УДК 531.314

Д-р физ.-мат. наук С. А. Агафонов[1], канд. физ.-мат. наук И. А. Костюшко[2],
канд. физ.-мат. наук С. П. Швыдкая[2], А. В. Куземко[3]

[1] *Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, г. Москва,*
[2] *Запорожский национальный университет,*
[3] *Запорожский национальный технический университет; г. Запорожье*

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ ГИРОСКОПА В КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ

Исследуется устойчивость стационарного движения уравновешенного гироскопа в кардановом подвесе, установленном на неподвижном основании. На ось внешнего карданова кольца действует момент вязкого трения и момент, представляющий собой функцию угла поворота внутреннего кольца. Анализ устойчивости проведен с указанием оценки области притяжения. Отметим, что вынужденные колебания гироскопа в кардановом подвесе, когда на ось внутреннего кольца действует периодический момент и момент сил вязкого трения изучены в [1].

Ключевые слова: *устойчивость, стационарное движение, гироскоп, карданов подвес, область притяжения, функция Ляпунова.*

Уравнения движения

Рассматривается уравновешенный гироскоп в кардановом подвесе, установленный на неподвижном основании. Ось внешнего карданова кольца горизонтальна, а поворот ее определяется углом а. Поворот внутреннего кольца характеризуется углом β, причем при значении $\beta = 0$ плоскости внешнего и внутреннего колец ортогональны.

Кинетическая энергия всей системы имеет вид [1]:

$$T = \frac{1}{2}\left[\left(A_0 - C_0\sin^2\beta\right)\dot{\alpha}^2 + B_0\dot{\beta}^2 + C\left(\dot{\varphi} + \dot{\alpha}\sin\beta\right)^2\right],$$

$$A_0 = A + A_1 + A_2, \quad B_0 = A + B_1, \quad C_0 = A + A_1 - C_1.$$

Здесь A_2 – момент инерции внешнего кольца относительно его оси вращения; A_1, B_1, C_1 – моменты инерции внутреннего кольца относительно осей, связанных с этим кольцом; A, C – экваториальный и полярный моменты инерции ротора, а φ – угол его собственного вращения.

Пусть на ось внешнего карданова кольца действует момент вязкого трения с коэффициентом k и момент, представляющий собой функцию угла β: $M_\alpha = -k\alpha - f(\beta)$. Будем считать, что функция $f(\beta)$ удовлетворяет условиям: $f(0) = 0$, $\beta f(\beta) > 0$, $f(\beta) \in C^1$. Дополнительные ограничения на класс функций $f(\beta)$ вводятся в дальнейшем по мере необходимости.

Уравнения движения с учетом момента M_α после исключения циклической координаты φ, можно привести к виду

$$\begin{cases} \left(A_0 - C_0\sin^2\beta\right)\ddot{\alpha} - C_0\sin 2\beta\dot{\alpha}\dot{\beta} + \\ + H\cos\beta\dot{\beta} + k\dot{\alpha} + f(\beta) = 0, \\ B_0\ddot{\beta} + \frac{1}{2}C_0\sin 2\beta\dot{\alpha}^2 - H\cos\beta\dot{\alpha} = 0, \end{cases} \qquad (1)$$

где $H = C\left(\dot{\varphi} + \dot{\alpha}\sin\beta\right)$ – циклическая постоянная.

Обозначим $\dot{\alpha} = x_1$, $\beta = x_2$, $\dot{\beta} = x_3$ и запишем уравнения (1) в нормальной форме Коши

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{C_0\sin 2x_2}{A_0 - C_0\sin^2 x_2}x_1x_3 - \dfrac{H\cos x_2}{A_0 - C_0\sin^2 x_2}x_3 - \\ -\dfrac{k x_1}{A_0 - C_0\sin^2 x_2} - \dfrac{f(x_2)}{A_0 - C_0\sin^2 x_2}, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = -\dfrac{1}{2}C_0B_0^{-1}\sin\left(2x_2\right)x_1^2 + HB_0^{-1}\cos x_2 x_1. \end{cases} \qquad (2)$$

2 Анализ устойчивости и оценка области притяжения

Уравнения (2), очевидно, имеют решение

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0, \qquad (3)$$

при котором плоскости внешнего и внутреннего колец ортогональны. Примем это решение за невозмущенное и поставим задачу о его устойчивости. Рассмотрим сначала уравнения первого приближения $\left(f\left(x_2\right) = ax_2\right)$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -HA_0^{-1}x_3 - kA_0^{-1}x_1 - aA_0^{-1}x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = HB_0^{-1}x_1. \end{cases} \tag{4}$$

Производная от функции

$$V = \frac{\mu aH}{2A_0B_0}x_2^2 + \frac{aH}{2A_0B_0}x_2x_3 + \left(\frac{H^2}{2A_0B_0} + \frac{\mu k}{2A_0}\right)x_3^2 + \mu HB_0^{-1}x_1x_3 + \frac{H^2}{2B_0^2}x_1^2 \tag{5}$$

в силу системы уравнений (4) равна

$$\dot{V} = -\frac{H^2}{A_0}(k - A_0\mu)x_1^2 - \frac{H}{A_0B_0}(\mu H - a)x_3^2.$$

При любом значении параметра μ из интервала $aH^{-1} < \mu < kA_0^{-1}$ функция $V > 0$, а $\dot{V} \le 0$. Для того, чтобы этот выбор параметра μ был возможен, необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$k > aA_0H^{-1}. \tag{6}$$

Неравенство (6) является условием асимптотической устойчивости стационарного движения (3), так как функция (5) удовлетворяет всем условиям теоремы Барбашина-Красовского.

Можно показать, что применение критерия Рауса-Гурвица приводит к тому же условию. Отсюда следует, что анализ устойчивости, проведенный с помощью функции (5), дает не только достаточное, но и необходимое условие асимптотической устойчивости. Отметим, что асимптотическая устойчивость стационарного движения достигается силами частичной диссипации, так как они действуют только в оси внешнего карданова кольца.

На основании теоремы Ляпунова эти результаты справедливы и для исходной нелинейной системы (2). Однако в прикладном аспекте этой задачи одного анализа устойчивости недостаточно. Важно знать множество точек в фазовом пространстве, притягиваемых при $t \to \infty$ к стационарному движению (3). Это множество называется областью притяжения. Нахождение этой области представляет собой важную и трудную задачу. Сложность заключена в том, что область притяжения ограничена поверхностями, состоящими из целых траекторий [2]. Нахождение последних сводится к интегрированию уравнений движения. Эту трудность можно обойти, если ограничиться нахождением оценки этой области. Эта задача и решается ниже.

Рассмотрим функцию:

$$V = \mu\int_0^{x_2} f_3(\xi)d\xi + x_3f_3(x_2) + \frac{1}{2}f_2(x_2)x_3^2 + \frac{\mu}{2}f_1(x_2)x_3^2 + \mu HB_0^{-1}x_1x_3\cos x_2 + \frac{H^2}{2B_0^2}x_1^2\cos^2 x_2, \tag{7}$$

$$f_1(x_2) = \frac{k}{A_0 - C_0\sin^2 x_2},\quad f_2(x_2) = \frac{H^2\cos^2 x_2}{(A_0 - C_0\sin^2 x_2)B_0},$$

$$f_3(x_2) = \frac{H\cos x_2 f(x_2)}{(A_0 - C_0\sin^2 x_2)B_0}.$$

В (7) $\mu > 0$ постоянный параметр. Производная $\dot{V}$, вычисленная в силу уравнений (2) приводится к виду

$$\dot{V} = -\Psi_1x_1^2 - \Psi_2x_3^2, \tag{8}$$

$$\Psi_1 = \frac{H^2\cos^2 x_2}{B_0^2}\left(\frac{k}{A_0 - C_0\sin^2 x_2} - \mu\right) + \frac{C_0H\cos^2 x_2\sin x_2}{(A_0 - C_0\sin^2 x_2)B_0^2}f(x_2) + \frac{\mu HC_0}{B_0^2}\sin x_2\cos^2 x_2x_1 + \frac{\mu kB_0C_0 + (A_0 - C_0)H^2}{(A_0 - C_0\sin^2 x_2)B_0^2}\sin x_2\cos x_2x_3,$$

$$\Psi_2 = \frac{\mu H^2\cos^2 x_2}{B_0(A_0 - C_0\sin^2 x_2)} - \frac{H\cos x_2 f'(x_2)}{B_0(A_0 - C_0\sin^2 x_2)} + \frac{\mu H(A_0 - C_0 - C_0\cos^2 x_2)\sin x_2}{B_0(A_0 - C_0\sin^2 x_2)}x_1 + \frac{((A_0 - C_0)H^2 - \mu kB_0C_0)\sin 2x_2}{B_0(A_0 - C_0\sin^2 x_2)^2}x_3 + \frac{H(A_0 - C_0 - C_0\cos^2 x_2)\sin x_2}{B_0(A_0 - C_0\sin^2 x_2)^2}f(x_2).$$

Запишем функцию V в виде

$$V = V_1 + \frac{\mu}{2}(f_1 - \mu)x_3^2 + \frac{1}{2}(\mu x_3 + HB_0^{-1}\cos x_2x_1)^2,$$

$$V_1 = \mu\left(\sqrt{F(x_2)} + \frac{x_3f_3(x_2)}{2\mu\sqrt{F(x_2)}}\right)^2 + \frac{1}{2\mu}\left(\mu f_2(x_2) - \frac{f_3^2(x_2)}{2F(x_2)}\right)x_3^2,\ F(x_2) = \int_0^{x_2} f_3(\xi)d\xi.$$

Предположим, что $f(x_2)$ такова, что существует конечный предел $\omega = \lim f(x_2)\left(\int\limits_0^{x_2} f(\xi)d\xi\right)^{-1/2}$ при $x_2 \to 0$. Тогда можно определить по непрерывности $V_1(0{,}0)=0$. Зададимся числом $0 < x_2^* < \pi/2$ и будем считать, что значения переменной x_2 заключены в промежутке $|x_2| \le x_2^*$.

Функция (7) является определенно – положительной при выполнении неравенств

$$\mu < f_1(x_2), \quad \mu f_2(x_2) - f_3^2(x_2)/2F(x_2) > 0,$$

которые можно записать в форме

$$\mu < \frac{k}{A_0 - C_0\sin^2 x_2},$$

$$\mu H - f^2(x_2)\left[2\left(A_0 - C_0\sin^2 x_2\right)\int_0^{x_2}\frac{\cos\xi\, f(\xi)}{A_0 - C_0\sin^2\xi}d\xi\right]^{-1} > 0. \quad (9)$$

Неравенства (9) заведомо выполняются, если параметр μ изменяется в пределах

$$MH^{-1} < \mu < kA_0^{-1}, \quad (10)$$

$$M = \max_{|x_2|\le x_2^*} \times$$
$$\times\left| f^2(x_2)\left[2\left(A_0 - C_0\sin^2 x_2\right)\int_0^{x_2}\frac{\cos\xi\, f(\xi)}{A_0 - C_0\sin^2\xi}d\xi\right]^{-1}\right|.$$

Из условия (10) получим условие определенной положительности функции V

$$k > MA_0H^{-1}. \quad (11)$$

Параметр μ любой из интервала (10). Заметим, что в линейном приближении, когда $f(x_2) = ax_2$, неравенство (11) совпадает с (11) $(M = a)$.

Обратимся теперь к выражению для $\dot V$ (8). При оценке снизу функции Ψ_1 второе слагаемое отбрасывается, так как оно принимает неотрицательные значения. Учитывая, что

$$\sin x_2\cos^2 x_2 \le \frac{2}{3\sqrt3}, \quad \frac{\sin x_2\cos x_2}{A_0 - C_0\sin^2 x_2} \le \frac{1}{2\sqrt{A_0(A_0 - C_0)}}$$

и используя неравенство Коши-Буняковского, имеем

$$\Psi_1 > \frac{H^2\cos^2 x_2^*}{B_0^2}\left(kA_0^{-1} - \mu\right) -$$
$$-\left[\frac{2\mu HC_0}{3\sqrt3 B_0^2}|x_1| + \frac{\mu kB_0C_0 + (A_0 - C_0)H^2}{2B_0^2\sqrt{A_0(A_0 - C_0)}}|x_3|\right] \ge$$
$$\ge \frac{H^2\cos^2 x_2^*}{B_0^2}\left(kA_0^{-1} - \mu\right) -$$
$$-\left[\frac{4\mu^2H^2C_0^2}{27B_0^4} + \frac{\left(\mu kB_0C_0 + (A_0 - C_0)H^2\right)^2}{4B_0^4A_0(A_0 - C_0)}\right]^{1/2} \times$$
$$\times\left(x_1^2 + x_3^2\right)^{1/2} > 0. \quad (12)$$

Из неравенств (12) получим

$$x_1^2 + x_3^2 < R_1^2, \quad R_1^2 = D_1/D_2, \quad (11)$$

$$D_1 = 108A_0(A_0 - C_0)H^4\cos^4 x_2^*\left(kA_0^{-1} - \mu\right)^2,$$

$$D_2 = 16\mu^2A_0(A_0 - C_0)H^2C_0^2 + 27\left(\mu kB_0C_0 + (A_0 - C_0)H^2\right)^2.$$

При оценке снизу Ψ_2 отбрасывается третье слагаемое, принимающее неотрицательные значения, так как для реально существующих приборов $A_0 \ge 2C_0$. Кроме того, обозначим $m = \max\limits_{|x_2|\le x_2^*}\left|\frac{\cos x_2 f'(x_2)}{A_0C_0\sin^2 x_2}\right|$. Тогда будем иметь

$$\Psi_1 > \frac{H}{A_0B_0}\left(\mu H\cos^2 x_2^* - A_0m\right) -$$
$$-\frac{\mu H\left(A_0 - C_0 - C_0\cos^2 x_2^*\right)\sin x_2^*}{B_0\left(A_0 - C_0\sin^2 x_2^*\right)}|x_1| -$$
$$-\frac{\left|(A_0 - C_0)H^2 - \mu kB_0C_0\right|}{2B_0\left(A_0 - C_0\sin^2 x_2^*\right)^2}|x_3| \ge$$
$$\ge \frac{H}{A_0B_0}\left(\mu H\cos^2 x_2^* - A_0m\right) -$$
$$-\left[\frac{\mu^2H^2\left(A_0 - C_0 - C_0\cos^2 x_2^*\right)^2\sin^2 x_2^*}{B_0^2\left(A_0 - C_0\sin^2 x_2^*\right)^2} + \frac{\left((A_0 - C_0)H^2 - \mu kB_0C_0\right)^2}{4B_0^2\left(A_0 - C_0\sin^2 x_2^*\right)^4}\right]^{1/2} \times$$
$$\times\left(x_1^2 + x_3^2\right)^{1/2} > 0.$$

Из последнего неравенства получим

$$x_1^2 + x_3^2 < R_2^2, \quad R_2^2 = E_1 / E_2, \tag{14}$$

$$E_1 = 4H^2\left(\mu H\cos^2 x_2^* - mA_0\right)^2\left(A_0 - C_0\sin^2 x_2^*\right)^4,$$

$$E_2 = A_0^2\left[\begin{array}{l}4\mu^2H^2\left(A_0 - C_0 - C_0\cos^2 x_2^*\right)^2\times\\ \times\left(A_0 - C_0\sin^2 x_2^*\right)^2\sin^2 x_2^* +\end{array}\right.$$
$$\left.+\left(\mu kB_0C_0 - \left(A_0 - C_0\right)H^2\right)^2\right].$$

Из неравенств $\Psi_1 > 0$ и $\Psi_2 > 0$ следует, что параметр μ изменяется в пределах

$$\frac{A_0 m}{H\cos^2 x_2^*} < \mu < kA_0^{-1}. \tag{15}$$

Сравнивая с неравенствами (10), получим

$$pH^{-1} < \mu < kA_0^{-1}, \quad p = \max\left(M, \frac{A_0 m}{\cos^2 x_2^*}\right). \tag{16}$$

Если переменные x_1, x_2, x_3 принадлежат области

$$|x_2| \le x_2^*, \quad x_1^2 + x_3^2 < R^2, \quad R^2 = \min\left(R_1^2, R_2^2\right) \tag{17}$$

и выполнено неравенство

$$k > pA_0H^{-1}, \tag{18}$$

то $V > 0$, а $\dot V \le 0$, причем множество $\dot V = 0$ не содержит целых траекторий в силу условия $x_2 f(x_2) > 0$ при $x_2 \ne 0$.

В линейной постановке, когда $f(x_2) = ax_2$ неравенство (18) совпадает с (6), так как $p = M = A_0 m = a$. Параметр μ входит в выражения для R_1 и R_2, поэтому его выбор из интервала (16) диктуется необходимостью получения наибольших значений R_1 и R_2. Эта задача здесь не решается.

3 Численный пример

Рассмотрим прибор, имеющий следующие параметры [3]: $A = 2$ гсмс^2, $C = 3{,}3$ гсмс^2, $A_1 = B_1 = 2{,}2$ гсмс^2, $C_1 = 2{,}8$ гсмс^2, $A_2 = 8{,}5$ гсмс^2, $H = 10^4$ гсмс.

Функция $f(x_2) = a\sin x_2$, $a = 100$ гсм. При таком выборе

$$f(x_2):\ \lim_{x_2\to 0} f(x_2)\times\left(\int_0^{x_2} f(\xi)d\xi\right)^{-1/2} =$$
$$= (2a)^{1/2}, \quad A_0 = 12{,}7 \text{ гсмс},$$
$$B_0 = 4{,}2 \text{ гсмс}^2, \quad C_0 = 1{,}4 \text{ гсмс}^2.$$

Перейдем к оценке области притяжения. Для этого необходимо задать x_2^*. Примем $x_2^* = \pi/6$ и найдем m и M. Так как $f'(x_2) = a\cos x_2$, то

$$m = \max_{|x_2|\le\pi/6}\frac{a\cos^2 x_2}{A_0 - C_0\sin^2 x_2} = aA_0^{-1} = 7{,}874 \text{ сек}^{-2},$$

$$M = \max_{|x_2|\le\pi/6}\frac{a^2\sin^2 x_2}{2\left(A_0 - C_0\sin^2 x_2\right)}\left[\int_0^{x_2}\frac{a\cos\xi\sin\xi}{A_0 - C_0\sin^2\xi}d\xi\right]^{-1} =$$
$$\max_{|x_2|\le\pi/6}\frac{aC_0\sin^2 x_2}{\left(A_0 - C_0\sin^2 x_2\right)}\left[\ln\frac{A_0}{A_0 - C_0\sin^2 x_2}\right]^{-1} =$$
$$= \frac{aC_0\sin^2 x_2^*}{\left(A_0 - C_0\sin^2 x_2^*\right)}\left[\ln\frac{A_0}{A_0 - C_0\sin^2 x_2^*}\right]^{-1} = 101{,}41 \text{ гсм}.$$

Тогда $p = 133{,}33$ гсм, а неравенство (18) принимает вид при $k > 0{,}169$ гсмс. Выберем $k = 0{,}4$ гсмс. Параметр μ изменяется в пределах $0{,}013\ \text{с}^{-1} < \mu < 0{,}031\ \text{с}^{-1}$. Примем $\mu = 0{,}02\ \text{с}^{-1}$. Вычисления по формулам (13), (14) дают значения $R_1 = 0{,}018\ \text{с}^{-1}, R_2 = 0{,}0124\ \text{с}^{-1}$. Следовательно, $R = R_1 = 0{,}018\ \text{с}^{-1}$, а область притяжения $|x_2| \le \pi/6, \quad x_1^2 + x_3^2 < R$.

Список литературы

1. Журавлев В. Ф. Прикладные методы в теории колебаний / В. Ф. Журавлев, Д. М. Климов. – М. : Наука, 1988. – 326 с.
2. Барбашин Е. А. Функции Ляпунова / Барбашин Е. А. – М. : Наука, 1970. – 240 с.
3. Климов Д. М. Динамика гироскопа в кардановом подвесе / Д. М. Климов, С. А. Харламов. – М. : Наука, 1978. – 208 с.

Одержано 04.10.2013

Агафонов С.А., Костюшко И.А., Швидка С.П., Куземко А.В. Про стійкість стаціонарного руху гіроскопа в кардановом підвісі

Досліджується стійкість стаціонарного руху врівноваженого гіроскопа в кардановому підвісі, встановленому на нерухомому підставі. На вісь зовнішнього карданова кільця діє момент в'язкого тертя і момент, який представляє собою функцію кута повороту внутрішнього кільця. Аналіз стійкості проведено із

зазначенням оцінки області тяжіння. Зазначимо, що вимушені коливання гіроскопа в кардановому підвісі, коли на вісь внутрішнього кільця діє періодичний момент і момент сил в'язкого тертя вивчені в [1].

Ключові слова: *стійкість, стаціонарний рух, гіроскоп, карданов підвіс, область тяжіння, функція Ляпунова.*

Agafonov S., Kostushko I., Shvydkaia S., Kuzemko A. On the stability of steady motion of the gyroscope in gimbals

The stability of steady motion of a balanced gyroscope gimbal mounted on a stationary base is studied. On the axis of the outer gimbal ring operating point of viscous friction and the moment, which is a function of the angle of rotation of the inner ring are acting. Analysis of stability and an assessment was carried out showing estimation of the attraction field. Note that the forced oscillation gyroscope in gimbals, when the axis of the inner ring acts periodic moment and the moment of viscous friction were studied in [1].

Key words: *stability, steady motion, gyro gimbals, domain of attraction, Lyapunov function.*