МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет «Запорізька політехніка»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання контрольних робіт
і розрахунково-графічних завдань з
дисципліни «Теоретична механіка»
на тему «Динаміка механічної системи»
для студентів спеціальності G9 (131)
«Прикладна механіка» всіх форм навчання

2026

Методичні вказівки до виконання контрольних робіт і розрахунково-графічних завдань з дисципліни «Теоретична механіка» на тему «Динаміка механічної системи» для студентів спеціальності G9 (131) «Прикладна механіка» всіх форм навчання/ Укл.: В.І. Пожуєв, А.В. Пожуєв, В.Г. Шевченко, О.С. Омельченко – Запоріжжя, НУ «Запорізька політехніка», 2026. – 91 с.

Укладачі:
д-р ф-м. наук, професор В.І. Пожуєв,
к.т.н., доцент А.В. Пожуєв,
к.т.н., доцент В.Г. Шевченко,
ст. викладач О.С Омельченко

Рецензент,
к.т.н., доцент А.А. Скребцов

Відповідальний
за випуск:
ст. викладач О.С. Омельченко

Затверджено
на засіданні кафедри
«Теоретична та прикладна механіка»
Протокол № 4 від 25.12.2025 р.

Рекомендовано до видання
НМК ТФ
Протокол № 2 від 28.01.2026 р.

ЗМІСТ

ЗАГАЛЬНІ ВКАЗІВКИ

При вивчені теоретичної механіки важливо показати місце, яке займають загальні теореми динаміки механічної системи в структурі усього курсу і вказати практичні приклади, коли дані теореми дозволяють порівняно просто визначити головні характеристики руху таких систем. У зв'язку з цим на кафедрі «Теоретична та прикладна механіка» для закріплення теоретичних положень даного розділу розроблені і застосовуються в навчальному процесі чотири мініконтрольних роботи: Д-6 «Закон збереження руху центра мас системи», Д-7 «Теорема про зміну кількості руху системи», Д-8 «Теорема про зміну кінетичного моменту системи», Д-9 «Теорема про зміну кінетичної енергії системи». Також студенти виконують індивідуальні розрахункові завдання на усі чотири теореми, зокрема, в завданні Д-7 одночасно використовуються теорема про рух центра мас і про зміну кількості руху, в завданні Д-8 треба одночасно використовувати диференціальне рівняння обертального руху і закон збереження кінетичного моменту, а в завданні Д-9 закріпляються навички використання теореми про зміну кінетичної енергії системи.

У зв'язку зі сказаним вище в даних методичних вказівках наведено методику і алгоритми розв'язання задач з кожної з чотирьох мініконтрольних, причому усі рекомендації проілюстровані прикладами одного або двох варіантів контрольної роботи. Аналогічно розглянуті особливості виконання РГЗ на кожну з трьох тем.

1 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ПРО ЗАГАЛЬНІ ТЕОРЕМИ ДИНАМІКИ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

Нагадаємо, що **механічною системою** матеріальних точок або тіл називається така їх сукупність, у якій положення і рух кожної точки або тіла залежить від положення і руху всіх інших. В динаміці системи доцільно розділяти всі діючі на систему сили на зовнішні і внутрішні, при цьому **зовнішніми** $\bar{F}^e$ називаються сили взаємодії між елементами системи і точками або тілами, які не входять до складу даної системи, а **внутрішніми** $\bar{F}^i$ називаються сили взаємодії між елементами однієї й тієї ж системи.

При виведенні і використанні теорем динаміки системи суттєво використовуються дві **властивості внутрішніх сил**, а саме, що головний вектор і головний момент таких сил відносно довільного центру або осі завжди рівні нулю.

Центром мас або **центром інерції** механічної системи називається геометрична точка C, положення якої визначається за формулою:

$$\bar{r}_c = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k \bar{r}_k, \tag{1}$$

де

$$M = \sum_{k=1}^{n} m_k.$$

Увага! Зрозуміло, що координати точки C знаходяться проектуванням формули (1) на осі системи координат з початком у точці, відносно якої визначалися радіуси-вектори $\bar{r}_k$.

З математичної точки зору рух механічної системи точно описується системою звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, яку можна записати, застосовуючи принцип звільнення від в’язей і рівняння руху вільної точки в такому вигляді:

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d^2\bar{r}_1}{dt^2} = \bar{F}_1^e + \bar{F}_1^i; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ m_k \dfrac{d^2\bar{r}_k}{dt^2} = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ m_n \dfrac{d^2\bar{r}_n}{dt^2} = \bar{F}_n^e + \bar{F}_n^i. \end{cases} \tag{2}$$

Повне розв'язання основної задачі динаміки для механічної системи полягало б у тім, щоб, знаючи всі діючі на систему зовнішні активні сили скласти і про інтегрувати диференціальні рівняння (2) і, задовольнивши початкові умови для кожної точки, знайти закон руху кожної із точок системи.

Увага! Такий шлях застосовується дуже рідко (як правило, найчастіше в задачах небесної механіки і космонавтики) з наступних причин:

1. Майже завжди на цьому шляху виникають непереборні математичні труднощі, пов'язані з неможливістю аналітичного опису у вигляді формул внутрішніх сил, тобто, навіть правильно записати праву частину системи (2) неможливо.

2. Якщо першу перепону все ж вдалося здолати, то, як правило, виникають проблеми у зв'язку з тим, що в математиці відсутні ефективні аналітичні методи розв'язання великих систем диференціальних рівнянь зі складними правими частинами і тому в задачах небесної механіки і космонавтики обов'язковим є використання наближених чисельних методів із застосуванням ЕОМ.

3. На практиці досить часто не потрібно знати, як рухаються окремі точки системи, доволі повне уявлення про характер руху системи можна одержати, знаючи, як змінюються деякі інтегральні характеристики руху системи в цілому. Такими характеристиками або мірами руху є кількість руху, момент кількостей рухів і кінетична енергія системи. Ці міри руху можна визначати за допомогою загальних теорем динаміки системи.

Увага! З математичної точки зору загальні теореми являють собою результати або проведеного до кінця інтегрувань деяких рівнянь, виведених із рівнянь руху, або тільки певним способом скомбіновані комплекси основних величин, що входять в рівняння руху. Ці теореми звільняють нас від необхідності в кожному окремому випадку проводити ті математичні перетворення, які раз і назавжди проведені при виведені теореми.

Увага! При розгляді конкретної задачі досить часто доводиться застосовувати не одну, а відразу декілька теорем. Сукупність отриманих таким чином результатів, зазвичай, дає достатньо повну картину процесу, що вивчається.

Запишемо коротко **чотири теореми динаміки системи**.

Теорема 1. (про зміну кількості руху). Повна похідна за часом від кількості руху системи дорівнює головному вектору всіх діючих на систему зовнішніх сил:

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{F}^e. \tag{3}$$

Увага! Проектуючи рівняння (3) на осі нерухомої системи координат, одержуємо три скалярних рівняння.

Увага! Ця теорема дозволяє описувати лише поступальну частину руху системи і при цьому її практична цінність полягає в тому, що вона дозволяє виключати з розгляду усі наперед невідомі внутрішні сили.

Увага! При виконанні мініконтрольної Д-7 і частини РГЗ Д-7 застосовується так званий закон збереження кількості руху: якщо сума проекції всіх зовнішніх сил системи на деяку нерухому вісь дорівнює нулю, то проекція вектора кількості руху системи на цю вісь є величиною сталою

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx}^{e} = 0 \to \frac{dQ_x}{dt} = 0 \to Q_x = const. \tag{4}$$

Теорема 2. (про рух центра мас). Центр мас механічної системи рухається як матеріальна точка, маса якої дорівнює масі всієї системи й на яку діють всі прикладені до системи зовнішні сили:

$$M\frac{d^2\bar{r}_c}{dt^2} = \bar{F}_e. \tag{5}$$

Увага! Значення теореми полягає в тому, що вона дає обґрунтування методу динаміки точки: розв’язок , який ми одержуємо, вважаючи тіло точкою, описує рух центру мас цього тіла.

Увага! З математичної точки зору рівняння (5) практично співпадає з диференціальним рівнянням руху матеріальної точки у векторній формі, яке ми досліджували і інтегрували при розв’язанні МК – Д-2 і РГЗ Д-2, тому в динаміці системи для аналізу руху центра мас треба використовувати методи, які ми розглядали раніше.

Увага! Теореми 1 і 2 – це по суті дві різні форми запису однієї й тієї ж теореми. Причому, якщо розглядається система, що складається із твердих тіл, то краще користуватися теоремою про рух центра мас, якщо ж розглядається система у вигляді неперервного середовища (потік рідини або газу), для якої поняття центру мас втрачає сенс, то краще користуватися теоремою про зміну кількості руху системи.

Увага! При виконанні РГЗ Д-7 на першому етапі треба буде використовувати теорему 2, а на другому етапі – теорему 1, тобто досить часто при дослідженні поступальної частини руху системи доводиться одночасно залучати перші дві теореми динаміки системи.

Увага! При розв’язанні МК Д-6 треба застосовувати так званий закон збереження руху центра мас системи: якщо сума проекцій всіх зовнішніх сил системи на деяку нерухому вісь дорівнює нулю і початкова швидкість центру мас системи відсутня, то центр мас системи нерухомий уздовж такої осі:

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{k=1}^{n} F_{kx}^{e} = 0 \\ V_{cx}^{0} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow x_c = x_c^{(0)}. \tag{6}$$

Теорема 3. (про зміну моменту кількостей рухів системи відносно центра і осі). Повна похідна за часом від моменту кількостей рухів системи відносно деякого нерухомого центру дорівнює головному моменту всіх зовнішніх сил системи відносно того ж центру.

$$\frac{d\bar{K}_o}{dt} = \bar{M}_o^e. \tag{7}$$

Увага! Проектуючи векторну формулу (7) на осі нерухомої системи координат, що проходять через O, і враховуючи залежність між моментами відносно центру і осі, отримуємо математичний запис теореми про зміну кінетичного моменту відносно осі. Наприклад, для осі Oz теорема записується так:

$$\frac{dKoz}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_z(\bar{F}_k^e). \tag{8}$$

Увага! Формули (7) і (8) зберігають свій зовнішній вигляд і в тому випадку, коли розгляд ведеться не в нерухомій системі координат, а в системі координат, яка поступально переміщується разом із центром мас системи. Зрозуміло, що при цьому і кінетичний момент, і момент зовнішніх сил визначаються відносно центра мас і відповідних осей.

Увага! При виконанні МК Д-8 і РГЗ Д-8 буде застосовуватися так званий **закон збереження** кінетичного моменту відносно осі: якщо сума моментів всіх зовнішніх сил системи відносно деякої нерухомої осі (або осі, що рухається поступально разом з центром мас) дорівнює нулю, то кінетичний момент системи відносно такої осі є величиною сталою:

$$\sum_{k=1}^{n} m_z(\bar{F}_k^e) = 0 \rightarrow K_z = const. \tag{9}$$

Увага! Для використання закону (9) треба пам’ятати, що момент сили відносно осі дорівнює нулю в двох випадках:

1) сила паралельна осі;

2) сила перетинає вісь в довільному місці і під будь-яким кутом.

Увага! Із теореми в формі (8) з врахуванням того, що у випадку чисто обертального руху системи кінетичний момент відносно осі можна обчислювати за формулою:

$$K_z = I_z \omega_z,$$

де I_z – момент інерції відносно осі *Oz*, легко отримати диференціальне рівняння обертального руху, яке у випадку так званої незмінної системи, коли виконується умова $I_z = const$, записується так:

$$I_z \frac{d\omega_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_z(\bar{F}_k^e), \tag{10}$$

або

$$I_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} m_z(\bar{F}_k^e). \tag{11}$$

Ці рівняння будуть використовуватися при виконанні першої частини (першого етапу) РГЗ Д-8.

Увага! Звернемо увагу на те, що за своєю структурою рівняння (11) співпадає з точністю до позначень з диференціальним рівнянням прямолінійного руху матеріальної точки, тому для його інтегрування треба використовувати методи, які раніше вивчалися в динаміці точки.

Увага! При розв’язанні мініконтрольної Д-8 і виконанні розрахунково-графічної роботи Д-8 будуть використовуватися наступні формули для обчислення моментів інерції.

1. Момент інерції матеріальної точки (рис. 1.1):

$$I_z = mh^2. \tag{12}$$

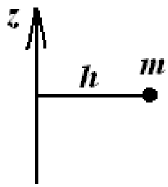

Рисунок 1.1 – Момент інерції матеріальної точки

2. Центральний момент інерції круглої однорідної пластини відносно осі, перпендикулярної до площини пластини (рис. 1.2):

$$I_z = \frac{1}{2}MR^2. \tag{13}$$

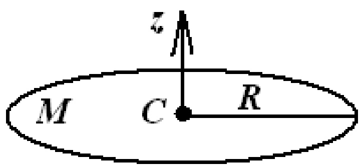

Рисунок 1.2 – Центральний момент інерції круглої однорідної пластини

3. Центральний момент інерції однорідної прямокутної пластини відносно осі, перпендикулярної до площини пластини (рис. 1.3):

$$I_z = \frac{M(a^2 + b)}{12}. \tag{14}$$

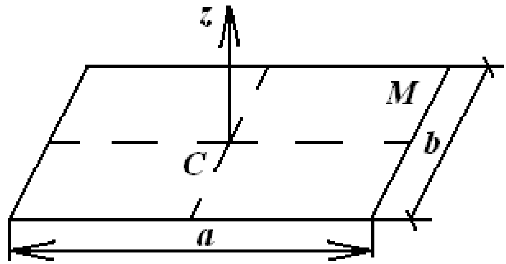

Рисунок 1.3 – Центральний момент інерції однорідної прямокутної пластини

Увага! Якщо вісь обертання в задачах Д-8 перпендикулярна до площини пластини, але не проходить через її центр мас, то треба використовувати теорему **Гюйгенса–Штейнера**, згідно з якою момент інерції тіла відносно будь-якої осі дорівнює моменту інерції того ж тіла, відносно осі, що паралельна даній і такій, що проходить через центр мас тіла, плюс добуток маси тіла на квадрат відстані між осями:

$$I_z = I_{zc} + Md^2. \tag{15}$$

Звідси бачимо, що формул (13), (14) і (15) достатньо, щоб розглядати обертальний рух пластин навколо будь-яких осей, що перпендикулярні до площини пластин круглої або прямокутної форми.

Теорема 4. (про зміну кінетичної енергії механічної системи). Зміна кінетичної енергії механічної системи при деякому її переміщенні дорівнює сумі робіт всіх зовнішніх і внутрішніх сил системи на цьому переміщенні:

$$T - T_o = A^e + A^i. \tag{16}$$

Увага! Звернемо увагу на те, що на відміну від трьох попередніх теорем тут присутня робота внутрішніх сил, яка може бути відмінною від нуля, але в МК Д-9 і РГЗ Д-9 будуть розглядатися так звані **незмінні системи**, які складаються з кількох твердих тіл, пов’язаних між собою нерозтяжною ниткою, і в таких задачах виконується умова $A^i = 0$ і нам доведеться обчислювати лише роботи зовнішніх сил.

Увага! Перші дві теореми доцільно використовувати в тих задачах де всі тіла системи виконують поступальний рух, третя теорема зручна для аналізу обертальної частини руху. У той же час четверта теорема працює практично завжди, де ми можемо обчислити кінетичну енергію кожного елементу системи, тобто частина з них може рухатися поступально, інші – обертально і, нарешті, є й такі, що рухаються плоскопаралельно.

Увага! При розв'язанні задач треба використовувати такі формули для обчислення кінетичної енергії:

для тіла, що рухається поступально:

$$T = \frac{1}{2} M V_c^2; \tag{17}$$

при обертанні тіла навколо нерухомої осі:

$$T = \frac{1}{2} I_z \omega^2; \tag{18}$$

для тіла, що рухається плоскопаралельно:

$$T = \frac{1}{2} M V_c^2 + \frac{1}{2} I_{zc} \omega^2. \tag{19}$$

Увага! Якщо механічна система складається з декількох абсолютно твердих тіл, пов'язаних одне з одним, то її кінетичну енергію треба знаходити за формулою:

$$T = T_1 + T_2 + \ldots + T_n, \tag{20}$$

а кожний доданок у правій частині обчислити за однією з формул (17), (18) або (19).

Увага! В МК Д-9 і РГЗ Д-9 для обчислення **роботи зовнішніх сил** будуть використовуватися такі формули:

1. Робота сили ваги:

$$A_p = \pm P \cdot h_c. \tag{21}$$

2. Робота сили, прикладеної до тіла, що обертається навколо нерухомої осі:

$$A_m = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} M_z^e(t, \varphi, \omega)\, dt, \tag{22}$$

зокрема, якщо $M_z^e = const$, то

$$A_m = M_z^e(\varphi_1 - \varphi_0). \tag{23}$$

3. Робота сили тертя:

$$A_{F_{Tp}} = -F_{Tp} \cdot S. \tag{24}$$

4. Робота сили пружності:

$$A_{F_{np}} = \frac{c}{2}(\lambda_1^2 - \lambda_2^2). \tag{25}$$

5. Якщо тіло рухається поступально під дією змінної сили, яка залежить лише від переміщення:

$$A_F = \int_{x_0}^{x_1} F_x(x)\, dx. \tag{26}$$

2 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ІЗ МІНІКОНТРОЛЬНОЇ Д-6 «ТЕОРЕМА ПРО РУХ ЦЕНТРА МАС СИСТЕМИ»

Приклад 2.1. На горизонтальній площині лежить однорідна призма (рис. 2.1) вагою P_3. Через невагомий блок, закріплений в точці O призми, перекинута невагома нерозтяжна нитка, до кінців якої прикріплені грузи A і B вагою P_1 і P_2 відповідно. Визначити горизонтальне переміщення призми, якщо вантаж A перемістився вздовж грані призми на величину ℓ. В початковий момент система знаходилася в стані спокою. Поверхні призми і площини гладкі. Задані значення параметрів: $\alpha = 30°, \beta = 60°, P_1 = 30\ H, P_2 = 12\ H, P_3 = 50\ H, \ell = 2$ м.

Розв'язання.

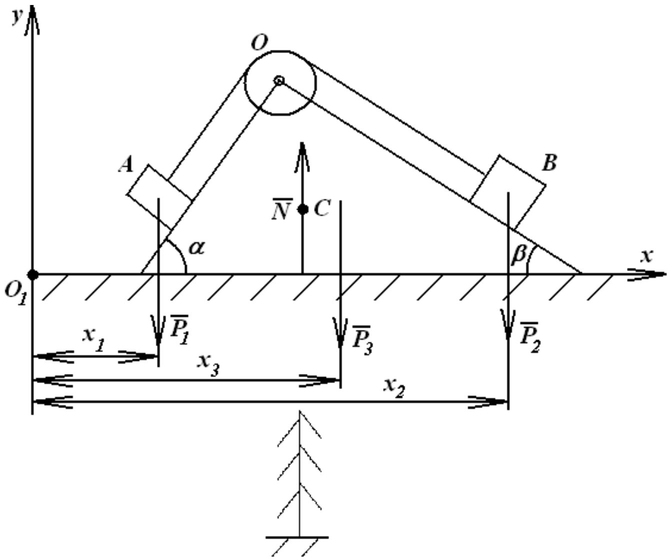

Рисунок 2.1 – Схема до прикладу 2.1

1. Будемо розглядати призму і грузи як елементи однієї механічної системи і покажемо зовнішні сили такої системи. Такими будуть ваги кожного з трьох тіл, а також нормальна реакція з боку горизонтальної площини (рис. 2.1). Оберемо нерухому систему координат O_1xy з початком у довільній точці O_1, яка для зручності

обирається за межами призми (рис. 2.1). Покажемо для наочності горизонтальні координати центра мас кожного елемента нашої системи. Зрозуміло, що якби стояло питання про визначення положення центра мас усієї системи, то тоді треба було б точно вказувати значення x_1, x_2 і x_3 в обраній системі координат і можна було б за формулою (1) знайти $x_с$, але у нас мова йде про горизонтальне переміщення призми і, як буде видно з подальших міркувань, на величину цього переміщення конкретні значення x_1, x_2 і x_3 не впливають, тобто в даній задачі це формальні (абстрактні) параметри.

2. Спроектуємо показані на рис. 2.1 зовнішні сили на вісь O_1x, будемо мати:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx}^{e} = 0, \tag{26}$$

оскільки кожна з чотирьох сил перпендикулярна до даної осі.

За умовою задачі в початковий момент часу система знаходилася в стані спокою, тобто, усі елементи і точки системи не рухалися, але тоді нерухомою буде і точка C (центр мас системи), а значить виконується умова:

$$V_{cx}^{(0)} = 0. \tag{27}$$

Із умов (26) і (27) витікає згідно з (6) закон збереження руху центра мас системи і ми приходимо до такої робочої формули нашої задачі:

$$x_c = x_c^{(0)}. \tag{28}$$

Увага! Формула (28) має наступний механічний зміст: при зміні взаємного розташування елементів механічної системи центр мас також змінює своє положення в системі, але не змінює свою горизонтальну координату по відношенню до нерухомої системи координат. Іншими словами, якщо точка C в початковому положенні знаходилася проти якогось нерухомого тіла (наприклад, ялинки на рис. 2.1), то після усіх переміщень грузів і призми в новому положенні точка C повинна знову знаходитися проти ялинки.

3. Обчислимо формально, тобто без підстановки конкретних числових значень, початкову абсцису центра мас системи за формулою (1). Будемо мати з врахуванням формули $m = P/q$:

$$x_c^{(0)} = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3}{P_1 + P_2 + P_3}. \quad (29)$$

Ще раз підкреслимо, що вимірюючи на рис. 2.1 відстані x_1, x_2 і x_3, ми могли б за цією формулою точно визначити абсцису центра мас, але зараз в цьому немає необхідності.

4. Знайдемо нові координати усіх елементів системи, виразивши їх через початкові значення цих же координат.

Увага! Із механічного коментарю в пункті 2 зрозуміло, що для виконання умови (28) внаслідок переміщень тіл *A* і *B* призма повинна переміститися у бік, протилежний переміщенням цих тіл. У нашому випадку *A* і *B* рухаються вліво, тому призма переміститься вправо. Зазначимо, що якщо припустити, що призма рухається в якийсь бік і це не відповідає дійсності, то математика виправить таку помилку знаком мінус у відповіді.

Увага! Найбільші складнощі при розв'язанні таких задач пов'язані з тим, що для кожного елемента системи треба враховувати його абсолютні переміщення. Справа в тому, що в даній задачі тіла *A* і *B* виконують складний рух, оскільки самі переміщуються гранями призми і одночасно переносяться самою призмою. Тому горизонтальні переміщення кожного з цих тіл складаються з двох частин.

Позначимо горизонтальне переміщення призми як *S*, тоді нові координати елементів системи через початкові можна виразити так:

$$x_1^1 = x_1 - \ell \cos\beta + S;$$

$$x_2^1 = x_2 - \ell \cos\alpha + S;$$

$$x_3^1 = x_3 + S.$$

Аналогічно формулі (24) абсциса точки *C* в новому положенні знаходиться так:

$$x_c = \frac{P_1(x_1 - \ell \cos\beta + S) + P_2(x_2 - \ell \cos\alpha + S) + P_3(x_3 + S)}{P_1 + P_2 + P_3}. \quad (30)$$

5. Підставляючи (29) і (30) в умову (28) і прирівнюючи чисельники дробів, приходимо до рівняння з однією невідомою S:

$$P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 = P_1x_1 - P_1\ell\cos\beta + P_1S + P_2x_2 -$$

$$-P_2\ell\cos\alpha + P_2S + P_3x_3 + P_3S;$$

$$0 = -(P_1\cos\beta + P_2\cos\alpha)\cdot\ell + (P_1 + P_2 + P_3)\cdot S.$$

Звідси знаходимо:

$$S = \frac{P_1\cos\beta + P_2\cos\alpha}{P_1 + P_2 + P_3}\ell = \frac{30\cdot 0{,}5 + 12\cdot 0{,}86}{30 + 12 + 50}\cdot 2 = 0{,}28\ \text{м}.$$

Приклад 2.2. До плити B, що лежить на горизонтальній площині, в точці O шарнірно приєднаний стержень, на кінці якого знаходиться тіло A, яке можна розглядати як матеріальну точку. Ваги тіла A, стержня і плити B відповідно рівні P_1, P_2 і P_3. Довжина стержня рівна ℓ. В початковий момент система знаходилася в спокої і стержень займав горизонтальне положення. Поверхні плити і опорної площини гладкі. Визначити, на яку відстань по горизонталі переміститься плита, коли стержень повернеться на кут α, якщо $P_1 = 6\ H,\ P_2 = 2\ H, P_3 = 10\ H,$ $\alpha = 60°, \ell = 1$ м.

Розв'язання.

1. Будемо розглядати плиту, стержень і точкову масу як елементи однієї механічної системи і покажемо зовнішні сили такої системи P_1, P_2, P_3 і $\bar{N}$, зокрема, в початковому положенні системи, коли стержень розташувався горизонтально (рис. 2.2). Зрозуміло, що у будь-якому іншому положенні стержня сили не змінять свою орієнтацію у просторі, а зміняться лише точки їх прикладення. Оберемо нерухому систему координат O_1xy з початком у довільній точці O_1, яка для зручності міркувань обирається за межами плити (рис. 2.2). На рис. 2.2 показані в обраній системі координати абсциси усіх елементів системи в початковому положенні (до повороту стержня).

Із наступних міркувань ми побачимо, що при отриманні відповіді про переміщення плити, ці координати зникають і мають в таких задачах формальний характер.

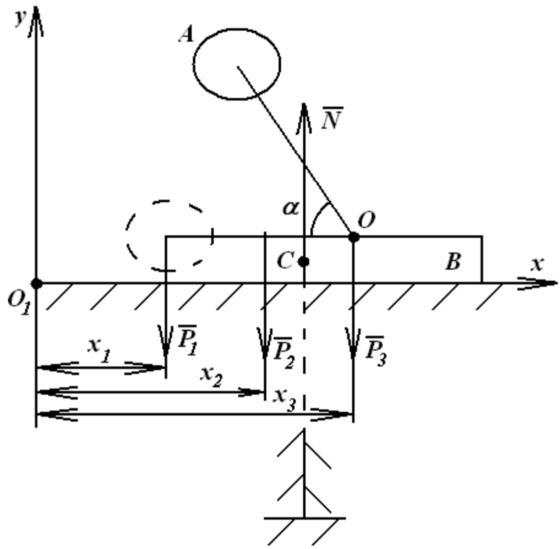

Рисунок 2.2 – Схема до прикладу 2.2

2. Оскільки в будь-якому положенні системи показані на рис. 2.2 зовнішні сили залишаються вертикальними, то виконується умова (26), а із того, що за умовою задачі в початковий момент система знаходилася в спокої, справедлива умова (27) і, як і у попередньому прикладі, приходимо до робочої формули (28). На рис. 2.2 показана ялинка, проти якої повинен знаходитися центр мас системи в усі моменти часу.

3. Як і у попередньому прикладі, наша система складається із трьох тіл, тому початкова абсциса точки C знаходиться за формулою (29) .

4. Повторюючи міркування про складні переміщення стержня і точкового груза із попереднього прикладу і свідомо вважаючи, що при підйомі стержня плита переміститься вправо, нові координати елементів системи пов'язуємо з початковими такими залежностями:

$$x_1^1 = x_1 + \ell - \ell \cos\alpha + S;$$

$$x_2^1 = x_2 + \frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{2}\cos\alpha + S;$$

$$x_3^1 = x_3 + S.$$

Тоді:

$$x_c = \frac{P_1(x_1 + \ell - \ell \cos\alpha + S) + P_2\left(x_2 + \frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{2}\cos\alpha + S\right) + P_3(x_3 + S)}{P_1 + P_2 + P_3}.$$

5. В нашій задачі із робочої формули (28) приходимо до такого рівняння для визначення переміщення плити *S*:

$$P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 = P_1x_1 + P_1\ell - P_1\ell \cdot \cos\alpha + P_1S + P_2x_2 - \frac{1}{2}P_2\ell -$$

$$-\frac{1}{2}P_2\ell\cos\alpha + P_2S + P_3x_3 + P_3S;$$

$$0 = P_1\ell(1 - \cos\alpha) + \frac{1}{2}P_2\ell(1 - \cos\alpha) + (P_1 + P_2 + P_3) \cdot S;$$

$$S = -\frac{\left(P_1 + \frac{1}{2}P_2\right) \cdot \ell \cdot (1 - \cos\alpha)}{P_1 + P_2 + P_3} = -\frac{7 \cdot 1 \cdot (1 - 0{,}5)}{18} = -0{,}19 \text{ м}.$$

Знак мінус тут означає, що наше припущення про переміщення плити вправо не відповідає дійсності і насправді вона змістилася вліво.

3 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ІЗ МІНІКОНТРОЛЬНОЇ Д-7 «ТЕОРЕМА ПРО ЗМІНУ КІЛЬКОСТІ РУХУ СИСТЕМИ»

Приклад 3.1 Механічна система складається з прямокутної плити масою $m = 5$ кг, яка може рухатися вздовж горизонтальних направляючих, і двох матеріальних точок K_1 і K_2, маси яких відповідно рівні $m_1 = 2$ кг і $\mathrm{m}_2 = 3$ кг (рис. 3.1). Точки рухаються вздовж зроблених в плиті жолобів за законами $S_1 = O_1K_1 = f_1(t)$, $S_2 = O_2K_2 = f_2(t)$. Нехтуючи усіма опорами і вважаючи, що в момент часу $t = 0$ система знаходилася у спокої; визначити куди і з якою швидкістю буде рухатися плита в момент часу $t_1 = 1$ с, якщо $\alpha = 60°$,
$f_1(t) = R \cdot (t^2 + 1)$, $f_2(t) = \frac{\pi R}{4} t^2$, $R = 0{,}7$ м.

Розв'язання.

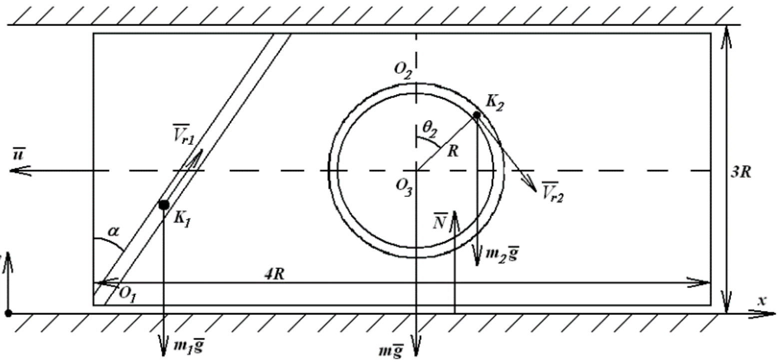

Рисунок 3.1 – Схема до прикладу 3.1

1. Розглядаючи плиту і дві матеріальні точки як елементи однієї механічної системи, покажемо зовнішні сили такої системи $m\bar{g}$, $m_1\bar{g}$, $m_2\overline{g}$ і $\bar{N}$ (рис. 3.1). Зрозуміло, що вони будуть направлені вертикально вниз або вгору при усіх можливих положеннях елементів системи. Оберемо нерухому систему координат *Oxy* (рис. 3.1). Тоді очевидно, що виконується умова:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx}^{e} = 0,$$

але тоді справедливий закон збереження кількості руху системи (4), який можна переписати так:

$$Q_x = Q_x^{(0)},$$

де Q_x – проекція вектора кількості руху в довільний момент часу, а $Q_x^{(0)}$ – те саме для початкового моменту часу.

Оскільки за умовою задачі у початковий момент часу усі три елементи системи були нерухомими, то система не мала кількості руху, тобто $Q_x^{(0)}$=0, і тоді закон збереження приводить до такої робочої формули задачі:

$$Q_x = 0. \tag{31}$$

Увага! Після проведених міркувань треба виконати наступні кроки для розв'язання задачі: 1) обчислити у векторній формі кількість руху системи, як геометричну суму кількостей рухів усіх елементів системи; 2) спроектувати отриманий вектор на нерухому вісь *Ox* і прирівнявши отриману проекцію нулю прийти до рівняння з однією невідомою.

Увага! При обчисленні кількостей рухів матеріальних точок K_1 і K_2 треба враховувати, що вони беруть участь у двох рухах – відносному у своїх жолобах по плиті і переносному – разом з плитою, тому для знаходження кількості руху кожної точки треба брати їх абсолютні швидкості, які обчислюються за допомогою теореми про додавання швидкостей.

Увага! Оскільки одна з двох точок у відносному русі має криволінійну траєкторію і її відносна швидкість у різні моменти часу має різні напрямки, то треба починати реалізацію описаного вище алгоритму із показу на рис. 1.3 положення точки K_2 у момент часу t_1.

2. Точка K_1, яка рухається у прямолінійному жолобі має швидкість, що направлена вздовж жолоба і тому у всіх положеннях напрямок $\bar{V}_{r1}$ нам відомий. Для точки K_2 будемо мати:
при $t = t_1 = 1$ с

$$O_2K_2 = f_2(t_1) = \frac{\pi R}{4};$$

$$\theta_2 = \frac{O_2K_2}{R} = \frac{\pi}{4}.$$

Оскільки на рис. 3.1 в якості додатного напрямку відліку дугової координати показано рух від O_2 за годинниковою стрілкою, то це означає, що при $t_1 = 1$ с точка K_2 знаходиться там, де кут між O_3O_2 і O_3K_2 рівний 45°, а вектор $\bar{V}_{r2}$ направлений перпендикулярно до O_3K_2 (рис. 3.1).

3. Оскільки плита може рухатися лише поступально, то її можна розглядати як матеріальну точку і тоді кількість руху системи із трьох матеріальних точок обчислюється за формулою:

$$\bar{Q} = m\bar{u} + m_1\bar{V}_1 + m_2\bar{V}_2, \tag{32}$$

де через $\bar{u}$ позначили швидкість плити, а через $\bar{V}_1$ і $\bar{V}_2$ – абсолютні швидкості точок K_1 і K_2.

4. Оскільки ми не знаємо наперед, куди буде рухатися плита, то вектор $\bar{u}$ можна направляти горизонтально вліво або вправо і тоді , якщо відповідь отримаємо зі знаком плюс, це буде означати, що попередньо показаний напрямок руху відповідає дійсності, якщо ж буде мінус – то справжній напрямок протилежний попередньо показаному.

На рис. 3.1 ми попередньо направили $\bar{u}$ вліво.

Модулі відносних швидкостей точок K_1 і K_2 знаходимо шляхом диференціювання за часом заданих законів їх відносних рухів з наступним підставлянням замість t заданого значення t_1. Будемо мати:

$$V_{r1} = \frac{df_1}{dt}/_{t=t_1} = 2Rt/_{t=1} = 2R = 1{,}4\,\frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$V_{r2} = \frac{df_2}{dt}/_{t=t_1} = \frac{\pi R}{2}\cdot t/_{t=1} = \frac{\pi R}{2} = 1{,}1 \text{ м/с}.$$

5. Згідно з теоремою про додавання швидкостей:

$$\begin{aligned} \bar{V}_1 &= \bar{V}_e + \bar{V}_{r1} = \bar{u} + \bar{V}_{r1;} \\ \bar{V}_2 &= \bar{V}_e + \bar{V}_{r2} = \bar{u} + \bar{V}_{r2.} \end{aligned} \tag{33}$$

і тоді формула (32) приймає такий вигляд:

$$\bar{Q} = m\bar{u} + m_1(\bar{u} + \bar{V}_{r1}) + m_2(\bar{u} + \bar{V}_{r2}). \tag{34}$$

6. Проектуємо цей вектор на вісь Ox і згідно з (25) результат прирівнюємо нулю:

$$-mu - m_1 u + m_1 V_{r1} \sin\alpha - m_2 u + m_1 V_{r2} \cos\theta_2 = 0.$$

Звідси знаходимо:

$$u = \frac{m_1 V_{r1} \sin\alpha + m_2 V_{r2} \cos\theta_2}{m + m_1 + m_2} = \frac{2 \cdot 1{,}4 \cdot 0{,}86 + 3 \cdot 1{,}1 \cdot 0{,}7}{10} =$$

$$= 0{,}47 \text{ м/с}.$$

Знак плюс означає, що попередньо показаний на рис. 6 напрямок швидкості плити відповідає дійсності.

Приклад 3.2. Прямокутна плита, масою $m = 5$ кг, може рухатися вздовж горизонтальних направляючих. Вздовж зроблених у плиті жолобів в момент часу $t = 0$ починають рухатися дві матеріальні точки K_1 і K_2, маси яких відповідно рівні $m_1 = 2$ кг і $m_2 = 3$ кг. Закони руху кожної з цих двох точок задані у вигляді $S_1 = O_1 K_1 = f_1(t)$ і $S_2 = O_2 K_2 = f_2(t)$. Нехтуючи усіма опорами і вважаючи, що в момент часу $t = 0$ система знаходилася у спокої, визначити куди і з якою швидкістю буде рухатися плита в момент часу $t_1 = 1$ с, якщо $\alpha = 30°$, $f_1(t) = R \cdot (t^2 + 1)$, $f_2 = \frac{\pi R}{3} t^3$, $R = 0{,}5$ м.

Розв’язання.

Усі міркування проводимо за тією ж схемою, що і у попередньому прикладі, але у більш стислому викладі.

1. Плита і дві матеріальні точки утворюють механічну систему, зовнішні сили якої наведені на рис. 3.2. Обираючи нерухому систему координат як показано на рис. 3.2 і враховуючи нерухомість усіх елементів системи в початковий момент часу, бачимо що справедливий закон збереження кількості руху системи в проекції на вісь Ox, тобто приходимо до робочої формули задачі у вигляді (31):

$$\left.\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} F_{kx}^{e} = 0 \\ Q_x^{(0)} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \forall t > 0 \colon Q_x = 0.$$

Враховуючи усі зауваження зроблені після формули (31) в попередньому прикладі, виконуємо подальшу схему записаних там дій.

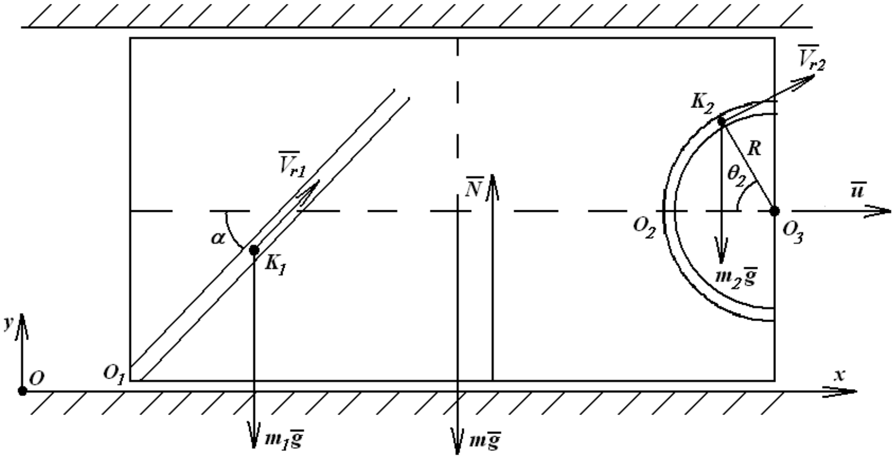

Рисунок 3.2 – Схема до прикладу 3.2

2. Для знаходження напрямку відносної швидкості точки K_2 знаходимо її положення в момент часу t_1:
при $t = t_1 = 1\ c$,

$$O_2K_2 = f_2(t_1) = \frac{\pi R}{4}, \theta_2 = \frac{O_2K_2}{R} = \frac{\pi}{4}.$$

Враховуючи показаний на рис. 3.2 додатній напрямок дугової координати S_2, бачимо, що точка рухається по колу за годинниковою стрілкою, тоді відносна швидкість точки K_2 перпендикулярна до радіуса O_3K_3 і утворює з віссю Ox кут 45° (рис. 3.2).

3. Оскільки плита виконує поступальний рух, то її можна розглядати як матеріальну точку з масою m і тоді вектор кількості руху системи знаходиться за формулою (32).

4. Припустимо довільно, що плита рухається за рахунок переміщень точок K_1 і K_2 вправо і відповідно покажемо вектор швидкості плити $\bar{u}$ направленим у додатному напрямку осі Ox (рис. 3.2). Модулі відносних швидкостей точок K_1 і K_2 знаходимо шляхом диференціювання за часом заданих законів відносного руху цих точок і наступною підстановкою в отримані перші похідні замість t заданого значення t_1. Таким чином знаходимо:

$$V_{r1} = \frac{df_1}{dt}/_{t=t_1} = 2tR/_{t=1} = 2R = 1 \text{ м/с};$$

$$V_{r2} = \frac{df_2}{dt}/_{t=t_1} = \frac{2\pi R}{3} = \frac{\pi}{3} = 1{,}05 \text{ м/с}.$$

Знаки плюс в обох результатах означають, що і $\bar{V}_{r1}$, і $\bar{V}_{r2}$ направлені в додатних напрямках відліку відповідних дугових координат (рис. 3.2).

5. З використанням теореми про додавання швидкостей абсолютні швидкості точок K_1 і K_2даються формулами (33) і тоді вектор кількості руху нашої системи обчислюється за формулою (34).

6. Після проектування вектора (34) на вісь Ox і прирівнювання отриманого виразу нулю, приходимо до рівняння для визначення величини швидкості плити:

$$mu + m_1 u + m_1 V_{r1} \cos\alpha + m_2 u + m_2 V_{r2} \sin\theta_2 = 0.$$

Звідси знаходимо:

$$u = -\frac{m_1 V_{r1} \cos\alpha + m_2 V_{r2} \sin\theta_2}{m + m_1 + m_2} =$$

$$= -\frac{2 \cdot 1 \cdot 0{,}86 + 3 \cdot 1{,}05 \cdot 0{,}7}{10} = -0{,}39 \text{ м/с}.$$

Знак мінус означає, що наше попереднє припущення про рух пластини вправо не відповідає дійсності і насправді вектор $\bar{u}$ направлений у від’ємному напрямку осі *Ox*.

4 ПРИКЛАДИ ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОГО ЗАВДАННЯ Д-7 «ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРЕМ ПРО РУХ ЦЕНТРА МАС І ПРО ЗМІНУ КІЛЬКОСТІ РУХУ ДЛЯ АНАЛІЗУ ПОВЕДІНКИ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ»

Приклад 1. Механічна система складається з прямокутної пластини масою 10 кг, яка може переміщуватися вздовж горизонтальних направляючих, і матеріальної точки масою 4 кг, яка рухається вздовж жолоба в плиті згідно з заданим законом $\varphi = f(t)$. Нехтуючи усіма опорами руху і вважаючи, що в момент $t = 0$ до нерухомої плити приклали силу $F = F(t)$, що направлена горизонтально вправо, визначити на проміжку $[0, t_1]$ переміщення плити, як функцію часу, а також його значення в момент $t = t_1$, а також швидкість плити в кінці ділянки і нормальний тиск на горизонтальні направляючі. В момент часу $t = t_1$ дія сили на плиту припиняється, але точка продовжує свій рух всередині жолоба. Визначити для моменту $t = t_2$ швидкість плити, якщо $t_1 = 4$ с, $t_2 = 9$ с, $f(t) = \frac{\pi}{6}(t-3)$, $F(t) = 0{,}28t$ Н, $R = 0{,}5$ м.

Розв’язання.

Перший етап. На проміжку часу $[0, t_1]$ будемо використовувати теорему про рух центру мас системи, яка в даному випадку складається із двох тіл: плити і матеріальної точки (кульки) *M*. Враховуючи показані на рис. 4.1 зовнішні сили нашої системи формули (5) в даному випадку запишемо так:

$$M\frac{d^2\bar{r}_c}{dt^2} = m_1\bar{g} + m_2\bar{g} + \bar{N} + \bar{F}, \tag{35}$$

де $M = m_1 + m_2$.

Проектуючи векторне рівняння (35) на вісь *Ox* нерухомої системи координат, початок якої обираємо так, щоб при $t = 0$ координата *x* середини плити була нульовою, приходимо до такого скалярного диференціального рівняння руху центра мас системи в горизонтальному напрямку:

$$M\ddot{x}_c = F(t). \tag{36}$$

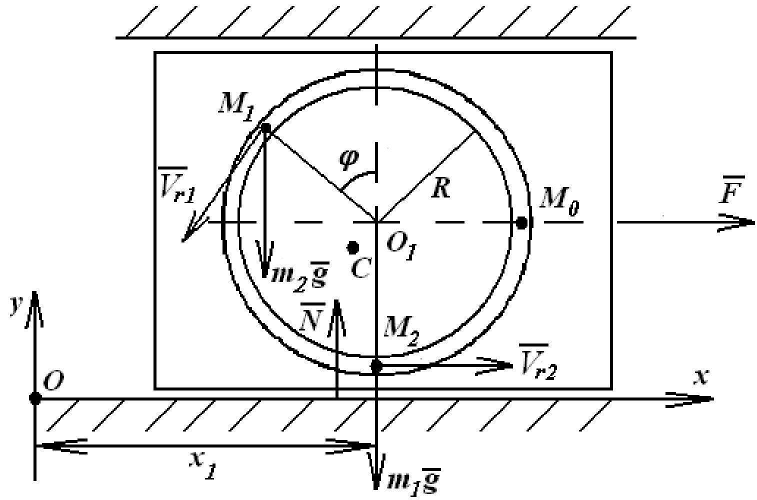

Рисунок 4.1 – Схема до прикладу 4.1

Формула (1) для визначення положення центра мас системи в нашій задачі запишеться так:

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}. \tag{37}$$

Увага! Звернемо увагу на те, що в цій формулі треба враховувати координати абсолютних переміщень елементів системи, зокрема це стосується кульки, яка виконує складний рух. Тому координату x_2 треба виразити через x_1 і відносне переміщення кульки по плиті. Враховуючи показаний на рис. 8 додатній напрямок відліку кута φ і заданий в умові задачі закон зміни цього кута, приходимо до такої залежності:

$$x_2 = x_1 - R\,sin\,\phi = x_1 - R\,sin\frac{\pi}{6}(t-3). \tag{38}$$

Враховуючи, що $M = m_1 + m_2 = 14$ кг і підставляючи (38) в (35), знаходимо такий вираз для положення центра мас системи відносно нерухомої системи координат в довільний момент часу:

$$x_c = \frac{1}{14}\left(14x_1 - 4\cdot 0{,}5\,sin\frac{\pi}{6}(t-3)\right) = x_1 - \frac{1}{7}sin\frac{\pi}{6}(t-3).$$

Диференціюючи цей вираз за часом, знаходимо швидкість центру мас системи в довільний момент часу:

$$\dot{x}_c = \dot{x}_1 - \frac{1}{7} \cdot \frac{\pi}{6} cos \frac{\pi}{6}(t-3). \qquad (39)$$

Диференціальне рівняння другого порядку (36) будемо інтегрувати шляхом приведення його до послідовного розгляду двох рівнянь першого порядку. На першому кроці будемо мати диференціальне рівняння першого порядку відносно $\dot{x}_c$:

$$M\frac{d\dot{x}_c}{dt} = 0{,}28t\,, M = 14,$$

$$\frac{d\dot{x}_c}{dt} = 0{,}02t. \qquad (40)$$

Звідси, відокремлюючи змінні і інтегруючи, знаходимо:

$$\dot{x}_c = 0{,}01t^2 + C_1.$$

Підставляючи сюди вираз для $\dot{x}_c$ із (39), будемо мати:

$$\dot{x}_1 - \frac{\pi}{42} cos \frac{\pi}{6}(t-3) = 0{,}01t^2 + C_1. \qquad (41)$$

Згідно з умовою задачі, в початковий момент часу $t = 0$ пластина була нерухомою, тобто повинна виконуватися така умова: при $t = 0$, $\dot{x}_1 = 0$.

Звідси знаходимо значення C_1:

$$C_1 = -\frac{\pi}{42} cos \frac{\pi}{6}(-3) = -\frac{\pi}{42} cos \frac{\pi}{2} = 0,$$

і остаточно зміна швидкості центру плити описується на ділянці часу $[0,\ t_1]$ такою формулою:

$$\dot{x}_1 = 0{,}01t^2 + 0{,}075\, cos \frac{\pi}{6}(t-3). \qquad (42)$$

Зокрема, звідси тепер можна знайти швидкість в кінці проміжку $[0,\ t_1]$, яка буде початковою для другого етапу $[t_1,\ t_2]$:

$$u_1 = \dot{x}_1/_{t=t_1} = 0{,}01 \cdot 4^2 + 0{,}075 \cdot 0{,}86 = 0{,}16 + 0{,}06 = 0{,}22 \text{ м/с}.$$

Для знаходження закону руху плити на першому етапі і шляху, який вона пройшла за час t_1, перепишемо залежність (42) у вигляді такого диференціального рівняння першого порядку:

$$\frac{dx_1}{dt} = 0{,}01t^2 + 0{,}075\, cos\frac{\pi}{6}(t-3).$$

Відокремлюючи змінні і інтегруючи, будемо мати:

$$\int dx_1 = 0{,}01\int t^2 dt + 0{,}075\int cos\frac{\pi}{6}(t-3)dt\,;$$

$$x_1 = 0{,}01\frac{t^3}{3} + 0{,}075\, sin\frac{6}{\pi}(t-3) + C_2.$$

Згідно з умовою задачі і вибором початку нерухомої системи координат повинна виконуватися умова: при $t = 0$ $x_1 = 0$.

Звідси знаходимо C_2 таким чином:

$$C_2 = -0{,}075\frac{6}{\pi} sin\frac{\pi}{6}(-3) = \frac{0{,}45}{\pi} sin\frac{\pi}{2} = 0{,}15.$$

Таким чином, закон руху плити на першому етапі записується так:

$$x_1 = 0{,}003t^3 + 0{,}15\, sin\frac{\pi}{6}(t-3) + 0{,}15. \qquad (43)$$

Звідси переміщення або шлях, який пройшла плита за 4 секунди від початку руху знаходимо так:

$$S_1 = x_1/_{t=t_1} = 0{,}003\cdot 4^3 + 0{,}15\left(1 + sin\frac{\pi}{6}\right) = 0{,}42 \text{ м}.$$

Для визначення нормальної реакції з боку направляючих на рух системи (тиску системи на направляючі) спроектуємо векторне рівняння (35) на вісь Oy:

$$M\ddot{y}_c = -m_1 g - m_2 g + N.$$

Звідси знаходимо:

$$N = M(g + \ddot{y}_c). \qquad (44)$$

В нашому випадку системи із двох тіл із формули (1) записуємо таке:

$$y_c = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}, \tag{45}$$

і виразимо y_2 через y_1 таким чином:

$$y_2 = y_1 + R\, cos\, \varphi = y_1 + R\, cos \frac{\pi}{6}(t-3). \tag{46}$$

Підставляємо (46) в (45) і диференціюємо, враховуючи, що $y_1 = const$, а значить $\ddot{y}_1 = 0$, будемо мати:

$$\ddot{y}_c = -\frac{1}{M} m_2 R \frac{\pi^2}{36} cos \frac{\pi}{6}(t-3) = -0{,}02\, cos \frac{\pi}{6}(t-3).$$

Зокрема при $t = t_1 = 4\ c$:

$$\ddot{y}_c = -0{,}02 \cdot 0{,}86 = -0{,}02\ \text{м/с}^2.$$

Тоді із (45) знаходимо:

$$T = 14(9{,}81 - 0{,}02) = 13{,}71\ H.$$

Другий етап. На проміжку часу $[t_1,\ t_2]$ відсутня горизонтальна сила $\bar{F}$ і тоді (рис. 4.1) виконується умова:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx}^{e} = 0,$$

а це означає, що на цьому проміжку часу виконується закон збереження кількості руху системи, який описується формулою (4) і для нашої задачі його можна записати так:

$$Q_x^{(1)} = Q_x^{(2)}. \tag{47}$$

Положення, яке займає кулька при $t = t_1$ визначається кутом φ, який утворює радіус кола з вертикаллю і цей кут знаходимо так: при $t = t_1 = 4\ c$,

$$\varphi_1 = f(t_1) = \frac{\pi}{6}(4-3) = \frac{\pi}{6},$$

при цьому відносна швидкість кульки, яка показана на рис. 4.1, в даному положенні знаходиться так:

$$V_{r1} = R \cdot \frac{d\varphi}{dt}\bigg|_{t=t_1} = 0{,}5 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12} = 0{,}25\,\frac{\text{м}}{\text{с}},$$

при $t = t_2 = 9\ c$,

$$\varphi_2 = f(t_2) = \frac{\pi}{6}(9 - 3) = \pi,$$

а швидкість за величиною буде тією ж, що і при $t = t_1$ за модулем, але іншою за напрямком (рис. 4.1, точка M_2).

В обох положеннях кількість руху системи знаходиться за формулою:

$$\bar{Q} = m_1\bar{u} + m_2(\bar{u} + \bar{V}_r).$$

Тоді:

$$Q_x^{(1)} = (m_1 + m_2)u_1 - m_2 V_{r1} \cos\varphi_1 =$$

$$= 14 \cdot 0{,}2 - 4 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}86 = 2{,}22\ H \cdot c;$$

$$Q_x^{(2)} = (m_1 + m_2)u_2 - m_2 V_{r2} = 14 \cdot u_2 + 4 \cdot 0{,}25 = 14u_2 + 1.$$

Із формули (40) тепер знаходимо u_2:

$$2{,}22 = 14u_2 + 1;$$

$$u_2 = \frac{2{,}22 - 1}{14} = 0{,}08\ \text{м/с}.$$

Порівнюючи u_1 і u_2, бачимо, що рух кульки привів до значної зміни швидкості плити.

Увага! Для порівняння різних підходів і взаємної перевірки визначимо u_2 іншим методом, а саме використовуючи на проміжку часу $[t_1,\ t_2]$ диференціальне рівняння (40), в якому треба вважати праву частину нульовою:

$$\frac{d\dot{x}_c}{dt} = 0.$$

Тоді $\dot{x}_c = C_1$, або $\dot{x}_1 - 0{,}075 \cos\frac{\pi}{6}(t - 3) = C_1$.

При цьому треба врахувати, що при $t = t_1 = 4\ c\ \dot{x}_1 = 0{,}22$, тоді:

$$C_1 = 0{,}22 - 0{,}075 \cdot cos\frac{\pi}{6} = 0{,}16.$$

і остаточно закон зміни швидкості плити на ділянці часу $[t_1,\ t_2]$ запишеться так:

$$\dot{x}_1 = 0{,}16 + 0{,}075\, cos\frac{\pi}{6}(t-3).$$

Звідси швидкість плити в кінці другого етапу визначається так:

$$u_2 = \dot{x}_1/_{t=t_2} = 0{,}16 + 0{,}07\, cos\frac{\pi}{6}(9-3) = 0{,}16 - 0{,}075 = 0{,}085 \text{ м/с}.$$

Бачимо, що результати за методом інтегрування і знайдений із закону збереження кількості руху системи, практично співпадають, а це підтверджує правильність розв’язання задачі обома методами.

Приклад 4.2. Механічна система складається з прямокутної пластини масою $m = 5$ кг, яка може переміщуватися вздовж горизонтальних направляючих, і точок K_1 і K_2, маси яких відповідно рівні $m\ =\ 2$ кг, $m\ =\ 3$ кг (рис. 4.2). Точки переміщуються вздовж жолобів, що зроблені в плиті, згідно з заданими законами $S_1 = O_1K_1 =$ $= f_1(t), S_2 = O_2K_2 = f_2(t)$.

Нехтуючи усіма опорами руху і вважаючи, що в момент $t\ =\ 0$ до нерухомої плити приклали силу $F = F(t) = 2t$ Н, визначити на проміжку $[0, t_1]$ переміщення S плити, як функцію часу, а також його значення в момент $t\ =\ t_1$, а також швидкість плити в кінці ділянки і нормальний тиск на горизонтальні направляючі.

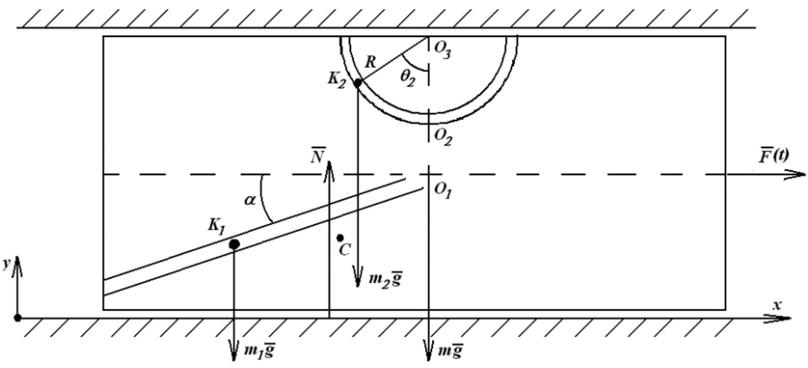

Рисунок 4.2 – Схема до прикладу 4.2

В момент часу $t = t_1$, дія сили $\bar{F}$ на плиту припинилася, але точки K_1 і K_2 продовжили свій рух. Визначити для моменту $t = t_2$ швидкість плити, якщо $t_1 = 2$ с, $t_2 = 3$ с, $f_1(t) = R\,cos\frac{\pi}{6}t$, $f_2(t) = \frac{\pi R}{6}t$, $R = 0{,}5$ м, $\alpha = 30°$.

Розв'язання.

Механічна система складається з трьох елементів і на рис. 4.2 показані її зовнішні сили: ваги плити – $m\bar{g}$, матеріальної точки K_1 – $m_1\bar{g}$, матеріальної точки K_2 – $m_2\bar{g}$, а також нормальна (вертикальна) реакція з боку направляючих на плиту. Крім того на проміжку часу $[0, t_1]$ на плиту діє задана горизонтальна сила $\bar{F}(t)$. У відповідності до умови задачі дослідження руху системи треба розбити на два етапи, на першому з яких від 0 до t_1 до плити прикладена сила $\bar{F}$, а на другому етапі від t_1 до t_2 рух продовжується завдяки отриманій в кінці першого етапу швидкості $\bar{u}_1$ плити, а також переміщенням кульок K_1 і K_{2}2 в своїх жолобах. Оберемо початок плоскої нерухомої системи координат *Oxy* так, що у початковий момент часу $t = 0$ координата x середини пластини, тобто точки O_1, була нульовою і зазначимо, що обидві матеріальні точки K_1 і K_2 будуть виконувати складний рух і усі їх кінематичні характеристики (положення швидкість і прискорення) будуть складатися з двох компонент – переносної і відносної. Оскільки в даній задачі переносний рух (рух пластини) є поступальним, то для них прискорення Коріоліса не виникає.

Перший етап. На проміжку часу $[0, t_1]$ будемо використовувати теорему про рух центру мас системи, згідно з якою точка *C* (центр мас системи) рухається як матеріальна точка, маса якої дорівнює масі усієї системи і до якої прикладені усі зовнішні сили системи. Для нашої задачі формула (5) запишеться так:

$$M\frac{d^2\bar{r}_c}{dt^2} = m\bar{g} + m_1\bar{g} + m_2\bar{g} + \bar{N} + F, \qquad (48)$$

де $M = m + m_1 + m_2$.

Рівняння (48) – це диференціальне рівняння руху центру мас системи, записане у векторній формі. При цьому положення точки *C* в довільний момент часу визначається за формулою (1).

Спроектуємо векторне рівняння (48) на показану на рис. 4.2 вісь *Ox*, будемо мати:

$$M\ddot{x}_c = F(t). \tag{49}$$

Згідно з формулою (1) абсциса центра мас знаходиться таким способом:

$$x_c = \frac{mx + m_1x_1 + m_2x_2}{m + m_1 + m_2}\,. \tag{50}$$

Увага! У цій формулі для всіх елементів системи треба брати їх координати під час абсолютного руху. Легко бачити із геометричних міркувань (дивись рис. 4.2), що такі координати кульок через координату центру плити виражаються таким чином:

$$\begin{gathered} x_1 = x - O_1K_1 \cdot cos\,\alpha = x - R \cdot cos\frac{\pi}{6}t \cdot cos\,\alpha = x - 0{,}43\,cos\frac{\pi}{6}t; \\ x_2 = x - O_3K_2 \cdot sin\,\theta_2 = x - R\,sin\,\theta_2 = x - 0{,}5\,sin\frac{\pi}{6}t. \end{gathered} \tag{51}$$

При цьому ми врахували, що:

$$\theta_2 = \frac{f_2(t)}{R} = \frac{\pi}{6}t.$$

Якщо підставити вирази для x_1 і x_2 в формулу (50) і врахувати, що $M = 5 + 2 + 3 = 10$, то будемо мати такий вираз для визначення горизонтальної координати центра мас системи в довільний момент часу:

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{1}{10}\left(10x - 0{,}86\,cos\frac{\pi}{6}t - 1{,}5\,sin\frac{\pi}{6}t\right) = \\ &= x - 0{,}086\,cos\frac{\pi}{6}t - 0{,}15\,sin\frac{\pi}{6}t. \end{aligned}$$

Диференціюючи цей вираз за часом, знаходимо швидкість центру мас системи:

$$\dot{x}_c = \dot{x} + 0{,}086\frac{\pi}{6}sin\frac{\pi}{6}t - 0{,}15\frac{\pi}{6}cos\frac{\pi}{6}t. \tag{52}$$

Диференціальне рівняння другого порядку (49) доцільно інтегрувати шляхом послідовного інтегрування двох рівнянь першого порядку, тобто за так званою двокроковою схемою, яка детально описана в методичних вказівках [3] при інтегруванні диференціальних рівнянь руху матеріальної точки. З цією метою **на першому кроці** замість рівняння (49) запишемо рівняння першого порядку відносно $\dot{x}_c$ і підставимо задану функцію $F(t)$. Будемо мати:

$$M\frac{d\dot{x}_c}{dt} = F(t), M = 10, F(t) = 2t.$$

$$\frac{d\dot{x}_c}{dt} = 0,2t, \tag{53}$$

Звідси шляхом відокремлення змінних з наступним інтегруванням знаходимо:

$$\dot{x}_c = 0,1t^2 + C_1. \tag{54}$$

Підставимо сюди вираз для $\dot{x}_c$ із (52):

$$\dot{x} + 0,086\frac{\pi}{6}sin\frac{\pi}{6}t - 0,15\frac{\pi}{6}cos\frac{\pi}{6}t = 0,1t^2 + C_1.$$

Для визначення C_1 врахуємо, що за умовою задачі в початковий момент часу $t = 0$ плита була нерухомою, а початок координат ми обирали відповідно початковому положенню центру плити, тобто початкові умови у нас записуються так:
при

$$t = 0, x = 0, \dot{x} = 0. \tag{55}$$

Тоді із другої умови (55) C_1 знаходимо так:

$$C_1 = -0,15 \cdot \frac{\pi}{6} = -0,079.$$

Тепер остаточно закон зміни швидкості центру плити на першій ділянці $[0, t_1]$ запишеться так:

$$\dot{x} = 0,1t^2 - 0,045\,sin\frac{\pi}{6}t + 0,079\,cos\frac{\pi}{6}t - 0,079. \tag{56}$$

Звідси, зокрема, знаходимо швидкість в кінці проміжку $[0,\ t_1]$, яка буде початковою для другого етапу $[t_1, t_2]$. Будемо мати:

$$u_1 = \dot{x}/_{t=t_1} = 0,1 \cdot 4 - 0,045 \cdot 0,86 + 0,079 \cdot 0,5 - 0,079 = 0,32 \text{ м/с}.$$

Для виконання **другого кроку** інтегрування диференціального рівняння (49) перепишемо залежність (56) з врахуванням того, що
$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$:

$$\frac{dx}{dt} = 0{,}1t^2 - 0{,}045\,sin\frac{\pi}{6}t + 0{,}079\,cos\frac{\pi}{6}t - 0{,}079.$$

Відокремимо змінні і про інтегруємо обидві частини:

$$\int dx = 0{,}1\int t^2dt - 0{,}045\int sin\frac{\pi}{6}tdt +$$

$$+0{,}079\int cos\frac{\pi}{6}tdt - 0{,}079\int dt\,;$$

$$x = 0{,}1\frac{t^3}{3} + 0{,}045\frac{6}{\pi}cos\frac{\pi}{6}t + 0{,}079\frac{6}{\pi}sin\frac{\pi}{6}t - 0{,}079t + C_2.$$

З першої умови в (55) знаходимо C_2:

$$C_2 = -\frac{0{,}27}{\pi} = -0{,}09.$$

Тоді остаточно закон руху центру плити на першій ділянці запишеться так:

$$x = 0{,}03t^3 - 0{,}08t + 0{,}09\,cos\frac{\pi}{6}t + 0{,}16\,sin\frac{\pi}{6}t - 0{,}09. \quad (57)$$

Звідси знаходимо переміщення центру плити за проміжок часу $[0, t_1]$:

$$S_1 = x/_{t=t_1} = 0{,}03 \cdot 8 - 0{,}08 \cdot 2 + 0{,}09 \cdot 0{,}5 + 0{,}16 \cdot 0{,}86 - 0{,}09 =$$

$$= 0{,}18 \text{ м.}$$

Увага! Використовуючи формули (51) і (57), можемо знайти в довільний момент часу із проміжку $[0,\ t_1]$ абсолютні переміщення кожної з кульок K_1 і K_2.

Щоб знайти нормальний тиск, який рівний нормальній реакції з боку направляючих, але направлений в протилежний бік, спроектуємо векторне диференціальне рівняння руху центра мас системи (48) на вісь Oy. Будемо мати:

$$M\ddot{y}_c = -mg - m_1g - m_2g + N.$$

Звідси знаходимо:

$$N = M(g + \ddot{y}_c). \quad (58)$$

Згідно з формулою (1) ордината центра мас системи знаходиться за формулою:

$$y_c = \frac{my + m_1 y_1 + m_2 y_2}{m + m_1 + m_2}. \qquad (59)$$

Виразимо подібно до (51) ординати точок K_1 і K_2 через ординату центра плити:

$$y_1 = y - O_1K_1 \cdot sin\,\alpha = y - R\,cos\frac{\pi}{6}t \cdot sin\,\alpha;$$

$$y_2 = y + y - O_2K_2 \cdot cos\,\theta_2 = 2y - R\,cos\tfrac{\pi}{6}t. \qquad (60)$$

Оскільки $y = const$, то підставляючи (60) в (59) і диференціюючи, отримаємо:

$$\ddot{y}_c = \frac{1}{M}\left(m_1 R\frac{\pi^2}{6^2}cos\frac{\pi}{6}t \cdot sin\,\alpha + m_2 R\frac{\pi^2}{6^2}cos\frac{\pi}{6}t\right) =$$

$$= 0{,}1\left(0{,}13\,cos\frac{\pi}{6}t + 0{,}39\,cos\frac{\pi}{6}t\right) = 0{,}05\,cos\frac{\pi}{6}t.$$

Зокрема, в момент часу $t_1 = 2\ c$ будемо мати:

$$\ddot{y}_c = 0{,}025\frac{м}{c^2}.$$

Тоді із формули (58) знаходимо:

$$M = 10(9{,}81 + 0{,}025) = 98{,}35\ H.$$

Другий етап. На проміжку часу $[t_1,\ t_2]$ відсутня горизонтальна сила $\bar{F}$ і тоді виконується умова:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx}^{e} = 0.$$

Згідно з формулою (4) на цьому проміжку часу виконується закон збереження кількості руху системи у вигляді:

$$Q_x^{(1)} = Q_x^{(2)}. \qquad (61)$$

В обох положеннях кількість руху системи обчислюється за формулою:

$$\bar{Q} = m\bar{u} + m_1\bar{V}_1 + m_2\bar{V}_2.$$

І з використанням теореми про додавання швидкостей приходимо до формули:

$$\bar{Q} = (m + m_1 + m_2)\bar{u} + m_1\bar{V}_{r1} + m_2\bar{V}_{r2}. \qquad (62)$$

Для визначення $Q_x^{(1)}$ і $Q_x^{(2)}$ за цією формулою необхідно показати вектори $\bar{V}_{r1}$ і $\bar{V}_{r2}$ і положення точок K_1 і K_2 для моментів часу $t_1 = 2$ с і $t_2 = 3$ с. Оскільки закон руху першої кульки K_1 задається формулою:

$$O_1K_1 = R\,cos\frac{\pi}{6}t,$$

тоді

$$V_{r1} = -R\frac{\pi}{6}sin\frac{\pi}{6}t.$$

З цих двох формул бачимо наступне:
при $t = 0$, $O_1K_1 = R \cdot cos\,0 = R$, точка знаходиться в положенні K_0 і має нульову швидкість, оскільки $V_{r1} = -\frac{\pi R}{6}sin\,0 = 0$ (рис. 4.3);
при $t_1 = 2c$, $O_1K_1 = R \cdot cos\frac{\pi}{3} = 0{,}5R$.

$$V_{r1} = -R\frac{\pi}{6}sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{12} \cdot 0{,}86 = -0{,}225 \text{ м/с}.$$

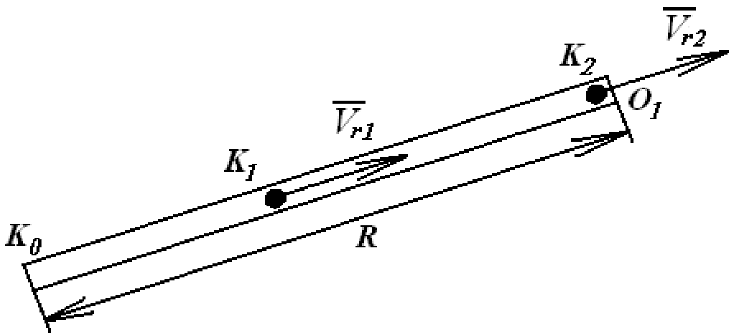

Рисунок 4.3 – Рух кульки K_1 в жолобі

Знак мінус означає, що точка K_1 рухається вгору, оскільки на рис. 4.2 точка K_1 показана в додатному напрямку відліку відносної координати кульки в жолобі (рис. 4.3).

При $t_1 = 3\ c,\ O_1K_1 = R \cdot cos\frac{\pi}{2} = 0.$

$$V_{r1} = -\frac{\pi}{12} sin\frac{\pi}{2} = -0{,}27\ \text{м/с}.$$

Аналогічно визначаємо положення і відносну швидкість кульки K_2 (рис. 4.4).

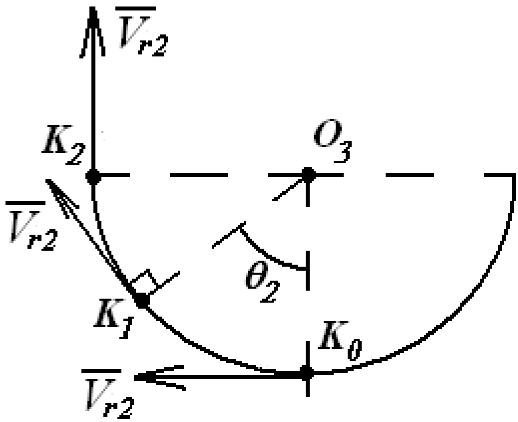

Рисунок 4.4 – Рух кульки K_2

Оскільки $\theta_2 = \frac{\pi}{6} t$ і

$$V_{r2} = R \cdot \frac{d\theta_2}{dt} = \frac{\pi}{6} R = \frac{\pi}{12} = 0{,}27\ \text{м/с}.$$

Звідси випливає, що у всіх трьох положеннях точки модуль відносної швидкості кульки K_2 однаковий, а напрямки показані на рис. 4.4, оскільки:

$$\begin{gathered} \text{при } t = 0, \theta_2 = 0; \\ \text{при } t_1 = 2\ c, \theta_2 = \frac{\pi}{3} = 60°; \\ \text{при } t_1 = 3\ c, \theta_2 = \frac{\pi}{2} = 90°. \end{gathered} \tag{62}$$

Тоді виходячи із (62) і враховуючи, що $u_1 = 0{,}32$ м/с знаходимо $Q_x^{(1)}$ і Q_x^2 так:

$$Q_x^{(1)} = Mu_1 + m_1|V_{r1}|\,cos\,\alpha - m_2|V_{r2}| \cdot cos\,\theta_2 =$$

$$= 10 \cdot 0{,}32 + 2 \cdot 0{,}225 \cdot 0{,}86 - 3 \cdot 0{,}27 \cdot 0{,}5 = 3{,}17\ \text{Н} \cdot \text{с};$$

$$Q_x^2 = Mu_2 + m_1|V_{r1}|\,cos\,\alpha - m_2|V_{r2}| \cdot cos\,90\,° =$$

$$= 10u_2 + 2 \cdot 0{,}27 \cdot 0{,}86 = 10u_2 + 0{,}46.$$

Згідно з формулою (61) приходимо до такого рівняння для визначення швидкості центру плити в кінці проміжку часу $[t_1,\ t_2]$:

$$10u_2 + 0{,}46 = 3{,}17.$$

Звідси знаходимо:

$$u_2 = \frac{3{,}17 - 0{,}46}{10} = 0{,}27\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Увага! Порівнюючи u_1 і u_2, бачимо, що при відсутності зовнішньої сили за рахунок руху кульок, при цьому у різних напрямках (K_1– вправо, а K_2 – вліво і вгору) швидкість плити змінилась (зменшилась) більш ніж на 15%.

Увага! Для порівняння різних підходів і взаємної **перевірки** визначимо швидкість u_2 не за допомогою закону збереження кількості руху системи, а шляхом використання на другій ділянці диференціального рівняння руху центра мас (тобто, як і на першій ділянці використаємо метод інтегрування.

Враховуючи, що на проміжку $[t_1,\ t_2]$ відсутня сила $F(t)$, замість рівняння (53) будемо мати таке:

$$\frac{d\dot{x}_c}{dt} = 0.$$

Звідси знаходимо:

$$\dot{x}_c = C_1.$$

Підставимо сюди вираз для $\dot{x}_c$ із (52):

$$\dot{x} + 0{,}086\,\frac{\pi}{6}\,sin\,\frac{\pi}{6}\,t - 0{,}15\,\frac{\pi}{6}\,cos\,\frac{\pi}{6}\,t = C_1.$$

Враховуючи, що при $t = t_2 = 2c, \dot{x} = 0{,}32$ знаходимо C_1 так:

$$C_1 = 0{,}32 + 0{,}04 - 0{,}038 = 0{,}32.$$

Остаточно зміна швидкості центру плити на проміжку $[t_1,\ t_2]$ описується таким законом:

$$\dot{x} = 0{,}32 - 0{,}045\, sin\frac{\pi}{6}t + 0{,}075\, cos\frac{\pi}{6}t.$$

Звідси знаходимо:

$$u_2 = \dot{x}/_{t_2=3} = 0{,}32 - 0{,}045\, sin\frac{\pi}{2} + 0{,}075\, cos\frac{\pi}{2} = 0{,}275 \text{ м/с}.$$

Бачимо, що результат практично співпадає з отриманим вище з використанням закону збереження і цей збіг є перевіркою правильності розв'язання задачі обома методами.

5 ПРИКЛАДИ РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ІЗ МІНІ КОНТРОЛЬНОЇ Д-8 «ТЕОРЕМА ПРО ЗМІНУ КІНЕТИЧНОГО МОМЕНТУ СИСТЕМИ ВІДНОСНО ОСІ»

Приклад 5.1. Механічна система складається із однорідної прямокутної платформи і матеріальної точки D, яка може переміщуватися в жолобі, зробленому в пластині (рис. 5.1). Маса платформи $m_1 = 20$ кг, маса кульки $m_2 = 5$ кг. Розміри пластини $a = 1$ м, $b = 0{,}8$ м, відстань $OC\ =\ 0{,}2$ м.

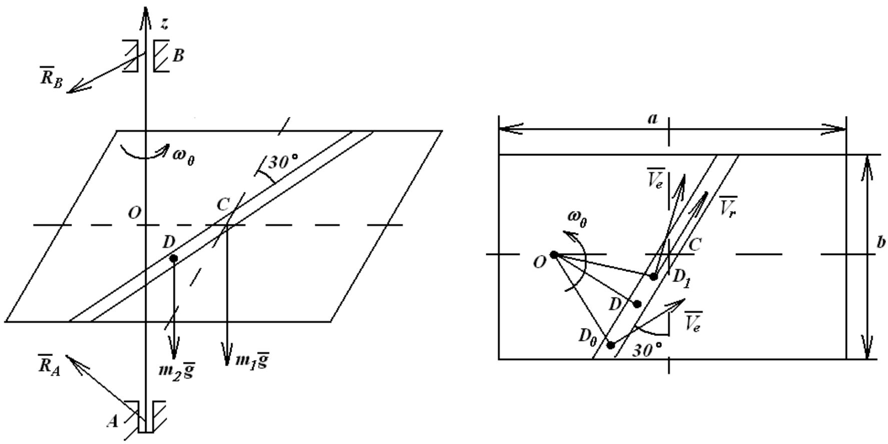

Рисунок 5.1 – Схеми до прикладу 5.1

Точка може рухатися по жолобу згідно з законом $CD = 0{,}4\,cos\frac{\pi}{6}t$. В початковий момент часу $t = 0$ платформа обертається з кутовою швидкістю $\omega_o = 4c^{-1}$, навколо вертикальної осі, що проходить через точку O перпендикулярно до площини платформи (рис. 5.1). Визначити кутову швидкість платформи в момент часу $t_1 = 2$ с.

Розв’язання.

1. Будемо розглядати пластину і кульку як елементи однієї механічної системи і покажемо зовнішні сили такої системи. Якщо не враховувати опір обертанню в підшипнику і підп’ятнику, то крім реакцій в точках кріплення осі обертання такими силами будуть вага пластини $m_1\bar{g}$і вага кульки $m_2\bar{g}$. Сили реакції перетинають вісь обертання і не створюють моментів відносно цієї осі, а сили ваги

паралельні цій осі і також не дають моментів відносно осі Oz, тобто, під час усього руху (обертання) нашої системи виконується умова:

$$\sum_{k=1}^{n} m_z(\bar{F}_k^e) = 0,$$

тобто у нас виконується закон збереження кінетичного моменту відносно осі (9), який в даній задачі приводить до такої робочої формули:

$$K_z^{(0)} = K_z^{(1)}. \qquad (63)$$

2. Для реалізації цієї формули треба обчислити для кожного з двох моментів часу кінетичний момент системи за формулою:

$$K_z = K_z^{пл} + K_z^T, \qquad (64)$$

при цьому згідно з формулою для кінетичного моменту твердого тіла, що обертається, можемо записати:

$$K_z^{пл} = I_z^{пл} \cdot \omega. \qquad (65)$$

Зазначимо, що $I_z^{пл}$ з використанням теореми Гюйгенса-Штейнера (15) і формули (14) в нашій задачі знаходиться так:

$$I_z^{пл} = I_{zc} + m_1 \cdot OC2 = \frac{m_1(a^2 + в^2)}{12} +$$

$$+m_1 OC^2 = 20\left(\frac{1^2 + 0,8^2}{12} + 0,2^2\right) = 3{,}6 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

3. При знаходженні кінетичного моменту кульки необхідно враховувати, що вона виконує складний рух (обертається разом з пластиною і одночасно рухається по ній і нам треба брати для обчислення кінетичного моменту її абсолютну швидкість, яка знаходиться за теоремою про додавання швидкостей. Тоді приходимо до такої формули:

$$K_z^T = m_z(m_2\bar{V}_a) = m_o(m_2\bar{V}_e) + m_o(m_2\bar{V}_r), \qquad (66)$$

де $\bar{V}_e$ – переносна швидкість, яка завжди направлена перпендикулярно до відрізку, який з'єднує кульки в її даному положенні з точкою O, у бік, який визначається напрямком кутової швидкості ω,

$\bar{V}_r$ – відносна швидкість, яка завжди направлена по дотичній до траєкторії відносного руху точки, а саме в який бік визначається після диференціювання за часом закону відносного руху і підставлення в отриману похідну замість t конкретного значення t_0 або t_1.

4. Для визначення величини і напрямку переносної і відносної швидкості в кожен з двох моментів часу t_0 і $t_1 = 2$ с спочатку знайдемо де саме знаходиться кулька в ці моменти.

При $t = 0$ $CD_0 = 0{,}4 \cdot cos\frac{\pi}{6} \cdot 0 = 0{,}4$ м.

Позначаємо, це положення на рис. 5.1 як точку D_0, і з'єднуємо точки O і D_0, тоді початкова переносна швидкість направлена перпендикулярно до OD_0 вгору, а її величина знаходиться так:
при $t = 0, V_e = OD_0 \cdot \omega_0$.

Для знаходження OD_0 використаємо теорему косинусу:

$$OD_0 = \sqrt{OC^2 + CD_0^2 - 2OC \cdot CD_0 \cdot cos\,60°} =$$

$$= \sqrt{0,2^2 + 0,4^2 - 2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5} = 0{,}34 \text{ м.}$$

Тепер знаходимо:

$$V_e = 0{,}34 \cdot 4 = 1{,}36 \text{ м/с;}$$

при $t = 0$ $V_r = \frac{dCD}{dt}/_{t=0} = -0{,}4\frac{\pi}{6} \cdot sin\frac{\pi}{6}t/_0 = 0$.

Аналогічно для моменту $t = t_1 = 2$ с будемо мати:
при $t_1 = 2c, CD_1 = 0{,}4 \cdot cos\frac{\pi}{6} \cdot 2 = 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}2$ м.

Показуємо на рис. 5.1 точку D_1 і вектор $\bar{V}_e$.

$$OD_1 = \sqrt{OC^2 + CD_1^2 - 2 \cdot OC \cdot CD_1 \cdot cos\,60°} =$$

$$= \sqrt{0,2^2 + 0,2^2 - 2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}5} = 0{,}2 \text{ м.}$$

$$\bar{V}_e = OD_1 \cdot \omega_0 = 0{,}2 \cdot 4 = 0{,}8 \text{ м/с.}$$

При $t_1 = 2\ c$, $V_r = \frac{dCD}{dt}/_{t=2} = -0{,}4 \cdot \frac{\pi}{6} \cdot sin\frac{\pi}{3} =$

$$= -\frac{0{,}4\pi}{6} \cdot 0{,}86 = -0{,}18 \text{ м/с.}$$

Знак мінус тут означає, що точка рухається по жолобу вгору, оскільки за умовою на рис. 5.1 точкою D без індексу позначено додатній напрямок відліку дугової координати, крім того це видно із положення одне відносно одної точок D_0 і D_1.

5. Тепер можемо визначити $K_Z^{(0)}$ і $K_Z^{(1)}$ таким чином:

$$K_Z^{(0)} = I_Z^{пл} \cdot \omega_0 + m_z(m_2\bar{V}_e) + m_z\big(m_2 \ \ \bar{V}_r\big) =$$

$$3{,}6 \cdot 4 + m_2 \cdot V_e \cdot OD_o = 14{,}4 + m_2 \cdot OD_o^2 \cdot \omega_o =$$

$$= 14{,}4 + 5 \cdot 0{,}34^2 \cdot 4 = 4{,}15 \cdot \omega_o = 16{,}6 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}.$$

$$K_Z^{(1)} = I_z^{пл} \cdot \omega_1 + m_z(m_2\bar{V}_e) + m_z(m_2\bar{V}_r).$$

Тут необхідно спочатку знайти плече вектора $\bar{V}_r$, який направлений вздовж жолоба, відносно точки O, тобто опустити із O перпендикуляр на DC, тоді із прямокутного трикутника ODC маємо:

$$h = OD = OC \cdot sin\, 6\, 0^o = 0{,}2 \cdot 0{,}86 = 0{,}17 \text{ м};$$

$$K_Z^{(1)} = 3{,}6 \cdot \omega_1 + m_2 \cdot OD_1^2 \cdot \omega_1 + m_2 \cdot |\bar{V}_r| \cdot OD = 3{,}8 \cdot \omega_1 + 0{,}15.$$

6. Робоча формула (63) приймає такий вигляд:

$$16{,}6 \ = \ 3{,}8\omega_1 + 0{,}15.$$

Звідси знаходимо:

$$\omega_1 = \frac{16{,}6 - 0{,}15}{3{,}8} = 4{,}3\ c^{-1}.$$

З механічної точки зору зростання кутової швидкості викликане тим, що в положенні D_1 кулька стала значно ближчою до точки O, її момент інерції зменшився, а відносна швидкість, яка була нульовою в точці D_0, в точці D_1 мала за модулем, це привело до того, що приведений момент інерції система пластина-кулька при $t = 0$ був $4{,}15 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, а при $t_1 = 2\ c$ цей момент інерції суттєво менший – $3{,}8 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

Приклад 5.2. Кругла однорідна пластина масою $m_1 = 20$ кг і радіусом $R = 2$ м обертається навколо вертикальної осі, яка перпендикулярна до площини пластини, і проходить через точку O, з кутовою швидкістю $\omega_0 = 2\ c^{-1}$. В пластині зроблено прямолінійний жолоб, вздовж якого в момент часу $t = 0$ починає рухатися кулька масою $m_2 = 5$ кг згідно з законом $AD = 0{,}4(2 - t^2)$ м (рис. 5.2). Визначити кутову швидкість пластини в момент часу $t_1 = 2\ c$, якщо $OC = 0{,}5\ R$.

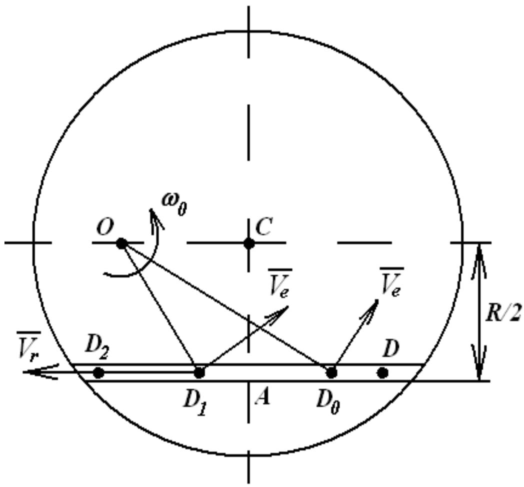

Рисунок 5.2 – Схема до прикладу 5.2

Розв'язання.

1. Легко бачити, що як і у попередній задачі для механічної системи, яка складається із пластини і кульки, сума моментів усіх зовнішніх сил відносно осі Oz, яка є вертикальною, дорівнює нулю, тобто виконується умова закону збереження кінетичного моменту, відносно цієї осі і ми приходимо до робочої формули (63).

Увага! На відміну від рис. 5.1 в даній і в усіх наступних задачах і *РГЗ D*-8 достатньо показувати на рис. 5.2 і наступних рисунках лише вид з додатного напрямку осі Oz.

2. Кінетичний момент системи знаходиться в довільний момент часу за формулою (64), при цьому для пластини використовуємо формулу (65), з якої знаходимо:

при $t = 0$:

$$\overset{пл}{K_z} = I_z\omega_0 = \left(\frac{1}{2}m_1R^2 + m_1OC^2\right)\cdot\omega_0 =$$

$$= 20(2+1)\cdot 2 = 120\, H\cdot \text{м}\cdot c;$$

при $t = t_1$:

$$K_Z^{пл} = 60\cdot\omega_1.$$

3. Кінетичний момент кульки знаходиться за формулою (66), при цьому треба спочатку визначити для кожного моменту часу t_0 і t_1 положення точки, а також її переносну і відносну швидкість.

4. Виходимо із закону відносного руху точки в жолобі $AD = 0{,}4(2 - t^2)$, тоді будемо мати: при $t = 0$ $AD_0 = 0{,}4\cdot 2 = 0{,}8$ м, і оскільки на рисунку за допомогою точки D без індексу вказано додатний напрямок відліку відносної координати, то звідси робимо висновок, що точка D_0 знаходиться правіше від точки A.

При $t = 0$:

$$V_r = \frac{dAD}{dt}/_{t=0} = -0{,}8t/_{t=0} = 0.$$

Тобто, в момент часу $t = 0$ відносна швидкість кульки дорівнює нулю і її абсолютна швидкість співпадає з переносною $\bar{V}_e$, яка направлена перпендикулярно до відрізку OD_0 у бік, що визначається напрямком ω_o (рис. 5.2). За модулем ця швидкість знаходиться так:

$$V_e = OD_0\cdot\omega_0.$$

OD_0 знаходимо за теоремою Піфагора:

$$OD_0 = \sqrt{(OC + AD_0)^2 + \frac{R^2}{4}} = \sqrt{(1+0{,}8)^2 + 1} = 2{,}06 \text{ м}.$$

Тоді $V_e = 2{,}06\cdot 2 = 4{,}12$ м/с, а при $t_1 = 2c$:

$$AD_1 = 0{,}4(2-4) = -0{,}8 \text{ м}.$$

Знак мінус тут означає, що точка D_1 знаходиться лівіше від точки A (рис. 5.2), тоді:

$$OD_1 = \sqrt{(OC - AD_1)^2 + \frac{R^2}{4}} = \sqrt{(1 - 0{,}8)^2 + 1} = 1{,}02 \text{ м};$$

$$V_e = 1{,}02 \cdot \omega_1;$$

при $t_1 = 2c$:

$$V_r = \frac{dAD}{dt}/_{t=2} = -0{,}8t/_{t=2} = -1{,}6 \text{ м/с}.$$

Знак мінус тут означає, що вектор $\bar{V}_r$ в точці D_1 направлений вліво (рис. 5.2).

5. Тепер за формулою (64) знаходимо $K_z^{(0)}$ і $K_z^{(1)}$ так:

$$K_z^{(0)} = I_z \cdot \omega_0 + m_z(m_2\bar{V}_e) + m_z(m_2\bar{V}_r) =$$

$$= 120 + m_2 \cdot V_e \cdot OD_0 = 120 + 5 \cdot 4{,}12 \cdot 2{,}06 = 162{,}4 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с};$$

$$K_z^{(1)} = I_z \cdot \omega_1 + m_2(m_2\bar{V}_e) + m_z(m_2\bar{V}_r) =$$

$$= 60 \cdot \omega_1 + m_2\bar{V}_e \cdot OD_1 - m_2V_r \cdot 0{,}5R = 65{,}2 \cdot \omega_1 - 8.$$

6. Робоча формула (63) приймає такий вигляд:

$$162{,}4 = 65{,}2 \cdot \omega_1 - 8.$$

Звідси знаходимо:

$$\omega_1 = \frac{162{,}4 + 8}{65{,}2} = 2{,}6\, c^{-1}.$$

Увага! Збільшення кутової швидкості на 30% викликано двома факторами: 1) точка D_1 знаходиться значно ближче до точки O ніж точка D_0, що суттєво зменшило момент інерції системи в цілому; 2) відносна швидкість кульки направлена протилежно обертанню пластини, що також збільшило кутову швидкість.

Приклад 5.3. Однорідна прямокутна пластина масою $m_1 = 20$ кг і розмірами $2a = 3$ м, $2b = 2$ м обертається навколо вертикальної осі, яка перпендикулярна до площини пластини і проходить через точку O, з кутовою швидкістю $\omega_0 = 2c^{-1}$. В пластинці зроблено жолоб у вигляді кола з радіусом $r = 0{,}5$ м, вздовж якого може рухатися кулька масою $m_2 = 5$ кг згідно до закону $AD = \frac{\pi r}{6}\left(\frac{t^2}{2} - 1\right)$ м, $OC = 1{,}2$ м (рис. 5.3).

Визначити, якою стане кутова швидкість пластини в момент часу $t_1 = 2$ с, якщо в початковий момент часу $t = 0$ кулька розпочала свій рух в жолобі, при цьому точка D без індексу вказує додатній напрямок відліку відносної координати.

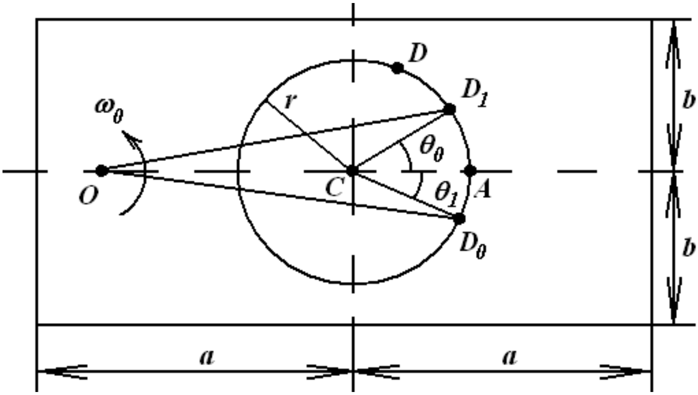

Рисунок 5.3 – Схема до прикладу 5.3

Розв’язання.

1. Звернемо увагу на те, що на відміну від двох попередніх прикладів в даному випадку відносний рух кульки є криволінійним і тому доцільно ввести для показу положень кульки центральний кут θ, який її радіус вектор відносно центру кола утворює з горизонтальною прямою CA за відомою формулою елементарної геометрії:

$$\theta = \frac{AD}{r} = \frac{\pi}{6}\left(\frac{t^2}{2} - 1\right).$$

Зрозуміло, що моменти зовнішніх сил відносно осі Oz дорівнюють нулю, і робоча формула задачі записується у вигляді (63).

2. Особливості даної задачі полягають у способах обчислення кінетичних моментів для моментів часу $t = 0$ і $t_1 = 2$ с. Для наочності зробимо додатковий рис. 5.4.

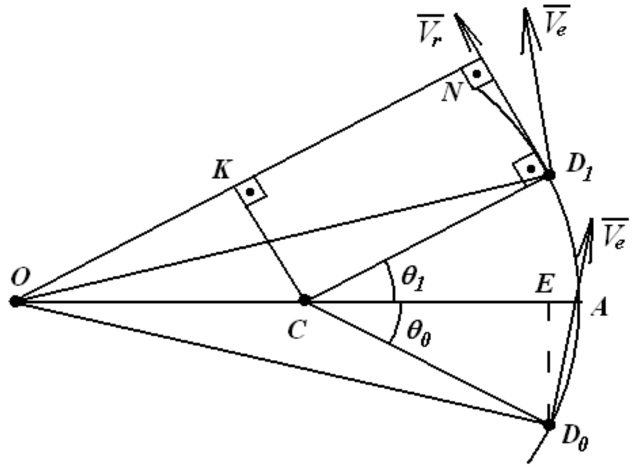

Рисунок 5.4 – Способи обчислення кінетичних моментів

Визначимо положення і швидкості кульки для кожного з двох моментів часу.

При $t = 0$, $\theta_0 = -\frac{\pi}{6}$. Знак мінус тут означає, що точка D_0 знаходиться нижче від точки A.

При $t_1 = 2$, с $\theta_0 = \frac{\pi}{6}$. Точка D_1 знаходиться симетрично відносно D_0 вище від точки A (рис. 5.4). Відстані $OD_0 = OD_1$ знаходяться з ΔOED_0:

$$OD_0 = \sqrt{(OC + r\,cos\,30°)^2 + (r\,sin\,30°)^2} =$$

$$= \sqrt{(1{,}2 + 0{,}5 \cdot 0{,}86)^2 + (0{,}25)^2} = 1{,}65 \text{ м}.$$

Переносна швидкість в обох положеннях знаходиться за формулою:

$$V_e = h\omega.$$

Тоді, при $t = 0$, $V_e = OD_0 \cdot \omega_0 = 1{,}65 \cdot 2 = 3{,}3$ м/с;
при $t = 2\ c$, $V_e = OD_1 \cdot \omega_1 = 1{,}65 \cdot \omega_1$.

Відносна швидкість знаходиться за формулою:

$$V_r = r \cdot \frac{d\theta}{dt} = r \cdot \frac{\pi}{6} t = \frac{\pi}{12} t.$$

Тоді при $t = 0,\ V_r = 0$;

при $t_1 = 2\ c, \quad V_r = \frac{\pi}{6} = 0{,}53$ м/с.

Для обчислення $m_z(m_2\bar{V}_r)$ треба знайти плече вектора $\bar{V}_r$ в точці D_1 відносно точки O. Якщо врахувати, що $\bar{V}_r$ перпендикулярний до відрізку CD_1, то стає очевидним, що плече ON паралельне відрізку CD_1, тобто $\angle COK = 30°$, тоді:

$$ON = OK + KN = OC \cdot cos\,30\,° + r = 1{,}2 \cdot 0{,}86 + 0{,}5 = 1{,}53 \text{ м.}$$

3. Тепер знаходимо $K_z^{(0)}$ і $K_z^{(1)}$:

$$K_z^{(0)} = I_z \cdot \omega_0 + m_z(m_2\bar{V}_e) + m_z(m_2\bar{V}_r) =$$

$$= m_1\left(\frac{a^2 + b^2}{3} + OC^2\right) \cdot \omega_0 + m_2 \cdot OD_0 \cdot \bar{V}_e =$$

$$= 50{,}4 \cdot 2 + 5 \cdot 1{,}65 \cdot 3{,}3 = 128\,H \cdot \text{м} \cdot \text{с.}$$

$$K_z^{(1)} = I_z \cdot \omega_1 + m_z(m_2\bar{V}_e) + m_z(m_2\bar{V}_r) =$$

$$= 50{,}4 \cdot \omega_1 + 5 \cdot 1{,}65^2 \cdot \omega_1 + 5 \cdot 1{,}53 \cdot 0{,}53 = 63{,}4\omega_1 + 4{,}05.$$

4. Робоча формула (63) приймає такий вигляд:

$$128 \ = \ 63{,}4\omega 1 \ + \ 4{,}05.$$

Звідси знаходимо:

$$\omega_1 = \frac{128 - 4{,}05}{63{,}4} = 1{,}9\ c^{-1}.$$

Увага! Незначне зменшення кутової швидкості пояснюється тим, що відстань від кульки до осі обертання (до точки *O*) в положеннях D_0 і D_1 однакова, а це означає, що момент інерції системи пластина-кулька не змінився, а кількість відносного руху кульки m_2V_r порівняно мала, і її момент лише 4,05 Н · м · с.

Приклад 5.4. Кругла пластина, масою $m_1 = 20$ кг і радіуса $R = 1$ м обертається навколо вертикальної осі, яка перпендикулярна до площини пластини і проходить через точку *O*, з кутовою швидкістю $\omega_0 = 2\ c^{-1}$. По ободу пластини рухається кулька масою $m_2 = 5$ кг згідно до закону $AD = \frac{\pi R}{4}(t^2 + 1)$.

Визначити, якою стане кутова швидкість пластини в момент часу $t_1 = 2$ с, якщо в початковий момент часу $t = 0$ кулька розпочала свій рух, при цьому $OC = 0{,}8R$ і на рис. 5.5 точка D без індексу вказує додатній напрямок відліку відносної координати.

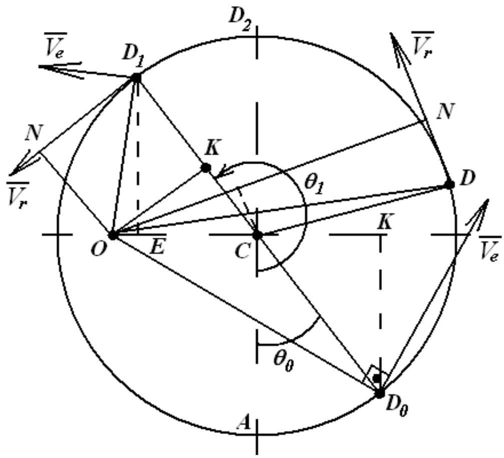

Рисунок 5.5 – Схема до прикладу 5.4

Розв'язання.

1. Повторюючи загальні міркування трьох попередніх прикладів, приходимо до робочої формули (63).

Оскільки траєкторією відносного руху кульки, як і у прикладі 3, є дуга кола, то доцільно ввести кутову координату θ, яка визначається в даній задачі так:

$$\theta = \frac{AD}{R} = \frac{\pi}{4}(t^2 + 1).$$

2. Для використання формули (63) визначимо положення кульки і її швидкості для початкового і кінцевого положень точки:
при $t = 0$, $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$.

$$V_r = R \cdot \frac{d\theta}{dt}/_{t=0} = 1 \cdot \frac{\pi}{2} t/_{t=0} = 0;$$

$$V_e = OD_0 \cdot \omega_0.$$

$$OD_0 = \sqrt{OK^2 + KD_0^2} = \sqrt{(OC + R\,sin\,\theta_0)^2 + R^2\,cos^2\,\theta_0} =$$

$$= \sqrt{(0{,}8 + 0{,}7)^2 + 0{,}7^2} = \ 1{,}66 \text{ м};$$

$$V_e = 1{,}66 \cdot 2 - 3{,}32 \text{ м/с};$$

при $t_1 = 2\ c,\ \theta = \frac{\pi}{4}(4 + 1) = \frac{5}{4}\pi.$

$$V_r = 1 \cdot \frac{\pi}{2} t /_{t_1=2} = \pi = 3{,}14 \text{ м/с};$$

$$V_e = OD_1 \cdot \omega_1.$$

$$OD_1 = \sqrt{OE^2 + ED_1^2} = \sqrt{(OC - R\,cos\,4\,5^o)^2 + (R\,sin\,4\,5^o)^2}$$

$$= \sqrt{(0{,}8 - 0{,}7)^2 + 0{,}7^2} = \ 0{,}71 \text{ м};$$

$$V_e = 0{,}71 \cdot \omega_1.$$

3. Додатково треба методами геометрії визначити плече вектора $\bar{V}_r$ відносно точки *O*. Зазначимо, що відрізок ON паралельний відрізку CD_1 (вони обидва перпендикулярні до вектора $\bar{V}_r$). Із рис. 5.5 видно, що:

$$ON = OK = R - OC \cdot cos\,45\,° = 1 - 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}44 \text{ м}.$$

4. Тепер знаходимо $K_z^{(0)}$ і $K_z^{(1)}$:

$$K_z^{(0)} = I_z \cdot \omega_0 + m_z(m_2\bar{V}_e) = m_1\left(\frac{1}{2}R^2 + OC^2\right) \cdot \omega_0 + m_2 \cdot OD_0^2 \cdot \omega_0 =$$

$$= (10 + 20 \cdot 0{,}64) \cdot 2 + 5 \cdot 1{,}66^2 \cdot 2 = 75{,}2 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с};$$

$$K_z^{(1)} = I_z \cdot \omega_1 + m_Z(m_2\bar{V}_e) + m_z(m_2\bar{V}_r) =$$

$$= 22{,}8 \cdot \omega_1 + 5 \cdot 0{,}71^2 \cdot \omega_1 + 5 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}44 = 25{,}3\omega_1 + 6{,}9.$$

5. Із формули (63) знаходимо ω_1 так:

$$75{,}2 = 25{,}3\omega_1 + 6{,}9;$$

$$\omega_1 = \frac{75{,}2 - 6{,}9}{25{,}3} = 2{,}7\ c^{-1}.$$

Увага! Кутова швидкість помітно зросла внаслідок того, що кулька перейшла із положення D_0, в якому у неї був момент інерції відносно осі Oz $14{,}8\ \text{кг} \cdot \text{м}^2$ в положення D_1, де внаслідок суттєвого зменшення відстані до точки O момент інерції став рівним $2{,}5\ \text{кг} \cdot \text{м}^2$. Крім того $m_z(m\bar{V}_r)$ в положенні D_1 становить $6{,}9\ \text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$.

6 ПРИКЛАДИ ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОГО ЗАВДАННЯ Д-8 «ВИКОРИСТАННЯ ТЕОРЕМИ ПРО ЗМІНУ КІНЕТИЧНОГО МОМЕНТУ СИСТЕМИ ДЛЯ ВИВЧЕННЯ ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ»

Увага! На відміну від прикладів з мініконтрольної роботи для тих же чотирьох механічних систем і при тих же розмірах, масах і законах рухів кульок по пластині в РГЗ треба буде проаналізувати обертальний рух на двох етапах: на першому проміжку часу $[0, t_1]$ на пластину діє заданий обертальний момент $M = M(t)$ і треба буде визначити ω_1 в кінці цього проміжку; на другому етапі $[t_1,\ t_2]$ дія моменту M закінчується, але кулька продовжує свій відносний рух по пластині і треба визначити кутову швидкість в кінці цього проміжку ω_2.

Приклад 6.1. Однорідна пластина з жолобом, в якому рухається кулька (рис. 5.1) обертається з кутовою швидкістю ω_0. В момент часу $t = 0$ до неї приклали пару з моментом $M = M(t) = 4t + 2$. Дія пари сил припинилася в момент часу $t_1 = 2$ с. Після цього рух кульки в жолобі продовжився згідно із заданим законом. Визначити кутову швидкість платформи в моменти t_1 і $t_2\ =\ 4\ c$

Розв’язання.

1. Перший етап (проміжок часу $[0, t_1]$). На цьому етапі треба використовувати теорему про зміну кінетичного моменту відносно осі Oz у вигляді:

$$\frac{dK_Z}{dt} = M(t). \tag{67}$$

При цьому Kz обчислюється за формулою (64) з використанням формули (65) і (66).

Увага! Головна складність в розв’язанні задачі на даному етапі полягає в тому, що на відміну від аналогічного прикладу в *МК D-8* тут треба визначати плечі векторів $\bar{V}_e$ і $\bar{V}_r$ відносно точки *O* не як числа, а як функції від часу.

2. Із рис. 5.1 видно, що в довільний момент часу відстань від точки *O* до кульки (довільної точки жолоба) визначається так:

$$OD = \sqrt{OC^2 + CD^2 - 2OC \cdot CD \cdot cos\, 60°} =$$
$$= \sqrt{0,2^2 + 0,4^2\, cos^2 \frac{\pi}{6} t - 2 \cdot 0,2 \cdot 0,4\, cos \frac{\pi}{6} t \cdot 0,5} =$$
$$= \sqrt{0,04 + 0,16\, cos^2 \frac{\pi}{6} t - 0,08\, cos \frac{\pi}{6} t.}$$

Плече вектора $\bar{V}_r$ відносно точки O не залежить від положення кульки в жолобі і дорівнює відстані від точки O до заданої прямої. Раніше ми показали, що:

$$h = OC \cdot sin\, 60° = 0,2 \cdot 0,86 = 0,17 \text{ м.}$$

3. В довільний момент часу переносна і відносна швидкості кульки визначаються так:

$$V_e = OD \cdot \omega; V_r = \frac{dCD}{dt} = -0,4 \frac{\pi}{6} t = -0,2 sin \frac{\pi}{6} t.$$

4. Кінетичний момент системи пластина-кулька у довільний момент часу на першому етапі визначається так:

$$K_Z = \left(\frac{m_1(a^2 + в^2)}{12} + m_1 \cdot OC^2 \right) \cdot \omega + m_2 \cdot OD^2 \cdot \omega^2 + m_2 \cdot |V_r| \cdot h =$$
$$= 3,6 \cdot \omega + 5 \left(0,04 + 0,16\, cos^2 \frac{\pi}{6} t - 0,08\, cos \frac{\pi}{6} t \right) \cdot \omega + 0,17\, sin \frac{\pi}{6} t. \quad (68)$$

5. Рівняння (67) для заданого моменту запишеться так:

$$\frac{dK_Z}{dt} = 4t + 2.$$

Після інтегрування по *t* будемо мати:

$$K_Z = t^2 + 2t + C_1.$$

Підставляючи сюди K_Z із (68) приходимо до такої залежності:

$$\left(3,8 + 0,8\, cos^2 \frac{\pi}{6} t - 0,4\, cos \frac{\pi}{6} t \right) \cdot \omega + 0,17\, sin \frac{\pi}{6} t = t^2 + 2t + C_1.$$

Для визначення C_1 використовуємо початкову умову:
при $t = 0$ $\omega = \omega_0 = 4\ c^{-1}$.

Тоді C_1 знаходиться так: $C_1 = 16{,}8$, і тепер остаточно закон зміни кутової швидкості на першому етапі записується таким чином:

$$\omega = \frac{t^2 + 2t - 0{,}17\, sin\frac{\pi}{6}t + 16{,}8}{3{,}8 + 0{,}8\, cos^2\frac{\pi}{6}t - 0{,}4\, cos\frac{\pi}{6}t}.$$

Зокрема, в кінці етапу $[0,\ t_1]$ і на початку етапу $[t_1,\ t_2]$ маємо таку кутову швидкість:

$$\omega_1 = \frac{4 + 4 - 0{,}17 \cdot 0{,}86 + 16{,}8}{3{,}8 + 0{,}8 \cdot 0{,}25 - 0{,}4 \cdot 0{,}5} = \frac{24{,}65}{3{,}8} = 6{,}5\ c^{-1}.$$

Другий етап (проміжок $[t_1,\ t_2]$). На даному проміжку часу, коли відсутній зовнішній момент, дослідження можна провести двома методами, а саме: 1) використовуючи закон збереження кінетичного моменту, як ми це робили в *МК D*-8; 2) виходячи з рівняння (67), в якому треба покласти $M(t) = 0$, а в якості початкової умови взяти таку: при $t = t_1 = 2\ c$, $\omega = \omega_1$.

Перший метод. Використовуємо закон збереження кінетичного моменту на ділянці $[t_1,\ t_2]$ у формі (63):

$$K_Z^{(1)} = I_Z \cdot \omega_1 + m_Z(m_2\bar{V}_e) + m_Z(m_2\bar{V}_r) =$$

$$= 3{,}6 \cdot 6{,}5 + 5 \cdot 0{,}2^2 \cdot 6{,}5 + 5 \cdot 0{,}17 \cdot 0{,}17 = 24{,}9\, H \cdot \text{м} \cdot c.$$

При цьому ми врахували, що $I_Z = 3{,}6$ кгм^2, $V_e = OD_1 \cdot \omega_1$; $m_z(m_2\bar{V}_e) = m_2 \cdot OD_1^2 \cdot \omega_1$; $OD_1 = 0{,}2$ м;

$$V_r/_{t=t_1} = -0{,}17\frac{\text{м}}{\text{с}};\ h = 0{,}17\ \text{м};\ \ m_z(m_2\bar{V}_r) = m_2 \cdot |\bar{V}_r| \cdot h\,;$$

$$K_Z^{(2)} = I_Z \cdot \omega_2 + m_Z(m_2\bar{V}_e) + m_Z(m_2\bar{V}_r) =$$

$$= 3{,}6 \cdot \omega_2 + 5 \cdot 0{,}35^2 \cdot \omega_2 + 5 \cdot 0{,}17 \cdot 0{,}17 = 4{,}2\omega_2 + 0{,}14.$$

При цьому ми врахували, що:

$$OD_2 = \sqrt{0{,}04 + 0{,}16 \cdot cos^2\frac{2\pi}{3} - 0{,}08\, cos^2\frac{2\pi}{3}} =$$

$$= \sqrt{0{,}04 + 0{,}04 + 0{,}04} = 0{,}35\ \text{м}.$$

$$V_r/_{t=t_2=4} = -0{,}2\,sin\frac{2\pi}{3} = -0{,}2\cdot 0{,}86 = -0{,}17.$$

Формула (68) в даному випадку запишеться так:

$$24{,}9 = 4{,}2\omega_2 + 0{,}14.$$

Звідси знаходимо:

$$\omega_2 = \frac{24{,}9 - 0{,}14}{4{,}2} = 6\;c^{-1}.$$

Другий метод. Диференціальне рівняння (67) на даному етапі записується так:

$$\frac{dK_Z}{dt} = 0.$$

Інтегруючи, будемо мати: $K_Z = C_1$.

Підставимо сюди вираз для K_Z із (68):

$$3{,}8\omega + \left(0{,}8\,cos^2\frac{\pi}{6}t - 0{,}4\,cos\frac{\pi}{6}t\right)\cdot\omega + 0{,}17\,sin\frac{\pi}{6}t = C_1.$$

Із початкової умови (69) знаходимо C_1: $C_1 = 24{,}85$.

Остаточно, зміна кутової швидкості пластини на другому етапі описується такою формулою:

$$\omega = \frac{24{,}85 - 0{,}17\,sin\frac{\pi}{6}t}{3{,}8 + 0{,}8\,cos^2\frac{\pi}{6}t - 0{,}4\,cos\frac{\pi}{6}t}.$$

Зокрема, при $t_2 = 4\ c$ звідси будемо мати:

$$\omega_2 = \frac{24{,}7}{4{,}2} = 6\;c^{-1}.$$

Звідси бачимо, що за обома методами кутові швидкості в кінці другого етапу співпадають, що є перевіркою в даній задачі. Крім того відзначимо, що при відсутності зовнішнього моменту кутова швидкість пластини зменшилась як за рахунок відносної швидкості кульки, так і за рахунок видалення її від осі обертання (збільшення для неї I_Z).

Приклад 6.2. Кругла однорідна пластина масою $m_1 = 20$ кг і радіусом $R = 2$ м може обертатися навколо вертикальної осі, яка перпендикулярна до площини пластини і проходить через точку O (рис. 5.2). В пластині зроблено прямолінійний жолоб, вздовж якого може рухатися кулька масою $m_2 = 5$ кг згідно із заданим законом $AD = 0{,}2(2 - 0{,}5t^2)$. В початковий момент часу $t = 0$, коли кулька була нерухомою, а пластина оберталася з кутовою швидкістю $\omega_0 = 2c^{-1}$, до платформи приклали пару сил з обертальним моментом, який змінюється у часі відповідно до заданого закону $M = M(t) = 2t + 3$. Дія пари сил припинилася в момент часу $t_1 = 2$ с. Після цього рух кульки в жолобі продовжувався згідно із заданим законом до моменту часу $t_2 = 4$ с. Визначити кутову швидкість платформи в моменти часу t_1 і t_2, якщо $OC = 0{,}5R$.

Розв'язання.

1. Перший етап (проміжок часу $[0, t_1]$). На цьому етапі треба використовувати формулу (67). При цьому K_Z буде змінюватися за рахунок залежності від часу не лише кутової швидкості пластини, а і за рахунок змінності моменту інерції кульки відносно осі обертання. Тому розв'язання задачі розпочинаємо зі знаходження відстані OD для довільного моменту часу. Із рис. 5.2 бачимо, що:

$$OD = \sqrt{(OC + AD)^2 + (0{,}5R)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(1 + 0{,}2(2 - 9{,}5t^2)\right)^2 + 1} = \sqrt{(1{,}4 - 0{,}1t^2)^2 + 1}.$$

Приймаючи до уваги, що в довільний момент часу плече вектора відносної швидкості $\bar{V}_r$ відносно точки O дорівнює $0{,}5R$, а сама швидкість $\bar{V}_r$ як функція часу знаходиться за формулою:

$$V_r = \frac{dAD}{dt} = -0{,}2t \text{ м/с}.$$

Кінетичний момент системи кругла пластина-кулька знаходимо так:

$$K_Z = m_1\left(\frac{1}{2}R^2 + OC^2\right) \cdot \omega + m_2 \cdot OD^2 \cdot \omega - m_2 \cdot 0{,}5R \cdot |\bar{V}_r| =$$

$$= 20 \cdot 3 \cdot \omega + 5(1 + (1{,}4 - 0{,}1t^2)^2) \cdot \omega - 0{,}5t =$$

$$= [65 + 5(1{,}4 - 0{,}1t^2)^2] \cdot \omega - 0{,}5t.$$

Інтегруючи рівняння (67), яке в даному випадку записується так:

$$\frac{dK_z}{dt} = 2t + 3.$$

Будемо мати:

$$K_Z = t^2 + 3t + C_1.$$

Підставимо сюди отриманий вище вираз для кінетичного моменту системи:

$$[65 + 5(1{,}4 - 0{,}1t^2)^2] \cdot \omega - 0{,}5t = t^2 + 3t + C_1.$$

Для визначення сталої інтегрування використовуємо початкову умову: при $t = 0,\ \ \omega = \omega_0 = 2\ c^{-1}$.

Звідси знаходимо, що $C_1 = 74{,}8\omega_0 = 149{,}6$.

Остаточно, закон зміни кутової швидкості пластини на проміжку часу $[0, t_1]$) має такий вигляд:

$$\omega = \frac{t^2 + 3{,}5t + 149{,}6}{65 + 5(1{,}4 - 0{,}1t^2)^2}.$$

Зокрема, швидкість при $t = t_1 = 2$ с, яка є початковою для другого етапу звідси знаходиться так:

$$\omega_1 = \frac{4 + 7 + 149{,}6}{65 + 5 \cdot 1} = \frac{160{,}6}{70} = 2{,}29\ c^{-1}.$$

Бачимо, що за проміжок часу від *О* до 2 с кутова швидкість за рахунок зовнішнього моменту і переміщення кульки в жолобі зросла з 2 $с^{-1}$ до 2,29 $с^{-1}$.

Другий етап (проміжок $[t_1,\ t_2]$). На цьому етапі зовнішній момент відсутній і тоді рівняння (67) записується так:

$$\frac{dK_Z}{dt} = 0.$$

Після інтегрування і підстановки замість K_Z отриманого вище виразу будемо мати:

$$[65 + 5(1{,}4 - 0{,}1t^2)^2] \cdot \omega - 0{,}5t = C_1.$$

C_1 знаходимо із початкової умови: при $t = t_1 = 2\ c$, $\omega = \omega_1 = 2{,}29\ c^{-1}$.

Тоді стала інтегрування обчислюється так: $C_1 = 70\omega_1 = 160{,}6$.

Остаточно, закон зміни кутової швидкості на другому етапі має такий вигляд:

$$\omega = \frac{0{,}5t + 160{,}6}{65 + 5(1{,}4 - 0{,}1t^2)^2}.$$

Зокрема, в кінці проміжку $[t_1,\ t_2]$) пластина буде мати таку кутову швидкість:

$$\omega_2 = \frac{0{,}5 \cdot 4 + 160{,}6}{65 + 5(1{,}4 - 1{,}6)^2} = \frac{162{,}6}{65{,}2} = 2{,}44\ c^{-1}.$$

Порівняємо цей результат з отриманим за допомогою закону збереження кінетичного моменту, записавши таку робочу формулу:

$$K_Z^{(1)} = K_Z^{(2)}.$$

Для обчислення $K_Z^{(2)}$ треба додатково показати на рис. 5.2 положення точки в момент часу $t_2 = 4\ c$ (це точка D_2) і обчислити OD_1, OD_2, а також відносну швидкість $\bar{V}_r$ для t_1 і t_2. Будемо мати: при $t = t_1 = 2c,\ AD_1 = 0{,}2(2 - 0{,}5 \cdot 4) = 0$.

Тобто точка D_1 при законі руху відмінному від розглянутого в *МК* співпадає з точкою *А* і тоді:

$$OD_1 = \sqrt{OC^2 + AC^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2} = 1{,}4\ \text{м}.$$

При $t = t_1 = 4c$, $AD_2 = 0{,}2(2 - 0{,}5 \cdot 16) = -1{,}2$ м.

Знак мінус означає, що точка D_2 знаходиться лівіше від точки *А* і лівіше від точки *О*, оскільки $OC = 1$ м, і тоді:

$$OD_2 = \sqrt{(|AD_2| - OC)^2 + AC^2} = \sqrt{0{,}2^2 + 1} = 1{,}02 м$$

при $t_1 = 2\ c,\ V_r = -0{,}2 \cdot 2 = -0{,}4$ м/с;
при $t_1 = 4\ c,\ V_r = -0{,}2 \cdot 4 = -0{,}8$ м/с.

Знаки мінус тут означають, що кулька рухається жолобом вліво.

Тепер знаходимо:

$$K_z^{(1)} = 20 \cdot 3 \cdot \omega_1 + 5 \cdot 1{,}41^2 \cdot \omega_1 - 5 \cdot 1 \cdot 0{,}4 = 158{,}5\ H \cdot \text{м} \cdot c;$$

$$K_Z^{(2)} = 60 \cdot \omega_2 + 5 \cdot 1{,}02^2 \cdot \omega_2 - 50 \cdot 1 \cdot 0{,}8 = 65\omega_2 - 4.$$

$$158{,}5 = 65\omega_2 - 4;$$

$$\omega_2 = \frac{162{,}5}{65} = 2{,}44\ c^{-1}.$$

Звідси бачимо, що ω_2 знайдені двома способами співпадають, що є підтвердженням правильності розв'язування задачі.

Приклад 6.3. До системи, яка показана на рис. 5.3, з заданими там масами і розмірами, в момент часу $t = 0$, приклали зовнішній обертальний момент, який змінюється у часі за законом $M = M(t) = 9t^2 + 4t$ (Н · м). Закон руху кульки вздовж жолоба той, же, що і на рис. 5.3. В момент часу $t_1 = 2$ с дія зовнішнього моменту припинилася, але рух кульки в жолобі продовжиться до моменту часу $t_2 = 2\sqrt{2}$ с. Визначити кутову швидкість пластини в моменти часу t_1 і t_2.

Розв'язання.

Перший етап (проміжок $[0, t_1]$). На цьому етапі треба використовувати рівняння (67) і при цьому, як показано на рис. 5.4 треба знайти відстань від точки D до O і плече вектора $\bar{V}_r$ відносно точки O не як числа в конкретних положеннях точки D_0 або D_1, а як функції від t для довільного положення кульки. Центральний кут, який утворює радіус жолоба з горизонтальною (рухомою) прямою OC для усіх моментів часу задається формулою:

$$\theta = \frac{\pi}{6}\left(\frac{t^2}{2} - 1\right).$$

Кутова швидкість кульки в її відносному русі в круговому жолобі знаходиться за формулою:

$$\omega^* = \frac{d\theta}{dt} = \frac{\pi}{6} t\ \ c^{-1},$$

і тоді модуль відносної швидкості, яка у всіх положеннях кульки направлена перпендикулярно до радіуса CD проти годинникової стрілки знаходиться за формулою:

$$V_r = CD \cdot \omega^* = r \cdot \frac{\pi}{6} t = 0{,}5 \frac{\pi}{6} t = \frac{\pi}{12} t \text{ м/с.}$$

Із рис. 5.3 і 5.4 знаходимо:

$$OD^2 = (OC + r\cos\theta)^2 + r^2 \sin^2\theta =$$

$$= \left(1{,}2 + r\cos\frac{\pi}{6}\left(\frac{t^2}{2} - 1\right)\right)^2 + r^2 \sin^2 \frac{\pi}{6}\left(\frac{t^2}{2} - 1\right) =$$

$$= 1{,}69 + 1{,}2\cos\frac{\pi}{6}\left(\frac{t^2}{2} - 1\right).$$

Плече вектора $\bar{V}_r$ відносно точки O в довільний момент часу знаходимо згідно з рис. 5.4 так:

$$h = ON = OK + KN = OC \cdot \cos\theta + r = 1{,}2\cos\frac{\pi}{6}\left(\frac{t^2}{2} - 1\right) + 0{,}5.$$

Тепер для довільного моменту часу можемо записати такий вираз для кінетичного моменту системи:

$$K_Z = I_Z\omega + m_z(m_2\bar{V}_e) + m_z(m_2\bar{V}_r) =$$

$$= \left[\frac{m_1(a^2 + в^2)}{12} + m_1 OC^2\right] \cdot \omega + m_2 \cdot OD^2 \cdot \omega + m_2 \cdot h \cdot |\bar{V}_r| =$$

$$= 50{,}5\omega + 5\left(1{,}69 + 1{,}2\cos\frac{\pi}{6}\left(\frac{t^2}{2} - 1\right)\right) \cdot \omega +$$

$$+5 \cdot \left[1{,}2\cos\frac{\pi}{6}\left(\frac{t^2}{2} - 1\right) + 0{,}5\right] \cdot \frac{\pi}{12} t =$$

$$= \left(59 + 6\cos\frac{\pi}{6}\left(\frac{t^2}{2} - 1\right)\right)\omega + 1{,}6t\cos\frac{\pi}{6}\left(\frac{t^2}{2} - 1\right) + 0{,}65t.$$

Рівняння (67) в даному випадку запишеться так:

$$\frac{dK_z}{dt} = 9t^2 + 4t.$$

Після інтегрування будемо мати:

$$K_Z = 3t^3 + 2t^2 + C_2.$$

Підставляємо сюди вираз для K_Z:

$$\left[59 + 6\cos\frac{\pi}{6}\left(\frac{t^2}{2} - 1\right)\right]\omega + 1{,}6t\cos\frac{\pi}{6}\left(\frac{t^2}{2} - 1\right) + 0{,}65t =$$
$$= 3t^3 + 2t^2 + C_1.$$

C_1 знаходимо із початкової умови: при $t = 0\ \ \omega = \omega_0 = 2\ c^{-1}$. Тоді:

$$C_1 = \left(59 + 6\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \cdot 2 = 128{,}4.$$

Остаточно закон зміни кутової швидкості плити на першому етапі запишеться таким чином:

$$\omega = \frac{3t^3 + 2t^2 - 0{,}65t - 1{,}6t\cos\frac{\pi}{6}\left(\frac{t^2}{2} - 1\right) + 128{,}4}{59 + 6\cos\frac{\pi}{6}\left(\frac{t^2}{2} - 1\right)}.$$

Зокрема, швидкість в кінці проміжку $[0, t_1]$, яка буде початковою для другого етапу, звідси знаходиться так:

$$\omega_1 = \frac{24 + 8 - 1{,}3 - 3{,}2 \cdot 0{,}86 + 128{,}4}{59 + 6 \cdot 0{,}86} = \frac{156{,}3}{64{,}2} = 2{,}4\ c^{-1}.$$

Другий етап (проміжок $[t_1,\ t_2]$). На даному етапі рівняння (67) записується так:

$$\frac{dK_Z}{dt} = 0.$$

Тоді $K_Z = C_1$. Після підстановки K_Z будемо мати:

$$\left[59 + 6\cos\frac{\pi}{6}\left(\frac{t^2}{2} - 1\right)\right]\omega + 1{,}6t\cos\frac{\pi}{6}\left(\frac{t^2}{2} - 1\right) + 0{,}65t = C_1.$$

C_1 знаходимо із початкової умови: при $t = t_1 = 2c$, $\omega = \omega_1 = 2{,}4\ c^{-1}$.

Тоді: $C_1 = (59 + 6 \cdot 0{,}86) \cdot 2{,}4 + 3{,}2 \cdot 0{,}86 + 1{,}3 = 158{,}22.$

Остаточно закон зміни ω на другому етапі такий:

$$\omega = \frac{158{,}2 - 0{,}65t - 1{,}6t \cdot cos\frac{\pi}{6}\left(\frac{t^2}{2} - 1\right)}{59 + 6\,cos\frac{\pi}{6}\left(\frac{t^2}{2} - 1\right)}.$$

Тоді при $t = t_2 = 2\sqrt{2}\,c = 2{,}8\,c$ будемо мати:

$$\omega_2 = \frac{158{,}2 - 0{,}65 \cdot 2{,}8 - 1{,}6 \cdot 2{,}8 \cdot cos\frac{\pi}{2}}{59 + 6 \cdot cos\frac{\pi}{2}} = \frac{156{,}4}{59} = 2{,}65\,c^{-1}.$$

Для порівняння застосуємо на проміжку часу [t_1, t_2] закон збереження кінетичного моменту:

$$K_Z^{(1)} = K_Z^{(2)};$$

$$K_Z^{(1)} = \left(59 + 6\,cos\frac{\pi}{6}\right) \cdot \omega_1 + 3{,}2\,cos\frac{\pi}{6} + 1{,}3 = 158{,}2\ \text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с};$$

$$K_Z^{(2)} = \left(59 + 6\,cos\frac{\pi}{2}\right) \cdot \omega_2 + 1{,}6 \cdot 2\sqrt{2}\,cos\frac{\pi}{2} + 1{,}3\sqrt{2} = 59\omega_2 + 1{,}8;$$

$$158{,}2 = 59 \cdot\ \omega_2 + 1{,}8;$$

$$\omega_2 = \frac{156{,}4}{59} = 2{,}65\,c^{-1}.$$

Результати за двома методами співпадають.

Увага! Зазначимо, що у випадку коли $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ виникають складнощі з визначенням плеча відносно швидкості $\bar{V}_r$ відносно точки O, але при $t > 2\sqrt{2}$ і відсутності зовнішнього обертального моменту достатньо просто застосувати в даному випадку закон збереження кінетичного моменту, наприклад, розглянемо проміжок $[t_2, t_3]$, де $t_2 = 2\sqrt{2},\ t_3 = 4$. За цей проміжок часу точка перейде з положення D_2 в положення D_3 (рис. 6.1).

$$K_Z^{(2)} = K_Z^{(3)}.$$

$$K_Z^{(2)} = K_Z^{(1)} = 158{,}2\ \text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}.$$

Щоб обчислити $K_Z^{(3)}$ попередньо знайдемо плечі векторів $\bar{V}_e$ і $\bar{V}_r$ відносно точки O (рис. 6.1):

$$OD_3^2 = (OC - r\cos\theta_3)^2 + r^2\sin^2\theta_3.$$

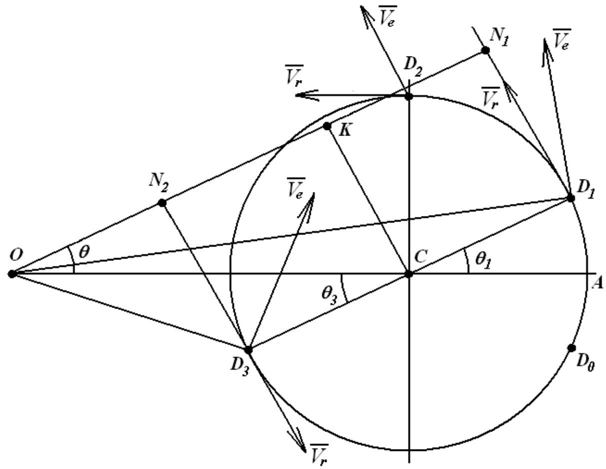

Рисунок 6.1 – Схема до прикладу

Оскільки $\theta_3 = \theta_1 = \frac{\pi}{6}$, звідси знаходимо:

$$OD_3^2 = (1{,}2 - 0{,}5 \cdot 0{,}86)^2 + (0{,}5 \cdot 0{,}5)^2 = 0{,}65;$$

$$ON_2 = OC \cdot \cos\theta_3 - r = 1{,}2 \cdot 0{,}86 - 0{,}5 = 0{,}53.$$

При $t_2 = 4c \quad V_r = \frac{\pi}{12} \cdot 4 = \frac{\pi}{3} = 1{,}05$ м/с:

$$K_Z^{(3)} = I_Z \cdot \omega_3 + m_2 \cdot OD_3^2 \cdot \omega_3 - V_r \cdot ON_2 = 53{,}75\omega_3 - 2{,}7;$$

$$158{,}2 = 53{,}8\omega_3 - 2{,}7;$$

$$\omega_3 = \frac{160{,}9}{53{,}8} = 3\ c^{-1}.$$

Звідси бачимо, що на проміжку $[t_2, t_3]$ кутова швидкість зросла за рахунок двох причин: 1) точка D_3 знаходиться ближче до точки O ніж точка D_2, а значить у неї менший момент інерції; 2) як видно із рис.

6.1 в положенні D_2 вектор $\bar{V}_r$ відносно точки O рухається у бік обертання пластини, а в положенні D_3 цей рух уже протилежний і тоді в $K_Z^{(3)}$ $m_Z(m_2\bar{V}_r)$ входить зі знаком мінус, а значить $K_Z^{(3)}$ більше від $K_Z^{(2)}$ на цю величину.

Приклад 6.4. Кругла пластина, масою $m_1 = 20$ кг і радіуса $R = 1$ м обертається навколо вертикальної осі, яка проходить через точку O, перпендикулярно до площини пластини (рис. 5.5). В початковий момент часу $t = 0$ до нерухомої пластини і нерухомої кульки, яка знаходилась в точці A ободу пластини, приклали зовнішній обертальний момент, який змінюється у часі за таким законом $M = M(t) = 18t^2 + 6t + 2$(Нм). У цей же початковий момент жолобом, розташованим на ободі круга, почала рухатися кулька масою $m_2 = 5$ кг відповідно до закону $AD = \frac{\pi R}{4}\left(\frac{t^2}{2} + t\right)$(м). В момент часу $t_1 = 1$ с дія моменту перервалася, але кулька продовжила свій рух. Визначити кутову швидкість пластини в моменти часу t_1 і $t_2 = 21$ с, якщо $OC = 0{,}8R$.

Розв'язання.

Перший етап (проміжок $[0,\ t_1]$). Оскільки у нас інший закон руху точки по ободу то три положення кульки відрізняються від показаних на рис. 5.5 і кути будуть такими:

при $t = 0$ $\qquad \theta_0 = \frac{\pi}{4}\left(\frac{t^2}{2} + t\right)/_{t=0} = 0;$

при $t_1 = 1$ $\qquad \theta_1 = \frac{\pi}{4}\left(\frac{t^2}{2} + t\right)/_{t=2} = \frac{3\pi}{8};$

при $t_2 = 2$ $\qquad \theta_2 = \frac{\pi}{4}\left(\frac{t^2}{2} + t\right)/_{t=2} = \pi.$

Відносна швидкість кульки в довільний момент часу визначається за формулою:

$$V_r = \frac{dAD}{dt} = \frac{\pi R}{4}(t + 1).$$

Із рис. 5.5 видно, що в довільний момент часу відстань від кульки до осі обертання знаходиться за формулою:

$$OD^2 = (OC + R\sin\theta)^2 + R^2\cos^2\theta = OC^2 + R^2 + 2\cdot OC\cdot R\sin\theta =$$

$$= 1{,}64 + 1{,}6\, sin\frac{\pi}{4}\left(\frac{t^2}{2} + t\right),$$

а плече вектора $\bar{V}_r$ відносно точки O обчислюється так:

$$ON = OC \cdot sin\,\theta + R = 1 + 0{,}8\, sin\frac{\pi}{4}\left(\frac{t^2}{2} + t\right).$$

Тоді кінетичний момент системи пластина-кулька в довільний момент часу запишеться так:

$$K_Z = m_1\left(\frac{1}{2}R^2 + OC^2\right)\cdot\omega + m_2\cdot OD^2\cdot\omega +$$

$$+m_2\left(1 + 0{,}8\, sin\frac{\pi}{4}\left(\frac{t^2}{2} + t\right)\right)\frac{\pi R}{4}(t+1);$$

$$K_Z = 31\omega + 8\, sin\frac{\pi}{4}\left(\frac{t^2}{2} + t\right)\cdot\omega + 3{,}9(t+1)\left(1 + 0{,}8\, sin\frac{\pi}{4}\left(\frac{t^2}{2} + t\right)\right).$$

На першому етапі диференціальне рівняння обертального руху пластина-кулька запишеться так:

$$\frac{dK_Z}{dt} = 18t^2 + 6t + 2.$$

Інтегруючи його за часом, будемо мати:

$$K_Z = 6t^3 + 3t^2 + 2t + C_1.$$

Після підстановки записаного вище виразу для K_Z приходимо до такої залежності:

$$\left[31 + 8\, sin\frac{\pi}{4}\left(\frac{t^2}{2} + t\right)\right]\cdot\omega + 3{,}9(t+1)\left(1 + 08\, sin\frac{\pi}{4}\left(\frac{t^2}{2} + t\right)\right) =$$

$$= 6t^3 + 3t^2 + 2t + C_1.$$

C_1 знаходимо з початкової умови: при $t = 0$ $\omega = 0$, тоді $C_1 = 3{,}9$ і остаточно кутова швидкість пластини на першому етапі $[0,\ t_1]$ визначається за такою формулою:

$$\omega = \frac{6t^3 + 3t^2 + 2t - 3{,}9\left(1 + 0{,}8\,sin\frac{\pi}{4}\left(\frac{t^2}{2} + t\right)\right) + 3{,}9}{31 + 8\,sin\frac{\pi}{4}\left(\frac{t^2}{2} + t\right)}.$$

Звідси, зокрема, знаходимо швидкість в кінці даного етапу. Яка буде початковою для другого етапу:

$$\omega = \frac{6 + 3 + 2 - 3{,}9\left(1 + 0{,}8\,sin\frac{3\pi}{8}\right) + 3{,}9}{31 + 8\,sin\frac{3\pi}{8}} = \frac{84}{37{,}7} = 0{,}22\ c^{-1}.$$

Другий етап (проміжок $[t_1,\ t_2]$). Для цього етапу при відсутності зовнішнього обертального моменту диференціальне рівняння обертання запишеться так:

$$\frac{dK_Z}{dt} = 0.$$

Звідси будемо мати: $K_Z = C_1$;

$$\left[31 + 8\,sin\frac{\pi}{4}\left(\frac{t^2}{2} + t\right)\right] \cdot \omega + 3{,}9(t + 1)\left(1 + 0{,}8\,sin\frac{\pi}{4}\left(\frac{t^2}{2} + t\right)\right) = C_1.$$

C_1 знаходимо з такої початкової умови: при $t = t_1 = 1$, $\omega = \omega_1 = 0{,}22$.

Тоді $C_1 = 21{,}9$ і остаточно кутова швидкість на другому етапі описується такою формулою:

$$\omega = \frac{21{,}9 - 3{,}9(t + 1)\left(1 + 0{,}88\,sin\frac{\pi}{4}\left(\frac{t^2}{2} + t\right)\right)}{31 + 8\,sin\frac{\pi}{4}\left(\frac{t^2}{2} + t\right)}.$$

Звідси знаходимо кутову швидкість при $t = t_2 = 2\ c$:

$$\omega_2 = \frac{21{,}9 - 3{,}9(2 + 1)(1 + 0{,}88 \cdot 0{,}0)}{31 + 8 \cdot 0{,}0} = \frac{10{,}2}{31} = 0{,}33\ c^{-1}.$$

7 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ МІНІКОНТРОЛЬНОЇ Д-9 «ТЕОРЕМА ПРО ЗМІНУ КІНЕТИЧНОЇ ЕНЕРГІЇ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ»

Приклад 7.1. Однорідний каток вагою Q і радіуса R з'єднаний гнучкою нерозтяжною ниткою з тілом A вагою P. Нитка перекинута через невагомий блок радіуса *r*. До тіла A прикладена сила $F = \varphi(S)$, яка залежить від величини переміщення *S*. Каток котиться без ковзання, коефіцієнт тертя тіла A по площині дорівнює *f*, момент опору в підшипнику блока рівний M. Визначити швидкість поступального руху тіла A, коли він переміститься на величину S, якщо $\alpha = 60°$, $f = 0{,}1$, $r = 10$ см, $P = 2$ Н, $Q = 7$ Н, $F = (9 + 2S)H, M = 0{,}2\ H \cdot$ м, $S = 4$ м. В початковий момент система знаходилася в стані спокою.

Розв'язання.

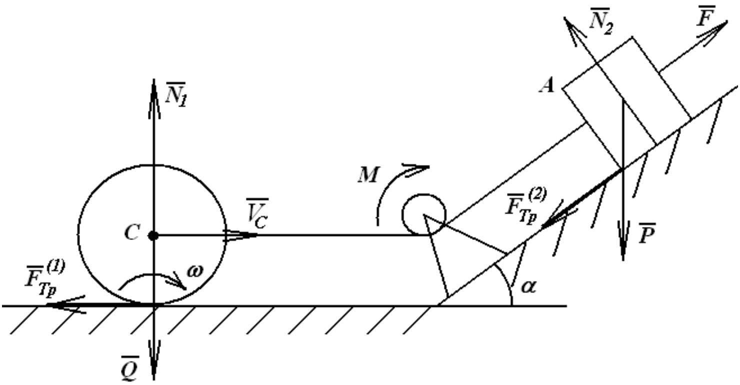

Рисунок 7.1 – Схема до прикладу 7.1

1. Згідно з умовою задачі механічна система складається із двох абсолютно твердих тіл, з'єднаних нерозтяжною ниткою, тобто ми маємо справу з так званою незмінною системою, а саме такою, в якій внутрішні сили не виконують роботи і для якої теорема (16) про зміну кінетичної енергії записується так:

$$T - T_0 = A^e. \tag{70}$$

Оскільки в початковий момент часу за умовою задачі система перебувала в стані спокою, тоді виконується умова $T_0 = 0$ і з формули (70) ми приходимо до такої робочої формули задачі:

$$T = A^e. \tag{71}$$

Таким чином, нам необхідно обчислити кінетичну енергію нашої системи в довільний момент часу і прирівняти її сумі робіт усіх показаних на рис. 7.1 зовнішніх сил на заданому переміщені системи.

2. Кінетична енергія системи знаходиться за формулою (20), яка в даному випадку приймає такий вигляд:

$$T = T_k + T_A. \tag{72}$$

Каток виконує плоско паралельний рух і для нього справедлива формула (19), тоді:

$$T_K = \frac{1}{2}\frac{Q}{g}V_c^2 + \frac{1}{2}I_{zc} \cdot \omega^2. \tag{73}$$

Увага! Оскільки каток і тіло А утворюють систему, яка має один ступінь вільності, то швидкості центрів цих двох тіл за допомогою нитки зв'язані очевидною залежністю:

$$V_c = V_A.$$

Що стосується кутової швидкості катка, то вона знаходиться за допомогою миттєвого центру швидкостей, який знаходиться в точці дотику катка до поверхні, якою він котиться, так:

$$\omega = \frac{V_c}{R} = \frac{V_A}{R}.$$

Момент інерції катка відносно центральної осі знаходиться за формулою (13) і формула (73) приводиться до такого вигляду:

$$T_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q \cdot V_A^2}{g} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\frac{Q}{g}R^2\frac{V_A^2}{R^2} = \frac{3}{4}\frac{Q}{g} \cdot V_A^2. \tag{74}$$

Кінетична енергія тіла, що рухається поступально, згідно з формулою (17) знаходиться так:

$$T_A = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{g} \cdot V_A^2. \tag{75}$$

Підставляючи (74) і (75) у формулу (72) знаходимо кінетичну енергію системи каток-тіло A, як функцію від невідомої швидкості тіла A:

$$T = \frac{3}{4} \cdot \frac{Q}{g} V_A^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{g} V_A^2 = \frac{1}{4g}(3Q + 2P) \cdot V_A^2. \qquad (76)$$

Увага! Зазначимо, що згідно з умовою задачі не враховується кінетична енергія блока (він вважається невагомим) і енергія нитки (зрозуміло, що обидві ці величини суттєво менші за енергії катка і тіла).

3. Повна робота усіх зовнішніх сил системи обчислюється за формулою:

$$A^e = A_Q + A_{N_1} A_{F_{TP}^{(1)}} + A_M + A_P + A_{N_2} + A_{F_{Tp}^{(2)}} + A_F. \qquad (77)$$

Відразу зазначимо наступне:

1) У всіх задачах нормальні реакції не виконують роботи, оскільки вони завжди перпендикулярні до переміщень точок їх прикладання. У зв'язку з цих в правій частині формули (77) треба покласти:

$$A_{N_1} = 0, A_{N_2} = 0.$$

2) Сили, які прикладені в миттєвому центрі швидкостей роботи не виконують, оскільки в даний момент часу точка їх прикладання нерухома. Тому в даній задачі виконується умова:

$$A_{F_{Tp}^{(1)}} = 0.$$

Крім того в нашій задачі сила $\bar{Q}$ перпендикулярна до напрямку руху центру катка і тому:

$$A_Q = 0.$$

Робота моменту опору в підшипнику блока знаходиться за формулою (22), яка, оскільки у нас за умовою $M = const$, приймає такий вигляд:

$$A_M = -M \cdot \varphi,$$

де φ – сумарний кут, на який повернеться блок, коли тіло A переміститься на величину S. Оскільки проковзування нитки на блоці відсутнє, то справедлива відома формула елементарної математики про залежність між довжиною дуги кола, центральним кутом і радіусом, згідно з якою:

$$\varphi = \frac{S}{r},$$

і остаточно робота моменту опору, яка завжди буде від'ємною, знаходиться так:

$$A_M = -\frac{MS}{r}.$$

Робота сили ваги тіла *A* знаходиться за формулою (21), в якій треба взяти знак мінус (тіло рухається вгору), а h_C знаходиться очевидним способом з прямокутного трикутника. Остаточно маємо:

$$A_p = -P \cdot S \cdot sin\,\alpha.$$

Робота сили тертя тіла *A* по похилій площині обчислюємо за формулою (24), при цьому N_2 знаходиться із умови рівноваги тіла *A* в нормальному напрямку:

$$N_2 = P \cdot cos\,\alpha.$$

Використовуємо закон Амонтона-Кулона:

$$F_{Tp}^{(2)} = fN_2 = fP\,cos\,\alpha.$$

Остаточно із формули (24) знаходимо:

$$A_{F_{Tp}^{(2)}} = -fP\,cos\,\alpha \cdot S.$$

Робота заданої змінної сили F дається формулою (25), яка в даному випадку записується так:

$$A_F = \int_o^S (9 + 2x)\,dx = 9x/_o^S + x^2/_o^S = S^2 + 9S.$$

Повертаючись до формули (77) сумарну роботу зовнішніх сил запишемо так:

$$A^e = -\frac{M}{r}S - P \cdot sin\,\alpha \cdot S - fP\,cos\,\alpha \cdot S + 9S + S^2 =$$

$$= S^2 + \left(9 - \frac{M}{r} - P(\sin\alpha + f\cos\alpha)\right) \cdot S. \qquad (78)$$

4. Підставляючи (76) і (78) в робочу формулу (71), будемо мати:

$$\frac{1}{4q}(3Q + 2P) \cdot V_A^2 = S^2 + \left[9 - \frac{M}{r} - P(\sin\alpha + f\cos\alpha)\right] \cdot S. \qquad (79)$$

Звідси знаходимо:

$$V_A = 2 \cdot \sqrt{\frac{S^2 + \left[9 - \frac{M}{r} - P(\sin\alpha + f\cos\alpha)\right] \cdot S}{3Q + 2P} \cdot q}. \qquad (80)$$

Підставляючи сюди значення заданих параметрів задачі, знаходимо:

$$V_A = 2\sqrt{\frac{16 + \left(9 - 2 - 2(0{,}86 + 0{,}05)\right) \cdot 4}{21 + 4} \cdot 9{,}81} = 7{,}6\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Приклад 7.2. Однорідний каток вагою $Q = 8$ Н і радіусом R з'єднаний гнучкою нерозтяжною ниткою з тілом A вагою $\text{P} = 4\text{Н}$ (рис. 7.2). Нитка перекинута через невагомий блок радіусом $r = 0{,}2$ м. До осі катка C прикладена сила $F = \varphi(S) = (7S - 2) \cdot H$, яка за модулем залежить від величини переміщення S. Каток котиться без ковзання, коефіцієнт тертя ковзання тіла A з площиною $f = 0{,}2$, момент опору обертання в підшипнику блока $M = 0{,}4$ Н · м. Визначити швидкість тіла A, коли воно переміститься на величину $S = 3$ м, якщо $\alpha = 45°$. В початковий момент система знаходилася у стані спокою.

Розв'язання.

1. Початкові міркування повторюють зроблені у попередньому прикладі і ми приходимо до робочої формули (71).Відмінність буде полягати лише в обчисленні правої частини цієї формули, тобто у визначенні робіт зовнішніх сил системи.

2. Формула (72) заповнюється за тією ж схемою, що і у попередньому прикладі і оскільки зрозуміло, що $V_A = V_C,\ \omega = V_A/R,$ то кінетична енергія системи дається формулою (76).

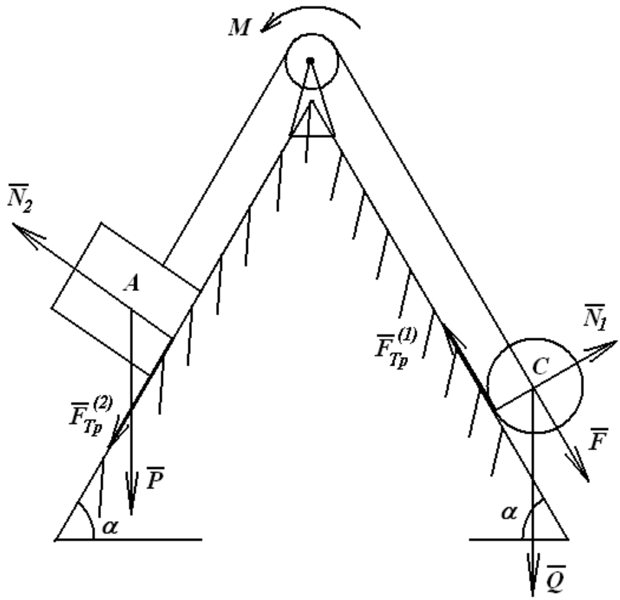

Рисунок 7.2 – Схема до прикладу 7.2

3. Формула (77) справедлива і в даному прикладі, але є відмінності від прикладу 7.1 у заповненні правої частини цієї формули а саме:

1) $A_Q = Q \cdot h_1 = Q \cdot S \cdot sin\,\alpha$;

2) $A_{N_1} = A_{F_{Tp}^{(1)}} = 0$;

3) $A_M = -\frac{M}{r} \cdot S$;

4) $A_N = 0$;

5) $A_P = -P \cdot h_2 = -P \cdot S \cdot sin\,\alpha$;

6) $A_{F_{Tp}^{(2)}} = -fP\,cos\,\alpha \cdot S$;

7) $A_F = \int_0^S (7x-2)dx = \frac{7}{2}x^2/_0^S - 2x/_0^S = 3{,}5S^2 - 2S$.

4. Остаточно можемо записати:

$$A^e = (Q \cdot sin\,\alpha - P\,sin\,\alpha)S - \frac{M}{r}S - fP\,cos\,\alpha \cdot S + 3{,}5S^2 - 2S,$$

і замість формули (79) будемо мати таку:

$$\frac{1}{4g}(3Q + 2P)V_A^2 = 3{,}5S^2 + \left[(Q - P)\,sin\,\alpha - fP\,cos\,\alpha - \frac{M}{r} - 2\right]S.$$

Швидкість тіла A в залежності від переміщення S задається наступною формулою:

$$V_A^2 = 4 \cdot \frac{3{,}5S^2 + \left[(Q - P)\,sin\,\alpha - fP\,cos\,\alpha - \frac{M}{r} - 2\right] \cdot S}{3Q + 2P} \cdot g.$$

Тоді при заданих значеннях Q, P, M, r, f, α ця формула приймає такий вигляд:

$$V_A = 2\sqrt{\frac{3{,}5S^2 - 1{,}76 \cdot S}{32} \cdot 9{,}81} = 2\sqrt{1{,}07S^2 - 0{,}54S}.$$

При $S = 3$ м звідси знаходимо:

$$V_A = 2\sqrt{1{,}07 \cdot 9 - 0{,}54 \cdot 3} = 2\sqrt{8} = 4\sqrt{2} = 5{,}6 \text{ м/с}.$$

Увага! Якщо треба **знайти прискорення**, яке буде мати тіло, пройшовши заданий шлях S, то тоді треба залежність між квадратом швидкості і переміщенням, вираз (79) не розв'язувати відносно V_A, а продиференціювати обидві її частини за часом і врахувати, що:

$$\frac{dV_A}{dt} = W_A. \frac{dS}{dt} = V_A.$$

Після цього знайти W_A, визначивши, якщо це потрібно, попередньо V_A за формулою виду (80).

Наприклад, підставляючи в (79) задані значення Q, P, M, r, f, α, перепишемо цю формулу в такому вигляді:

$$0{,}64V_A^2 = S^2 + 5{,}2S.$$

Продиференціюємо обидві частини за часом:

$$1{,}3V_A \cdot W_A = 2S \cdot V_A + 5{,}2V_A.$$

Тоді:

$$W_A = \frac{2 \cdot S + 5{,}2}{1{,}3}.$$

При $S = 4$ м будемо мати:

$$W_A = \frac{8 + 5{,}2}{1{,}3} = \frac{13{,}2}{1{,}3} = 10 \text{ м/с}^2.$$

Аналогічно можна знайти прискорення в залежності від S у другому прикладі.

Увага! Більш складно, але за допомогою інтегрування можна знайти час, за який тіло *A* нашої системи перемістилося на задану відстань *S*. Для цього треба в отриману залежність $V_A = V_A(S)$ замість V_A підставити його вираз через *S* і отримати диференціальне рівняння відносно *S* з незалежною змінною t виду:

$$\frac{dS}{dt} = f(S),$$

розділити тут змінні і проінтегрувати обидві частини. Будемо мати:

$$\int_0^S \frac{dx}{f(x)} = \int_0^t dt$$

Звідси знаходимо *t* через задане значення *S*. Наприклад, у першому прикладі маємо таку залежність:

$$0{,}64V_A^2 = S^2 + 5{,}2S.$$

Тепер можемо записати:

$$V_A = \frac{\sqrt{S^2 + 5{,}2S}}{0{,}8} \text{ або } \frac{dS}{dt} = \frac{\sqrt{S^2 + 5{,}2S}}{0{,}8}.$$

Відокремлюючи змінні, будемо мати:

$$0{,}8\frac{ds}{\sqrt{S^2 + 5{,}2S}} = dt.$$

Але тоді час, за який пройдено шлях S знаходиться так:

$$t = 0{,}8\int_0^S \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 5{,}2x}}.$$

Зупинимося детальніше на обчисленні інтеграла. Спочатку виділимо під коренем повний квадрат:

$$x^2 + 5{,}2x = x^2 + 2\cdot 2{,}6\cdot x + 2{,}6^2 - 2{,}6^2 = (x + 2{,}6)^2 - 2{,}6^2;$$

$$t = 0{,}8\int_0^S \frac{dx}{\sqrt{(x + 2{,}6)^2 - 2{,}6^2}}.$$

Знайдемо спочатку невизначений інтеграл, який відповідає даному визначеному, для цього зробимо заміну змінної за правилом $y = x + 2{,}6$, тоді приходимо до такого табличного інтегралу:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{(x + 2{,}6)^2 - 2{,}6^2}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 2{,}6^2}} =$$

$$= ln\left|y + \sqrt{y^2 - 2{,}6^2}\right| + C = ln\left|x + 2{,}6 + \sqrt{x^2 + 5{,}2x}\right| + C.$$

Тоді час знаходимо за формулою Ньютона-Лейбніца:

$$t = 0{,}8\, ln\frac{S + \sqrt{S^2 + 5{,}2S} + 2{,}6}{2{,}6}.$$

Зокрема, в нашому випадку $S = 4$ і тоді:

$$t = 0{,}8\, ln\frac{4 + \sqrt{16 + 20{,}8} + 2{,}6}{2{,}6} = 0{,}8\, ln\, 4\, ,9 = 1{,}28 \text{ с}.$$

Увага! Звернемо увагу ще на те, що за допомогою теорем про зміну кінетичної енергії можна отримати розв’язання і так званої оберненої задачі, яка звучить так: який шлях повинна пройти те чи інше тіло системи при заданому навантаженні щоб мати деяку наперед вказану швидкість. Для цього треба отриману за допомогою теореми залежність виду $V_A^2 = f(S)$ розв’язати відносно S. І в першому, і в другому прикладах це приводить до необхідності розв’язання квадратного рівняння. Зокрема в прикладі 7.1 маємо таке квадратне рівняння: $0{,}64V_A^2 = S^2 + 5{,}2S$.

Звідси знаходимо:

$$S_{1,2} = -2{,}6 \pm \sqrt{2,6^2 + 0{,}64V_A^2}.$$

Зрозуміло, що при V_A=7,6 звідси знайдемо S=4, але задаючи інші значення V_A знайдемо необхідний для досягнення такої швидкості шлях, для $V_A = 6$ м/с, $S = 2{,}8$.

8 ПРИКЛАДИ ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОГО ЗАВДАННЯ Д-9 «ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРЕМИ ПРО ЗМІНУ КІНЕТИЧНОЇ ЕНЕРГІЇ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ РУХУ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ»

Приклад 8.1. Механічна система складається із шести тіл (рис. 8.1), які з'єднані між собою гнучкою нерозтяжною невагомою ниткою. Відомі маси усіх тіл $m_1 = 4$ кг, $m_2 = 3$ кг, $m_3 = 6$ кг, $m_4 = 2$ кг, $m_5 = 2$ кг, $m_6 = 6$ кг. На блоці 4 треба враховувати момент опору в його підшипнику $\mathrm{M} = 0{,}6\ \mathrm{Н \cdot м}$, при цьому $r_4 = 0{,}2$ м. Коефіцієнти тертя для тіл 5 і 6 прийняти рівним $f = 0{,}2$. Жорсткість пружини задана як $c = 40\ \mathrm{Н/м}$. До тіла 6 прикладена сила, яка залежить від переміщення згідно з таким законом: $F = f(S) = 50(5 + 2S)H$. Визначити швидкість і прискорення тіла 6 після того, як воно опуститься своєю площиною на $S = 4$ м. Додатково визначити час, за який це переміщення відбулося. В початковий момент часу $t = 0$ система знаходилася в стані спокою. Крім того, $r_3 = 0{,}8R_3$.

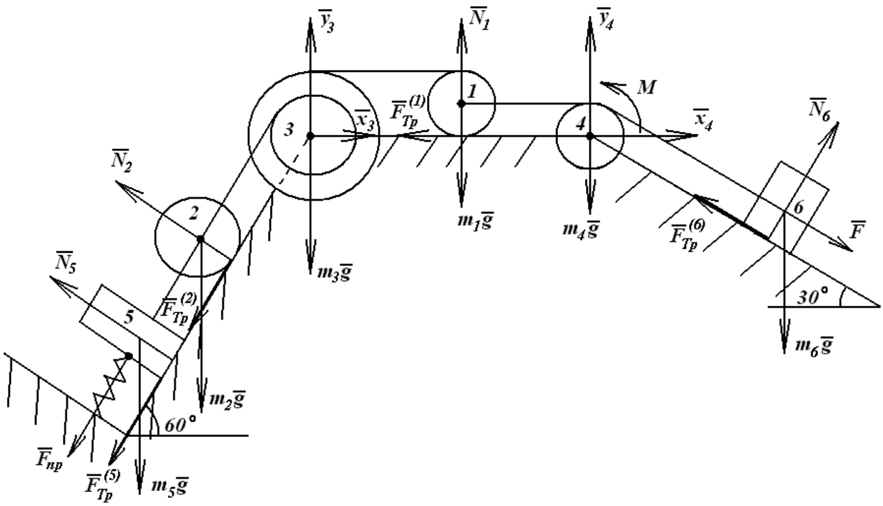

Рисунок 8.1 – Схема до прикладу 8.1

Розв'язання.

1. Повторюючи міркування, наведені в прикладі 1 МК Д-9, приходимо до робочої формули у вигляді (71). Відмінність полягає в тому, що в даному випадку система складається із значно більшого числа тіл, для яких треба визначати кінетичну енергію і знаходити роботу більшого числа силових факторів.

2. Замість формули (72) в даному випадку кінетична енергія системи описується такою формулою:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6. \tag{81}$$

Послідовно знаходимо усі складові правої частини, маючи на увазі, що усі лінійні і кутові швидкості треба виражати через V_6, тобто швидкість руху шостого тіла. Будемо мати:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} I_{z1} \cdot \omega_1^2.$$

Із рис. 8.1 видно, що $V_1 = V_6$, $\omega_1 = V_1/r_1$, тоді:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_6^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \cdot \frac{V_6^2}{r_1^2} = \frac{3}{4} \cdot m_1 V_6^2;$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 V_2^2 + \frac{1}{2} I_{z2} \cdot \omega_2^2.$$

Щоб виразити V_2 і ω_2 через V_6 необхідно, використовуючи схему взаємодії між тілами, показану на рис. 8.1, провести наступний ланцюжок залежностей: 1) швидкість нитки на ободі катка 1 вдвічі більша ніж в його центрі, тобто дорівнює $2V_6$; 2) Така ж швидкість буде на ободі блока 3, але тоді кутова швидкість блоку 3 буде рівною $\omega_3 = 2V_6/R_3$; 3) Швидкість нитки на внутрішньому ободі блока 3 буде рівною $V_3 = \omega_3 \cdot r_3 = 0{,}8R_3 \cdot 2V_6/R_3 = 1{,}6 \cdot V_6$. Саме ця швидкість буде далі швидкістю центра катка 2 і тіла 5.

Повертаючись до обчислення T_2, будемо мати:

$$T_3 = \frac{1}{2} I_{z3} \cdot \omega_3^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m_3 R_3^2 \cdot \frac{(2V_6)^2}{R_3^2} = m_3 V_6^2.$$

Увага! При обчисленні I_{Z3} ми свідомо припустили що цей блок однорідний суцільний круг, хоча там є ще внутрішній радіус r_3, який ми використовували вище при переході до тіл 2 і 5. Більш точно в подібних випадках треба вважати заданими не лише R_3 і r_3, а й момент інерції подібного неоднорідного по радіусу блока або катка, або ж приймати подібні тіла як елемент зв'язку між іншими тілами системи, вважаючи для цього, що, наприклад, $m_3 = 0$.

$$T_4 = \frac{1}{2} I_{Z4} \cdot \omega_4^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m_4 r_4^2 \frac{V_6^2}{r_4^2} = \frac{1}{4} m_4 V_6^2;$$

$$T_5 = \frac{1}{2} m_5 V_5^2 = \frac{1}{2} m_5 \left(\frac{8}{5}\right)^2 V_6^2 = \frac{32}{25} m_5 V_6^2;$$

$$T_6 = \frac{1}{2} m_6 V_6^2.$$

Підставляючи усі знайдені виразу в формулу (81), приходимо до такого значення для кінетичної енергії системи в довільний момент її руху:

$$T = \frac{3}{4} m_1 V_6^2 + \frac{48}{25} m_2 V_6^2 + m_3 V_6^2 + \frac{1}{4} m_4 V_6^2 + \frac{32}{25} m_5 V_6^2 + \frac{1}{2} m_6 V_6^2;$$

$$T = \frac{1}{100}(75 m_1 + 192 m_2 + 100 m_3 + 25 m_4 + 128 m_5 + 50 m_6) V_6^2.$$

Увага! Іноді зручно уже в даному місці підставити задані параметри, в даному випадку маси усіх тіл системи, і записати кінетичну енергію системи в такому вигляді:

$$T = 21{,}82 V_6^2. \tag{83}$$

3. Робота усіх зовнішніх сил системи обчислюється як сума робіт показаних на рис. 8.1 силових факторів за такою формулою:

$$A^e = A_{m_6 g} + A_{N_6} + A_{F_{Tp}^{(6)}} + A_M + A_{Y_4} + A_{X_4} + A_{m_1 g} + A_{N_1} + A_{F_{Tp}^{(1)}}$$

$$+ A_{m_3 g} + A_{X_3} + A_{Y_3} + A_{m_2 g} + A_{N_2} + A_{F_{Tp}^{(2)}} +$$

$$+ A_{m_5 g} + A_{N_5} + A_{F_{Tp}^{(5)}} + A_{F_{np}} + A_F.$$

Вкажемо спочатку ті роботи, які дорівнюють нулю з двох причин: 1) сили, які перпендикулярні до переміщення точок їх прикладення; 2) сили, прикладені в нерухомих точках; 3) сили, прикладені в миттєвих центрах швидкостей. З цих трьох причин можемо записати:

$$A_{N_6} = 0;\ A_{m_4g} = 0;\ A_{X_4} = 0;\ A_{Y_4} = 0;\ A_{m_1g} = 0;$$

$$A_{N_1} = 0;\ A_{F_{Tp}^{(1)}} = 0;\ A_{m_3g} = 0;\ A_{X_3} = 0;\ A_{Y_3} = 0;$$

$$A_{N_2} = 0;\ A_{F_{Tp}^{(2)}} = 0;\ A_{N_5} = 0.$$

Таким чином, відмінну від нуля роботу будуть виконувати лише шість сил і один момент. Послідовно знаходимо ці роботи, виражаючи їх через переміщення *S* тіла 6. Будемо мати, за формулою (25):

$$A_F = 50\int_0^S (5+2x)\,dx = \left|50\cdot 5x_0^S\ + 50\cdot x^2\right|_0^S = 59S^2 + 250S;$$

$$A_{m_6g} = m_6g\cdot h_6 = m_6g\cdot S\cdot sin\,30\,^\circ = 0{,}5m_6g\cdot S;$$

$$A_{F_{Tp}^{(6)}} = -F_{Tp}^{(6)}\cdot S = -fm_6g\,cos\,30^\circ\cdot S = -0{,}17m_6g\cdot S;$$

$$A_M = -M\phi = -M\cdot\frac{S}{r_4};$$

$$A_{m_2g} = -m_2g\cdot h_2 = -m_2g\cdot 1{,}6\cdot S\cdot sin\,60\,^\circ = -1{,}38m_2g\cdot S;$$

$$A_{m_5g} = -m_5g\cdot S = -1{,}38m_5g\cdot S.$$

$$A_{F_{Tp}^{(5)}} = -F_{Tp}^{(5)}\cdot 1{,}6\cdot S = -fm_5g\cdot cos\,60^\circ\cdot 1{,}6\cdot S = -0{,}16m_5g\cdot S;$$

$$A_{F_{np}} = -\frac{c}{2}\cdot(1{,}6S)^2 = -1{,}28c\cdot S^2.$$

Таким чином, робота усіх зовнішніх сил записується у вигляді наступної формули:

$$A^e = 50S^2 + 250S + 5m_6\cdot S - 1{,}7m_6S - \frac{M}{r_4}S -$$

$$-13{,}8m_2S - 13{,}8m_5S - 1{,}6m_5S - 1{,}28cS^2;$$

$$A^e = (50 - 1{,}28c)\cdot S^2 +$$

$$+\left(250 + 3{,}3m_6 - \frac{M}{r_4} - 13{,}8m_2 - 15{,}4m_5\right)\cdot S\,. \qquad (84)$$

Якщо підставити сюди задані значення параметрів системи, будемо мати таку функцію від S:

$$A^e = -1{,}2S^2 + 194{,}6 \cdot S. \tag{85}$$

4. Після підстановки залежностей (83) і (85) в робочу формулу (71) будемо мати таке рівняння для визначення швидкості тіла 6:

$$21{,}32V_6^2 = -1{,}2S^2 + 194{,}6S. \tag{86}$$

Звідси знаходимо:

$$V_6 = \sqrt{\frac{194{,}6 \cdot S - 1{,}2S^2}{21{,}32}}. \tag{87}$$

Зокрема, коли тіло 6 перемістилося на $S = 4$ м звідси будемо мати:

$$V_6 = \sqrt{\frac{194{,}6 \cdot 4 - 1{,}2 \cdot 16}{21{,}32}} = 5{,}97 \text{ м/с}.$$

Раніше, в другому прикладі МК Д-9 ми показали детально, що для визначення **прискорення** в залежності від пройденого шляху S треба продиференціювати за часом обидві частини формули (86). Будемо мати:

$$21{,}32 \cdot 2V_6 \cdot \frac{dV_6}{dt} = -1{,}2 \cdot 2S \cdot \frac{dS}{dt} + 194{,}6\frac{dS}{dt}.$$

Враховуючи, що:

$$\frac{dV_6}{dt} = W_6, \frac{dS}{dt} = V_6,$$

скорочуємо обидві частини на $V_6 \neq 0$, і знаходимо прискорення:

$$W_6 = \frac{194{,}6 - 2{,}4S}{42{,}64}.$$

При $S = 4$ м знаходимо таке прискорення:

$$W_6 = \frac{194{,}6 - 2{,}4 \cdot 4}{42{,}64} = \frac{185}{42{,}64} = 4{,}34 \text{ м/с}^2.$$

Щоб **знайти час,** за який тіло 6 перемістилося на 4 м своєю похилою площиною, зробимо, як це детально описано в прикладі 2 МК Д-9 наступне:

1) перепишемо формулу (87) в такому вигляді:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\sqrt{194{,}6 \cdot S - 1{,}2S^2}}{4{,}62}.$$

2) Відокремимо змінні і проінтегруємо обидві частини:

$$4{,}62 \int \frac{ds}{\sqrt{194{,}6 \cdot S - 1{,}2S^2}} = \int dt. \qquad (88)$$

3) Щоб обчислити інтеграл в лівій частині спочатку виділимо повний квадрат у підкореневому виразі наступним чином:

$$194{,}6 \cdot 6 - 1{,}2S^2 = -1{,}2\left(S^2 - 2 \cdot S \cdot \frac{194{,}6}{2 \cdot 1{,}2}\right) =$$

$$= -1{,}2(S^2 - 2 \cdot S \cdot 81{,}8 + 81{,}8^2 - 81{,}8^2) =$$

$$= +1{,}2 \cdot [81{,}8^2 - (S - 81{,}8)^2].$$

Тоді формула (88) перепишеться так:

$$t = \frac{4{,}62}{\sqrt{1{,}2}} \int \frac{ds}{\sqrt{81{,}8^2 - (S - 81{,}8)^2}}.$$

Інтеграл у правій частині заміною змінної за формулою $x = S - 81{,}8$ проводиться до такого табличного інтегралу:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arcsin\frac{x}{a} + C, \;\; |x| < a$$

і враховуючи початкову умову при $t = 0$ $S = 0$ остаточно будемо мати таку залежність:

$$t = 4{,}2\, arcsin\frac{S - 81{,}8}{81{,}8} + 6{,}6.$$

Якщо підставити сюди задане значення $S = 4$, тоді будемо мати:

$$t = 6{,}6 - 4{,}2 \cdot 0{,}1 \cdot \pi = 5{,}3 \text{ с}.$$

Приклад 8.2. Для наведеної на рис. 8.2 механічної системи визначити кутову швидкість тіла 4, якщо маси елементів системи задані наступним чином: $m_1 = 6$ кг, $m_2 = 2$ кг, $m_3 = 0$, $m_4 = 4$ кг, $m_5 = 0$, $m_6 = 2$ кг. На блоці 4 треба врахувати момент опору в підшипнику $\mathrm{M} = 0{,}3$ Н · м. Жорсткість пружини рівна $c = 160$ Н/м. До тіла 1 прикладена змінна сила, яка залежить від переміщення тіла 1 відповідно до такого закону $F = f(S) = 80(1 + 4S)$. В початковий момент $t = 0$ система знаходилася у стані спокою. Додатково відомо, що $r_3 = 0{,}5\,R_3$, $r_4 = 0{,}3$ м, $f = 0{,}2$, $S = 1$ м.

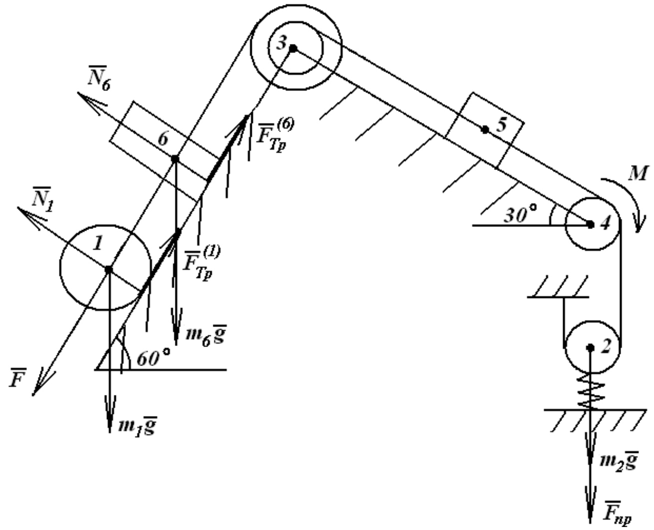

Рисунок 8.2 – Схема до прикладу 8.2

Розв’язання.

Увага! Звернемо увагу на те, що у всіх варіантах для самостійного виконання *РГЗ* з метою зменшення обчислювальної роботи маси трьох тіл системи (різних в різних варіантах) приймаються рівними нулю. Це означає, що дані тіла виконують функції зв’язку між трьома іншими тілами системи (зв’язують їх швидкості і переміщення), для них не треба обчислювати кінетичну енергію (вона нульова), не виконують роботи сили ваги цих тіл і відповідно не виникають для таких тіл сили тертя.

За схемою, яка детально описана в прикладах 1, 2 МК Д-9 і першому прикладі *РГЗ* Д-9 проведемо необхідні обчислення.

Увага! Хоча в задачі необхідно знайти кутову швидкість блока 4, більш зручно в якості базової взяти швидкість V_1 тіла 1, через яку виразяться усі інші швидкості, в тому числі і ω_4.

2. В даній задачі замість формули (81) записуємо таку:

$$T = T_1 + T_2 + T_4 + T_6. \tag{89}$$

Увага! Більш зручно обчислювати кінетичні енергії не в порядку їх нумерації, а так, як тіла слідують одне за одним.

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}I_{Z1}\omega_1^2;$$

$$I_{Z1} = \frac{1}{2}m_1R_1^2, \omega_1 = \frac{V_1}{R},$$

тоді:

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}m_1R_1^2\cdot\frac{V_1^2}{R_1^2} = \frac{3}{4}m_1V_1^2;$$

$$T_6 = \frac{1}{2}m_6V_1^2;$$

$$T_3 = 0,$$

але для переходу до тіл 2 і 4 треба обчислити кутову швидкість тіла 3 і лінійну швидкість нитки для тіл 5, 4 і 2. З рис. 8.2 видно, що швидкість ободу блока 3 дорівнює V_1, тоді:

$$\omega_3 = \frac{V_1}{R_3},$$

а лінійна швидкість правої частини нитки з урахуванням того, що r_3 = 0,5 R_3 буде такою:

$$V_5 = r_3\cdot\omega_3 = 0{,}5R_3\frac{V_1}{R_3} = 0{,}5V_1.$$

Тепер кутова швидкість блоку 4 знаходиться так:

$$\omega_4 = \frac{V_5}{r_4} = 0{,}5\frac{V_1}{r_4} = \frac{V_1}{2r_4}. \tag{90}$$

Ця формула буде нам потрібна для знаходження остаточної відповіді після визначення V_1:

$$T_4 = \frac{1}{2} I_{Z4} \cdot \omega_4^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m_4 r_4^2 \frac{V_1^2}{4r_4^2} = \frac{1}{16} m_4 V_1^2.$$

Увага! Для рухомого блока 2 миттєвим центром швидкостей буде точка дотику до нерухомої лівої нитки і оскільки відома швидкість точки ободу (вона рівна $0{,}5V_1$), то швидкість центра цього блоку і його кутова швидкість знаходиться так:

$$V_2 = \frac{1}{2} V_5 = \frac{V_1}{4}, \omega_2 = \frac{V_1}{4r_2}.$$

Тоді кінетична енергія буде такою:

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 V_2^2 + \frac{1}{2} I_{Z2} \omega_2^2 = \frac{1}{2} m_2 \frac{V_1^2}{16} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \frac{V_1^2}{16r_2^2} = \frac{3}{64} m_2 V_1^2.$$

Остаточно кінетична енергія системи в довільний момент її руху визначається наступною формулою:

$$T = \frac{3}{4} m_1 V_1^2 + \frac{3}{64} m_2 V_1^2 + \frac{1}{16} m_4 V_1^2 + \frac{1}{2} m_6 V_1^2 =$$

$$= \frac{1}{64}(48m_1 + 3m_2 + 4m_4 + 32m_6) \cdot V_1^2. \quad (91)$$

Якщо підставити сюди задані маси, будемо мати:

$$T = 5{,}84 V_1^2. \quad (92)$$

3. Враховуючи показані на рис. 8.2 зовнішні сили і заданий момент опору і приймаючи до уваги, що не виконують роботи з описаних раніше причин такі сили $\bar{N}_1, \bar{N}_6, m_4\bar{g}$, роботу зовнішніх сил обчислимо за такою формулою:

$$A^e = A_F + A_{m_1 g} + A_{F_{Tp}^{(1)}} + A_{m_6 g} + A_{F_{Tp}^{(6)}} + A_M + A_{m_2 g} + A_{F_{np}}; \quad (93)$$

$$A_F = \int_0^S 80(1 + 4x)dx = 80S + 160S^2;$$

$$A_{m_1 g} = m_1 g h_1 = m_1 g \cdot S \sin 60° = 0{,}86 m_1 g \cdot S;$$

$$A_{F_{Tp}^{(1)}} = -fm_1g \cdot cos\,60\,° \cdot S = -0{,}1m_1g \cdot S;$$

$$A_{m_6g} = m_6gh_6 = m_6g \cdot S\,sin\,60\,° = 0{,}86m_6g \cdot S;$$

$$A_{F_{Tp}^{(6)}} = -fm_6g\,cos\,60\,° \cdot S = -0{,}1m_6g \cdot S;$$

$$A_M = -M\phi = -M\frac{0{,}5S}{r_4} = -\frac{M}{2r_4} \cdot S;$$

$$A_{m_2g} = -m_2g\frac{1}{4}S = -0{,}25m_2g \cdot S;$$

$$A_{F_{np}} = -\frac{c}{2} \cdot \frac{S^2}{16} = -\frac{1}{32}c \cdot S^2.$$

Тоді сумарна робота згідно з (93) буде такою:

$$A^e = \left(160 - \frac{c}{32}\right) \cdot S^2 + [80 + g(0{,}86m_1 - 0{,}1m_1 +$$

$$+0{,}86m_6 - 0{,}1m_6 - \frac{M}{2r_4} - 0{,}25m_2)]S. \qquad (94)$$

Якщо сюди підставити задані параметри, то будемо мати:

$$A^e = 155S^2 + 129S. \qquad (95)$$

4. Із робочої формули (71) підстановкою (92) і (95) приходимо до рівняння для визначення V_1:

$$5{,}84V_1^2 = 155S^2 + 129S. \qquad (96)$$

$$V_1 = \sqrt{\frac{155S^2 + 129S}{5{,}84}};$$

при $S = 1$ м

$$V_1 = \sqrt{\frac{155 + 128}{5{,}8}} = 7\ \text{м/с}.$$

Тепер за формулою (90) знаходимо кутову швидкість блоку 4:

$$\omega_4 = \frac{7}{2 \cdot 0{,}3} = \frac{7}{0{,}6} = 11{,}7\ c^{-1}.$$

Аналогічно тому, як це робилося в двох попередніх прикладах, виходячи з формули (96) можна знайти прискорення будь-якого тіла системи, а також час, за який тіло 1 пройшло задане переміщення *S*.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАНЬ

1. Пожуєв В.І. Конспект лекцій з теоретичної механіки. Ч.ІІ. Запоріжжя, 2007. –162 с.

2. Пожуєв А.В., Пожуєв В.І. Теоретична механіка . Ч.ІІІ. Додаткові матеріали до конспекту лекцій. Запоріжжя, Статус, 2020. – 236 с.

3. Пожуєв А.В., Пожуєв В.І., Шевченко В.Г. Методичні вказівки до виконання контрольних робіт і розрахунково-графічних завдань на тему «Кінематика складного руху точки». Запоріжжя, 2020. –60 с.

4. Пожуєв А.В., Пожуєв В.І., Шевченко В.Г. Методичні вказівки до виконання контрольних робіт і розрахунково-графічних завдань на тему «Кінематика плоскопаралельного руху твердого тіла», Запоріжжя, 2020. –76 с.

5. Пожуєв А.В., Пожуєв В.І., Шевченко В.Г. Методичні вказівки до розв’язання основної задачі динаміки точки аналітичними методами, Запоріжжя, 2020. –53 с.