МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет «Запорізька політехніка»

Приклади розв'язання типових завдань розрахункових робіт з вищої математики. Розділ «Інтегральне числення функцій однієї змінної» для студентів технічних спеціальностей денної форми навчання

2026

Приклади розв’язання типових завдань розрахункових робіт з вищої математики. Розділ «Інтегральне числення функцій однієї змінної» для студентів технічних спеціальностей денної форми навчання / Укл. : Н. М. Антоненко, В. М. Онуфрієнко. – Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2026. – 62 с.

Укладачі: Антоненко Н.М., к. ф.-м. н., доцент,
Онуфрієнко В.М., д. ф.-м. н., професор

Рецензент: Килимник І.М., к. т. н., доцент

Відповідальний за випуск: Антоненко Н.М., к. ф.-м. н., доцент

Затверджено на засіданні
кафедри «Математика»
НУ «Запорізька політехніка»
Протокол № 5 від 03.02.2026 р.

Затверджено
НМК машинобудівного факультету
НУ «Запорізька політехніка»
Протокол № 5 від 17.02.2026 р.

ЗМІСТ

1 НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Розв'язування типового варіанта

Завдання 1.1 (до **Завдання 1.2.1 [4]**). Знайти наступні інтеграли:

а) $\int \frac{\sqrt[3]{x^5} - 5\sqrt[3]{x^7} + \sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{x^7}} dx$; **б)** $\int \sin(7x-10) dx$;

в) $\int \cos(8-3x) dx$; **г)** $\int \sqrt[7]{(2+3x)^6}\, dx$;

д) $\int \frac{5x^2-23}{x+3} dx$; **е)** $\int \frac{\sqrt{2+x^2}+\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}} dx$.

Розв'язання.

а) $\int \frac{\sqrt[3]{x^5} - 5\sqrt[3]{x^7} + \sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{x^7}} dx$.

Поділимо почленно чисельник підінтеральної функції на знаменик, отримаємо

$$\int \frac{\sqrt[3]{x^5} - 5\sqrt[3]{x^7} + \sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{x^7}} dx = \int \left(\frac{\sqrt[3]{x^5}}{\sqrt[3]{x^7}} - \frac{5\sqrt[3]{x^7}}{\sqrt[3]{x^7}} + \frac{\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{x^7}} \right) dx.$$

Використовуючи властивості кореня та степеня, властивості лінійності та адитивності невизначеного інтеграла (див. додаток В) представимо заданий інтеграл у вигляді суми табличних інтегралів (див. додаток Б):

$$\int \left(\frac{\sqrt[3]{x^5}}{\sqrt[3]{x^7}} - \frac{5\sqrt[3]{x^7}}{\sqrt[3]{x^7}} + \frac{\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{x^7}} \right) dx = \int \left(x^{\frac{5}{3}-\frac{7}{3}} - 5 + x^{\frac{4}{3}-\frac{7}{3}} \right) dx = \int \left(x^{-\frac{2}{3}} - 5 + x^{-1} \right) dx =$$

$$= \int x^{-\frac{2}{3}} dx - 5\int dx + \int \frac{dx}{x} = 3x^{\frac{1}{3}} - 5x + \ln|x| + C = 3\sqrt[3]{x} - 5x + \ln|x| + C.$$

Відповідь: $3\sqrt[3]{x} - 5x + \ln|x| + C$.

б) $\int \sin(7x-10)dx$.

Для обчислення заданого інтеграла скористаємося властивістю невизначеного інтеграла: якщо $\int f(x)dx = F(x)+C$, то $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$.

Маємо

$$\int \sin(7x-10)dx = -\frac{1}{7}\cos(7x-10)+C.$$

Відповідь: $-\frac{1}{7}\cos(7x-10)+C$.

в) $\int \cos(8-3x)dx$.

$\int \cos(8-3x)dx = -\frac{1}{3}\sin(8-3x)+C$.

Відповідь: $-\frac{1}{3}\sin(8-3x)+C$.

г) $\int \sqrt[7]{(2+3x)^6}\ dx$.

Використовуючи властивості кореня та властивість невизначеного інтеграла, наведену в попередньому завданні, отримаємо:

$$\int \sqrt[7]{(2+3x)^6}\ dx = \int (2+3x)^{\frac{6}{7}}dx = \frac{1}{3}\frac{(2+3x)^{\frac{6}{7}+1}}{\frac{6}{7}+1}+C = \frac{7}{39}(2+3x)^{\frac{13}{7}}+C.$$

Відповідь: $\frac{7}{39}(2+3x)^{\frac{13}{7}}+C$.

д) $\int \frac{5x^2-23}{x+3}dx$.

Виконаємо ділення чисельника підінтегральної функції на знаменник:

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{r}5x^2-23\\ 5x^2+15x\end{array} & \begin{array}{l}x+3\\ \hline 5x-15\end{array}\\ \hline -\begin{array}{r}-15x-23\\ -15x-45\end{array} & \\ \hline 22 & \end{array}$$

$$\frac{5x^2-23}{x+3}=5x-15+\frac{22}{x+3}.$$

$$\int\frac{5x^2-23}{x+3}dx=\int\left(5x-15+\frac{22}{x+3}\right)dx=5\int xdx-15\int dx+22\int\frac{dx}{x+3}=$$

$$=\frac{5x^2}{2}-15x+22\ln|x+3|+C.$$

Відповідь: $\frac{5x^2}{2}-15x+22\ln|x+3|+C$.

е) $\int\frac{\sqrt{2+x^2}+\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}}dx$.

Розкладемо знаменник підінтегральної функції на множники та виконаємо почленне ділення чисельника на знаменник. Отримаємо

$$\int\frac{\sqrt{2+x^2}+\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}}dx=\int\left(\frac{\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{\left(2-x^2\right)\left(2+x^2\right)}}+\frac{\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{\left(2-x^2\right)\left(2+x^2\right)}}\right)dx=$$

$$=\int\frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}+\int\frac{dx}{\sqrt{2+x^2}}=\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}+\ln\left|x+\sqrt{2+x^2}\right|+C.$$

Відповідь: $\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}+\ln\left|x+\sqrt{2+x^2}\right|+C$.

Завдання 1.2 (до **Завдання 1.2.2 [4]**). Знайти інтеграли методом підстановки (методом заміни змінної) або внесенням функції під знак диференціала:

а) $\int\frac{2xdx}{8+3x^2}$; **б)** $\int\frac{5xdx}{\sqrt{1-8x^2}}$; **в)** $\int\frac{5^x}{25^x+81}dx$;

г) $\int\frac{dx}{\sqrt[8]{\ln^7(5x-3)}(5x-3)}$; **д)** $\int\frac{\cos 9x}{\sin^5 9x}dx$; **е)** $\int\frac{\operatorname{tg}5x+3\operatorname{ctg}5x}{\cos^2 5x}dx$.

Розв'язання.

Метод заміни змінної (метод підстановки). Якщо функція $x=\varphi(t)$ має неперервну похідну, то в заданому невизначеному інтегралі $\int f(x)dx$ можна перейти до змінної t за формулою

$$\int f(x)dx = \begin{vmatrix} x=\varphi(t) \\ dx=\varphi'(t)dt \end{vmatrix} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt, \tag{1.1}$$

потім обчислити інтеграл у правій частині формули (1.1) та повернутися до початкової змінної x.

На практиці зручніше використовувати формулу:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \begin{vmatrix} t=\varphi(x) \\ dt=\varphi'(x)dx \end{vmatrix} = \int f(t)dt = F(t)+C = F(\varphi(x))+C.$$

Змінна t обирається таким чином, щоб обчислення заданого інтеграла звелось до обчислення табличного.

Кожний із заданих інтегралів обчислимо двома способами: методом заміни змінної та методом внесення функції під знак диференціала.

а) $\int \frac{2xdx}{8+3x^2}$.

1 спосіб. Метод заміни змінної.

$$\int \frac{2xdx}{8+3x^2} = \begin{vmatrix} t=8+3x^2 \\ dt=6xdx \\ \frac{1}{6}dt = xdx \end{vmatrix} = \int \frac{2\cdot\frac{1}{6}\cdot dt}{t} = \frac{1}{3}\int\frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\ln|t|+C = \frac{1}{3}\ln\left|8+3x^2\right|+C.$$

2 спосіб. Метод внесення функції під знак диференціала.

$$\int \frac{2xdx}{8+3x^2} = \begin{vmatrix} \left(8+3x^2\right)' = 6x \\ d\left(8+3x^2\right) = 6xdx \\ \frac{1}{6}d\left(8+3x^2\right) = xdx \end{vmatrix} = \int \frac{2\cdot\frac{1}{6}\cdot d\left(8+3x^2\right)}{8+3x^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{d\left(8+3x^2\right)}{8+3x^2} = \frac{1}{3}\ln\left|8+3x^2\right| + C .$$

Відповідь: $\frac{1}{3}\ln\left|8+3x^2\right| + C$.

б) $\int \frac{5xdx}{\sqrt{1-8x^2}}$.

1 спосіб. Метод заміни змінної.

$$\int \frac{5xdx}{\sqrt{1-8x^2}} = \left| \begin{array}{l} t = 1-8x^2 \\ dt = -16xdx \\ -\frac{1}{16}dt = xdx \end{array} \right| = \int \frac{5\cdot\left(-\frac{1}{16}\right)\cdot dt}{\sqrt{t}} = -\frac{5}{16}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} =$$

$$= -\frac{5}{16}\cdot 2\sqrt{t} + C = -\frac{5}{8}\sqrt{1-8x^2} + C .$$

2 спосіб. Метод внесення функції під знак диференціала.

$$\int \frac{5xdx}{\sqrt{1-8x^2}} = \left| \begin{array}{l} \left(1-8x^2\right)' = -16x \\ d\left(1-8x^2\right) = -16xdx \\ -\frac{1}{16}d\left(1-8x^2\right) = xdx \end{array} \right| = \int \frac{5\cdot\left(-\frac{1}{16}\right)\cdot d\left(1-8x^2\right)}{\sqrt{1-8x^2}} =$$

$$= -\frac{5}{16}\int \frac{d\left(1-8x^2\right)}{\sqrt{1-8x^2}} = -\frac{5}{16}\cdot 2\sqrt{1-8x^2} + C = -\frac{5}{8}\sqrt{1-8x^2} + C .$$

Відповідь: $-\frac{5}{8}\sqrt{1-8x^2} + C$.

в) $\int \frac{5^x}{25^x+81}dx$.

1 спосіб. Метод заміни змінної.

$$\int \frac{5^x}{25^x+81}dx = \left| \begin{array}{l} t = 5^x \\ dt = \left(5^x\right)' dx = 5^x \ln 5 dx \\ \dfrac{dt}{\ln 5} = 5^x dx \end{array} \right| = \int \frac{\frac{dt}{\ln 5}}{t^2+81} = \frac{1}{\ln 5}\int \frac{dt}{t^2+9^2} =$$

$$= \frac{1}{9\ln 5}\operatorname{arctg}\frac{t}{9} + C = \frac{1}{9\ln 5}\operatorname{arctg}\frac{5^x}{9} + C .$$

2 спосіб. Метод внесення функції під знак диференціала.

$$\int \frac{5^x}{25^x+81}dx = \int \frac{5^x}{\left(5^x\right)^2+81}dx = \left| \begin{array}{l} \left(5^x\right)' = 5^x \ln 5 \\ d\left(5^x\right) = \left(5^x\right)' dx = 5^x \ln 5\, dx \\ \dfrac{1}{\ln 5} d\left(5^x\right) = 5^x\, dx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\ln 5}\int \frac{d\left(5^x\right)}{\left(5^x\right)^2+9^2} = \frac{1}{9\ln 5}\operatorname{arctg}\frac{5^x}{9} + C .$$

Відповідь: $\dfrac{1}{9\ln 5}\operatorname{arctg}\dfrac{5^x}{9} + C$.

г) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[8]{\ln^7(5x-3)}\,(5x-3)}$.

1 спосіб. Метод заміни змінної.

$$\int \frac{dx}{\sqrt[8]{\ln^7(5x-3)}\,(5x-3)} = \left| \begin{array}{l} t = \ln(5x-3) \\ dt = \left(\ln(5x-3)\right)' dx = \dfrac{5}{5x-3}dx \\ \dfrac{dt}{5} = \dfrac{dx}{5x-3} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{dt}{5}}{\sqrt[8]{t^7}} =$$

$$= \frac{1}{5}\int t^{-\frac{7}{8}}\,dt = \frac{1}{5}\frac{t^{\frac{1}{8}}}{1/8} + C = \frac{8}{5}\sqrt[8]{t} + C = \frac{8}{5}\sqrt[8]{\ln(5x-3)} + C .$$

2 спосіб. Метод внесення функції під знак диференціала.

$$\int \frac{dx}{\sqrt[8]{\ln^7(5x-3)}(5x-3)} = \left| \begin{array}{l} (\ln(5x-3))' = \dfrac{5}{5x-3} \\ d(\ln(5x-3)) = (\ln(5x-3))' dx = \dfrac{5}{5x-3} dx \\ \dfrac{1}{5} d(\ln(5x-3)) = \dfrac{dx}{5x-3} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{5} \int \frac{d(\ln(5x-3))}{\sqrt[8]{\ln^7(5x-3)}} = \frac{1}{5} \int \ln^{-\frac{7}{8}}(5x-3) d(\ln(5x-3)) =$$

$$= \frac{8}{5} \ln^{\frac{1}{8}}(5x-3) + C = \frac{8}{5} \sqrt[8]{\ln(5x-3)} + C .$$

Відповідь: $\dfrac{8}{5} \sqrt[8]{\ln(5x-3)} + C$.

д) $\displaystyle\int \frac{\cos 9x}{\sin^5 9x} dx$.

1 спосіб. Метод заміни змінної.

$$\int \frac{\cos 9x}{\sin^5 9x} dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin 9x \\ dt = (\sin 9x)' dx = 9\cos 9x dx \\ \dfrac{1}{9} dt = \cos 9x dx \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{9} dt}{t^5} = \frac{1}{9} \int \frac{dt}{t^5} =$$

$$= \frac{1}{9} \int t^{-5} dt = \frac{1}{9} \frac{t^{-5+1}}{(-5+1)} + C = -\frac{t^{-4}}{36} + C = -\frac{1}{36t^4} + C = -\frac{1}{36\sin^4 9x} + C .$$

2 спосіб. Метод внесення функції під знак диференціала.

$$\int \frac{\cos 9x}{\sin^5 9x} dx = \left| \begin{array}{l} (\sin 9x)' = 9\cos 9x \\ d(\sin 9x) = 9\cos 9x dx \\ \dfrac{1}{9} d(\sin 9x) = \cos 9x dx \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{9} d(\sin 9x)}{\sin^5 9x} = \frac{1}{9} \int \frac{d(\sin 9x)}{\sin^5 9x} =$$

$$= \frac{1}{9} \int \sin^{-5} 9x \, d(\sin 9x) = \frac{1}{9} \frac{\sin^{-4} 9x}{-4} + C = -\frac{1}{36\sin^4 9x} + C .$$

Відповідь: $-\dfrac{1}{36\sin^4 9x}+C$.

е) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg}5x+3\operatorname{ctg}5x}{\cos^2 5x}\,dx.$

1 спосіб. Метод заміни змінної.

$$\int \frac{\operatorname{tg}5x+3\operatorname{ctg}5x}{\cos^2 5x}\,dx=\int \frac{\operatorname{tg}5x}{\cos^2 5x}\,dx+3\int\frac{1}{\operatorname{tg}5x\cos^2 5x}\,dx=$$

$$=\left|\begin{array}{l} t=\operatorname{tg}5x \\ dt=(\operatorname{tg}5x)'\,dx=\dfrac{5\,dx}{\cos^2 5x} \\ \dfrac{1}{5}dt=\dfrac{dx}{\cos^2 5x}\end{array}\right|=\frac{1}{5}\int t\,dt+3\cdot\frac{1}{5}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{5}\cdot\frac{t^2}{2}+\frac{3}{5}\ln|t|+C=$$

$$=\frac{1}{10}\operatorname{tg}^2 5x+\frac{3}{5}\ln|\operatorname{tg}5x|+C.$$

2 спосіб. Метод внесення функції під знак диференціала.

$$\int \frac{\operatorname{tg}5x+3\operatorname{ctg}5x}{\cos^2 5x}\,dx=\int \frac{\operatorname{tg}5x}{\cos^2 5x}\,dx+3\int\frac{1}{\operatorname{tg}5x\cos^2 5x}\,dx=$$

$$=\left|\begin{array}{l} (\operatorname{tg}5x)'=\dfrac{5}{\cos^2 5x} \\ d(\operatorname{tg}5x)=\dfrac{5}{\cos^2 5x}\,dx \\ \dfrac{1}{5}d(\operatorname{tg}5x)=\dfrac{dx}{\cos^2 5x}\end{array}\right|=\frac{1}{5}\int\operatorname{tg}5x\,d(\operatorname{tg}5x)+\frac{3}{5}\int\frac{1}{\operatorname{tg}5x}\,d(\operatorname{tg}5x)=$$

$$=\frac{1}{5}\cdot\frac{\operatorname{tg}^2 5x}{2}+\frac{3}{5}\ln|\operatorname{tg}5x|+C=\frac{1}{10}\operatorname{tg}^2 5x+\frac{3}{5}\ln|\operatorname{tg}5x|+C.$$

Відповідь: $\dfrac{1}{10}\operatorname{tg}^2 5x+\dfrac{3}{5}\ln|\operatorname{tg}5x|+C$.

Завдання 1.3 (до **Завдання 1.2.3 [4]**). Знайти інтеграли методом інтегрування частинами:

а) $\int (3x+1)\cos(5x-1)dx$; **б)** $\int \operatorname{arctg} 7x dx$;

в) $\int \arccos 12x\, dx$; **г)** $\int e^{-2x} \sin 3x dx$;

д) $\int \frac{4x+1}{\sin^2 5x} dx$; **е)** $\int \sqrt{9-x^2}\, dx$;

є) $\int (3-2x^2)e^{2x} dx$; **ж)** $\int \ln(3x+8) dx$.

Розв'язання.

Інтегрування частинами виконується за формулою

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

де $u(x)$ і $v(x)$ – функції, що мають неперервні похідні.

Деякі види інтегралів, для яких застосовується метод інтегрування частинами наведено в додатку Г.

а) $\int (3x+1)\cos(5x-1)dx$.

$$\int (3x+1)\cos(5x-1)dx = \begin{vmatrix} u = 3x+1; & du = 3dx \\ dv = \cos(5x-1)dx; & v = \frac{1}{5}\sin(5x-1) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5}(3x+1)\sin(5x-1) - \frac{3}{5}\int \sin(5x-1)dx =$$

$$= \frac{1}{5}(3x+1)\sin(5x-1) + \frac{3}{25}\cos(5x-1) + C.$$

Відповідь: $\frac{1}{5}(3x+1)\sin(5x-1) + \frac{3}{25}\cos(5x-1) + C$.

б) $\int \operatorname{arctg} 7x dx$.

$$\int \operatorname{arctg} 7x dx = \begin{vmatrix} u = \operatorname{arctg} 7x; du = \frac{7dx}{1+49x^2} \\ dv = dx; \quad v = x \end{vmatrix} = x \operatorname{arctg} 7x - 7\int \frac{xdx}{1+49x^2} =$$

$$= x\,\mathrm{arctg}\,7x - 7\cdot\frac{1}{98}\int\frac{d\left(1+49x^2\right)}{1+49x^2} = x\,\mathrm{arctg}\,7x - \frac{1}{14}\ln\left|1+49x^2\right| + C\,.$$

Відповідь: $x\,\mathrm{arctg}\,7x - \frac{1}{14}\ln\left|1+49x^2\right| + C$.

в) $\int \arccos 12x\,dx$.

$$\int \arccos 12x\,dx = \left|\begin{array}{ll} u = \arccos 12x; du = -\dfrac{12dx}{\sqrt{1-144x^2}} & \\ dv = dx; \qquad v = x & \end{array}\right| =$$

$$= x\arccos 12x + 12\int\frac{xdx}{\sqrt{1-144x^2}} = x\arccos 12x + 12\cdot\left(-\frac{1}{288}\right)\int\frac{d\left(1-144x^2\right)}{\sqrt{1-144x^2}} =$$

$$= x\arccos 12x - \frac{1}{24}\cdot 2\cdot\sqrt{1-144x^2} + C = x\arccos 12x - \frac{1}{12}\sqrt{1-144x^2} + C\,.$$

Відповідь: $x\arccos 12x - \frac{1}{12}\sqrt{1-144x^2} + C$.

г) $\int e^{-2x}\sin 3xdx$.

Нехай $\int e^{-2x}\sin 3xdx = I$. Застосуємо до заданого інтеграла метод інтегрування частинами, отримаємо:

$$I = \int e^{-2x}\sin 3xdx = \left|\begin{array}{ll} u = e^{-2x}; & du = -2e^{-2x}dx \\ dv = \sin 3xdx; & v = -\dfrac{1}{3}\cos 3x \end{array}\right| =$$

$$= -\frac{1}{3}e^{-2x}\cos 3x - \frac{2}{3}\int e^{-2x}\cos 3xdx\,.$$

Нехай $\int e^{-2x}cos3xdx = I_1$. Застосуємо до I_1 метод інтегрування частинами:

$$I_1 = \int e^{-2x}cos3xdx = \left|\begin{array}{ll} u = e^{-2x}; & du = -2e^{-2x}dx \\ dv = cos3xdx; & v = \dfrac{1}{3}\sin 3x \end{array}\right| =$$

$$=\frac{1}{3}e^{-2x}\sin 3x+\frac{2}{3}\int e^{-2x}\sin 3x dx=\frac{1}{3}e^{-2x}\sin 3x+\frac{2}{3}I\ .$$

Маємо

$$I=-\frac{1}{3}e^{-2x}\cos 3x-\frac{2}{3}I_1=-\frac{1}{3}e^{-2x}\cos 3x-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}e^{-2x}\sin 3x+\frac{2}{3}I\right)=$$

$$=-\frac{1}{3}e^{-2x}\cos 3x-\frac{2}{9}e^{-2x}\sin 3x-\frac{4}{9}I.$$

Виразимо з отриманої рівності I :

$$I=-\frac{1}{3}e^{-2x}\cos 3x-\frac{2}{9}e^{-2x}\sin 3x-\frac{4}{9}I\ ,$$

$$I+\frac{4}{9}I=-\frac{1}{3}e^{-2x}\cos 3x-\frac{2}{9}e^{-2x}\sin 3x\ ,$$

$$\frac{13}{9}I=-\frac{1}{3}e^{-2x}\cos 3x-\frac{2}{9}e^{-2x}\sin 3x\ ,\ I=-\frac{3}{13}e^{-2x}\left(\cos 3x+\frac{2}{3}\sin 3x\right).$$

Отже, $\int e^{-2x}\sin 3x dx=-\frac{3}{13}e^{-2x}\left(\cos 3x+\frac{2}{3}\sin 3x\right)+C$.

Відповідь: $-\frac{3}{13}e^{-2x}\left(\cos 3x+\frac{2}{3}\sin 3x\right)+C$.

д) $\int\frac{4x+1}{\sin^2 5x}dx$.

$$\int\frac{4x+1}{\sin^2 5x}dx=\left|\begin{matrix} u=4x+1; & du=4dx \\ dv=\dfrac{dx}{\sin^2 5x}; & v=-\dfrac{1}{5}\operatorname{ctg} 5x\end{matrix}\right|=-\frac{1}{5}(4x+1)\operatorname{ctg} 5x+$$

$$+\frac{4}{5}\int\operatorname{ctg} 5x dx=-\frac{1}{5}(4x+1)\operatorname{ctg} 5x+\frac{4}{25}\ln|\sin 5x|+C\ .$$

Відповідь: $-\frac{1}{5}(4x+1)\operatorname{ctg} 5x+\frac{4}{25}\ln|\sin 5x|+C$.

е) $\int\sqrt{9-x^2}\,dx$.

Перетворимо підінтегральну функцію:

$$\sqrt{9-x^2} = \frac{\sqrt{9-x^2}\cdot\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{9-x^2}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{9}{\sqrt{9-x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}.$$

Маємо

$$\int\sqrt{9-x^2}\,dx = \int\frac{9dx}{\sqrt{9-x^2}} - \int\frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}} = 9\arcsin\frac{x}{3} - \int\frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}.$$

Застосуємо до інтеграла $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}$ метод інтегрування частинами:

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int x\frac{xdx}{\sqrt{9-x^2}} = \left|\begin{array}{ll} u = x; & du = dx \\ dv = \dfrac{xdx}{\sqrt{9-x^2}}; & v = -\sqrt{9-x^2} \end{array}\right| =$$

$$= -x\sqrt{9-x^2} + \int\sqrt{9-x^2}\,dx.$$

Остаточно отримуємо

$$\int\sqrt{9-x^2}\,dx = 9\arcsin\frac{x}{3} + x\sqrt{9-x^2} - \int\sqrt{9-x^2}\,dx.$$

Інтеграл у правій частині отриманої рівності збігається з заданим інтегралом, виразимо $\int\sqrt{9-x^2}\,dx$:

$$2\int\sqrt{9-x^2}\,dx = 9\arcsin\frac{x}{3} + x\sqrt{9-x^2},$$

$$\int\sqrt{9-x^2}\,dx = \frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3} + \frac{x}{2}\sqrt{9-x^2} + C.$$

Зауваження. Заданий інтеграл можна обчислити використовуючи формулу 23 додатка Б.

Відповідь: $\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2} + \frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3} + C$.

є) $\int\left(3-2x^2\right)e^{2x}dx$.

Для обчислення заданого інтеграла, скористаємося двічі правилом інтегрування частинами. Маємо:

$$\int\left(3-2x^2\right)e^{2x}dx=\left|\begin{matrix} u=3-2x^2; & du=-4xdx \\ dv=e^{2x}dx; & v=\frac{1}{2}e^{2x}\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\left(3-2x^2\right)e^{2x}+2\int xe^{2x}dx=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=x; & du=dx \\ dv=e^{2x}dx; & v=\frac{1}{2}e^{2x}\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\left(3-2x^2\right)e^{2x}+2\left(\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(3-2x^2\right)e^{2x}+xe^{2x}-\frac{1}{2}e^{2x}+C.$$

Відповідь: $\frac{1}{2}\left(3-2x^2\right)e^{2x}+xe^{2x}-\frac{1}{2}e^{2x}+C$.

ж) $\int\ln(3x+8)dx$.

$$\int\ln(3x+8)dx=\left|\begin{matrix} u=\ln(3x+8); & du=\frac{3dx}{3x+8} \\ dv=dx; & v=x\end{matrix}\right|=x\ln(3x+8)-$$

$$-\int\frac{3xdx}{3x+8}=x\ln(3x+8)-\int\frac{(3x+8)-8}{3x+8}dx=x\ln(3x+8)-\int\left(1-\frac{8}{3x+8}\right)dx=$$

$$=x\ln(3x+8)-\int dx+8\int\frac{dx}{3x+8}=x\ln(3x+8)-x+\frac{8}{3}\ln|3x+8|+C.$$

Відповідь: $x\ln(3x+8)-x+\frac{8}{3}\ln|3x+8|+C$.

Завдання 1.4 (до **Завдання 1.2.4 [4]**). Знайти інтеграли від функцій, що містять квадратний тричлен у знаменнику:

а) $\int\frac{3x-7}{\sqrt{5+6x-x^2}}dx$; **б)** $\int\frac{5x+3}{\sqrt{2x^2-5x+3}}dx$;

в) $\int\frac{2x+5}{3x^2-x-2}dx$; **г)** $\int\frac{4x-3}{5x^2-2x+4}dx$.

Розв’язання.

а) $\int\frac{3x-7}{\sqrt{5+6x-x^2}}dx$.

Знайдемо похідну від квадратного тричлена і виділимо її в чисельнику підінтегральної функції:

$$(5+6x-x^2)' = 5' + 6x' - (x^2)' = 6-2x \ ;$$

$$3x-7 = 3\left(x-\frac{7}{3}\right) = -\frac{3}{2}\left(-2x+\frac{14}{3}\right) = -\frac{3}{2}\left((6-2x)-6+\frac{14}{3}\right) =$$

$$= -\frac{3}{2}\left((6-2x)-\frac{4}{3}\right) = -\frac{3}{2}(6-2x)+2 \ .$$

У результаті обчислення заданого інтеграла зведеться до обчислення двох наступних інтегралів:

$$\int \frac{3x-7}{\sqrt{5+6x-x^2}}\,dx = \int \frac{-\frac{3}{2}(6-2x)+2}{\sqrt{5+6x-x^2}}\,dx =$$

$$= -\frac{3}{2}\int \frac{(6-2x)dx}{\sqrt{5+6x-x^2}} + 2\int \frac{dx}{\sqrt{5+6x-x^2}} \ .$$

Перший інтеграл табличний (формула 26, додаток Б). Маємо

$$\int \frac{(6-2x)dx}{\sqrt{5+6x-x^2}} = 2\sqrt{5+6x-x^2} + C \ .$$

Другий інтеграл зведемо до табличного за допомогою виділення повного квадрата в квадратному тричлені:

$$5+6x-x^2 = 5-(x^2-6x) = 5-\left((x^2-2\cdot 3x+9)-9\right) =$$

$$= 5-(x-3)^2+9 = 14-(x-3)^2 \ ;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5+6x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{14-(x-3)^2}} = \int \frac{d(x-3)}{\sqrt{\left(\sqrt{14}\right)^2-(x-3)^2}} = \arcsin\frac{x-3}{\sqrt{14}} + C \cdot$$

Отже,

$$\int \frac{3x-7}{\sqrt{5+6x-x^2}}\,dx = -\frac{3}{2}\cdot 2\sqrt{5+6x-x^2} + 2\arcsin\frac{x-3}{\sqrt{14}} + C =$$

$$= -3\sqrt{5+6x-x^2} + 2\arcsin\frac{x-3}{\sqrt{14}} + C \ .$$

Відповідь: $2\arcsin\dfrac{x-3}{\sqrt{14}} - 3\sqrt{5+6x-x^2} + C$.

б) $\int \frac{5x+3}{\sqrt{2x^2-5x+3}}dx$.

Знайдемо похідну від квадратного тричлена і виділимо її в чисельнику підінтегральної функції:

$$(2x^2-5x+3)'=4x-5\,;$$

$$5x+3=5\left(x+\frac{3}{5}\right)=\frac{5}{4}\left(4x+\frac{12}{5}\right)=\frac{5}{4}\left(\left(4x-5\right)+5+\frac{12}{5}\right)=$$

$$=\frac{5}{4}\left(\left(4x-5\right)+\frac{37}{5}\right)=\frac{5}{4}\left(4x-5\right)+\frac{37}{4}\,.$$

У результаті обчислення заданого інтеграла зведеться до обчислення двох наступних інтегралів:

$$\int \frac{5x+3}{\sqrt{2x^2-5x+3}}dx=\int \frac{\frac{5}{4}\left(4x-5\right)+\frac{37}{4}}{\sqrt{2x^2-5x+3}}dx=$$

$$=\frac{5}{4}\int \frac{4x-5}{\sqrt{2x^2-5x+3}}dx+\frac{37}{4}\int \frac{1}{\sqrt{2x^2-5x+3}}dx\,.$$

Перший інтеграл табличний (формула 26, додаток Б). Маємо

$$\int \frac{4x-5}{\sqrt{2x^2-5x+3}}dx=2\sqrt{2x^2-5x+3}+C\,.$$

Другий інтеграл зведемо до табличного за допомогою виділення повного квадрата в квадратному тричлені:

$$2x^2-5x+3=2\left(x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}\right)=2\left(x^2-2\cdot\frac{5}{4}x+\left(\frac{5}{4}\right)^2-\left(\frac{5}{4}\right)^2+\frac{3}{2}\right)=$$

$$=2\left(\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right);$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-5x+3}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{1}{16}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x-\frac{5}{4}+\sqrt{x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}}\right|+C\,\cdot$$

Отже,

$$\int \frac{3x-7}{\sqrt{5+6x-x^2}}dx = \frac{5}{4}\cdot 2\sqrt{5+6x-x^2} + \frac{37}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x-\frac{5}{4}+\sqrt{x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}}\right| + C =$$

$$= \frac{5}{2}\sqrt{5+6x-x^2} + \frac{37\sqrt{2}}{8}\ln\left|x-\frac{5}{4}+\sqrt{x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}}\right| + C.$$

Відповідь: $\frac{5}{2}\sqrt{5+6x-x^2} + \frac{37\sqrt{2}}{8}\ln\left|x-\frac{5}{4}+\sqrt{x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}}\right| + C$.

в) $\int \frac{2x+5}{3x^2-x-2}dx$.

Знайдемо похідну від квадратного тричлена і виділимо її в чисельнику підінтегральної функції:

$$(3x^2-x-2)' = 6x-1;$$

$$2x+5 = 2\left(x+\frac{5}{2}\right) = 2\cdot\frac{1}{6}\left(6x+\frac{30}{2}\right) = \frac{1}{3}\big((6x-1)+1+15\big) =$$

$$= \frac{1}{3}\big((6x-1)+16\big) = \frac{1}{3}(6x-1)+\frac{16}{3}.$$

У результаті обчислення заданого інтеграла зведеться до обчислення двох наступних інтегралів:

$$\int \frac{2x+5}{3x^2-x-2}dx = \int \frac{\frac{1}{3}(6x-1)+\frac{16}{3}}{3x^2-x-2}dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{(6x-1)dx}{3x^2-x-2} + \frac{16}{3}\int \frac{dx}{3x^2-x-2}.$$

Перший інтеграл табличний (формула 25, додаток Б). Маємо

$$\int \frac{(6x-1)dx}{3x^2-x-2} = \ln\left|3x^2-x-2\right| + C.$$

У другому інтегралі перетворимо кватратний тричлен наступним чином: винесемо коефіцієнт 3 за дужки, а в дужках виділимо повний квадрат.

$$3x^2 - x - 2 = 3\left(x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right) = 3\left(x^2 - 2\cdot\frac{1}{6}x + \left(\frac{1}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{2}{3}\right) =$$

$$= 3\left(\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{36} - \frac{2}{3}\right) = 3\left(\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{25}{36}\right);$$

$$\int \frac{dx}{3x^2 - x - 2} = \int \frac{dx}{3\left(\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{25}{36}\right)} = \frac{1}{3}\int \frac{d\left(x - \frac{1}{6}\right)}{\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 - \left(\frac{5}{6}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{5}{6}}\ln\left|\frac{x - \frac{1}{6} - \frac{5}{6}}{x - \frac{1}{6} + \frac{5}{6}}\right| + C = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-1}{x + \frac{2}{3}}\right| + C.$$

Отже, заданий інтеграл дорівнює

$$\int \frac{2x+5}{3x^2 - x - 2}dx = \frac{1}{3}\ln\left|3x^2 - x - 2\right| + \frac{16}{3}\cdot\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-1}{x + 2/3}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|3x^2 - x - 2\right| + \frac{16}{15}\ln\left|\frac{x-1}{x + 2/3}\right| + C.$$

Відповідь: $\frac{1}{3}\ln\left|3x^2 - x - 2\right| + \frac{16}{15}\ln\left|\frac{x-1}{x + 2/3}\right| + C$.

г) $\int \frac{4x-3}{5x^2 - 2x + 4}dx$.

Знайдемо похідну від квадратного тричлена і виділимо її в чисельнику підінтегральної функції:

$$(5x^2 - 2x + 4)' = 10x - 2;$$

$$4x - 3 = 4\left(x - \frac{3}{4}\right) = 4\cdot\frac{1}{10}\left(10x - \frac{30}{4}\right) = \frac{2}{5}\left((10x - 2) + 2 + \frac{15}{2}\right) =$$

$$= \frac{2}{5}(10x - 2) + \frac{19}{5}.$$

У результаті обчислення заданого інтеграла зведеться до обчислення двох наступних інтегралів:

$$\int \frac{4x-3}{5x^2-2x+4}dx = \int \frac{\frac{2}{5}(10x-2)+\frac{19}{5}}{5x^2-2x+4}dx =$$
$$= \frac{2}{5}\int \frac{(10x-2)dx}{5x^2-2x+4} + \frac{19}{5}\int \frac{dx}{5x^2-2x+4}.$$

Перший інтеграл табличний (формула 25, додаток Б). Маємо

$$\int \frac{(10x-2)dx}{5x^2-2x+4} = \ln\left|5x^2-2x+4\right| + C.$$

У другому інтегралі перетворимо кватратний тричлен наступним чином: винесемо коефіцієнт 5 за дужки, а в дужках виділимо повний квадрат.

$$5x^2-2x+4 = 5\left(x^2-\frac{2}{5}x+\frac{4}{5}\right) = 5\left(x^2-2\cdot\frac{1}{5}x+\left(\frac{1}{5}\right)^2-\left(\frac{1}{5}\right)^2+\frac{4}{5}\right) =$$
$$= 5\left(\left(x-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{19}{25}\right);$$

$$\int \frac{dx}{5x^2-2x+4} = \int \frac{dx}{5\left(\left(x-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{19}{25}\right)} = \frac{1}{5}\int \frac{d\left(x-\frac{1}{5}\right)}{\left(x-\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{19}}{5}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{19}/5}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{5}}{\sqrt{19}/5} + C = \frac{\sqrt{19}}{19}\operatorname{arctg}\frac{5x-1}{\sqrt{19}} + C.$$

Отже, заданий інтеграл дорівнює

$$\int \frac{4x-3}{5x^2-2x+4}dx = \frac{2}{5}\ln\left|5x^2-2x+4\right| + \frac{\sqrt{19}}{5}\operatorname{arctg}\frac{5x-1}{\sqrt{19}} + C$$

Відповідь: $\frac{2}{5}\ln\left|5x^2-2x+4\right| + \frac{\sqrt{19}}{5}\operatorname{arctg}\frac{5x-1}{\sqrt{19}} + C$.

Завдання 1.5 (до **Завдання 1.2.5 [4]**). Знайти інтеграли від дробово-раціональних функцій:

а) $\int \frac{2x^3 - 20x + 16}{x^3 - 16x} dx$; **б)** $\int \frac{2x - 1}{(x+2)(x-3)^2} dx$;

в) $\int \frac{3x^2 + 6}{(x-2)(x^2+5)} dx$; **г)** $\int \frac{6x - 14}{(x+1)(x^2 - 4x + 5)} dx$;

д) $\int \frac{7x^2 + 19x + 34}{(x-1)(x^2 + 5x + 9)} dx$.

Розв'язання.

а) $\int \frac{2x^3 - 20x + 16}{x^3 - 16x} dx$.

Підінтегральна функція є неправильним раціональним дробом, оскільки степені многочленів чисельника та знаменника рівні. Поділимо чисельник на знаменник за правилом ділення многочленів. Це дасть змогу представити підінтегральну функцію у вигляді суми многочлена (у даному випадку нульового степеня, тобто числа) і правильного раціонального дробу.

Маємо

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 20x + 16 & x^3 - 16x \\ \cline{2-2} -\;\; 2x^3 - 32x & 2 \\ \hline 12x + 16 & \end{array} \qquad \frac{2x^3 - 20x + 16}{x^3 - 16x} = 2 + \frac{12x + 16}{x^3 - 16x}.$$

Правильний раціональний дріб $\frac{12x + 16}{x^3 - 16x}$ представимо у вигляді суми простих дробів. Для цього його знаменник розкладемо на множники:

$$x^3 - 16x = x(x^2 - 16) = x(x-4)(x+4).$$

Кожному множнику виду $(x + \alpha)$ у сумі простих дробів відповідає дріб $\frac{A}{x + \alpha}$.

Таким чином,

$$\frac{12x + 16}{x(x-4)(x+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-4} + \frac{C}{x+4},$$

де A, B, C – коефіцієнти, які треба знайти.

Зведемо праву частину останньої рівності до спільного знаменника:

$$\frac{12x+16}{x(x-4)(x+4)}=\frac{A(x-4)(x+4)+B\,x(x+4)+C\,x(x-4)}{x(x-4)(x+4)}.$$

Прирівняємо чисельники цієї рівності, отримаємо тотожність:

$$12x+16\equiv A(x-4)(x+4)+B\,x(x+4)+C\,x(x-4).$$

Один із способів побудови системи лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів полягає в підстановці в останню тотожність довільних значень змінної x (метод окремих значень аргумента [3]). Зауважимо, що x доцільно надати значень, які є нулями спільного знаменника. В якості значень змінної x візьмемо нулі множників спільного знаменника $x(x-4)(x+4)$: $x=0$, $x=4$, $x=-4$. Маємо

$$\begin{array}{l|lll}
x=0 & 16=A\cdot(-4)\cdot 4; & 16=-16A; & A=-1; \\
x=4 & 12\cdot 4+16=B\cdot 4\cdot(4+4); & 64=32B; & B=2; \\
x=-4 & 12\cdot(-4)+16=C\cdot(-4)\cdot(-4-4); & -32=32C; & C=-1.
\end{array}$$

$$\int\frac{2x^3-20x+16}{x^3-16x}dx=\int\left(2-\frac{1}{x}+\frac{2}{x-4}-\frac{1}{x+4}\right)dx=$$

$$=2\int dx-\int\frac{dx}{x}+2\int\frac{dx}{x-4}-\int\frac{dx}{x+4}=2x-\ln|x|+2\ln|x-4|-\ln|x+4|+C.$$

Відповідь: $2x-\ln|x|+2\ln|x-4|-\ln|x+4|+C$.

б) $\displaystyle\int\frac{2x-1}{(x+2)(x-3)^2}dx$.

Підінтегральну функцію, яка є правильним раціональним дробом, розкладемо на суму простих дробів.

У сумі простих дробів множнику знаменника виду $(x+\alpha)$ відповідає один дріб $\dfrac{A}{x+\alpha}$, множнику виду $(x+\alpha)^2$ – сума двох дробів $\dfrac{B}{x+\alpha}+\dfrac{C}{(x+\alpha)^2}$. Таким чином,

$$\frac{2x-1}{(x+2)(x-3)^2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{(x-3)^2},$$

де A, B, C – коефіцієнти, які треба знайти.

Зведемо праву частину останньої рівності до спільного знаменника:

$$\frac{2x-1}{(x+2)(x-3)^2}=\frac{A(x-3)^2+B(x+2)(x-3)+C(x+2)}{(x+2)(x-3)^2}.$$

Прирівняємо чисельники цієї рівності, отримаємо тотожність:

$$2x-1\equiv A(x-3)^2+B(x+2)(x-3)+C(x+2)$$

або

$$2x-1\equiv A(x^2-6x+9)+B(x^2-x-6)+C(x+2).$$

Для побудови системи лінійних алгебраїчних рівнянь скомбінуємо метод окремих значень аргумента та метод порівняння коефіцієнтів [3]. Спочатку будемо підставляти в отриману тотожність значення змінної x, які дорівнюють нулям множників знаменника $(x+2)(x-3)^2$: $x=-2$, $x=3$. Потім для знаходження коефіцієнта B прирівняємо вирази при x^2 в лівій та правій частинах отриманої тотожності. Маємо

$$\begin{array}{l|llll}
x=-2 & 2\cdot(-2)-1=A\cdot(-2-3)^2; & -5=25A; & A=-1/5; \\
x=3 & 2\cdot 3-1=C\cdot(3+2); & 5=5C; & C=1; \\
x^2 & 0=A+B; & B=-A; & B=1/5.
\end{array}$$

$$\int\frac{2x-1}{(x+2)(x-3)^2}dx=\int\left(-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x+2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x-3}+\frac{1}{(x-3)^2}\right)dx=$$

$$=-\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x+2}+\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x-3}+\int(x-3)^{-2}dx=$$

$$=-\frac{1}{5}\ln|x+2|+\frac{1}{5}\ln|x-3|+\frac{(x-3)^{-1}}{-1}+C.$$

Відповідь: $\frac{1}{5}\ln|x-3|-\frac{1}{5}\ln|x+2|-\frac{1}{x-3}+C$.

в) $\int \frac{3x^2+6}{(x-2)(x^2+5)}dx$.

Підінтегральну функцію, яка є правильним раціональним дробом, розкладемо на суму простих дробів.

У сумі простих дробів множнику знаменника виду $(x+\alpha)$ відповідає дріб $\frac{A}{x+\alpha}$, множнику виду (x^2+q) – дріб $\frac{Bx+C}{x^2+q}$. Таким чином,

$$\frac{3x^2+6}{(x-2)(x^2+5)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+5},$$

де A, B, C – коефіцієнти, які треба знайти.

Зведемо праву частину останньої рівності до спільного знаменника:

$$\frac{3x^2+6}{(x-2)(x^2+5)}=\frac{A(x^2+5)+(Bx+C)(x-2)}{(x-2)(x^2+5)}.$$

Прирівняємо чисельники отриманої рівності:

$$3x^2+6\equiv A(x^2+5)+(Bx+C)(x-2)$$

або

$$3x^2+6\equiv Ax^2+5A+Bx^2-2Bx+Cx-2C .$$

Для побудови системи лінійних алгебраїчних рівнянь скомбінуємо метод окремих значень аргумента та метод порівняння коефіцієнтів. Спочатку підставимо в останню тотожність значення змінної x, яке дорівнює нулю спільного знаменника $(x-2)(x^2+5)$: $x=2$. Потім для знаходження коефіцієнтів B та C прирівняємо вирази при x^2 та x^0, що стоять у лівій та правій частинах останньої тотожності. Маємо

$$\begin{array}{l|llll}
x=2 & 3\cdot 2^2+6=A\cdot(2^2+5); & 18=9A; & & A=2; \\
x^2 & 3=A+B; & & B=3-A; & B=3-2=1; \\
x^0 & 6=5A-2C; & & C=\dfrac{5A-6}{2}; & C=\dfrac{5\cdot 2-6}{2}=2.
\end{array}$$

$$\int \frac{3x^2+6}{(x-2)(x^2+5)}dx = \int\left(\frac{2}{x-2}+\frac{x+2}{x^2+5}\right)dx == 2\int\frac{dx}{x-2}+$$

$$+\int\frac{xdx}{x^2+5}+2\int\frac{dx}{x^2+5} = 2\int\frac{dx}{x-2}+\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+5)}{x^2+5}+2\int\frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{5}\right)^2} =$$

$$= 2\ln|x-2|+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+5\right|+2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}}+C.$$

Відповідь: $2\ln|x-2|+\frac{1}{2}\ln(x^2+5)+\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}}+C$.

г) $\displaystyle\int\frac{6x-14}{(x+1)(x^2-4x+5)}dx$.

Розкладемо підінтегральну функцію на суму простих дробів. У сумі простих дробів множнику знаменника виду $(x+\alpha)$ відповідає дріб $\dfrac{A}{x+\alpha}$, множнику виду (x^2+px+q) – дріб $\dfrac{Bx+C}{x^2+px+q}$.

Таким чином,

$$\frac{6x-14}{(x+1)(x^2-4x+5)} = \frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-4x+5},$$

де A, B, C – коефіцієнти, які треба знайти.

Зведемо праву частину останньої рівності до спільного знаменника:

$$\frac{6x-14}{(x+1)(x^2-4x+5)} = \frac{A(x^2-4x+5)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2-4x+5)}.$$

Прирівняємо чисельники отриманої рівності:

$$6x-14 \equiv A(x^2-4x+5)+(Bx+C)(x+1)$$

або

$$6x-14 \equiv Ax^2-4Ax+5A+Bx^2+Bx+Cx+C.$$

Спочатку підставимо в цю тотожність значення змінної x, яке дорівнює нулю знаменника $(x+1)(x^2-4x+5)$: $x=-1$. Потім для знаходження коефіцієнтів B і C прирівняємо вирази при x^2 та x^1, що стоять у лівій та правій частинах останньої тотожності. Маємо

$$\begin{array}{l|lll} x=-1 & -6-14=A\cdot(1+4+5); \quad -20=10A; & & A=-2; \\ x^2 & 0=A+B; & B=-A=2; & B=2; \\ x^1 & 6=-4A+B+C; & C=6+4A-B; & C=6-8-2=-4. \end{array}$$

$$\int\frac{6x-14}{(x+1)(x^2-4x+5)}dx=\int\left(\frac{-2}{x+1}+\frac{2x-4}{x^2-4x+5}\right)dx=$$

$$=-2\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{2x-4}{x^2-4x+5}dx=-2\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{d(x^2-4x+5)}{x^2-4x+5}=$$

$$=-2\ln|x+1|+\ln|x^2-4x+5|+C.$$

Відповідь: $\ln(x^2-4x+5)-2\ln|x+1|+C$.

д) $\int\frac{7x^2+19x+34}{(x-1)(x^2+5x+9)}dx$.

Розкладемо підінтегральну функцію на суму простих дробів. У сумі простих дробів множнику знаменника виду $(x+\alpha)$ відповідає дріб $\frac{A}{x+\alpha}$, множнику виду (x^2+px+q) – дріб $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$.

Таким чином,

$$\frac{7x^2+19x+34}{(x-1)(x^2+5x+9)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+5x+9},$$

де A, B, C – коефіцієнти, які треба знайти.

Зведемо праву частину останньої рівності до спільного знаменника:

$$\frac{7x^2+19x+34}{(x-1)(x^2+5x+9)}=\frac{A(x^2+5x+9)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+5x+9)}.$$

Прирівняємо чисельники отриманої рівності:

$$7x^2+19x+34\equiv A(x^2+5x+9)+(Bx+C)(x-1)$$

або

$$7x^2+19x+34\equiv Ax^2+5Ax+9A+Bx^2-Bx+Cx-C.$$

Спочатку підставимо в цю тотожність значення змінної x, яке дорівнює нулю знаменника $(x-1)(x^2+5x+9)$: $x=1$. Потім для знаходження коефіцієнтів B і C прирівнюємо вирази при x^2 та x^0, що стоять у лівій та правій частинах останньої тотожності. Маємо

$$\begin{array}{l|lll}
x=1 & 7+19+34=A\cdot(1+5+9); & 60=15A; & A=4; \\
x^2 & 7=A+B; & B=7-A; & B=7-4=3; \\
x^0 & 34=9A-C; & C=9A-34; & C=36-34=2.
\end{array}$$

$$\int\frac{7x^2+19x+34}{(x-1)(x^2+5x+9)}dx=\int\left(\frac{4}{x-1}+\frac{3x+2}{x^2+5x+9}\right)dx=$$

$$=4\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{3x+2}{x^2+5x+9}dx=4\ln|x-1|+\int\frac{3x+2}{x^2+5x+9}dx\,.$$

$$\int\frac{3x+2}{x^2+5x+9}dx=\left|\begin{array}{l}(x^2+5x+9)'=2x+5\\ 3x+2=3\cdot\left(x+\dfrac{2}{3}\right)=3\cdot\dfrac{1}{2}\left(2x+\dfrac{4}{3}\right)=\\ =\dfrac{3}{2}\left((2x+5)-5+\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{3}{2}\left((2x+5)-\dfrac{11}{3}\right)=\\ =\dfrac{3}{2}(2x+5)-\dfrac{11}{2}\end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{\frac{3}{2}(2x+5)-\frac{11}{2}}{x^2+5x+9}dx=\frac{3}{2}\int\frac{2x+5}{x^2+5x+9}dx-\frac{11}{2}\int\frac{dx}{x^2+5x+9}=$$

$$=\frac{3}{2}\ln\left|x^2+5x+9\right|-\frac{11}{2}\int\frac{dx}{\left(x^2+2\cdot\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{2}\right)^2\right)-\left(\frac{5}{2}\right)^2+9}=$$

$$=\frac{3}{2}\ln\left|x^2+5x+9\right|-\frac{11}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{5}{2}\right)}{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{3}{2}\ln\left|x^2+5x+9\right|-\frac{11}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{11}/2}\operatorname{arctg}\frac{x+5/2}{\sqrt{11}/2}+C=$$

$$= \frac{3}{2}\ln\left|x^2+5x+9\right| - \sqrt{11}\,\mathrm{arctg}\frac{2x+5}{\sqrt{11}} + C\,.$$

Отже,

$$\int \frac{7x^2+19x+34}{(x-1)(x^2+5x+9)}dx = 4\ln|x-1| + \frac{3}{2}\ln(x^2+5x+9) - \sqrt{11}\cdot\mathrm{arctg}\frac{2x+5}{\sqrt{11}} + C$$

Відповідь: $4\ln|x-1| + \frac{3}{2}\ln(x^2+5x+9) - \sqrt{11}\cdot\mathrm{arctg}\frac{2x+5}{\sqrt{11}} + C$.

Завдання 1.6 (до **Завдання 1.2.6 [4]**). Знайти інтеграл від ірраціональної функції:

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+5} - 2\cdot\sqrt[3]{x+5}}$; **б)** $\int \frac{2\sqrt[4]{x} + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x} + 3}dx$.

Розв'язання.

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+5} - 2\cdot\sqrt[3]{x+5}}$.

Оскільки підкореневі вирази в підінтегральній функції однакові, а найменше спільне кратне показників коренів дорівнює 6, то зробимо заміну $x+5=t^6$, яка зведе заданий інтеграл до інтеграла від раціональної функції:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+5} - 2\cdot\sqrt[3]{x+5}} = \left| \begin{array}{ll} x+5=t^6, & \sqrt[6]{x+5}=t \\ \sqrt{x+5}=t^3, & \sqrt[3]{x+5}=t^2 \\ x=t^6-5, & dx=6t^5dt \end{array} \right| = \int \frac{6t^5dt}{t^3-2t^2} = 6\int \frac{t^5dt}{t^2(t-2)} =$$

$$= 6\int \frac{t^3dt}{t-2} = \left| \begin{array}{r|l} t^3 & t-2 \\ \underline{-\,(t^3-2t^2)} & t^2+2t+4 \\ 2t^2 & \\ \underline{-\,(2t^2-4t)} & \\ 4t & \\ \underline{-\,(4t-8)} & \\ 8 & \end{array} \right| = 6\int\left(t^2+2t+4+\frac{8}{t-2}\right)dt =$$

$$=6\left(\frac{t^3}{3}+2\cdot\frac{t^2}{2}+4t+8\ln|t-2|\right)+C=$$

$$=2\sqrt{x+5}+6\sqrt[3]{x+5}+24\sqrt[6]{x+5}+48\ln\left|\sqrt[6]{x+5}-2\right|+C.$$

Відповідь: $2\sqrt{x+5}+6\sqrt[3]{x+5}+24\sqrt[6]{x+5}+48\ln\left|\sqrt[6]{x+5}-2\right|+C$.

б) $\int\frac{2\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}+3}dx$.

Оскільки підкореневі вирази в підінтегральній функції однакові, а найменше спільне кратне показників коренів дорівнює 4, то зробимо заміну $x=t^4$, яка зведе заданий інтеграл до інтеграла від раціональної функції:

$$\int\frac{2\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}+3}dx=\left|\begin{matrix}x=t^4, & \sqrt[4]{x}=t\\ \sqrt{x}=t^2, & dx=4t^3dt\end{matrix}\right|=\int\frac{2t+t^2}{t+3}\cdot 4t^3dt=4\int\frac{t^5+2t^4}{t+3}dt=$$

$$=\left|\begin{array}{l|l}
t^5+2t^4 & t+3\\ \cline{2-2}
-\underline{t^5+3t^4} & t^4-t^3+3t^2-9t+27\\
\qquad -t^4 & \\
\qquad -\underline{-t^4-3t^3} & \\
\qquad\qquad 3t^3 & \\
\qquad\qquad -\underline{3t^3+9t^2} & \\
\qquad\qquad\quad -9t^2 & \\
\qquad\qquad\quad -\underline{-9t^2-27t} & \\
\qquad\qquad\qquad\quad 27t & \\
\qquad\qquad\qquad\quad -\underline{27t+81} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad -81 &
\end{array}\right|=$$

$$=4\int\left(t^4-t^3+3t^2-9t+27-\frac{81}{t+3}\right)dt=$$

$$=4\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^4}{4}+t^3-\frac{9t^2}{2}+27t-81\ln|t+3|\right)+C=$$

$$=\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}-x+4\sqrt[4]{x^3}-18\sqrt{x}+108\sqrt[4]{x}-324\ln\left|\sqrt[4]{x}+3\right|+C.$$

Відповідь: $\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}-x+4\sqrt[4]{x^3}-18\sqrt{x}+108\sqrt[4]{x}-324\ln\left|\sqrt[4]{x}+3\right|+C$.

Завдання 1.7 (до **Завдання 1.2.7 [4]**). Знайти інтеграли від тригонометричних функцій:

а) $\int \sin 9x \sin 7x\,dx$; **б)** $\int \sin^3 6x \cos^4 6x\,dx$;

в) $\int \frac{dx}{3\sin x+\cos x+1}$; **г)** $\int \frac{dx}{\text{ctg}^4 7x}$;

д) $\int \frac{dx}{\sin^2 x+\sin 2x+3\cos^2 x}$; **е)** $\int \sin^2 \frac{x}{18}\,dx$.

Розв'язання.

а) $\int \sin 9x \sin 7x\,dx$.

Для обчислення заданого інтеграла скористаємося формулою перетворення добутку тригонометричних функцій в суму:

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right).$$

$$\int \sin 9x \sin 7x\,dx=\int\frac{1}{2}\left(\cos(9x-7x)-\cos(9x+7x)\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\cos 2x-\cos 16x\right)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{16}\sin 16x\right)+C.$$

Відповідь: $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{32}\sin 16x+C$.

б) $\int \sin^3 6x\cos^4 6x\,dx$.

Підінтегральна функція є непарною відносно $\sin 6x$, тому для обчислення заданого інтеграла слід зробити заміну $t=\cos 6x$. Маємо

$$\int \sin^3 6x\cos^4 6x\,dx=\int \sin^2 6x\cos^4 6x\,\sin 6x\,dx=$$

$$=\int(1-\cos^2 6x)\cos^4 6x\sin 6x dx=\left|\begin{array}{l}t=\cos 6x\\ dt=-6\sin 6x\,dx\end{array}\right|=-\frac{1}{6}\int(1-t^2)t^4dt=$$

$$=-\frac{1}{6}\int\left(t^4-t^6\right)dt=-\frac{1}{6}\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}\right)+C=-\frac{1}{30}\cos^5 6x+\frac{1}{42}\cos^7 6x+C\,.$$

Відповідь: $-\frac{1}{30}\cos^5 6x+\frac{1}{42}\cos^7 6x+C$.

в) $\int\frac{dx}{3\sin x+\cos x+1}$.

Застосуємо універсальну підстановку $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t$.

$$\int\frac{dx}{3\sin x+\cos x+1}=\left|\begin{array}{l}\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t\\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\\ x=2\,\mathrm{arctg}\,t,\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}\end{array}\right|=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3\cdot\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}+1}=$$

$$=\int\frac{2dt}{6t+2}=\int\frac{dt}{3t+1}=\frac{1}{3}\ln\left|3t+1\right|+C=\frac{1}{3}\ln\left|3\mathrm{tg}\frac{x}{2}+1\right|+C\,.$$

Відповідь: $\frac{1}{3}\ln\left|3\mathrm{tg}\frac{x}{2}+1\right|+C$.

г) $\int\frac{dx}{\mathrm{ctg}^4 7x}=\int\mathrm{tg}^4 7x\,dx$.

Застосуємо підстановку $\mathrm{tg}7x=t$.

$$\int\mathrm{tg}^4 7x\,dx=\left|\begin{array}{l}\mathrm{tg}7x=t,\qquad 7x=\mathrm{arctg}\,t\\ x=\frac{1}{7}\mathrm{arctg}\,t,\ dx=\frac{1}{7}\frac{dt}{1+t^2}\end{array}\right|=\frac{1}{7}\int\frac{t^4dt}{1+t^2}=\frac{1}{7}\int\left(t^2-1+\frac{1}{1+t^2}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{7}\left(\frac{t^3}{3}-t+\operatorname{arctg} t\right)+C=\frac{1}{21}\operatorname{tg}^3 7x-\frac{1}{7}\operatorname{tg}7x+x+C .$$

Відповідь: $\frac{1}{21}\operatorname{tg}^3 7x-\frac{1}{7}\operatorname{tg}7x+x+C$.

д) $\int\frac{dx}{\sin^2 x+\sin 2x+3\cos^2 x}$.

Підінтегральна функція парна відносно $\sin x$ та $\cos x$, тому для обчисленння заданого інтеграла слід застосувати підстановку $t=\operatorname{tg}x$. Отримаємо

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x+\sin 2x+3\cos^2 x}=\left|\begin{matrix} t=\operatorname{tg}x, \quad x=\operatorname{arctg}t, \quad dx=\dfrac{dt}{1+t^2} \\ \cos^2 x=\dfrac{1}{1+t^2}, \ \sin^2 x=\dfrac{t^2}{1+t^2}, \ \sin 2x=\dfrac{2t}{1+t^2}\end{matrix}\right|=$$

$$=\int\frac{\dfrac{dt}{1+t^2}}{\dfrac{t^2}{1+t^2}+\dfrac{2t}{1+t^2}+\dfrac{3}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{t^2+2t+3}==\int\frac{dt}{\left(t^2+2t+1\right)+2}=\int\frac{dt}{(t+1)^2+2}=$$

$$=\int\frac{d(t+1)}{(t+1)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t+1}{\sqrt{2}}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x+1}{\sqrt{2}}+C .$$

Відповідь: $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x+1}{\sqrt{2}}+C$.

е) $\int\sin^2\frac{x}{18}dx$.

Для обчислення заданого інтеграла скористаємося тригонометричною формулою пониження степеня $\sin^2\alpha=\frac{1}{2}\left(1-\cos 2\alpha\right)$, отримаємо

$$\int\sin^2\frac{x}{18}dx=\int\frac{1}{2}\left(1-\cos\left(2\cdot\frac{x}{18}\right)\right)dx=\frac{1}{2}\int\left(1-\cos\frac{x}{9}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{1/9}\sin\frac{x}{9}\right)+C=\frac{x}{2}+\frac{9}{2}\sin\frac{x}{9}+C\ .$$

Відповідь: $\frac{x}{2}+\frac{9}{2}\sin\frac{x}{9}+C$.

Завдання 1.8 (до **Завдання 1.2.8 [4]**). Використавши відповідну тригонометричну підстановку, знайти інтеграл:

а) $\int\frac{\sqrt{25-x^2}}{x^2}dx$; **б)** $\int\frac{\sqrt{x^2-64}}{x}dx$.

Розв'язання.

а) $\int\frac{\sqrt{25-x^2}}{x^2}dx$.

Зробимо тригонометричну підстановку $x=5\sin t$. Отримаємо:

$$\int\frac{\sqrt{25-x^2}}{x^2}dx=\left|\begin{array}{l} x=5\sin t \\ dx=5\cos t\ dt \\ t=\arcsin\frac{x}{5}\end{array}\right|=\int\frac{\sqrt{25-25\sin^2 t}}{25\sin^2 t}5\cos t\ dt=$$

$$=\int\frac{\sqrt{25\left(1-\sin^2 t\right)}}{25\sin^2 t}5\cos t\ dt=\int\frac{5\cos t}{25\sin^2 t}5\cos t\ dt=\int\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}dt=\int\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}dt=$$

$$=\int\left(\frac{1}{\sin^2 t}-1\right)dt=-\mathrm{ctg}\,t-t+C=-\mathrm{ctg}\left(\arcsin\frac{x}{5}\right)-\arcsin\frac{x}{5}+C\ .$$

Відповідь: $C-\mathrm{ctg}\left(\arcsin\frac{x}{5}\right)-\arcsin\frac{x}{5}$.

б) $\int\frac{\sqrt{x^2-64}}{x}dx$.

$$\int \frac{\sqrt{x^2-64}}{x}\,dx = \left| \begin{aligned} &x = \frac{8}{\cos t}, \quad t = \arccos\frac{8}{x} \\ &dx = \frac{8\sin t}{\cos^2 t}\,dt \end{aligned} \right| = \int \frac{\sqrt{64/\cos^2 t - 64}}{8/\cos t}\,\frac{8\sin t}{\cos^2 t}\,dt =$$

$$= \int \frac{8\sin^2 t}{\cos^2 t}\,dt = 8\int \frac{(1-\cos^2 t)\,dt}{\cos^2 t} = 8\int \left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1\right)dt = 8\,\mathrm{tg}\,t - 8t + C =$$

$$= 8\,\mathrm{tg}\left(\arccos\frac{8}{x}\right) - 8\arccos\frac{8}{x} + C\,.$$

Відповідь: $8\,\mathrm{tg}\left(\arccos\frac{8}{x}\right) - 8\arccos\frac{8}{x} + C$.

2 ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Розв'язування типового варіанта

Завдання 2.1 (до **Завдання 2.2.1 [4]**). Обчислити визначені інтеграли:

а) безпосереднім інтегруванням $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{4\arcsin(2x)-3}{\sqrt{1-4x^2}}dx$;

б) методом підстановки $\int_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{3x+1}(3x+1)}$;

в) за допомогою інтегрування частинами $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (8x-7)\sin(4x)dx$;

г) від тригонометричної функції $\int_0^{\pi} \cos^2\frac{x}{4}dx$.

Розв'язання.

Для обчислення визначених інтегралів застосовують формулу Ньютона-Лейбніца: якщо функція $f(x)$ – неперервна на $[a;b]$, $F(x)$ – її первісна на $[a;b]$, тоді

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$$

Для знаходження первісної $F(x)$ при обчисленні визначених інтегралів використовують таблицю невизначених інтегралів (Додаток Б) та методи інтегрування розглянуті для невизначених інтегралів.

а) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{4\arcsin(2x)-3}{\sqrt{1-4x^2}}dx$.

Обчислимо заданий інтеграл, використовуючи властивості визначених інтегралів (Додаток Д) та формулу Ньютона-Лейбніца:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{4\arcsin(2x)-3}{\sqrt{1-4x^2}}dx = 4\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin(2x)}{\sqrt{1-4x^2}}dx - 3\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} =$$

$$= 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin(2x)d\left(\arcsin(2x)\right) - 3\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{d(2x)}{\sqrt{1-(2x)^2}} =$$

$$= 2\cdot\frac{\arcsin^2(2x)}{2}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}\cdot\arcsin(2x)\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \arcsin^2(2x)\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}\cdot\arcsin(2x)\Big|_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \arcsin^2\left(2\cdot\frac{1}{2}\right) - \arcsin^2(2\cdot 0) - \frac{3}{2}\left(\arcsin\left(2\cdot\frac{1}{2}\right) - \arcsin(2\cdot 0)\right) =$$

$$= \arcsin^2(1) - \arcsin^2(0) - \frac{3}{2}\left(\arcsin(1) - \arcsin(0)\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi(\pi-3)}{4}.$$

Відповідь: $\pi(\pi-3)/4$.

б) $\displaystyle\int_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{3x+1}(3x+1)}$.

Інтегрування методом підстановки. Нехай виконуються умови:

1) функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$;

2) функція $x=\varphi(t)$ та її похідна $x'=\varphi'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha;\beta]$;

3) $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ і $\forall\, t\in(\alpha;\beta)$: $a<\varphi(t)<b$.

Тоді має місце формула

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Зауваження. Часто замість підстановки $x=\varphi(t)$ зручно зробити підстановку $t=g(x)$. У цьому випадку нові межі інтегрування знаходять безпосередньо: $\alpha=g(a)$, $\beta=g(b)$.

$$\int_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{3x+1}(3x+1)} = \left| \begin{matrix} t=\sqrt{3x+1},\ t^2=3x+1, \\ x=\dfrac{t^2-1}{3}, \quad dx=\dfrac{2}{3}tdt, \end{matrix} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline x & t \\ \hline 0 & 1 \\ \hline 5 & 4 \\ \hline \end{array} \right| = \int_1^4 \frac{\frac{t^2-1}{3}\cdot\frac{2}{3}tdt}{t\cdot t^2} =$$

$$= \frac{2}{9}\int_1^4 \left(\frac{t^3-t}{t^3}\right)dt = \frac{2}{9}\int_1^4 \left(1-\frac{1}{t^2}\right)dt = \frac{2}{9}\left(t+\frac{1}{t}\right)\Big|_1^4 = \frac{2}{9}\cdot\left(4+\frac{1}{4}-\left(1+\frac{1}{1}\right)\right) = \frac{2}{9}\cdot 2\frac{1}{4} =$$

$$= \frac{2}{9}\cdot\frac{9}{4} = 0{,}5\ .$$

Відповідь: $0{,}5$.

в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (8x-7)\sin(4x)dx$.

Формула інтегрування частинами у визначеному інтегралі. Якщо функції $u=u(x)$ та $v=v(x)$ мають неперервні похідні на відрізку $[a;b]$, тоді має місце формула

$$\int_a^b udv = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b vdu\ . \qquad (2.1)$$

Використовуючи фурмулу (2.1), отримаємо:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (8x-7)\sin(4x)dx = \left| \begin{matrix} u=8x-7; & du=8dx \\ dv=\sin(4x); & v=-\dfrac{\cos(4x)}{4} \end{matrix} \right| = -\frac{(8x-7)\cos(4x)}{4}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} -$$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{\cos(4x)}{4}\right)\cdot 8dx = -\frac{1}{4}\cdot\left(\left(8\cdot\frac{\pi}{2}-7\right)\cos\left(4\cdot\frac{\pi}{2}\right) - (8\cdot 0-7)\cos(4\cdot 0)\right) +$$

$$+2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(4x)dx = -\frac{1}{4}\cdot\left((4\pi-7)\cos(2\pi)+7\cos(4\cdot 0)\right) + 2\cdot\frac{1}{4}\cdot\sin(4x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{4}\cdot(4\pi-7+7) + \frac{1}{2}\cdot\left(\sin\left(4\cdot\frac{\pi}{2}\right) - \sin(4\cdot 0)\right) = -\pi\ .$$

Відповідь: $-\pi$.

г) $\int\limits_0^{\pi} \cos^2 \frac{x}{4} dx$.

Для обчислення заданого інтеграла скористаємося формулою пониження степеня $\cos^2 \alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$. Отримаємо:

$$\int\limits_0^{\pi} \cos^2 \frac{x}{4} dx = \int\limits_0^{\pi} \frac{1+\cos\frac{x}{2}}{2} dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \left(1+\cos\frac{x}{2}\right) dx = \frac{1}{2}\cdot\left(x + 2\sin\frac{x}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\pi + 2\sin\frac{\pi}{2} - \left(0 + 2\sin\frac{0}{2}\right)\right) = \frac{\pi+2}{2}.$$

Відповідь: $\frac{\pi+2}{2}$.

Завдання 2.2 (до **Завдання 2.2.2 [4]**). Встановити збіжність або розбіжність невласних інтегралів:

а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} 4x}{1+16x^2} dx$; **б)** $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{x^3}{5+x^4} dx$;

в) $\int\limits_0^{2/7} \frac{dx}{(7x-2)^5}$; **г)** $\int\limits_{-2}^{3} \frac{dx}{(x+2)\ln^3(x+2)}$.

Розв'язання.

Означення невласного інтеграла першого роду (з нескінченими межами інтегрування). Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a;+\infty)$. Якщо існує скінчена границя $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$, то її називають невласним інтегралом першого роду з нескінченою верхньою межею інтегрування та позначають

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx.$$

Отже, за означенням

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx. \qquad (2.2)$$

Якщо границя в правій частині (2.2) існує та скінчена, то невласний інтеграл називається збіжним, а якщо вказана границя не існує або дорівнює нескінченості, то розбіжним.

Аналогічно,

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx, \qquad (2.3)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{c}^{b} f(x)dx,$$

де $c \in (a;b)$.

Означення невласних інтегралів другого роду (інтегралів від розривних функцій). Нехай функція $f(x)$ неперервна в усіх точках відрізка $[a;b]$, за винятком точки $c \in (a;b)$, в якій вона має нескінчений розрив. Тоді

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1\to0}\int_{a}^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2\to0}\int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx, \qquad (2.4)$$

де $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$.

Інтеграл (2.4) називається невласним інтегралом другого роду.

Невласний інтеграл в лівій частині рівності (2.4) називається збіжним, якщо обидві границі, що стоять в її правій частині існують та скінчені, якщо хоча б одна з них не існує або дорівнює нескінченості, то розбіжним.

Якщо $f(x)$ має нескінчений розрив у точці $x = b$, тоді

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0}\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx. \qquad (2.5)$$

Аналогічно, якщо $f(x)$ має нескінчений розрив у точці $x = a$, тоді

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx. \qquad (2.6)$$

а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} 4x}{1+16x^2}\, dx$.

За означенням невласного інтеграла першого роду (2.2) отримуємо:

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} 4x}{1+16x^2}\, dx = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{b} \operatorname{arctg} 4x\, d(\operatorname{arctg} 4x)\right) = \frac{1}{4}\lim_{b\to\infty}\left(\left.\frac{\operatorname{arctg}^2 4x}{2}\right|_0^b\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\lim_{b\to\infty}\left(\operatorname{arctg}^2(4\cdot b) - \operatorname{arctg}^2(4\cdot 0)\right) = \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{32}.$$

Відповідь: $\frac{\pi^2}{32}$, інтеграл збіжний.

б) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{x^3}{5+x^4}\, dx$.

За означенням невласного інтеграла першого роду (2.3) отримуємо:

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{x^3}{5+x^4}\, dx = \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{4}\int\limits_{a}^{0} \frac{d\left(5+x^4\right)}{5+x^4}\right) = \frac{1}{4}\lim_{a\to-\infty}\left(\ln\left|5+x^4\right|\Big|_a^0\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{a\to-\infty}\left(\ln 5 - \ln\left|5+a^4\right|\right) = -\infty .$$

Відповідь: $-\infty$, інтеграл розбіжний.

в) $\int\limits_{0}^{2/7} \frac{dx}{(7x-2)^5}$.

Підінтегральна функція заданого невласного інтеграла має нескінчений розрив у точці $x = \frac{2}{7}$. За означеням невланого інтеграла другого роду (2.5) маємо:

$$\int_0^{2/7}\frac{dx}{(7x-2)^5}=\lim_{\varepsilon\to0}\left(\int_0^{2/7-\varepsilon}\frac{dx}{(7x-2)^5}\right)=\lim_{\varepsilon\to0}\left(-\frac{1}{4\cdot7\cdot(7x-2)^4}\Bigg|_0^{2/7-\varepsilon}\right)=$$

$$=-\frac{1}{28}\lim_{\varepsilon\to0}\left(\frac{1}{\left(7\cdot\left(\frac{2}{7}-\varepsilon\right)-2\right)^4}-\frac{1}{(7\cdot0-2)^4}\right)=-\infty\,.$$

Заданий інтеграл розбіжний.

Відповідь: інтеграл розбіжний.

г) $\int\limits_{-2}^{3}\frac{dx}{(x+2)\ln^3(x+2)}$.

Підінтегральна функція заданого невласного інтеграла має нескінчений розрив у точці $x=-2$. За означеням невланого інтеграла другого роду (2.6) маємо:

$$\int_{-2}^{3}\frac{dx}{(x+2)\ln^3(x+2)}=\lim_{\varepsilon\to0}\left(\int_{-2+\varepsilon}^{3}\frac{d(\ln(x+2))}{\ln^3(x+2)}\right)=\lim_{\varepsilon\to0}\left(-\frac{1}{2\ln^2(x+2)}\Bigg|_{-2+\varepsilon}^{3}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to0}\left(\frac{1}{\ln^2 5}-\frac{1}{\ln^2\varepsilon}\right)=-\frac{1}{2\ln^2 5}\,.$$

Заданий інтеграл збіжний.

Відповідь: $-\frac{1}{2\ln^2 5}$, інтеграл збіжний.

Завдання 2.3 (до **Завдання 2.2.3 [4]**). Обчислити площі фігур, які обмежені вказаними лініями:

а) $y=x^3+1$, $y=(x-1)^2$, $x=2$;

б) $\begin{cases}x=9(t-\sin t),\\ y=9(1-\cos t),\end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$, $y=0$;

в) $\rho=6|\cos2\varphi|$.

Розв’язання.

а) Якщо $y = f(x)$ і $y = g(x)$ – неперервні на проміжку $[a;b]$ функції і для всіх $x \in [a;b]$ виконується нерівність $f(x) \ge g(x)$, тоді *площу фігури*, зображеної на рис. 2.1, обчислюють за формулою

$$S = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx . \qquad (2.7)$$

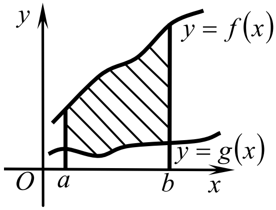

Рисунок 2.1

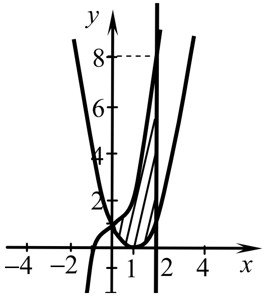

Рисунок 2.2

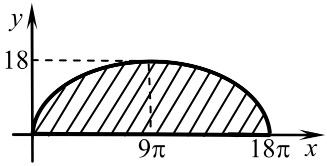

Рисунок 2.3

Фігура, обмежена кривими $y = x^3 + 1$, $y = (x-1)^2$, $x = 2$, зображена на рис. 2.2. Обчислимо її площу за формулою (2.7):

$$S = \int_0^2 \left(x^3 + 1 - (x-1)^2\right)dx = \left.\left(\frac{x^4}{4} + x - \frac{(x-1)^3}{3}\right)\right|_0^2 = \frac{2^4}{4} + 2 - \frac{(2-1)^3}{3} -$$

$$-\left(\frac{0^4}{4} + 0 - \frac{(0-1)^3}{3}\right) = 4 + 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3} \text{ (кв. од.).}$$

Відповідь: $5\frac{1}{3}$ кв.од.

б) Якщо криволінійна трапеція обмежена кривою, що задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ де $t \in [\alpha;\beta]$, тоді площа плоскої фігури, обмеженої цією трапецією, обчислюється за формулою

$$S=\left|\int_{\alpha}^{\beta} y(t)\cdot x'(t)dt\right|. \qquad (2.8)$$

Фігура, яка обмежена заданими кривими $\begin{cases} x=9(t-\sin t), \\ y=9(1-\cos t), \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$, $y=0$, зображена на рис. 2.3. Обчислимо її площу за формулою (2.8):

$$S=\int_0^{2\pi} 9(1-\cos t)(9(t-\sin t))'\,dt=\int_0^{2\pi} 81(1-\cos t)^2\,dt=$$

$$=81\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\cos^2 t\right)dt=81\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1}{2}(1+\cos 2t)\right)dt=$$

$$=81\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}-2\cos t+\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt=81\cdot\left(\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi}=$$

$$=81\cdot\left(\frac{3}{2}\cdot 2\pi-2\sin(2\pi)+\frac{1}{4}\sin(2\cdot 2\pi)-\left(\frac{3}{2}\cdot 0-2\sin 0+\frac{1}{4}\sin(2\cdot 0)\right)\right)=$$

$$=81\cdot 3\pi=243\pi \text{ (кв. од.)}.$$

Відповідь: 243π кв.од.

в) Фігура, обмежена в полярній системі координат неперервною кривою $\rho=\rho(\varphi)$ та променями $\varphi=\alpha$ і $\varphi=\beta$ ($\alpha<\beta$), називається криволінійним сектором (рис. 2.4). Площа криволінійного сектора обчислюється за формулою

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2 d\varphi. \qquad (2.9)$$

Зобразимо задану криву $\rho=6|\cos 2\varphi|$ (рис. 2.5). Фігура обмежена заданою кривою складається з чотирьох однакових пелюсток. За формулою (2.9) знайдемо площу S_1 половини однієї пелюстки:

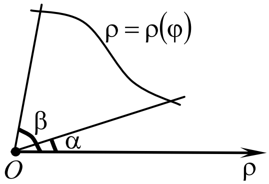

Рисунок 2.4

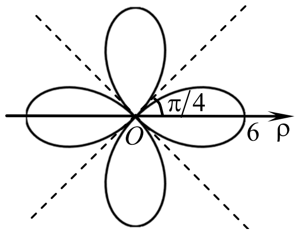

Рисунок 2.5

$$S_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 36\cos^2 2\varphi d\varphi = 18\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}(1+\cos 4\varphi)d\varphi = 9\cdot\left(\varphi + \frac{\sin 4\varphi}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= 9\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sin\left(4\cdot\frac{\pi}{4}\right)}{4} - 0\right) = \frac{9\pi}{4} \text{ (кв. од.).}$$

Площа всієї фігури: $S = 8\cdot S_1 = 18\pi$ (кв. од.).

Відповідь: 18π кв.од.

Завдання 2.4 (до **Завдання 2.2.4 [4]**). Обчислити довжину дуги кривої, заданої в прямокутних координатах $y = 3 + \ln\sin x$, $\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

Розв'язання.

Якщо $y = f(x)$ – неперервна функція разом зі своєю похідною, тоді довжина дуги кривої $y = f(x)$, де $a \le x \le b$, обчислюється за формулою

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx .$$

Для заданої кривої маємо:

$$y = 3 + \ln\sin x ,\ y' = (3 + \ln\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x} ,$$

$$l=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2}dx=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}}dx=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x}=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right|-\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right|=\ln 1-\ln\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{2}\ln 3 \text{ (лін.од.).}$$

Відповідь: $\ln 3/2$ лін. од.

Завдання 2.5 (до **Завдання 2.2.5 [4]**). Обчислити довжину дуги кривої, заданої параметрично $\begin{cases} x=10(t-\sin t), \\ y=10(1-\cos t), \end{cases}$ $\pi\le t\le 2\pi$.

Розв'язання.

Якщо крива задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases}$ $t\in[\alpha,\beta]$, де $x(t)$, $y(t)$ – неперервні функції разом зі своїми похідними, тоді довжина кривої обчислюється за формулою

$$l=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt .$$

Для заданої кривої маємо:

$$x'=10(1-\cos t),\ y'=10\sin t ,$$

$$l=\int\limits_{\pi}^{2\pi}\sqrt{[10(1-\cos t)]^2+[10\sin t]^2}\,dt=10\int\limits_{\pi}^{2\pi}\sqrt{\frac{4(1-\cos t)}{2}}dt=$$

$$=\left|\sin^2\frac{t}{2}=\frac{1-\cos t}{2}\right|==20\int\limits_{\pi}^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=-40\cdot\cos\frac{t}{2}\Bigg|_{\pi}^{2\pi}=$$

$$=-40\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{2}\right)=40 \text{ (лін. од.).}$$

Відповідь: 40 лін. од.

Завдання 2.6 (до **Завдання 2.2.6 [4]**). Обчислити довжину дуги кривої, заданої в полярних координатах $\rho = 6(1 - \sin\varphi)$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

Розв'язання.

Якщо крива задана рівнянням у полярних координатах $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha;\beta]$, де $\rho(\varphi)$, $\rho'(\varphi)$ – неперервні функції, тоді довжина дуги кривої обчислюється за формулою

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\rho(\varphi)]^2 + [\rho'(\varphi)]^2}\, d\varphi .$$

Для заданої кривої: $\rho = 6(1 - \sin\varphi)$, $\rho' = -6\cos\varphi$.

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{[6(1-\sin\varphi)]^2 + [-6\cos\varphi]^2}\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{36\left(1 - 2\sin\varphi + \sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)}\, d\varphi =$$

$$= 6\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 - 2\sin\varphi}\, d\varphi = 6\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{(1-\sin\varphi)(1+\sin\varphi)}{1+\sin\varphi}}\, d\varphi = 6\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1-\sin^2\varphi}{1+\sin\varphi}}\, d\varphi =$$

$$= 6\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1+\sin\varphi}}\, d\varphi = 6\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(1+\sin\varphi)}{\sqrt{1+\sin\varphi}} = 6\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{1+\sin\varphi}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 12\sqrt{2}\left(\sqrt{1+\sin\frac{\pi}{2}} - \sqrt{1+\sin 0}\right) = 12\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right) \text{ (лін. од.)}.$$

Відповідь: $12\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$ лін. од.

Завдання 2.7 (до **Завдання 2.2.7 [4]**). Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями $y = 4\sqrt{x}$, $y = 5 - x^2$, $x = 0$, навколо осі OX.

Розв'язання.

Нехай фігура обмежена кривими: $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a$, $x = b$, причому $f_2(x) \ge f_1(x)$, $x \in [a;b]$. Об'єм тіла, утвореного обертанням цієї фігури навколо осі Ox, обчислюється за формулою

$$V = \pi \int_a^b \left[f_2^{\,2}(x) - f_1^{\,2}(x) \right] dx . \qquad (2.10)$$

Фігура обмежена заданими кривими зображена на рис. 2.6.

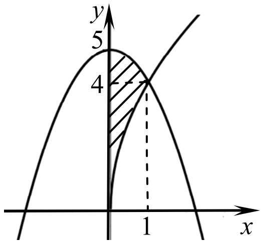

Рисунок 2.6

За формулою (2.10) отримуємо:

$$V = \pi \int_0^1 \left(\left(5 - x^2\right)^2 - \left(4\sqrt{x}\right)^2 \right) dx = \pi \int_0^1 \left(25 - 10x^2 + x^4 - 16x\right) dx =$$

$$= \pi \left(25x - \frac{10x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{16x^2}{2} \right) \Bigg|_0^1 = \pi \left(25 - \frac{10}{3} + \frac{1}{5} - \frac{16}{2} - 0 \right) = \frac{208\pi}{15} \text{ (куб.од.).}$$

Відповідь: $\dfrac{208\pi}{15}$ куб. од.

Завдання 2.8 (до **Завдання 2.2.8 [4]**). Знайти координати центра мас однорідної фігури Ф, обмеженої лініями $y = -x^2 + 2x + 3$, $y = x + 1$.

Розв'язання.

Координати (x_c, y_c) центра мас плоскої фігури обчислюються за формулами:

$$x_c = \frac{M_y}{m}, \; y_c = \frac{M_x}{m},$$

де m – маса плоскої фігури, M_x – статичний момент відносно осі Ox, M_y – статичний момент відносно осі Oy, $\gamma(x)$ – густина плоскої фігури (для однорідної фігури $\gamma(x) = \gamma = \text{const}$).

Якщо плоска фігура обмежена лініями $x=a$, $x=b$, де $a<b$, $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, $f_1(x)\le f_2(x)$ на $[a,b]$, то m, M_x, M_y знаходимо за формулами:

$$m=\int_a^b \gamma(x)[f_2(x)-f_1(x)]dx,$$

$$M_x=\frac{1}{2}\int_a^b \gamma(x)\left[f_2^2(x)-f_1^2(x)\right]dx,\ \ M_y=\int_a^b \gamma(x)x\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx.$$

Фігура, обмежена заданими кривими, зображена на рис. 2.7.

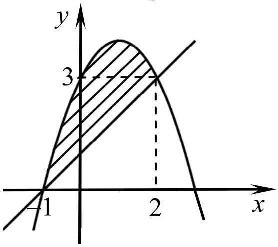

Рисунок 2.7

Знайдемо абсциси точок перетину графіків функцій:

$$-x^2+2x+3=x+1,\ x^2-x-2=0,\ x_1=-1,\ x_2=2.$$

За вище наведеними формулами обчислимо масу заданої фігури та її статичні моменти відносно координатних осей:

$$m=\gamma\int_{-1}^{2}\left(-x^2+2x+3-(x+1)\right)dx=\gamma\int_{-1}^{2}\left(-x^2+x+2\right)dx=$$

$$=\gamma\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_{-1}^{2}=\gamma\left(-\frac{2^3}{3}+\frac{2^2}{2}+2\cdot 2-\left(-\frac{(-1)^3}{3}+\frac{(-1)^2}{2}+2\cdot(-1)\right)\right)=$$

$$=4{,}5\gamma;$$

$$M_x=\frac{\gamma}{2}\int_{-1}^{2}\left(\left(-x^2+2x+3\right)^2-(x+1)^2\right)dx=\frac{\gamma}{2}\int_{-1}^{2}\left(x^4-4x^3-3x^2+10x+8\right)dx=$$

$$=\frac{\gamma}{2}\left(\frac{x^5}{5}-\frac{4x^4}{4}-\frac{3x^3}{3}+\frac{10x^2}{2}+8x\right)\Bigg|_{-1}^{2}=\frac{\gamma}{2}\left(\frac{x^5}{5}-x^4-x^3+5x^2+8x\right)\Bigg|_{-1}^{2}=$$

$$=\frac{\gamma}{2}\left(\frac{2^5}{5}-2^4-2^3+5\cdot 2^2+8\cdot 2-\left(\frac{(-1)^5}{5}-(-1)^4-(-1)^3+5\cdot(-1)^2+8\cdot(-1)\right)\right)=$$

$=10{,}8\gamma$;

$$M_y=\gamma\int_{-1}^{2}x\cdot\left(-x^2+2x+3-(x+1)\right)dx=\gamma\int_{-1}^{2}\left(-x^3+x^2+2x\right)dx=$$

$$=\gamma\left(-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{2}=\gamma\left(-\frac{2^4}{4}+\frac{2^3}{3}+2^2-\left(-\frac{(-1)^4}{4}+\frac{(-1)^3}{3}+(-1)^2\right)\right)=$$

$=2{,}25\gamma$.

$$x_c=\frac{2{,}25\gamma}{4{,}5\gamma}=0{,}5,\ y_c=\frac{10{,}8\gamma}{4{,}5\gamma}=2{,}4.$$

Відповідь: $x_c=0{,}5$, $y_c=2{,}4$.

Завдання 2.9 (до **Завдання 2.2.9 [4]**). Знайти координати центра мас однорідної кривої L:

а) дуга астроїди $\begin{cases} x=4\cos^3\dfrac{t}{2}, \\ y=4\sin^3\dfrac{t}{2}, \end{cases}$ розташована в першій четверті;

б) дуга кардіоїди $\rho=5\cdot(1+\cos\varphi)$, $0\le\varphi\le\pi$.

Розв'язання.

а) Координати (x_c, y_c) центра мас плоскої кривої обчислюються за формулами

$$x_c=\frac{M_y}{m},\ y_c=\frac{M_x}{m},$$

де m – маса плоскої кривої, M_x – статичний момент відносно осі Ox , M_y – статичний момент відносно осі Oy , $\gamma(x)$– густина плоскої кривої (для однорідної кривої $\gamma(x)=\gamma=\text{const}$).

Відомо, що якщо плоска крива задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $t \in [\alpha, \beta]$, то m, M_x, M_y обчислюються за формулами:

$$m = \int_{\alpha}^{\beta} \gamma(t) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt ,$$

$$M_x = \int_{\alpha}^{\beta} \gamma(t) \cdot y(t) \cdot \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt ,$$

$$M_y = \int_{\alpha}^{\beta} \gamma(t) \cdot x(t) \cdot \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt .$$

Для заданої кривої: $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, $\gamma(x) = \gamma = const$. Виконаємо допоміжні обчислення:

$$x' = -6\cos^2\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}, \; y' = 6\sin^2\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2},$$

$$\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} = \sqrt{\left[-6\cos^2\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}\right]^2 + \left[6\sin^2\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\right]^2} =$$

$$= \sqrt{36\cos^4\frac{t}{2}\sin^2\frac{t}{2} + 36\sin^4\frac{t}{2}\cos^2\frac{t}{2}} =$$

$$= \sqrt{36\cos^2\frac{t}{2}\sin^2\frac{t}{2}} = 6\cos\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2} = 3\sin t .$$

За вище наведеними формулами обчислимо масу заданої кривої та її статичні моменти відносно координатних осей:

$$m = \gamma\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin t dt = -3\gamma\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -3\gamma\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = 3\gamma ;$$

$$M_x=\gamma\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\sin^3\frac{t}{2}\cdot 3\sin t dt=\gamma\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\sin^3\frac{t}{2}\cdot 3\cdot 2\cdot\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}dt=$$

$$=48\gamma\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\frac{t}{2}d\left(\sin\frac{t}{2}\right)=\frac{48}{5}\gamma\sin^5\frac{t}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{48}{5}\gamma\left(\sin^5\frac{\pi}{4}-\sin^5 0\right)=\frac{6\sqrt{2}\,\gamma}{5};$$

$$M_y=\gamma\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\cos^3\frac{t}{2}\cdot 3\sin t dt=\gamma\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\cos^3\frac{t}{2}\cdot 3\cdot 2\cdot\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}dt=$$

$$=-48\gamma\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\frac{t}{2}d\left(\cos\frac{t}{2}\right)=-\frac{48}{5}\gamma\cos^5\frac{t}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{48}{5}\gamma\left(\cos^5\frac{\pi}{4}-\cos^5 0\right)=$$

$$=-\frac{48}{5}\gamma\left(\frac{\sqrt{2}}{8}-1\right)=\frac{6\left(8-\sqrt{2}\right)\gamma}{5}.$$

Координати центра мас:

$$x_c=\frac{\frac{6\left(8-\sqrt{2}\right)\gamma}{5}}{3\gamma}=\frac{2\left(8-\sqrt{2}\right)}{5},\quad y_c=\frac{\frac{6\sqrt{2}\gamma}{5}}{3\gamma}=\frac{2\sqrt{2}}{5}.$$

Відповідь: $x_c=\frac{2\left(8-\sqrt{2}\right)}{5}$, $y_c=\frac{2\sqrt{2}}{5}$.

б) Відомо, що якщо плоска крива задана в полярних координатах $\rho=\rho(\varphi)$, $\varphi\in[\alpha,\beta]$, то m, M_x, M_y обчислюються за формулами:

$$m=\int_\alpha^\beta\gamma(\rho)\cdot\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\rho,$$

$$M_x=\int_\alpha^\beta\gamma(\rho)\cdot\rho\cdot\sin\varphi\cdot\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\rho,$$

$$M_y=\int_\alpha^\beta\gamma(\rho)\cdot\rho\cdot\cos\varphi\cdot\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\rho.$$

Для заданої кривої: $\alpha = 0$, $\beta = \pi$, $\gamma(x) = \gamma = \text{const}$. Виконаємо допоміжні обчислення:

$$\sqrt{\rho^2 + \rho'^2} = \sqrt{\left(5(1+\cos\varphi)\right)^2 + (-5\sin\varphi)^2} = 5\sqrt{2(1+\cos\varphi)} =$$

$$= 10\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}} = 10\cos\frac{\varphi}{2}.$$

За вище наведеними формулами обчислимо масу заданої кривої та її статичні моменти відносно координатних осей:

$$m = \gamma\int_0^\pi 10\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 20\gamma\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^\pi = 20\gamma;$$

$$M_x = \gamma\int_0^\pi 5\cdot(1+\cos\varphi)\cdot\sin\varphi\cdot 10\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 200\gamma\int_0^\pi \sin\frac{\varphi}{2}\cos^4\frac{\varphi}{2}\,d\varphi =$$

$$= -400\gamma\int_0^\pi \cos^4\frac{\varphi}{2}\,d\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right) = -400\gamma\frac{\cos^5\frac{\varphi}{2}}{5}\Bigg|_0^\pi =$$

$$= -80\gamma\left(\cos^5\frac{\pi}{2} - \cos^5 0\right) = 80\gamma;$$

$$M_y = \gamma\int_0^\pi 5\cdot(1+\cos\varphi)\cdot\cos\varphi\cdot 10\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi =$$

$$= 100\gamma\int_0^\pi \cos^3\frac{\varphi}{2}\cos\varphi\,d\varphi = 100\gamma\int_0^\pi \cos^3\frac{\varphi}{2}\left(1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi =$$

$$= 200\gamma\int_0^\pi \left(1 - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\left(1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)d\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right) =$$

$$= 200\gamma\int_0^\pi \left(1 - 3\sin^2\frac{\varphi}{2} + 2\sin^4\frac{\varphi}{2}\right)d\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right) =$$

$$= 200\gamma \left(\sin\frac{\varphi}{2} - \sin^3\frac{\varphi}{2} + \frac{2\sin^5\dfrac{\varphi}{2}}{5} \right)\Bigg|_0^{\pi} = 80\gamma \,.$$

Координати центра мас:

$$x_c = \frac{80\gamma}{20\gamma} = 4\,,\ \ y_c = \frac{80\gamma}{20\gamma} = 4\,.$$

Відповідь: $x_c = 4$, $y_c = 4$.

ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Вища математика : підручник : у 2 кн. / Г. Й. Призва, В. В. Плахотник, Л. Д. Гординський та ін.; за ред. Г. Л. Кулініча. – 2-ге вид., перероб. і доп. – К. : Либідь, 2003. – Кн. 1. Основні розділи. – 400 с.
2. Вища математика: збірник задач : навч. посібник / В. П. Дубовик, І. І. Юрик, І. П. Вовкодав та ін.; за ред. В. П. Дубовика, І. І. Юрика. – К. : А.С.К., 2005. – 480 с.
3. Дубовик В. П. Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. зак. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К. : Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.
4. Індивідуальні завдання до розрахункових робіт з вищої математики. Розділ «Інтегральне числення функцій однієї змінної» для студентів технічних спеціальностей денної форми / Укл.: Т. І. Слюсарова. – Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2023. – 83 с.
5. Килимник І. М. Практикум з інтегрування функції однієї змінної: навч. посібник / І. М. Килимник, Т. Г. Полякова. – Запоріжжя : НУ «Запорізька політехніка», 2020. – 306 с.
6. Клепко В. Ю. Вища математика в прикладах і задачах: навч. посібник / В. Ю. Клепко, В. Л. Голець. – 2-ге вид. – К. : Центр учбової літератури, 2009. – 594 с.
7. Овчинников П. П. Вища математика : підручник : у 2 ч. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне і інтегральне числення / П. П. Овчинников, Ф. П. Яремчук, В. П. Михайленко; за заг. ред. П. П. Овчинникова. – К. : Техніка, 2003. – 600 с.

ДОДАТОК А
Таблиця похідних

Таблиця А.1 – Таблиця похідних

У таблиці $u = u(x)$ – дифенційовна функція

1. $(C)' = 0$, $C = const$;	11. $(\mathrm{tg}\,u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$;
2. $(x)' = 1$;	12. $(\mathrm{ctg}\,u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$;
3. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$;	13. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
4. $(\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$;	14. $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
5. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u', a - const$;	15. $(\mathrm{arctg}\,u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$;
6. $(e^u)' = e^u \cdot u'$;	16. $(\mathrm{arcctg}\,u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$;
7. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$;	17. $(\mathrm{sh}\,u)' = \mathrm{ch}\,u \cdot u'$;
8. $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$;	18. $(\mathrm{ch}\,u)' = \mathrm{sh}\,u \cdot u'$;
9. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;	19. $(\mathrm{th}\,u)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 u} \cdot u'$;
10. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;	20. $(\mathrm{cth}\,u)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 u} \cdot u'$.

ДОДАТОК Б
Таблиця основних інтегралів

Таблиця Б.1 – Таблиця основних інтегралів
У таблиці $u = u(x)$ – дифенційовна функція

1. $\int du = u + C$;	12. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$;
2. $\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1$;	13. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left\lvert \operatorname{tg}\frac{u}{2} \right\rvert + C$;
3. $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$;	14. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left\lvert \operatorname{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right\rvert + C$;
4. $\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u \rvert + C$;	15. $\int \operatorname{sh} u\, du = \operatorname{ch} u + C$;
5. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$;	16. $\int \operatorname{ch} u\, du = \operatorname{sh} u + C$;
6. $\int e^u du = e^u + C$;	17. $\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C$;
7. $\int \sin u\, du = -\cos u + C$;	18. $\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C$;
8. $\int \cos u\, du = \sin u + C$;	19. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C$;
9. $\int \operatorname{tg} u\, du = -\ln\lvert \cos u \rvert + C$;	20. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert \frac{u-a}{u+a} \right\rvert + C$;
10. $\int \operatorname{ctg} u\, du = \ln\lvert \sin u \rvert + C$;	21. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right\rvert + C$;
11. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$;	22. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$;

Кінець таблиці Б.1

23. $\int\sqrt{a^2-u^2}\,du=\frac{1}{2}u\sqrt{a^2-u^2}+$ $+\frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{u}{a}+C$;	25. $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln\lvert f(x)\rvert+C$;
24. $\int\sqrt{u^2\pm a^2}\,du=\frac{1}{2}u\sqrt{u^2\pm a^2}\pm$ $\pm\frac{1}{2}a^2\ln\left\lvert u+\sqrt{u^2\pm a^2}\right\rvert+C$;	26. $\int\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx=2\sqrt{f(x)}+C$.

ДОДАТОК В
Властивості невизначених інтегралів

Властивості невизначених інтегралів

1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$, $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$;

2) $\int dF(x) = F(x) + C$;

3) $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$, k – const;

4) $\int \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$;

5) якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$ і $u = \varphi(x)$ – довільна функція, що має неперервну похідну, то $\int f(u)du = F(u) + C$;

6) Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, тоді

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} \cdot F(ax+b) + C,$$

де a, b – const.

ДОДАТОК Г
Деякі види інтегралів, до яких застосовується метод інтегрування частинами

Таблиця Г.1 – Деякі види інтегралів, до яких застосовується метод інтегрування частинами

Вид інтегралу	що брати за u	що брати за dv
$\int P_n(x)\cdot\left\{\begin{matrix} e^{kx+b} \\ a^{kx+d} \\ \sin(kx+b) \\ \cos(kx+b) \\ \dfrac{1}{\sin^2(kx+b)} \\ \dfrac{1}{\cos^2(kx+b)} \end{matrix}\right\}dx$	$u = P_n(x)$	$dv = \left\{\begin{matrix} e^{kx+b} \\ a^{kx+d} \\ \sin(kx+b) \\ \cos(kx+b) \\ \dfrac{1}{\sin^2(kx+b)} \\ \dfrac{1}{\cos^2(kx+b)} \end{matrix}\right\}dx$
$\int P_n(x)\cdot\left\{\begin{matrix} \arccos f(x) \\ \arcsin f(x) \\ \mathrm{arctg}\, f(x) \\ \mathrm{arcctg}\, f(x) \\ \log_a^m f(x) \end{matrix}\right\}dx$	$u = \left\{\begin{matrix} \arccos f(x) \\ \arcsin f(x) \\ \mathrm{arctg}\, f(x) \\ \mathrm{arcctg}\, f(x) \\ \log_a^m f(x) \end{matrix}\right\}$	$dv = P_n(x)dx$
$\int \left\{\begin{matrix} e^{mx+b_1} \\ a^{mx+b_1} \end{matrix}\right\}\cdot\left\{\begin{matrix} \cos(kx+b_2) \\ \sin(kx+b_2) \end{matrix}\right\}dx$	будь-який з множників	будь-який з множників
$\int \left\{\begin{matrix} \cos(\ln kx) \\ \sin(\ln kx) \end{matrix}\right\}dx$	$u = \left\{\begin{matrix} \cos(\ln kx) \\ \sin(\ln kx) \end{matrix}\right\}$	$dv = dx$

ДОДАТОК Д
Властивості визначених інтегралів

Властивості визначених інтегралів

1) $\int_a^b dx = b - a$;

2) $\int_a^a f(x)dx = 0$;

3) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;

4) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, $c \in (a;b)$;

5) $\int_a^b k\,f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, де $k = \text{const}$;

6) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

ДОДАТОК Е
Деякі формули елементарної математики

Формули скороченого множення:

1) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$;

2) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;

3) $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3$;

4) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$;

5) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

Співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу:

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$; $\quad$ $\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1$;

$\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\quad$ $\mathrm{ctg}\,\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

$\mathrm{tg}^2\,\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1$; $\quad$ $\mathrm{ctg}^2\,\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha} - 1$.

Формули подвійного аргументу:

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$;

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.

Формули пониження степеня:

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2};$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

Формули добутку тригонометричних функцій:

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right);$$

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right);$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right).$$