МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Запорізький національний технічний університет

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ
(Елементи математичної теорії поля)

для студентів спеціальностей
«Радіотехніка» та «Інформаційні мережі зв’язку»
усіх форм навчання

2016

Конспект лекцій з вищої математики (Елементи математичної теорії поля) для студентів спеціальностей «Радіотехніка» та «Інформаційні мережі зв’язку» усіх форм навчання / Укл.: В.М. Онуфрієнко, Н.В. Сніжко, Н.М. Антоненко. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2016. – 42 с.

Укладачі: В.М. Онуфрієнко, професор, д.ф.-м.н.
Н.В. Сніжко, доцент, к.ф.-м.н.
Н.М. Антоненко, ст. викл., к.ф.-м.н.

Експерт спеціальності: В.С. Кабак, доцент, к.т.н.

Рецензент: В.П. П’янков, доцент, к.ф.-м.н.

Відповідальний за випуск: В.М. Онуфрієнко, професор, д.ф.-м.н.

Затверджено
на засіданні кафедри вищої та
загальної математики ЗНТУ
Протокол № 8
від 23.03.2016

ЗМІСТ

ВСТУП

Явища і процеси фізики, зокрема радіотехніки, вивчаються математичними методами після побудови відповідної математичної моделі. Математичний апарат у вигляді рівнянь, що пов'язують введену в розгляд міру кожної фізичної властивості з експериментально спостережуваними характеристиками явища і процесу є основою для конструювання математичної моделі. Так моделювались такі скалярні величини як довжина, площа, об'єм, маса, час, температура, електричний заряд та його момент, енергія тощо, що показують, у скільки разів міра даної властивості розглянутого тіла більше деякого одиничного масштабу.

Для моделювання швидкості зміни явищ і процесів та їх взаємодії у часі й просторі необхідно розглядати сукупність векторних і тензорних характеристик. Так склалось уявлення про **математичне поле як області простору з сукупністю значень деякої фізичної величини у кожній точці**.

Розділ «Елементи математичної теорії поля» є обов'язковим для вивчення у другому семестрі для студентів радіотехнічних та електротехнічних напрямків інженерної підготовки за бакалаврською та подальшою магістерською програмами технічного університету.

У наведених матеріалах студентам пропонуються для самостійного опанування: основні теоретичні відомості про математичний апарат теорії поля, розв'язування типових задач та задачі для самостійної роботи. З цих задач формуються типовий розрахунок (ТР) та контрольна робота (КР) (числове значення N дорівнює номеру варіанта).

При складанні задач авторами був використаний матеріал, що міститься як у відомих курсах і збірниках задач (див. літературу), так і в традиційно використовуваних у лекціях для студентів електротехнічних і радіотехнічних спеціальностей авторських матеріалах професора Онуфрієнко В.М.

Наведений у конспекті лекцій матеріал може також використовуватись студентами денної та заочної форм навчання для виконання на персональних комп'ютерах курсових та дипломних робіт за фахом.

1 СКАЛЯРНЕ ПОЛЕ. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ

1.1 Основні поняття

Скалярне поле **–** **м**ножина E точок M простору разом з приписаними цим точкам числами $F(M)$.

Моделювання скалярного поля здійснюється ***функцією*** $F(M)$, що дорівнює числовому значенню поля у точці M множини E. Для дослідження скалярного поля і побудови графіку застосовуються загальні поняття і методи математичного аналізу (вектор, границя, похідна, інтеграл тощо).

Приклади скалярних полів: скалярне поле температури $T = F(V)$ у просторі V, зайнятому нагрітим тілом; скалярне поле тиску $P = F(V)$ в об‘ємі V; скалярне поле електричного потенціалу $U = F(V)$ у просторі V навколо електричного заряду тощо.

Лінії та поверхні рівня – визначають відповідно сім'ю ліній та поверхонь, в усіх точках яких скалярне поле має одне і те ж значення C.

Рівняння ліній рівня для плоского поля: $F(M(x, y)) = C$.

Рівняння поверхонь рівня для просторового поля $F(M(x, y, z)) = C$.

Приклади ліній рівня фізичних скалярних полів: ізотерми (лінії або поверхні сталих однакових температур), ***ізобари*** (лінії або поверхні однакового тиску), ***еквіпотенціальні лінії або поверхні*** (лінії або поверхні однакового потенціалу).

Градієнт скалярного поля $u(M) = u(x, y, z)$ визначається рівністю

$$grad u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

Оператор Гамільтона (векторний диференціальний оператор, оператор "набла") – символічний вираз $\vec{\nabla}$, де

$\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$, що формою нагадує вектор у базисі $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, де замість координат вектора записані оператори диференціювання $\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}$.

1.2 Розв'язування типових задач

1.2.1. Знайти лінії рівня плоского поля $u=xy$.

Розв'язок. Лінії рівня визначаються рівнянням $xy=C$ і є рівносторонніми гіперболами.

Відповідь: лінії рівня $xy=C$.

1.2.2. Знайти поверхні рівня скалярного поля: $u=arctg\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$.

Розв'язок. Для даного скалярного поля поверхні рівня визначаються рівнянням

$$arctg\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}=C,\ tg\left(arctg\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right)=tgC,$$

$$\frac{x^2+y^2}{z^2}=a^2\ ,\ x^2+y^2-a^2z^2=0,$$

де $a=tg\,C\ ,-\frac{\pi}{2}<C<\frac{\pi}{2}$.

Отже, поверхнями рівня є кругові конуси з віссю симетрії *Oz*.

Відповідь: поверхнями рівня є кругові конуси з віссю симетрії $Oz\ \ x^2+y^2-a^2z^2=0\ \ a=tg\,C\ ,-\frac{\pi}{2}<C<\frac{\pi}{2}$.

1.2.3. Знайти градієнт скалярного поля $u(x,y)=\sqrt{4+x^2+y^2}$ у точці $M(2;1)$.

Розв'язок. Для плоского поля:

$$gradu = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}\ .$$

Обчислюємо частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ у точці $M(2;1)$.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = \left.\frac{x}{\sqrt{4+x^2+y^2}}\right|_M = \frac{2}{3},\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = \left.\frac{y}{\sqrt{4+x^2+y^2}}\right|_M = \frac{1}{3}\ .$$

Отже: $gradu = \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j}$.

Відповідь: $gradu = \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j}$

1.3 Задачі для самостійної роботи

1.3.1. Знайти та побудувати лінії рівня скалярного поля $u = Q/r$ (потенціал електричного поля заряду Q), якщо $Q = N$.

1.3.2. Знайти та побудувати поверхні рівня скалярного поля $u = \arcsin\frac{Nx}{\sqrt{y^2+z^2}}$.

1.3.3. Знайти градієнт скалярного поля $u(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + Nz^2 - xy - 4x + 2y - 4z$ у точці $M(1,-1,2)$.

1.3.4. У точці $(0;0)$ знайти напрямок, у якому функция $z = x\sin y + y\cos x$ змінюється найшвидше.

1.3.5. Знайти точки, в яких модуль градієнта скалярного поля $u = \ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ дорівнює одиниці.

1.3.6. Для двох функцій $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $z = x - 3y + \sqrt{3xy}$ знайти кут між градієнтами цих функцій у точці $(N;4)$.

2 ВЕКТОРНЕ ПОЛЕ. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ

2.1 Основні поняття

Векторне поле визначено, якщо кожній точці M області E поставлено у відповідність деякий вектор $\vec{a}(M)$.

Приклади векторних полів: силове поле деякої сили $\vec{F}$, поле швидкостей $\vec{v}$ рідини.

В декартовій системі координат векторне поле $\vec{a}(M)$ в області E задається ***вектор-функцією***, що визначається трьома скалярними функціями $a_x = a_x(x, y, z)$, $a_y = a_y(x, y, z)$, $a_z = a_z(x, y, z)$, які є неперервними разом зі своїми частинними похідними:

$$\vec{a}(M) = a_x(x, y, z)\vec{i} + a_y(x, y, z)\vec{j} + a_z(x, y, z)\vec{k}.$$

Якщо координати вектор-функції $\vec{a}(M)$ є функціями скалярного аргументу t: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, то $\vec{a}(M)$ є вектор-функцією скалярного аргументу

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j} + a_z(t)\vec{k}.$$

Годограф – геометричне місце точок, що описує у просторі кінець вектора $\vec{a}(M)$.

Сталий вектор $\vec{A}$ називається г***раницею*** векторної функції $\vec{a}(t)$ при $t \to t_0$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, таке, що для всіх $t \neq t_0$, які задовольняють умові $|t - t_0| < \delta$, виконується нерівність $\left|\vec{a}(M) - \vec{A}\right| < \varepsilon$.

Позначення: $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{a}(t) = \vec{A}$.

Похідна векторної функції $\vec{a}(M)$ скалярного аргументу - границя (якщо вона існує) відношення приросту функції $\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)$ до приросту аргументу Δt при $\Delta t \to 0$:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{a}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{a}(t+\Delta t)-\vec{a}(t)}{\Delta t}.$$

Позначення: $\dfrac{d\vec{a}(t)}{dt}$.

Диференціювання векторної функції

Нехай $\vec{a}=\vec{a}(t)$, $\vec{b}=\vec{b}(t)$ – неперервні та диференційовні вектор-функції, $m=m(t)$ – скалярна неперервна та диференційовна функція $\vec{c}$ – сталий вектор.

Похідна сталого вектора	$\dfrac{d\vec{c}}{dt}=0$.
Похідна суми (різниці) векторних функцій	$\dfrac{d\left(\vec{a}\pm\vec{b}\right)}{dt}=\dfrac{d\vec{a}}{dt}\pm\dfrac{d\vec{b}}{dt}$
Похідна добутку скалярної функції на векторну функцію	$\dfrac{d\left(m\,\vec{a}\right)}{dt}=m\dfrac{d\vec{a}}{dt}+\vec{a}\,\dfrac{dm}{dt}$
Похідна скалярного добутку векторних функцій	$\dfrac{d\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{dt}=\left(\dfrac{d\vec{a}}{dt},\vec{b}\right)+\left(\vec{a},\dfrac{d\vec{b}}{dt}\right)$

Інтегрування вектор- функції

Вектор-функція $\vec{A}(t)$ називається ***первісною*** для вектор-функції $\vec{a}(t)$ при $t\in(t_0,t_1)$, якщо $\vec{A}(t)$ диференційовна та $\dfrac{d\vec{A}(t)}{dt}=\vec{a}(t),\ t\in(t_0,t_1)$.

Невизначений інтеграл від векторної функції $\vec{a}(t)$ – це сукупність усіх первісних для $\vec{a}(t)$.

Позначення: $\int\vec{a}(t)dt=\vec{A}(t)+\vec{c}$,

де $\vec{A}(t)$ – будь-яка первісна для $\vec{a}(t)$, $\vec{c}$ – довільний сталий вектор.

Визначений інтеграл від векторної функції $\vec{a}(t)$ на відрізку $[t_0, T]$ – це границя векторних інтегральних сум

$$\lim_{\Delta t \to 0} \sum_{k=1}^{n-1} \vec{a}(\tau_k)\Delta t_k,\ \tau_k \in [t_k, t_{k+1}]$$

за умови прямування до нуля довжини Δt найбільшого з відрізків $[t_k, t_{k+1}]$ розбиття $(k = 0,1,2,\dots,n-1)$ відрізку $[t_0, T]$.

Позначення: $\int\limits_{t_0}^{T} \vec{a}(t)dt$.

Обчислення: $\int\limits_{t_0}^{T} \vec{a}(t)dt = \vec{A}(T) - \vec{A}(t_0)$.

Векторна лінія даного поля $\vec{a}(t)$ – це лінія l така, що вектор $\vec{a}(M)$ є дотичним до неї у кожній точці.

Сукупність усіх векторних ліній векторного поля $\vec{a}(M) = a_x(x,y,z)\vec{i} + a_y(x,y,z)\vec{j} + a_z(x,y,z)\vec{k}$ визначається системою диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx}{a_x(x,y,z)} = \frac{dy}{a_y(x,y,z)} = \frac{dz}{a_z(x,y,z)}$$

Фізична інтерпретація: якщо $\vec{a}(M)$ – стаціонарне поле швидкостей рідини, то в цьому полі векторні лінії збігаються з траєкторіями руху частинок рідини – ***лінії течії***.

У векторному полі $\vec{a}(M) = gradF(M)$ векторні лінії перпендикулярні до поверхонь рівня $F(x,y,z) = C$, уздовж цих ліній функція $F(M)$ змінюється найшвидше.

2.2 Розв'язування типових задач

2.2.1. Побудувати годограф вектор-функції $\vec{r} = t\vec{i} + t\vec{j} + t^3\vec{k}$.

Розв'язок. З формули запису радіус-вектора $\vec{r} = t\vec{i} + t\vec{j} + t^3\vec{k}$

маємо зв‘язок $x = t$, $y = t$, $z = t^3$. Звідси: $y = x$, $z = x^3$. Лінія перетину цих поверхонь визначає годограф вектора $\vec{r}(t)$.

Відповідь: годограф заданої вектор-функції – лінія перетину поверхонь $y = x$, $z = x^3$.

2.2.2. Знайти границю $\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{\sin t}{t}\vec{i} + \dfrac{\cos t - 1}{2t}\vec{j} + e^{\frac{tgt}{t}}\vec{k}\right)$

Розв'язок. Оскільки $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t} = 1$, $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{tgt}{t} = 1$, маємо

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\vec{i} + \frac{\cos t - 1}{2t}\vec{j} + e^{\frac{tgt}{t}}\vec{k}\right) = \vec{i} + e\vec{k} .$$

Відповідь: $\vec{i} + e\vec{k}$.

2.2.3. Знайти похідну $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$, якщо $\vec{r} = \cos^2 t\,\vec{i} + b\sin^2 t\,\vec{j}$.

Розв'язок.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -2a\cos t\sin t\,\vec{i} + 2b\sin t\cos t\,\vec{j} = -a\sin 2t\,\vec{i} + b\sin 2t\,\vec{j} .$$

Відповідь: $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = -a\sin 2t\,\vec{i} + b\sin 2t\,\vec{j}$

2.2.4. Знайти невизначений інтеграл від векторної функції $\vec{r} = \cos t\,\vec{i} + e^t\,\vec{j} + \vec{k}$.

Розв'язок.

$$\int \vec{a}(t)dt = \int\left(\cos t\,\vec{i} + e^t\,\vec{j} + \vec{k}\right)dt = \sin t\,\vec{i} + e^t\,\vec{j} + t\vec{k} .$$

Відповідь: $\sin t\,\vec{i} + e^t\,\vec{j} + t\vec{k}$.

2.2.5. Знайти векторні лінії поля

$$\vec{F}(M)=ax\vec{i}-ay\vec{j}-2az\vec{k},\ (a=const)$$

Розв'язок. Диференціальні рівняння векторних ліній для даного поля:

$$\frac{dx}{ax}=-\frac{dy}{ay}=-\frac{dz}{2az}.$$

Розв‘язуємо перше рівняння $\frac{dx}{ax}=-\frac{dy}{ay}$, його розв‘язок

$\ln|x|+\ln|y|=\ln|c_1|$, звідки $xy=c_1$.

З рівняння $\frac{dy}{ay}=\frac{dz}{2az}$ маємо розв‘язок $\ln|y|=\frac{1}{2}\ln|z|+\frac{1}{2}\ln|c_2|$, $y^2=c_2 z$. Отже, векторними лініями поля є лінії перетину гіперболічних циліндрів з параболічними: $\begin{cases} xy=c_1, \\ y^2=c_2 z. \end{cases}$

Відповідь: векторні лінії поля – лінії перетину гіперболічних циліндрів з параболічними: $\begin{cases} xy=c_1, \\ y^2=c_2 z. \end{cases}$

2.3 Задачі для самостійної роботи

2.3.1. Побудувати годограф вектора $\vec{a}=Nt\,\vec{i}+t^2\,\vec{j}-t^5\,\vec{k}$.

2.3.2. Знайти границю $\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{\sin^2 t}{N\,t^2}\vec{i}+\frac{\cos t-1}{Nt}\vec{j}+N\vec{k}\right)$.

2.3.3. Для вектора $\vec{r}=\vec{r}(t)$ знайти:

а) $\frac{d}{dt}\left(\vec{r}^{\,N}\right)$; б) $\frac{d}{dt}\left(N\,\vec{r},\frac{d\vec{r}}{dt}\right)$; в) $\frac{d}{dt}\left[N\,\vec{r},\frac{d\vec{r}}{dt}\right]$.

2.3.4. Знайти невизначений інтеграл від векторної функції $\vec{a}(t)=t\,e^t\,\vec{i}-\sin^2 t\;\vec{j}+\frac{1}{1+t^2}\vec{k}$.

2.3.5. Обчислити визначений інтеграл від векторної функції $\int_0^{\pi} \vec{a}(t)dt$, де $\vec{a}(t) = \sin^2 t \cos t \cdot \vec{i} + \cos^2 t \sin t \cdot \vec{j} + \vec{k}$.

2.3.6. Знайти векторні лінії векторних полів:

а) $\vec{a}(M) = \left(x^2 - y^2 - z^2\right)\vec{i} + 2xy\,\vec{j} + Nxz\,\vec{k}$;

б) $\vec{a}(M) = z\,\vec{j} - y\,\vec{k}$.

2.3.7. Знайти векторну лінію поля $\vec{a}(M) = x^2\vec{i} - y^3\vec{j} + z^2\vec{k}$, що проходить через точку $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$.

2.3.8. Знайти векторні лінії магнітного поля нескінченого провідника струму $\vec{H} = -\frac{2I\,y}{r^2}\vec{i} + \frac{2I\,x}{r^2}\vec{j}$.

3 ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ОПЕРАЦІЇ В ОПИСАХ ДЖЕРЕЛ ПОЛЯ

3.1 Поверхневі інтеграли І та ІІ роду

Нехай $f(x, y, z)$ – неперервна функція, що задана на гладкій поверхні S: $z=\varphi(x, y)$, визначеній у деякій області D площини xOy.

Поверхневий інтеграл І роду – границя інтегральної суми

$$\lim_{\max d_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta S_k$$

де ΔS_k – площа k-го елементу поверхні S з точкою (ξ_k, η_k, ζ_k), d_k – діаметр цього елемента, $k=\overline{1,n}$.

Позначення: $$\iint\limits_S f(x, y, z)\,dS.$$

Поверхневий інтеграл І роду не залежить від вибору сторони поверхні інтегрування.

Обчислення поверхневого інтеграла І роду через подвійний інтеграл по проекції D поверхні S на площину xOy.

Якщо поверхня S задана функцією $z=\varphi(x, y)$, тоді справедлива наступна формула для обчислення ***поверхневого інтегралу першого роду***:

$$\iint\limits_S f(x, y, z)\,dS = \iint\limits_D f(x, y, \varphi(x, y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy,$$

де область D – проекція поверхні S на площину xOy.

Нехай S є двосторонньою поверхнею, $f(x, y, z)$ – функція, що задана на визначеній стороні поверхні S^+.

Поверхневий інтеграл ІІ роду по визначеній стороні поверхні S^+ – границя інтегральної суми:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta D_k(x, y),$$

де $\Delta D_k\left(x, y\right)$ – площа проекції елемента $\Delta S_k\left(x, y\right)$ поверхні на площину xOy, за умови, що діаметр цього елемента $\max d_k \to 0$. Позначення:

$$\iint_{S^+} f\left(x, y, z\right)dxdy.$$

Для векторного поля $\vec{a}\left(a_x, a_y, a_z\right)$ у застосуваннях виникає поверхневий інтеграл ІІ роду

$$\iint_{S^+} a_x dydz + a_y dzdx + a_z dxdy.$$

Якщо S^+ є стороною поверхні S з нормальним вектором, що означається напрямними косинусами $\vec{n}\left(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\right)$, то ***зв'язок поверхневих інтегралів І та ІІ роду*** має такий вигляд:

$$\iint_{S^+} a_x dydz + a_y dzdx + a_z dxdy = \iint_{S}\left(a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma\right)dS.$$

При переході на іншу сторону S^- поверхні S останній інтеграл змінює знак на протилежний.

Для поверхні з рівнянням у неявному вигляді $F\left(x, y, z\right) = 0$ напрямні косинуси (знак узгоджується зі стороною поверхні S) обчислюються за формулами:

$$\cos\alpha = \pm\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos\beta = \pm \frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos\gamma = \pm \frac{\dfrac{\partial F}{\partial z}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}.$$

3.2 Потік векторного поля

Потік Π векторного поля $\vec{a}(M)$ через орієнтовану з нормаллю $\vec{n}$ поверхню S визначається як поверхневий інтеграл другого роду:

$$\Pi = \iint_S (\vec{a}, \vec{n}) ds.$$

Якщо визначити векторний елемент поверхні

$$\vec{n} ds = dydz\,\vec{i} + dxdz\,\vec{j} + dxdy\,\vec{k},$$

то для поля $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ потік визначається поверхневим інтегралом другого роду від скалярного добутку $(\vec{a}, \vec{n})$:

$$\Pi = \iint_S (\vec{a}, \vec{n}) ds = \iint_S a_x dydz + a_y dxdz + a_z dxdy.$$

3.3 Формула Остроградського-Гаусса

Якщо S – замкнена гладка поверхня, яка обмежує область V, і $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ – функції, неперервні разом зі своїми похідними в області V, тоді справедлива ***формула Остроградського-Гаусса***:

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=\iint\limits_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy,$$

де поверхневий інтеграл розглядається на зовнішній стороні поверхні S, що обмежує область V.

3.4 Дивергенція векторного поля

Дивергенція (розбіжність) векторного поля $\vec{a}\left(a_x, a_y, a_z\right)$ в прямокутних координатах визначається виразом

$$div\vec{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Таким чином, теорему Остроградського-Гаусса можна сформулювати у такому вигляді: потік векторного поля через замкнену поверхню S дорівнює потрійному інтегралу від дивергенції векторного поля по об‘єму V, обмеженому цією поверхнею, у векторній формі записується наступним чином:

$$\iiint\limits_V div\vec{a}\,dv=\iint\limits_S (\vec{a},\vec{n})ds.$$

Звідси отримуємо ***інваріантне означення дивергенції***. Дивергенція поля $\vec{a}$ в точці M є об‘ємною густиною потоку вектора $\vec{a}$ у цій точці:

$$div\vec{a}=\lim_{V\to M}\frac{\iint\limits_S \left(\vec{a},\vec{n}\right)ds}{V}.$$

Якщо $div\vec{a}>0$, то точки векторного поля $\vec{a}\left(M\right)$ називаються ***джерелами*** (витоками) поля.

Якщо $div\vec{a}<0$, то точки векторного поля $\vec{a}\left(M\right)$ називаються ***стоками*** поля.

3.5 Третє і четверте рівняння Максвелла

Диференціальні рівняння $div\vec{D} = \rho$ є, $div\vec{B} = 0$ є відповідно третім і четвертим рівняннями з системи рівнянь Максвелла ($\vec{D}$ та $\vec{B}$ – відповідно вектори електричної та магнітної індукції, ρ – густина електричних зарядів).

Після інтегрування цих рівнянь по об‘єму V та використання теореми Остроградського-Гаусса можна сформулювати теорему Гауса в електродинаміці:

$$\int_S \left(\vec{D}, d\vec{s}\right) = q$$

(потік вектора електричної індукції $\vec{D}$ через замкнуту поверхню S дорівнює повному заряду q, що міститься в S). Електричні силові лінії починаються на заряді $q > 0$ і закінчуються на заряді $q < 0$;

$$\int_S \left(\vec{B}, d\vec{s}\right) = 0$$

(потік вектора магнітної індукції $\vec{B}$ через замкнуту поверхню S дорівнює нулю). Магнітні силові лінії або замкнуті, або йдуть у нескінченність.

Поле $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ точкового заряду q з теореми Гаусса

$$D\int_S ds = D \cdot 4\pi r^2 = q\,,\ D = \frac{q}{4\pi r^2}\,,\ E = \vec{r}_0\,\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,.$$

3.6 Розв'язування типових задач

3.6.1. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + z\vec{k}$ через замкнену поверхню S, що складається з поверхні конуса $x^2 + y^2 = z^2$ та площини $z = 1$.

Розв'язок. Знаходимо

$$div\vec{a}\left(M\right) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(y\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-x\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(z\right) = 1\,,$$

$$\Pi = \iiint_S div\vec{a}dv = \iiint_S dv = V ,$$

де V – об‘єм конуса,$V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 H$.

Остаточно маємо $\Pi = \pi/3$.

Відповідь: $\Pi = \pi/3$

3.6.2. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = xy^2\vec{i} + yz^2\vec{j} + zx^2\vec{k}$ через поверхню сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Розв'язок. За умовою задачі поверхня є замкненою, отже, для обчислення потоку можна застосувати формулу Остроградського-Гаусса:

$$div\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = y^2 + z^2 + x^2 = \rho^2 ,$$

$$\Pi = \iiint_G \rho^2 \, dv.$$

У сферичних координатах:

$$\Pi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0 \sin\theta d\theta \int_0^R \rho^4 d\rho = \frac{4}{5}\pi R^5.$$

Відповідь: $\Pi = \dfrac{4}{5}\pi R^5$.

3.7 Задачі для самостійної роботи

3.7.1. Знайти дивергенцію вектора $\vec{a} = \left(x - y^2\right)\vec{i} + x^2\vec{j} + xy\vec{k}$.

У завданнях 3.7.2 та 3.7.3 обчислити інтеграли за допомогою формули Остроградського Гаусса.

3.7.2. $\iint_S \left(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma\right)ds$, де S – поверхня еліпсоїда $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

3.7.3. $\iint\limits_S \left(x^3\cos\alpha + y^3\cos\beta + z^3\cos\gamma\right)ds$, де S – поверхня сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

3.7.4. Обчислити потік векторного поля $\bar{a} = (2x+1)\bar{i} + (3y+x)\bar{j} + (2y-z)\bar{k}$ через зовнішню поверхню піраміди, утворену площиною $P:\ 2x - 3y + 2z = 6$ та координатними площинами.

3.7.5. Обчислити потік вектора $\bar{a} = \left(1 + 2x^2\right)\bar{i} + y^2\,\bar{j} - z\,\bar{k}$ крізь замкнену поверхню $\sigma : \left\{z^2 = x^2 + y^2,\ z = 0,\ z = 4\right\}$ (нормаль зовнішня).

4 ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ОПЕРАЦІЇ В ОПИСАХ СТРУКТУРИ ПОЛЯ

4.1 Криволінійні інтеграли I та II роду

Нехай $f(x,y,z)$ – неперервна функція, що задана на гладкій кривій L.

Криволінійний інтеграл I роду – границя інтегральної суми

$$\lim_{\substack{\max \Delta l_k \to 0 \\ 1\le k\le n}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta l_k ,$$

де Δl_k – довжина k-го елемента кривої l_k з точкою (ξ_k, η_k, ζ_k), $k=\overline{1,n}$.

Позначення: $$\int_L f(x,y,z)dl .$$

Обчислення криволінійних інтегралів I роду.

Якщо крива AB задана параметричними рівняннями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ $t\in[\alpha,\beta]$, де $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ – неперервні на відрізку $[\alpha,\beta]$ функції, то ***криволінійний інтеграл першого роду*** обчислюється за формулою:

$$\int_L f(x,y,x)dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt .$$

Нехай задана векторна функція $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, де $a_x=a_x(x,y,z)$, $a_y=a_y(x,y,z)$, $a_z=a_z(x,y,z)$ – неперервні функції в точках орієнтованої кривої L_{AB}. Розіб’ємо L_{AB} у напрямі від A до B на n елементарних дуг l_i, та побудуємо вектори $\Delta\vec{l_i}=\Delta x_i\vec{i}+\Delta y_i\bar{j}+\Delta z_i\bar{k}$, де Δx_i, Δy_i, Δz_i – проекції векторів $\Delta\vec{l_i}$ на осі координат. На кожній елементарній дузі l_i оберемо точку $M_i\left(x_i, y_i, z_i\right)$ та складемо інтегральну суму

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{a}\left(M_i\right) \cdot \Delta \vec{l}_i .$$

Границя цієї інтегральної суми при умові, що всі $\left|\Delta \vec{l}_i\right| \to 0$ називається ***криволінійним інтегралом другого роду від векторної функції*** $\vec{a}\left(M\right)$ по кривій L_{AB} і позначається

$$\int\limits_{L_{AB}} \left(\vec{a}, d\vec{l}\right) = \int\limits_{L_{AB}} a_x dx + a_y dy + a_z dz =$$

$$= \lim_{\max\left|\Delta l_i\right| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{a}\left(M_i\right) \cdot \Delta \vec{l}_i .$$

4.2 Циркуляція векторного поля вздовж контуру. Формула Стокса

Циркуляцією $Ц$ ***векторного поля*** $\vec{a}(M)$ називається криволінійний інтеграл другого роду вздовж замкненого контуру C

$$Ц = \oint\limits_{C} a_x dx + a_y dy + a_z dz .$$

Формула Стокса. Нехай в області G визначено векторне поле $\vec{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right)$ з неперервними частинними похідними компонент; C – замкнений контур, S – будь-яка поверхня натягнута на контур C, $\vec{n}\left(M\right) = \left(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\right)$ – одиничний вектор нормалі на обраній стороні поверхні S. Тоді справедлива ***формула Стокса***

$$\oint\limits_{C} a_x dx + a_y dy + a_z dz =$$

$$= \iint\limits_{S} \left(\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \cos\beta + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \cos\gamma \right) ds$$

Ліва частина формули Стокса є циркуляцією векторного поля $\vec{a}$ вздовж контуру C, а права частина – потік через поверхню S деякого похідного з $\vec{a}$ векторного поля з координатами $\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}$; $\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}$; $\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}$.

З урахуванням формул для проекцій ds на координатні площини

$$\cos\alpha ds = dydz,\ \cos\beta ds = dxdz,\ \cos\gamma ds = dxdy$$

формулу Стокса можна записати у вигляді

$$\oint_C a_x dx + a_y dy + a_z dz =$$

$$\iint_S \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) dxdz + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) dxdy$$

4.3 Ротор векторного поля

Циркуляція поля $\vec{a}(M)$ вздовж контуру C характеризує вихрову структуру векторного поля вздовж усього контуру. Вектор ротор є локальною характеристикою поля.

Щільність циркуляції в точці M_0 характеризується границею

$$\lim_{\substack{C \to M_0 \\ (S \to 0)}} \frac{\int_C (\vec{a}, d\vec{r})}{S}$$

за умови стягування контуру C в точку M_0, коли площа S, що обмежена контуром C, прямує до нуля.

Якщо векторне поле $\vec{a}$ просторове, то вводять поняття про вихрову структуру поля в деякому напрямі $\vec{n}$.

Ротор векторного поля $\vec{a}$ в точці M_0 (позначається $rot\,\vec{a}$) – це вектор, проекція якого на напрямок $\vec{n}$ дорівнює щільності циркуляції векторного поля по контуру C плоскої області G, що є перпендикулярною цьому напрямку. Отже,

$$Пр_{\vec{n}}\, rot\,\vec{a} = \left(\vec{n}, rot\,\vec{a}\right) = \lim_{\substack{C \to M_0 \\ (S \to 0)}} \frac{\int\limits_C \left(\vec{a}, d\vec{r}\right)}{S}.$$

Таке означення ротора узгоджується з формулою Стокса у векторній формі

$$\oint\limits_C \left(\vec{a}, d\vec{r}\right) = \iint\limits_S \left(\vec{n}, rot\,\vec{a}\right) ds$$

(циркуляція векторного поля вздовж замкненого контуру C, що обмежує поверхню S, дорівнює потоку ротора цього поля через поверхню S).

Порівняння з формулою Стокса в координатній формі для векторного поля $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, де a_x, a_y, a_z є неперервні диференційовні функції, дає формулу для обчислення компонент вектора ротора

$$rot\,\vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

4.4 Перше і друге рівняння Максвелла

Диференціальні рівняння

$$rot\,\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}; \quad rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

називають відповідно ***першим і другим рівняннями з системи рівнянь Максвелла*** ($\vec{D}$ та $\vec{B}$ – відповідно вектори електричної та магнітної індукції, $\vec{E}$ та $\vec{H}$ – вектори електричної та магнітної напруженості; $\vec{j}$ – вектор електричного струму провідності, частинні похідні $\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}$, $\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ визначають відповідно електричний та магнітний струми зміщення).

Застосуванням операції до лівої і правої частин першого рівняння Максвелла одержуємо рівняння повного струму

$$div\left(\vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)=0.$$

Магнітне поле прямолінійного струму провідності визначається з першого рівняння $\oint(\vec{H},d\vec{l})=I$. У циліндричній системі координат, коли струм I тече вздовж осі Oz:

$$\vec{H}=\varphi_0\frac{I}{2\pi r}.$$

4.5 Розв'язування типових задач

4.5.1. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{a}=-y\vec{i}+x\vec{j}+\vec{k}$ вздовж кола $x^2+y^2=1$, $z=0$ у додатному напрямку.

Розв'язок. Параметричні рівняння кола: $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=0$, $0\le t\le 2\pi$, $a_x=-y=-\sin t$, $a_y=x=\cos t$, $dx=-\sin t\,dt$, $dy=\cos t\,dt$, $dz=0$. Циркуляція за означенням:

$$Ц=\oint_C(-y)dx+xdy+dz=\int_0^{2\pi}\left((-\sin t)(-\sin t)+\cos t\cos t\right)dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\sin^2 t+\cos^2 t\right)dt=\int_0^{2\pi}dt=2\pi.$$

Відповідь: $Ц=2\pi$.

4.5.2. Знайти циркуляцію векторного поля

$$\vec{a} = xyz\,\vec{i} + (x + y + z)\vec{j} - x^2 y^2 \vec{k}$$

вздовж контуру квадрата $ABCDA$, сторони якого визначаються рівняннями: (AB): $y = a + x$, (BC): $y = a - x$, (CD): $y = -a + x$, (DA): $y = -a - x$.

Розв'язок.

$$Ц = \oint\limits_{ABCDA} (\vec{a}, d\vec{r}).$$

З урахуванням того, що $z = 0$, $dz = 0$ отримуємо

$$(\vec{a}, d\vec{r}) = xyz\,dx + (x + y + z)dy - x^2 y^2 dz = (x + y)dy.$$

$$Ц = \int\limits_{AB} (\vec{a}, d\vec{r}) + \int\limits_{BC} (\vec{a}, d\vec{r}) + \int\limits_{CD} (\vec{a}, d\vec{r}) + \int\limits_{DA} (\vec{a}, d\vec{r}) =$$

$$= \int\limits_{AB} (x + y)dy + \int\limits_{BC} (x + y)dy + \int\limits_{CD} (x + y)dy + \int\limits_{DA} (x + y)dy =$$

$$= \int\limits_0^a (2y - a)dy + \int\limits_0^a a\,dy + \int\limits_0^a (2y - a)dy + \int\limits_{-a}^0 (-a)dy = -2a^2.$$

Відповідь: $Ц = -2a^2$.

4.5.3. Знайти ротор поля швидкостей твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки з миттєвою кутовою швидкістю $\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$.

Розв'язок. Як відомо, швидкість твердого тіла, що обертається, обчислюється за формулою $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} =$$

$$= (z\omega_y - y\omega_z)\vec{i} + (x\omega_z - z\omega_x)\vec{j} + (y\omega_x - x\omega_y)\vec{k},$$

$$rot\,\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z\omega_y - y\omega_z & x\omega_z - z\,\omega_x & y\omega_x - x\omega_y \end{vmatrix} =$$

$$= 2\omega_x \vec{i} + 2\omega_y \vec{j} + 2\omega_z \vec{k} = 2\vec{\omega}.$$

Таким чином $rot\vec{v}$, характеризуючи «обертальну компоненту» поля швидкостей, дорівнює подвоєній швидкості обертання.

Відповідь: ротор поля швидкостей твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки з заданою кутовою швидкістю дорівнює подвоєній швидкості обертання.

4.6 Задачі для самостійної роботи

4.6.1. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = y\vec{i}$ уздовж кола $x = b\cos t$, $y = b(1 + \sin t)$, що лежить в площині xOy.

4.6.2. Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$ уздовж кола $x^2 + y^2 = N^2$, $z = 0$.

4.6.3. З допомогою формули Стокса перетворити інтеграл по замкненому контуру C $\oint\limits_C (y^2 + z^2)dx + (x^2 + z^2)dy + (x^2 + y^2)dz$ в інтеграл по поверхні S, яка натягнута на контур C.

4.6.4. За формулою Стокса обчислити інтеграл

$$\int\limits_L x^2 y^2 dx + dy + zdz,$$

контур L – коло $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$. В якості поверхні використати півсферу $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

4.6.5. Обчислити ротор векторного поля

$$\vec{a} = \sin(Nx - y - z)(N\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}).$$

4.6.6. Обчислити ротор векторного поля $\vec{a} = Ne^{x+2y+3z}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$ в точці $M_0(N, -3N)$.

4.6.7. За формулою Стокса знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a} = xyz\,\vec{i} + (x + y + z)\vec{j} - x^2 y^2 \vec{k}$ вздовж контуру квадрата *ABCDA*, якщо його сторони лежать на лініях: $-x + y = N$; $x + y = N$; $x - y = N$; $x + y = -N$.

4.6.8. Знайти ротор поля швидкостей твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки з миттєвою кутовою швидкістю $\vec{\omega} = x\vec{i} + y\,\vec{j} + x\vec{k}$.

5 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ОПЕРАЦІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

5.1 Операції зі скалярним полем

Операції зі скалярним полем $u = u(x;y;z)$:

$$\nabla \cdot (\nabla u) = \nabla \cdot \nabla u = div\,grad\ u\ ,$$
$$\nabla \times (\nabla u) = \nabla \times \nabla u = rot\,grad\ u\ .$$

5.2 Операції з векторним полем

Операції з векторним полем $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$:

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{a}) = grad\,div\,\vec{a};$$
$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{a}) = div\,rot\,\vec{a};$$
$$\nabla \times (\nabla \times \vec{a}) = rot\,rot\,\vec{a}.$$

Обчислення операцій другого порядку відбувається за формулами добутку вектора на скаляр ∇u, скалярного добутку векторів $\nabla \cdot \vec{a} \equiv (\nabla, \vec{a})$, векторного добутку векторів $\nabla \times \vec{a} \equiv [\nabla, \vec{a}]$; $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$. $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$ позначається ще як Δ (***оператор «дельта», оператор Лапласа, лапласіан***). В декартових координатах

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\vec{i} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\vec{j} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\vec{k}\ .$$

5.3 Розв‘язування типових задач

5.3.1. Довести формулу $div\,rot\,\vec{a} = 0$, використовуючи символічний запис операції дивергенції та ротора векторів.

Розв'язок. Позначимо $rot\,\vec{a} = \vec{b}$; $[\nabla, \vec{a}] = \vec{b}$; $div\vec{b} = (\nabla, \vec{b})$.

Отже, $div\,rot\,\vec{a} = \left(\nabla, \vec{b}\right) = \left(\nabla, \left[\nabla, \vec{a}\right]\right)$. З урахуванням перестановок у мішаному добутку векторів $\left(\nabla, \left[\nabla, \vec{a}\right]\right) = \left(\vec{a}, \left[\nabla, \nabla\right]\right)$ та того, що векторний добуток колінеарних векторів $\left[\nabla, \nabla\right] = 0$ маємо $div\,rot\,\vec{a} = 0$. Що й треба було довести.

5.3.2. Довести формулу $rot\,grad\,\varphi = 0$, використовуючи формули обчислення ротора вектора та градієнта скалярного поля в декартових координатах.

Доведення. Позначимо $\vec{b} = grad\,\varphi$, отже, в декартових координатах $\vec{b} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}$.

Ротор вектора $\vec{b}$ в декартових координатах:

$$rot\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\vec{j} +$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\vec{k} = \vec{0}.$$

При перетвореннях було враховано властивості мішаних похідних другого порядку для неперервної функції. Що й треба було довести.

5.3.3. З рівнянь Максвелла для вакууму в просторовій точці $\left(x, y, z\right)$ в момент часу t:

$$\left[\nabla, \vec{H}\right] = \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t},\ \left[\nabla, \vec{E}\right] = -\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t},\ \left(\nabla, \vec{H}\right) = 0,\ \left(\nabla, \vec{E}\right) = 0,$$

де ($\vec{H}\left(x, y, z, t\right)$ та $\vec{E}\left(x, y, z, t\right)$ відповідно вектори напруженості магнітного та електричного полів; ε та μ – діелектрична та магнітна проникності), вивести хвильове рівняння (одне з основних диференціальних рівнянь математичної фізики).

Розв'язок. Диференціюємо перше рівняння Максвелла по t:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\nabla, \vec{H}\right] = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \left[\nabla, \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right] = \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Підстановкою $\dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ з другого рівняння Максвелла та з урахуванням четвертого рівняння Максвелла у формулі $\left[\nabla, \left[\nabla, \vec{E}\right]\right] = \nabla\left(\nabla, \vec{E}\right) - \Delta\vec{E}$ одержуємо $\Delta\vec{E} = \varepsilon\mu\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ (хвильове рівняння).

5.4 Задачі для самостійної роботи

5.4.1. Довести формулу $rot\, grad\, \varphi = 0$ використовуючи символічний запис операції ротора вектора та градієнта скалярного поля.

5.4.2. Довести формулу $div\, rot\, \vec{a} = 0$, використовуючи формули обчислення дивергенції та ротора векторів у декартових координатах.

5.4.3. Знайти $grad\, div\, \vec{a}(M)$, якщо $\vec{a}(M) = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$.

5.4.4. Одержати вираз для оператора Лапласа $\Delta u = div\, grad\, u$ в декартових координатах.

5.4.5. З рівнянь Максвелла

$$\left[\nabla, \vec{H}\right] = \varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \left[\nabla, \vec{E}\right] = -\mu\frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$

$$\left(\nabla, \vec{H}\right) = 0, \ \left(\nabla, \vec{E}\right) = 0,$$

для гармонічного поля (залежність від часу $\vec{H} = \vec{H}(x, y, z)e^{i\omega t}$, $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z)e^{i\omega t}$) вивести хвильове рівняння (однорідне рівняння Гельмгольца).

5.4.6. З рівнянь Максвелла

$$\left[\nabla, \vec{H}\right] = \varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}, \ \left[\nabla, \vec{E}\right] = -\mu\frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$

$$\left(\nabla, \vec{H}\right) = 0\,,\ \left(\nabla, \vec{E}\right) = 0\,,$$

у середовищі зі струмом провідності $\vec{j}$ для гармонічного поля (залежність від часу $\vec{H} = \vec{H}(x, y, z)e^{i\omega t}$, $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z)e^{i\omega t}$) вивести хвильове рівняння (неоднорідне рівняння Гельмгольца для векторів $\vec{H}(x, y, z, t)$ та $\vec{E}(x, y, z, t)$ напруженостей магнітного та електричного полів).

6 МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ СПЕЦІАЛЬНИХ ТИПІВ ПОЛІВ

6.1 Потенціальне, соленоїдне, гармонічне поля, їх властивості

Векторне поле $\vec{a}(M)$ називається ***потенціальним*** в області G, якщо існує така скалярна функція (скалярне поле) $v(M)$, задана в G, що для всіх точок цієї області:

$$\vec{a}(M) = grad\, v(M)$$

Функцію $v(M)$ називають ***скалярним потенціалом поля*** $\vec{a}(M)$. В потенціальному полі криволінійний інтеграл не залежить від форми шляху інтегрування й визначається тільки початковою M_0 і кінцевою M точками лінії L:

$$\oint_L (\vec{a}, d\vec{r}) = v(M) - v(M_0).$$

Потенціал поля визначається з точністю до сталого доданку (тобто, якщо $v(M)$ – потенціал поля $\vec{a}(M)$, то $\vec{a}(M) + C$ теж є потенціалами поля).

Потенціальне поле $\vec{a}(M)$ є безвихровим, тобто $rot\, \vec{a}(M) = \vec{0}$.

Обчислення потенціалу поля в декартових координатах

Для знаходження потенціалу u заданого потенціального поля $\vec{a}(x, y, z) = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ можна використовувати наступну формулу

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} a_x(x, y_0, z_0)dx + \int_{y_0}^{y} a_y(x, y, z_0)dx + \int_{z_0}^{z} a_z(x, y, z)dx, \quad (6.1)$$

де (x_0, y_0, z_0) – координати фіксованої точки, яку варто обирати так, щоб функції $a_x(x, y, z)$, $a_y(x, y, z)$, $a_z(x, y, z)$ набували якомога простішого вигляду.

Векторне поле $\vec{a}(M)$ називається ***соленоїдним*** в області G, якщо в усіх точках цієї області $div\,\vec{a}(M) = 0$.

Векторний потенціал $\vec{A}(M)$ ***поля*** $\vec{a}(M)$ визначається в області G, якщо $\vec{a}(M) = rot\,\vec{A}(M)$.

Векторний потенціал $\vec{A}(M)$ визначається з точністю до градієнта довільного соленоїдного поля $f(M)$ (для якого $rot\,grad\ f(M) = 0$), дійсно

$$rot\left(\vec{A}(M) + grad\ f(M)\right) = rot\,\vec{A}(M) + rot\,grad\ f(M) = \vec{a}(M)$$

З формули Остроградського-Гаусса: якщо соленоїдне поле задано в однозв‘язній області V, то потік вектора через будь-яку замкнену поверхню S з цієї області дорівнює нулю:

$$П = \iint_S (\vec{a}, \vec{n})ds = \iiint_V div\vec{a}\,dv = 0$$

Якщо в полі $\vec{a}$ через точки замкненого контуру L провести векторні лінії, то утворена їх сукупністю поверхня називається ***векторною трубкою***.

В соленоїдному полі векторні лінії не можуть ні починатися, ні закінчуватися всередині поля; вони або замкнені, або мають кінці на межі поля, або мають нескінченні гілки (у випадку необмеженого поля).

Векторне поле є ***гармонічним (лапласовим)***, якщо воно є одночасно потенціальним і соленоїдним, тобто коли

$$rot\,\vec{a}(M) = \vec{0}. \text{ та } div\,\vec{a}(M) = 0$$

6.2 Скалярне та векторне поля в криволінійних системах координат

В багатьох інженерних задачах електро- і радіотехніки зручно визначати конфігурацію поля не в декартових, а в криволінійних координатах (коливання в циліндричних, сферичних хвилеводах, резонаторах, антенах тощо).

Для опису скалярного u і векторного $\vec{a}$ полів у ***циліндричних координатах*** використовуються такі диференціальні оператори:

$$grad\ u = \frac{\partial u}{\partial \rho}\vec{\rho}_0 + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\vec{\varphi}_0 + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{z}_0,$$

$$div\,\vec{a} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho a_\rho\right)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(a_\varphi\right)}{\partial \varphi} + \frac{\partial\left(a_z\right)}{\partial z},$$

$$rot\,\vec{a} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho}\vec{\rho}_0 & \vec{\varphi}_0 & \frac{1}{\rho}\vec{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_\rho & \rho a_\varphi & a_z \end{vmatrix}.$$

Для скалярного u і векторного $\vec{a}$ полів у ***сферичних координатах*** використовуються такі диференціальні оператори:

$$grad\ u = \frac{\partial u}{\partial r}\vec{r}_0 + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\vec{\theta}_0 + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\vec{\varphi}_0,$$

$$div\,\vec{a} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2 a_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(\sin\theta\cdot a_\theta\right)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(a_\varphi\right)}{\partial \varphi},$$

$$rot\,\vec{a} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r^2\sin\theta}\vec{r}_0 & \frac{1}{r\sin\theta}\vec{\theta}_0 & \frac{1}{r}\vec{\varphi}_0 \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ a_r & r a_\theta & r\sin\theta\cdot a_\varphi \end{vmatrix}.$$

6.3 Розв‘язування типових задач

6.3.1. Перевірити потенціальність поля

$$\vec{a} = (y+z)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (x+y)\vec{k} .$$

Знайти потенціал поля.

Розв'язок. Перевіримо, чи виконується необхідна і достатня умова потенціальності поля $rot\,\vec{a} = \vec{0}$.Маємо

$$rot\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix} =$$

$$= (1-1)\vec{i} + (1-1)\vec{j} + (1-1)\vec{k} = \vec{0},$$

отже, задане поле – потенціальне. Для знаходження потенціалу поля скористаємося формулою (6.1), взявши в якості точки (x_0, y_0, z_0) точку $(0,0,0)$:

$$u(x,y,z) = \int_0^x a_x(x,0,0)dx + \int_0^y a_y(x,y,0)dy + \int_0^z a_z(x,y,z)dy =$$

$$= \int_0^x 0dx + \int_0^y xdy + \int_0^z (x+y)dz = 0 + xy + (x+y)z = xy + yz + xz .$$

Відповідь: $u(x,y,z) = xy + yz + xz$.

6.3.2. Довести гармонічність скалярного поля $u = x^2 + 2xy - y^2$.

Розв’язок. Перевіряємо, чи задовольняє задане скалярне поле рівнянню Лапласа $\Delta u = 0$. Маємо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2 - 2 + 0 = 0 .$$

Отже, задане скалярне поле гармонічне. Що й треба було довести.

6.3.3. Довести соленоїдність векторного поля

$$\vec{a} = \frac{x\vec{i} - y\vec{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\left(x^2 - y^2\right)z\vec{k}}{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}}.$$

Розв'язок. Знаходимо дивергенцію даного поля:

$$div\,\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} -$$

$$-\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - y\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}} = 0.$$

Отже, поле соленоїдне. Що й треба було довести.

6.3.4. Знайти $grad\,u$ скалярного поля $u = \rho^2 + z^2\cos^2\varphi$, заданого в циліндричній системі координат.

Розв'язок. Знаходимо частинні похідні:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = 2\rho,\ \frac{\partial u}{\partial \varphi} = z^2 2\cos\varphi(-\sin\varphi),\ \frac{\partial u}{\partial z} = 2z\cos^2\varphi.$$

За формулою градієнта скалярного поля в циліндричній системі координат одержуємо

$$grad\,u = 2\rho\,\vec{\rho}_0 - \frac{z^2\sin 2\varphi}{\rho}\vec{\varphi}_0 + 2z\cos^2\varphi\,\vec{z}_0.$$

Відповідь: $grad\,u = 2\rho\,\vec{\rho}_0 - \dfrac{z^2\sin 2\varphi}{\rho}\vec{\varphi}_0 + 2z\cos^2\varphi\,\vec{z}_0$.

6.4 Задачі для самостійної роботи

6.4.1. Перевірити, чи є поле $\vec{a} = \left(3x^2y - y^3\right)\vec{i} + \left(x^3 - 3xy^2\right)\vec{j}$ потенціальним. Знайти потенціал, якщо поле потенціальне.

6.4.2. Гравітаційне поле $\vec{F} = -\gamma \dfrac{m}{r^3}\vec{r}$ визначене скрізь, окрім початку координат, є моделлю поля тяжіння точкової маси m зі сталою тяжіння γ. Показати, що поле $\vec{F}$ є потенціальним, та знайти його потенціал.

6.4.3. Перевірити гармонічність скалярного поля

$$u = N\ln\frac{1}{r},\ r = \sqrt{x^2 + y^2},\ r \neq 0.$$

6.4.4. Довести соленоїдність векторного поля

$$\vec{a} = \frac{x}{yz}\vec{i} + \frac{y}{xz}\vec{j} - \frac{(x+y)\ln z}{xy}\vec{k}.$$

6.4.5. Довести, що поле сили тяжіння $\vec{F} = -\gamma \dfrac{m}{r^3}\vec{r}$ $\left(\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$ є лапласовим (гармонічним),

Вказівка. Для розв‘язування задачі необхідно довести, що $div\vec{F} = -\gamma\, m\, div\dfrac{\vec{r}}{r^3} = 0$.

6.4.6. Знайти векторний потенціал $\vec{A}$ магнітного поля $\vec{H}$, що створює рухомий зі сталою швидкістю $\vec{v}$ електричний заряд q.

Вказівка. Напруженість магнітного поля, яка створюється рухомим зарядом, обчислюється за законом Біо-Савара $\vec{H}(M) = \dfrac{[q\vec{v},\vec{r}]}{4\pi r^2}$, де r – відстань від точки M до заряду q.

6.4.7. Знайти $grad\, u$ скалярного поля $u = r + \dfrac{\sin\theta}{r} - \cos\varphi\sin\theta$, заданого в сферичній системі координат.

6.4.8. Визначити, чи є поле $\vec{a}$ потенціальним, якщо в циліндричній системі координат $\vec{a} = \vec{\rho}_0 + \dfrac{1}{\rho}\vec{\varphi}_0 + \vec{z}_0$.

Вказівка. Знайти ротор заданого поля в циліндричній системі. Якщо $rot\,\vec{a} = 0$, то поле – потенціальне.

6.4.9. Перевірити потенціальність поля

$$\vec{a} = 2r\,\vec{r}_0 + \frac{1}{r\sin\theta}\vec{\varphi}_0 + \frac{1}{r}\vec{\theta}_0$$

заданого у сферичній системі координат.

Вказівка. Знайти ротор заданого поля в сферичній системі координат. Якщо $rot\,\vec{a} = 0$, то поле – потенціальне.

6.4.10. Визначити наявність витоків чи стоків в точці $(0;0;0)$ поля $\vec{a} = r^2\,\vec{r}_0 - 2\cos^2\varphi\vec{\theta}_0 + + \frac{\varphi}{1+r^2}\vec{\varphi}_0$ у сферичній системі координат.

Вказівка. Знайти дивергенцію заданого поля в сферичній системі координат. Якщо $div\,\vec{a}(0;0;0) > 0$, то в цій точці є витоки, якщо $div\,\vec{a}(0;0;0) < 0$, то – стоки.

ЛІТЕРАТУРА

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н. Берман. – М. : Наука. – 2005. – 416 с.
2. Бутузов В.Ф. и др. Математический анализ в вопросах и задачах / В.Ф. Бутузов. – М.: Физматлит, 2001. – 480 с.
3. Гаврилов В.Р. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля / Гаврилов В.Р., Иванова Е.Е., Морозова В.Д. – М.: Изд - во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2003. – 496 с.
4. Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики: учебное пособие для вузов / Б.П. Демидович, В.А. Кудряшов. – М. : ООО «Издательство Астель», 2001. – 656 с.
5. Дубовик В.П. Вища математика / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – К.: Вища школа, 1993. – 648 с.
6. Зорич В.А. Математический анализ: учебник / В.А. Зорич. Ч. II. – М.: Наука, 1984. – 640 с.
7. Кальницкий Л.А и др. Специальный курс высшей математики для вутзов / Л.А. Кальницкий. – М.: Высш. шк., 1976. – 288 с.
8. Краснов М.Л. Векторный анализ / Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. – М. : Наука, 1978. – 160 с.
9. Несис Е.И. Методы математической физики / Е.И. Несис. – М.: Просвещение, 1977. – 199 с.
10. Никольский С.М. Курс математического анализа: учебник для втузов: в 2 т. / С.М. Никольский. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – Т. 2.– 592 с.
11. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для ВТУЗов : в 2 т. / Н.С. Пискунов. – М. : Наука, 1985. – Т. 1. – 1985. – 526 с.
12. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для ВТУЗов : в 2 т. / Н.С. Пискунов. – М. : Наука, 1985. – Т. 2. – 576 с.
13. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2006. – 608 с.

14. Уваров В.Б. Математический анализ / В.Б. Уваров. – М.: Высш.шк., 1984. – 288 с.
15. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. / Г.М. Фихтенгольц. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – Т. 3. – 662 с.