0;0)$ до точки $A(-1;1)$
11.	$\int\limits_L \left(xy - y^2\right)dx + xdy$	L: $y = x^2 + 2$, від точки $A(0;2)$ до точки $B(1;\ 3)$
12.	$\int\limits_L \frac{y^2 + 1}{y}dx + \frac{x}{y}dy$	L: відрізок прямої від точки $A(1;\ 2)$ до точки $B(3;\ 4)$

13.	$\int\limits_L (xy - x)dx + \frac{1}{2}x^2dy$	L: $y^2 = 4x$, від точки $O(0;0)$ до точки $A(1;\ 2)$
14.	$\int\limits_L \frac{y}{x}dx + xdy$	L: $y = \ln x$, від точки $A(1;0)$ до точки $B(\mathrm{e};\ 1)$
15.	$\int\limits_L xydx - y^2dy$	L: $y^2 = 2x$, від точки $A(2;2)$ до точки $B(0{,}5;\ -1)$
16.	$\int\limits_L 2xydx - x^2dy$	L: $y = 0{,}25x^2$, від точки $O(0;0)$ до точки $A(2;1)$
17.	$\int\limits_L \left(xy - y^2\right)dx + xdy$	L: $y = 2x^2$, від точки $O(0;0)$ до точки $A(1;\ 2)$
18.	$\int\limits_L 2xydx + x^2dy$	L: $y = 2x^3$, від точки $A(1;\ 2)$ до точки $B(-1;-2)$
19.	$\int\limits_L \left(x - \frac{1}{y}\right)dy$	L: $y = 3x^2$, від точки $A(1;3)$ до точки $B(-1;\ 3)$
20.	$\int\limits_L \left(3x^2y + 1\right)dx + \left(x^3 + 2\right)dy$	L: $4y^2 = x$, від точки $O(0;0)$ до точки $A(4;\ 1)$
21.	$\int\limits_L (xy - x)dx + \frac{x^2}{y}dy$	L: $y = 2\sqrt{x}$, від точки $O(0;0)$ до точки $A(1;\ 2)$
22.	$\int\limits_L \left(x^2 - y^2\right)dx$	L: $y = 3x^2$, від точки $A(-1;3)$ до точки $B(1;\ 3)$
23.	$\int\limits_L xdy$	L: $y = \sin x$ від точки $A(\pi;\ 0)$ до точки $O(0;0)$
24.	$\int\limits_L \left(x^2 - 2xy\right)dx + (x - 2y)^2dy$	L: відрізок прямої від точки $A(2;\ 0)$ до точки $B(3;\ 1)$
25.	$\int\limits_L \left(xy - y^2\right)dx + xdy$	L: $x = y^2 + 2$, від точки $A(3;1)$ до точки $B(2;\ 0)$
26.	$\int\limits_L \left(3x^2 + y^2\right)dx + \left(x - 2y^2\right)dy$	L: відрізок прямої від точки $A(1;3)$ до точки $B(-1;\ 5)$

27.	$\int\limits_L 2xydx - x^2dy$	$L: x = 2y^2$, від точки $O(0;0)$ до точки $A(2;\ 1)$
28.	$\int\limits_L \frac{x}{y}dx - \frac{y-x}{x}dy$	$L: x+1 = y^2$, від точки $A(3;2)$ до точки $B(8;\ -3)$
29.	$\int\limits_L xdy - ydx$	$L: y = x^2$, від точки $O(0;0)$ до точки $A(2;\ 4)$
30.	$\int\limits_L (xy - x)dx + \frac{x^2}{2}dy$	$L: y = 4x^2$, від точки $O(0;0)$ до точки $A(1;4)$

2.3.4. Обчислити $\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ по заданій лінії L.

1.	$\int\limits_L (x+2y)dx + (x-y)dy$	$L: \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$	$t \in [0, \pi]$
2.	$\int\limits_L (x^2y - x)dx + (y^2x - 2y)dy$	$L: \begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$	$t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
3.	$\int\limits_L xdy - ydx$	$L: \begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$	$t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
4.	$\int\limits_L (xy - x)dx + (y - xy)dy$	$L: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$	$t \in [\pi, 2\pi]$
5.	$\int\limits_L (y^2 - 2xy)dx + x^2dy$	$L: \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 8\sin t \end{cases}$	$t \in [0, \pi]$
6.	$\int\limits_L (2-y)dx + xdy$	$L: \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$	$t \in [0, 2\pi]$
7.	$\int\limits_L (x+y)dx + (x-y)dy$	$L: \begin{cases} x = 1 + 2\cos t \\ y = 1 + 2\sin t \end{cases}$	$t \in [0, 2\pi]$
8.	$\int\limits_L x^2ydx + xy^2dy$	$L: \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$	$t \in [\pi, 2\pi]$

9.	$\int\limits_L xy^2 dx$	$L:\begin{cases} x = 7\cos t \\ y = 7\sin t \end{cases}$	$t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
10.	$\int\limits_L \frac{x}{y} dx - \frac{dy}{y-2}$	$L:\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$	$t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$
11.	$\int\limits_L ydx + xdy$	$L:\begin{cases} x = 9\cos t \\ y = 9\sin t \end{cases}$	$t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
12.	$\int\limits_L (8 - y)dx + xdy$	$L:\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}$	$t \in [0, 2\pi]$
13.	$\int\limits_L (4y - 3x)dy - 4ydx$	$L:\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$	$t \in [0, 2\pi]$
14.	$\int\limits_L xdy - ydx$	$L:\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$	$t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
15.	$\int\limits_L y^2 dx + x^2 dy$	$L:\begin{cases} x = \cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$	$t \in [0, \pi]$
16.	$\int\limits_L (x + y)dx + (2x - y)dy$	$L:\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$	$t \in [0, 2\pi]$
17.	$\int\limits_L (6 - y)dx + (y - 3)dy$	$L:\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}$	$t \in [0, 2\pi]$
18.	$\int\limits_L (2x - 3y)dx + xdy$	$L:\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$	$t \in [0, 2\pi]$
19.	$\int\limits_L (x - y)dx + dy$	$L:\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$	$t \in [0, \pi]$
20.	$\int\limits_L y^2 dx - 2xdy$	$L:\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases}$	$t \in [0, 2\pi]$
21.	$\int\limits_L (x + y)dx + (x - y)dy$	$L:\begin{cases} x = 1 + 2\cos t \\ y = 1 + 2\sin t \end{cases}$	$t \in [0, 2\pi]$

22.	$\int\limits_L (xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy$	$L:\begin{cases} x=1+\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$	$t\in[0,\pi]$
23.	$\int\limits_L (x+y)dx+(x-y)dy$	$L:\begin{cases} x=2\cos t \\ y=4\sin t \end{cases}$	$t\in[0,2\pi]$
24.	$\int\limits_L 2ydx+xdy$	$L:\begin{cases} x=2+\cos t \\ y=2+\sin t \end{cases}$	$t\in[0,2\pi]$
25.	$\int\limits_L (2-y)dx+xdy$	$L:\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$	$t\in[0,2\pi]$
26.	$\int\limits_L (x+3y)dx+(x-y)dy$	$L:\begin{cases} x=1+3\cos t \\ y=1+3\sin t \end{cases}$	$t\in[0,2\pi]$
27.	$\int\limits_L y^{\frac{1}{3}}dx-x^{\frac{1}{3}}dy$	$L:\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$	$t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$
28.	$\int\limits_L \left(x^2-y\right)dx-\left(x+y^2\right)dy$	$L:\begin{cases} x=8\cos t \\ y=8\sin t \end{cases}$	$t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$
29.	$\int\limits_L (3y-8x)dy-ydx$	$L:\begin{cases} x=4\cos t \\ y=3\cos t \end{cases}$	$t\in[0,2\pi]$
30.	$\int\limits_L \left(1-\frac{y}{2}\right)dx-\frac{x}{2}dy$	$L:\begin{cases} x=2\cos t \\ y=2\sin t \end{cases}$	$t\in[0,\pi]$

2.3.5. Застосувавши формулу Гріна, обчислити криволінійний інтеграл по замкненому контуру (обхід контуру здійснити в додатному напрямі)

1.	$\oint\limits_L \left(1-x^2\right)dx+x\left(1+y^2\right)dy$	$L: x^2+y^2=4$
2.	$\oint\limits_L \left(x^2-y^2\right)dx+\left(x^2+y^2\right)dy$	$L: x^2+y^2=1$
3.	$\oint\limits_L xydx+x^2dy$	$L: x^2+y^2=9$

4.	$\oint\limits_L (x-y)dx$	L: трикутник з вершинами $A(-1;\ 0)$, $B(0;\ 1)$, $C(1;\ 0)$
5.	$\oint\limits_L (x+y)dy$	L: прямокутник з вершинами $A(-1;\ -1)$, $B(-1;\ 1)$, $C(1;\ 1)$, $D(1;\ -1)$
6.	$\oint\limits_L (1+x)ydx+(x-y)dy$	L: трикутник з вершинами $A(-1;\ 2)$, $B(2;\ 1)$, $C(0;\ -1)$
7.	$\oint\limits_L (1+y^2)dx+(1-x^2)dy$	$L: x^2+y^2=1$
8.	$\oint\limits_L y^2dx+x^2dy$	$L: x^2+y^2=4$
9.	$\oint\limits_L y^2dx+xydy$	$L: x^2+y^2=9$
10.	$\oint\limits_L (x^2-y^2)dx+2xydy$	$L: x^2+y^2=1$
11.	$\oint\limits_L y^2dx+(x^2-y^2)dy$	$L: x^2+y^2=4$
12.	$\oint\limits_L (1-xy)dx+x^2dy$	L: прямокутник з вершинами $A(-1;\ 1)$, $B(0;\ 2)$, $C(2;\ 0)$, $D(1;-1)$
13.	$\int\limits_L (xy-1)dx+(1-x)dy$	$L: x^2+y^2=1$
14.	$\oint\limits_L (1-y^2)dx+y(1+x)dy$	$L: x^2+y^2=1$
15.	$\oint\limits_L ydx+\frac{y}{x}dy$	L: трикутник з вершинами $A(-1;\ 1)$, $B(0;\ 2)$, $C(2;\ 1)$
16.	$\oint\limits_L (x^2+3y)dx+(3x^2+y)dy$	L: трикутник з вершинами $A(-1;\ 0)$, $B(0;\ 1)$, $C(1;\ 0)$
17.	$\oint\limits_L (y^2+3)dx+xy\,dy$	L: прямокутник, утворений осями координат і прямими $y=2,\ x=1$

18.	$\oint\limits_L (x+y)dx + xydy$	$L: x^2 + y^2 = 1$
19.	$\oint\limits_L ydx + (y-x)dy$	$L: x^2 + y^2 = 4$
20.	$\oint\limits_L xdx + (x+y)dy$	L: контур, утворений параболою $y = x^2$ і прямою $y = 1$
21.	$\oint\limits_L (x+y)dx + (2x-y)dy$	$L: x^2 + y^2 = 9$
22.	$\oint\limits_L (x-y)dx - (x+y)dy$	$L: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$
23.	$\oint\limits_L (xy - y^2)dx + xdy$	L: контур, утворений віссю Ox і параболою $y = 1 - x^2$
24.	$\oint\limits_L y^2dx + (x-2y)dy$	L: контур, утворений віссю Oy і параболою $x = 1 - y^2$
25.	$\oint\limits_L y^2dx + (x^2 - y^2)dy$	L: трикутник з вершинами $A(-1;\ 0)$, $B(0;\ 1)$, $C(1;\ 0)$
26.	$\oint\limits_L (x-y)dx + (y-x)dy$	$L: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$
27.	$\oint\limits_L 2xydx + 2(x^2 + y^2)dy$	$L: x^2 + y^2 = 4$
28.	$\oint\limits_L 3ydx + (x-y)dy$	$L: x^2 + y^2 = 9$
29.	$\oint\limits_L (y^2 - x)dy$	$L: x^2 + y^2 = 1$
30.	$\int\limits_L \left(2x - \frac{y^3}{3}\right)dx + \left(2y^2x + \frac{x^3}{3}\right)dy$	$L: x^2 + y^2 = 36$

2.3.6. Обчислити інтеграл, перевіривши незалежність від шляху інтегрування

1.	$\int\limits_{(1;2)}^{(2;3)}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)dx+\left(\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\right)dy$	2.	$\int\limits_{(0;0)}^{(2;1)} ydx+xdy$
3.	$\int\limits_{(0;0)}^{(1;2)}(y+\ln(x+1))dx+\left(x+\mathrm{e}^y\right)dy$	4.	$\int\limits_{(-1;1)}^{(2;4)}\frac{dx}{y^2}+\left(4-\frac{2x}{y^3}\right)dy$
5.	$\int\limits_{(-1;1)}^{(1;1)} x^2ydx+\left(\frac{x^3}{3}-y\right)dy$	6.	$\int\limits_{(1;1)}^{(2;-2)}(x+3y)dx+(y+3x)dy$
7.	$\int\limits_{(1;2)}^{(1;-2)}\ln(x+1)dx+\mathrm{e}^y\,dy$	8.	$\int\limits_{(0;2)}^{(3;3)}\frac{dx}{1+x^2}+\frac{dy}{y^2-1}$
9.	$\int\limits_{(-1;-1)}^{(1;1)}\frac{ydx}{\sqrt{1-x^2y^2}}+\frac{xdy}{\sqrt{1-x^2y^2}}$	10.	$\int\limits_{(-1;1)}^{(1;3)}-\frac{dx}{y}+\frac{x}{y^2}dy$
11.	$\int\limits_{(1;-1)}^{(2;1)}\left(4+8x^2\right)xdx-y^2dy$	12.	$\int\limits_{(0;1)}^{(2;3)}\frac{ydx}{1+x}+\ln(1+x)dy$
13.	$\int\limits_{(-1;1)}^{(2;3)}\left(x^2-2y\right)dx+\left(y^2-2x\right)dy$	14.	$\int\limits_{(1;1)}^{(-1;2)}\left(1-\frac{1}{y}\right)dx+\frac{x}{y^2}dy$
15.	$\int\limits_{(1;1)}^{(2;2)}\frac{y}{x^2}dx+\left(2-\frac{1}{x}\right)dy$	16.	$\int\limits_{(0;1)}^{(3;2)}\left(x^2-y\right)dx-\left(x-y^2\right)dy$
17.	$\int\limits_{(-1;-1)}^{(1;2)}\left(\frac{y}{x^2+y^2}-1\right)dx-\frac{xdy}{x^2+y^2}$	18.	$\int\limits_{(1;0)}^{(\mathrm{e};1)}\frac{y}{x}dx+\ln x\,dy$
19.	$\int\limits_{(0;1)}^{(-1;2)}\ln(y+1)dx+\frac{x}{y+1}dy$	20.	$\int\limits_{(-1;1)}^{(0;2)}\left(x-\frac{1}{y}\right)dx+\frac{x}{y^2}dy$

21.	$\int\limits_{(0;1)}^{(1;2)} (y+\ln(x+1))dx+\left(x+e^{y}\right)dy$	22.	$\int\limits_{(1;1)}^{(2;-1)} \left(2x+\frac{1}{y}\right)dx-\frac{x}{y^2}dy$
23.	$\int\limits_{(1;1)}^{(-1;-1)} x\sqrt{x^2+y^2}dx+y\sqrt{x^2+y^2}dy$	24.	$\int\limits_{(-1;1)}^{(1;2)} \frac{y}{x^2}dx+\left(y-\frac{1}{x}\right)dy$
25.	$\int\limits_{(0;-2)}^{(1;1)} \frac{xdx}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$	26.	$\int\limits_{(0;0)}^{(1;2)} \frac{ydx}{1+x}+\ln(1+x)dy$
27.	$\int\limits_{(0;0)}^{(1;1)} (x+y\sin xy)dx+(y+x\sin xy)dy$	28.	$\int\limits_{(-1;1)}^{(1;1)} 2xydx+x^2ydy$
29.	$\int\limits_{(1;1)}^{(2;3)} \left(\frac{1}{x}+y\right)dx+(\ln y+x)dy$	30.	$\int\limits_{(0;1)}^{(1;0)} \left(3x^2-2xy+y^2\right)dx+$ $+x(2y-x)dy$

2.3.7. Знайти функцію $u(x,y)$ за її повним диференціалом

1.	$du=\left(2x-3y^2+1\right)dx+(2-6xy)dy$
2.	$du=\frac{y}{x^2}dx+\left(y-\frac{1}{x}\right)dy$
3.	$du=\left(x^2-2y\right)dx+\left(y^2-2x\right)dy$
4.	$du=(4x+3y)dx+(3x+2y)dy$
5.	$du=(10x+6y)dx+6xdy$
6.	$du=(y+2x)dx+(x+2y)dy$
7.	$du=\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)dx+\left(\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\right)dy$
8.	$du=\left(20x^3-21x^2y+2y\right)dx+\left(3+2x-7x^3\right)dy$
9.	$du=\left(3x^2-2xy+y\right)dx+\left(x-x^2-3y^2-4y\right)dy$
10.	$du=\left(4-\frac{y^2}{x^2}\right)dx+\frac{2y}{x}dy$

11.	$du=\left(\frac{1}{y}-\frac{y}{x^2}\right)dx+\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{y^2}\right)dy$
12.	$du=\left(3x^2-2xy+y^2\right)dx-\left(x^2-2xy+3y^2\right)dy$
13.	$du=\left(3x^2y+\frac{1}{y}\right)dx+\left(x^3-\frac{x}{y^2}\right)dy$
14.	$du=\left(3x^2y-\frac{1}{3}y^3\right)dx+\left(x^3-xy^2\right)dy$
15.	$du=\left(x^2-2xy\right)dx+\left(y^2-x^2\right)dy$
16.	$du=\frac{1-y}{x^2y}dx+\frac{1-2x}{xy^2}dy$
17.	$du=\left(3x^2y-y^3\right)dx+\left(x^3-3xy^2\right)dy$
18.	$du=\left(\frac{y}{x^2+y^2}-1\right)dx-\frac{x}{x^2+y^2}dy$
19.	$du=\left(12x^2y+\frac{1}{y^2}\right)dx+\left(4x^3-\frac{2x}{y^3}\right)dy$
20.	$du=\left(2xy-\frac{1}{x^2}\right)dx+\left(x^2-\frac{2}{y^3}\right)dy$
21.	$du=\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y}\right)dx+\frac{1-x}{y^2}dy$
22.	$du=\left(4xy+3y^2+3x^2\right)dx+\left(2x^2+6xy\right)dy$
23.	$du=\frac{-2x}{y^2-x^2}dx+\frac{2y}{y^2-x^2}dy$
24.	$du=\left(6x^2y-4y^5\right)dx+\left(2x^3-20xy^4\right)dy$
25	$du=\left(5y^2-9x^2y^4\right)dx+\left(10xy-12x^3y^3\right)dy$
26.	$du=\left(-3y-4x^3\right)dx+\left(2y-3x\right)dy$

27.	$du=\left(5-3x^2\right)dx-3y^2dy$
28.	$du=\left(7-3x^2y^2\right)dx+\left(4y^3-2x^3y\right)dy$
29.	$du=\left(4xy^2+3x^2\right)dx+\left(4x^2y-3y^2\right)dy$
30.	$du=\left(y^4-6xy\right)dx+\left(4xy^3-3x^2\right)dy$

2.3.8. Обчислити поверхневий інтеграл першого роду по поверхні S, де S – частина площини P в першому октанті.

1.	$\iint\limits_S (2x+3y+2z)dS$	$P:$	$x+3y+z=3$
2.	$\iint\limits_S (2+y-7x+9z)dS$	$P:$	$2x-y-2z=-2$
3.	$\iint\limits_S (6x+y+4z)dS$	$P:$	$3x+3y+z=3$
4.	$\iint\limits_S (x+2y+3z)dS$	$P:$	$x+y+z=2$
5.	$\iint\limits_S (3x-2y+6z)dS$	$P:$	$2x+y+2z=2$
6.	$\iint\limits_S (2x+5y-z)dS$	$P:$	$x+2y+z=2$
7.	$\iint\limits_S (5x-8y-z)dS$	$P:$	$2x-3y+z=6$
8.	$\iint\limits_S (3y-x-z)dS$	$P:$	$x-y+z=2$
9.	$\iint\limits_S (3y-2x-2z)dS$	$P:$	$2x-y-2z=-2$
10.	$\iint\limits_S (2x-3y+z)dS$	$P:$	$x+2y+z=2$
11.	$\iint\limits_S (5x+y-z)dS$	$P:$	$x+2y+2z=2$
12.	$\iint\limits_S (3x+2y+2z)dS$	$P:$	$3x+2y+2z=6$
13.	$\iint\limits_S (2x+3y-z)dS$	$P:$	$2x+y+z=2$

14.	$\iint\limits_S (9x+2y+z)dS$	$P:$	$2x+y+z=4$
15.	$\iint\limits_S (5x+8y+8z)dS$	$P:$	$x+4y+2z=8$
16.	$\iint\limits_S (4y-x+4z)dS$	$P:$	$x-2y+2z=2$
17.	$\iint\limits_S (7x+y+2z)dS$	$P:$	$3x-2y+2z=6$
18.	$\iint\limits_S (2x+3y+z)dS$	$P:$	$2x+3y+z=6$
19.	$\iint\limits_S (4x-y+z)dS$	$P:$	$x-y+z=2$
20.	$\iint\limits_S (6x-y+8z)dS$	$P:$	$x+y+2z=2$
21.	$\iint\limits_S (4x-4y-z)dS$	$P:$	$x+2y+2z=4$
22.	$\iint\limits_S (2x+5y+z)dS$	$P:$	$x+y+2z=2$
23.	$\iint\limits_S (4x-y+4z)dS$	$P:$	$2x+2y+z=4$
24.	$\iint\limits_S (5x+2y+2z)dS$	$P:$	$x+2y+z=2$
25.	$\iint\limits_S (2x+5y+10z)dS$	$P:$	$2x+y+3z=6$
26.	$\iint\limits_S (2x+15y+z)dS$	$P:$	$x+2y+2z=2$
27.	$\iint\limits_S (3x+10y-z)dS$	$P:$	$x+3y+2z=6$
28.	$\iint\limits_S (2x+3y+z)dS$	$P:$	$2x+2y+z=2$
29.	$\iint\limits_S (5x-y+5z)dS$	$P:$	$3x+2y+z=6$
30.	$\iint\limits_S (x+3y+2z)dS$	$P:$	$2x+y+2z=2$

2.3.9. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду через нижню сторону поверхні σ , яка обмежена координатними площинами

1.	$\iint\limits_{\sigma}\left(x^2-y\right)dydz$	σ :	$2x-3y+z=1$
2.	$\iint\limits_{\sigma}\left(y^2+xz\right)dydz$	σ :	$x+2y-z=1$
3.	$\iint\limits_{\sigma}(xy+z)dydz$	σ :	$x+3y+2z=1$
4.	$\iint\limits_{\sigma}(z-2x+y)dydz$	σ :	$2x+y-3z=1$
5.	$\iint\limits_{\sigma}(z-3xy)dydz$	σ :	$x-3y+z=1$
6.	$\iint\limits_{\sigma}\left(xz+y^2\right)dydz$	σ :	$x+y+3z=1$
7.	$\iint\limits_{\sigma}\left(z^2+y\right)dydz$	σ :	$y-x+2z=1$
8.	$\iint\limits_{\sigma}\left(y^2-z^2\right)dydz$	σ :	$2y-x+z=1$
9.	$\iint\limits_{\sigma}\left(x^2+xz\right)dydz$	σ :	$z-y-x=1$
10.	$\iint\limits_{\sigma}(xz+4y)dydz$	σ :	$-2x-y+2z=1$
11.	$\iint\limits_{\sigma}\left(y^2-x\right)dxdz$	σ :	$3x-y+2z=1$
12.	$\iint\limits_{\sigma}\left(y^2+x^2\right)dxdz$	σ :	$2x-3y+2z=1$
13.	$\iint\limits_{\sigma}\left(yz+x^2\right)dxdz$	σ :	$3y-2x+z=1$
14.	$\iint\limits_{\sigma}(x-2y+z)dxdz$	σ :	$-2x-3y+2z=1$
15.	$\iint\limits_{\sigma}(x-3yz)dxdz$	σ :	$-x-3y+z=1$

16.	$\iint\limits_{\sigma}(z-xy)dxdz$	σ :	$2x-y+3z=1$
17.	$\iint\limits_{\sigma}(x^2-y)dxdz$	σ :	$x+y-2z=1$
18.	$\iint\limits_{\sigma}(x^2-y^2)dxdz$	σ :	$2x+2y+3z=1$
19.	$\iint\limits_{\sigma}(z^2+x)dxdz$	σ :	$x-3y-3z=1$
20.	$\iint\limits_{\sigma}(yz+x)dxdz$	σ :	$2x-2y+3z=1$
21.	$\iint\limits_{\sigma}(xy+2z)dxdy$	σ :	$x-y+3z=1$
22.	$\iint\limits_{\sigma}(2y+2xz)dxd$	σ :	$-3x+2y-3z=1$
23.	$\iint\limits_{\sigma}(2xy-1)dxdy$	σ :	$-3x+y+2z=1$
24.	$\iint\limits_{\sigma}(x-y+z)dxdy$	σ :	$2x-3y-z=1$
25.	$\iint\limits_{\sigma}(y+3xz)dxdy$	σ :	$x+3y+4z=1$
26.	$\iint\limits_{\sigma}(2yz-x)dxdy$	σ :	$x+y+2z=1$
27.	$\iint\limits_{\sigma}(x+yz)dxdy$	σ :	$2x-3y+z=1$
28.	$\iint\limits_{\sigma}(2y+x-z)dxdy$	σ :	$-x+2y+3z=1$
29.	$\iint\limits_{\sigma}(x+3y-1)dxdy$	σ :	$x+4y-z=1$
30.	$\iint\limits_{\sigma}(2y-3z)dxdz$	σ :	$y-4x+2z=1$

ЛІТЕРАТУРА

1. Вища математика [Текст]: Збірник задач: Навч. посібник для студентів технічних і технологічних спеціальностей вищих навч. закладів / В. П. Дубовик, І. І. Юрик, І. П. Вовкодав, В. І. Дев'ятко; За ред. : В. П. Дубовика, І. І. Юрика. – К. : А.С.К., 2001. – 478с. : іл. – (Університетська бібліотека). – ISBN 966-539-321-9 : 16.80.

2. Вища математика: підручник. У 2 кн. Кн. 2 / Г. Л. Кулініч, Є. Ю. Таран, В. М. Бурим та ін.; за ред. Г. Л. Кулініча. – К. : Либідь, 2003. – 368 с. – ISBN 966-06-0228-6.

3. Герасимчук В. С., Васильченко Г. С., Кравцов В. І. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах, Т.3. – К. : Книги України ЛТД, 2009.– 400 с.

4. Грималюк В. П., Кухарчук М. М., Ясінський В. В. Вища математика. Навчальний посібник, Ч. 2. – К. : Віпол, 2004. – 400 с.

5. Дубовик В.П. Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. зак. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – 4-те вид. – К. : Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.

6. Корнілович Є Ю., Петрусенко В. П., Трофименко В. І. Вища математика. Модуль 7. Кратні, криволінійні інтеграли та елементи теорії поля: Навч. посібник. – К. : Книжкове вид-во НАУ, 2006. – 148 с.

7. Кузьма О. В., Яцюк В. Т. Кратні, криволінійні, поверхневі інтеграли. Основи теорії поля – навч. – метод. посібник. – К : НТУУ "КПІ", 2016. – 113 с

8. Овчинников П. П. Вища математика: підручник. У 2 ч. Ч. 1 / П. П. Овчинников, Ф. П. Яремчук, В. М. Михайленко. – К. : Техніка, 2003. – 600 с. – ISBN: 966-575-055-0.

9. Пак В. В., Носенко Ю. Л. Вища математика : Підручник . – Д. : «Видавництво Сталкер», 2003. – 496 с.