ПРИКЛАД ЗАСТОСУВАННЯ ЗАКОНУ ЗБЕРЕЖЕННЯ ІМПУЛЬСУ

Д. І. Анпілогов, Багатопрофільний ліцей «Перспектива», м. Запоріжжя

Роботу присвячено тонкощам застосування закону збереження й зміни імпульсу системи матеріальних точок. Її мета — сприяти запобіганню певних помилок, які трапляються навіть у таких поважних авторитетних виданнях, як [4]. Зокрема, ідеться про задачу 12.36. Для зручності читача наведемо її умову й авторський розв'язок.

12.36*. *З гармати, що стоїть на нерухомій залізничній платформі, зроблено постріл під кутом* α *до горизонту. Швидкість вильоту снаряда відносно землі дорівнює* v. *Платформа після пострілу проїхала до зупинки шлях* s. *Коефіцієнт опору руху платформи дорівнює* μ. *Визначте відношення маси снаряда до маси платформи з гарматою.*

Для цієї задачі автори [4] пропонують такий розв'язок. Закон збереження імпульсу в проекції на вісь x (*див. рис. 1*): $Mu = mv\cos\alpha$, звідси

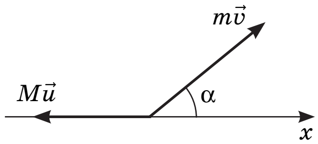

Рис. 1. **Рисунок, запропонований авторами [4]**

$$u = \frac{mv\cos\alpha}{M}.$$

Гальмівний шлях платформи дорівнює $s = \frac{u^2}{2a}$. За II законом Ньютона $ma = F_0\mu mg$ (в [4] саме так і написано; мабуть, мали на увазі «$Ma = F_0 = \mu Mg$, де F_0 — сила опору руху після закінчення пострілу»), звідси $a = \mu g$. Після підстановки отримаємо

$$\frac{m}{M} = \sqrt{\frac{2s\mu g}{v^2\cos^2\alpha}}.$$

Для зручності порівняння з подальшими результатами надамо цій формулі вигляду

$$\frac{m}{M} = \frac{u}{v\cos\alpha}. \quad (1)$$

Звичайно, цей розв'язок не є правильним. Система «гармата плюс снаряд» не є замкненою, і закон збереження імпульсу для неї не виконується, бо імпульс цієї системи в результаті пострілу змінюється. Справді, до пострілу імпульс цієї системи дорівнював $\vec{0}$, а після пострілу рівність $M\vec{u} + m\vec{v} = \vec{0}$ не виконується, оскільки вектори $M\vec{u}$ і $m\vec{v}$ навіть не є колінеарними.

Застосуємо закон збереження й зміни імпульсу у вигляді [2, § 12, (12.3)].

$$\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2\right) + \sum \vec{F}\Delta t = \left(\vec{p}_1' + \vec{p}_2'\right). \quad (2)$$

Тут додаються лише зовнішні сили. Зокрема, у разі замкненої системи $\sum \vec{F} = \vec{0}$, і ми отримуємо закон збереження імпульсу. Якщо ж $\sum \vec{F} \neq \vec{0}$, але вісь x спрямовано перпендикулярно до зовнішньої рівнодійної $\sum \vec{F}$, то за побудови проекції рівняння (2) на цю вісь доданок $\sum \vec{F}\Delta t$ зникає; усе виглядає так, ніби система стає замкненою [2, с. 81]. Інакше кажучи, імпульс незамкненої системи не зберігається, але зберігається його проекція на вісь, перпендикулярну до зовнішньої рівнодійної.

Якби в задачі 12.36 була відсутня сила опору руху між гарматою й рейками, то зовнішня рівнодійна складалася б лише з нормальної реакції, що діє на гармату з боку рейок, та сил тяжіння. Тоді зовнішня рівнодійна була б вертикальною й обирати вісь x горизонтально було б правильно. Але ж сила опору руху діє на гармату з боку рейок прямо в процесі пострілу. Ось чому розв'язок (1) неправильний.

Розставимо сили, які діють у системі «гармата плюс снаряд». Нехай дуло нахилене під кутом β до горизонту. Зауважимо, цей кут не збігається з кутом α вильоту снаряда. Справді, нехай за час руху снаряду всередині дула (за час пострілу) воно переміщається з положення OA в положення $O'A'$ (*рис. 2*).

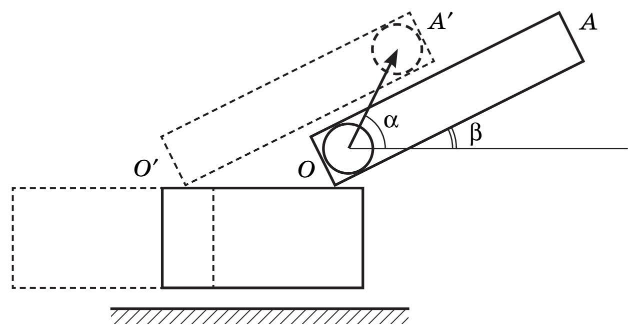

Рис. 2. **Переміщення снаряда з урахуванням переміщення дула**

За цей час снаряд переміщується з початку O початкового положення дула в кінець A' *переміщеного* положення дула. Тоді очевидно, що $\alpha > \beta$. Будемо вважати, що сила F тиску порохових газів спрямована вздовж дула. Але в системі відліку, пов'язаній із землею, швидкість снаряда спрямована не вздовж дула. Тому має бути наявною сила поперек дула. На *рис. 3* показано розстановку сил з урахуванням цієї обставини. Також показано прискорення $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ руху тіл і обрано осі x_1, y_1, x_2, y_2.

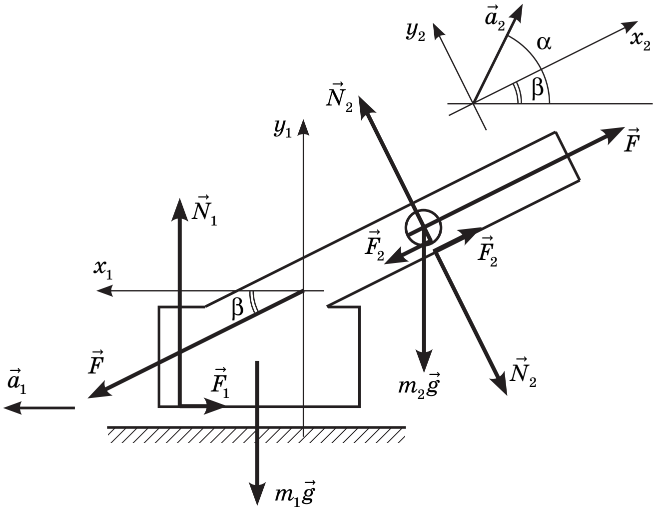

Рис. 3. **Розстановка сил**

Тут $m_1\vec{g}$, $m_2\vec{g}$ — сили тяжіння, $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ — сили нормальної реакції, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ — сили опору руху, $\vec{F}$ — сили тиску порохових газів. Серед перелічених для системи «гармата плюс снаряд» зовнішніми є сили $m_1\vec{g}$, $m_2\vec{g}$, $\vec{N}_1$, $\vec{F}_1$, (саме для цих сил і лише для них на *рис. 3* не показано протидійну силу, яка виникає за третім законом Ньютона). Власне кажучи, до системи тіл слід також включати порохові гази. Але їхньою масою ми будемо нехтувати й вважати, що вони виступають лише в ролі посередника, за допомогою якого відбувається взаємодія гармати й снаряда із силою $\vec{F}$.

Спочатку знехтуємо силами тяжіння. Довжина дула може становити $s = 7{,}5$ м, а швидкість снаряда за вильоту з дула — $v = 945\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$ [1]. Тоді прискорення руху снаряда в дулі можна оцінити як $a = \frac{v^2}{2s} \approx 6 \cdot 10^4\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Як бачимо, $g \ll a$, тому нехтування силою тяжіння має сенс. Тоді зовнішня рівнодійна є векторною сумою. Очевидно, якщо $\vec{F}_1$ — сила опору руху, то сила утворює з вертикаллю кут α_0 такий, що $\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{F_1}{N_1} = \mu$. Тоді закон збереження *проекції* імпульсу можна застосувати, виходячи з *рис. 4*.

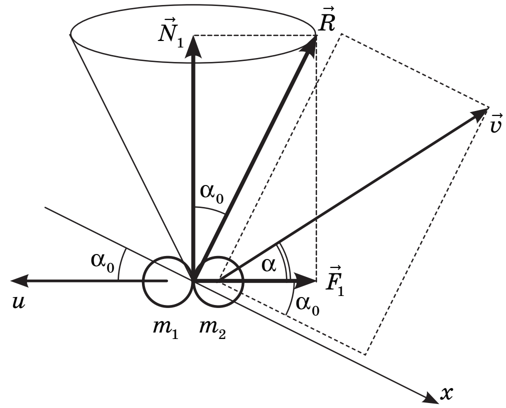

Рис. 4. **До закону збереження проекції імпульсу за відсутності сил тяжіння**

Проекція векторного рівняння (2) на обрану вісь Ox (за $\sum \vec{F} = \vec{R}$) набуває вигляду

$$0 + R\Delta t \cos\frac{\pi}{2} = m_2 v\cos(\alpha + \alpha_0) - m_1 u \cos\alpha_0,$$

звідки знаходимо

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{u\cos\alpha_0}{v\cos(\alpha+\alpha_0)} = \frac{u\cos\alpha_0}{v(\cos\alpha\cos\alpha_0 - \sin\alpha\sin\alpha_0)} = \frac{u}{v(\cos\alpha - \sin\alpha\operatorname{tg}\alpha_0)} = \frac{u}{v(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)}. \quad (3)$$

За відсутності опору руху ($\mu = 0$) ми б отримували збіг з (1). Але (3), на відміну від (1), дозволяє встановити межі коректності умови задачі. Справді,

$$\frac{m_2}{m_1} > 0,\ \cos(\alpha+\alpha_0) > 0,\ 0 < \alpha + \alpha_0 < \frac{\pi}{2},\ \alpha < \frac{\pi}{2} - \alpha_0. \quad (4)$$

Геометрично це означає, що постріл має відбуватися в напрямку ззовні конуса тертя [3] (на *рис. 4* рівнодійна $\vec{R}$ є твірною цього конуса), тобто за досить малих кутів α. За великих кутів α, які не задовольняють (4), формула (3) призводить до від'ємного результату й стає неправильною. Некоректною при цьому стає й сама умова задачі: якщо кут α настільки великий, що вектор швидкості снаряда спрямований усередину конуса тертя, то гармата взагалі не зрушить з місця. Але дізнатись про це неможливо, якщо виходити лише з формули (1). Формула (1) «відчуває проблему» лише тоді, коли кут α досягне значення $\alpha=\frac{\pi}{2}$ (постріл вертикально догори). Але коректність постановки задачі 12.36 зникає раніше, коли кут α досягає значення $\alpha=\frac{\pi}{2}-\alpha_0$.

Отримаємо тепер розв'язок (3) у геометричний спосіб. З (2) випливає теорема про рух центра мас [2, § 19]: центр мас системи рухається як матеріальна точка, маса якої дорівнює сумарній масі системи, а дієва сила — геометричній сумі зовнішніх сил, які діють на систему. Якщо ж врахувати, що перед пострілом центр мас перебував у стані спокою, то його рух під дією рівнодійної $\vec{R}$ буде прямолінійним уздовж цієї сили.

Нехай за час τ пострілу центр мас системи «гармата плюс снаряд» переміщується з положення C_0 в положення C (*рис. 5*).

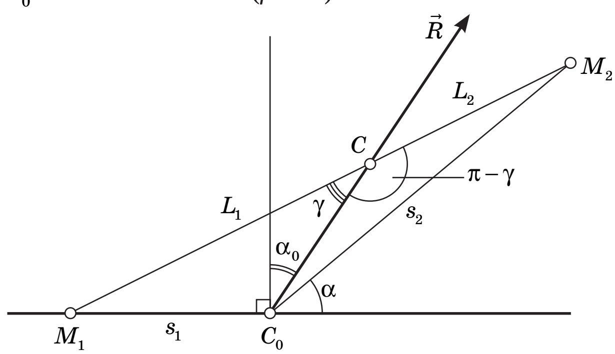

***Рис. 5.* До геометричного розв'язку задачі за відсутності сил тяжіння**

Нехай маси m_1, m_2 переміщуються з положення C_0 в положення M_1, M_2, проходячи відповідно відстані $s_1=C_0M_1$, $s_2=C_0M_2$. Оскільки рух прямолінійний рівноприскорений, то ці відстані дорівнюють $s_1=\frac{0+u}{2}\tau$, $s_2=\frac{0+v}{2}\tau$, звідки $\frac{s_1}{s_2}=\frac{u}{v}$.

Для переміщеного положення центра мас маємо: $m_1\cdot CM_1=m_2\cdot CM_2$, $m_1L_1=m_2L_2$, звідки $\frac{m_2}{m_1}=\frac{L_1}{L_2}$.

За теоремою синусів із відповідних трикутників *рис. 5* маємо:

$$\begin{cases}\dfrac{L_1}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha_0\right)}=\dfrac{s_1}{\sin\gamma},\\[2ex]\dfrac{L_2}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha-\alpha_0\right)}=\dfrac{s_2}{\sin(\pi-\gamma)}.\end{cases}$$

$$\begin{cases}L_1=\dfrac{s_1\cos\alpha_0}{\sin\gamma},\\[2ex]L_2=\dfrac{s_2\cos(\alpha+\alpha_0)}{\sin\gamma}.\end{cases}$$

Розділивши ці рівняння, отримуємо

$$\frac{m_2}{m_1}=\frac{L_1}{L_2}=\frac{s_1}{s_2}\cdot\frac{\cos\alpha_0}{\cos(\alpha+\alpha_0)}=\frac{u\cos\alpha_0}{v\cos(\alpha+\alpha_0)},$$

що збігається з (3).

Розв'яжемо ще раз задачу 12.36, врахувавши також і сили тяжіння. Тепер зовнішня рівнодійна є $\vec{R}=\vec{N}_1+\vec{F}_1+m_1\vec{g}+m_2\vec{g}$. Попередню версію розв'язку вдалося побудувати, навіть без знаходження сил $\vec{N}_1$ і $\vec{F}_1$. Достатньо було знати їх відношення, бо воно цілком визначало напрямок сили $\vec{R}$, а лише це нам і було потрібно. Тепер же напрямок сили $\vec{R}$ є невідомим, і для його знаходження треба шукати сили $\vec{N}_1$ і $\vec{F}_1$. Але тоді простіше розв'язати пару відповідних задач динаміки. У проекції на осі x_1, y_1 згідно з *рис. 3* другий закон Ньютона для гармати набуває вигляду

$$\begin{cases}m_1a_1=F\cos\beta-F_2\cos\beta-N_2\sin\beta-F_1,\\0=N_1-F\sin\beta+F_2\sin\beta-N_2\cos\beta-m_1g,\\F_1=\mu N_1.\end{cases}$$

У проекції на осі x_2, y_2 згідно з *рис. 3* для снаряда маємо

$$\begin{cases}m_2a_2\cos(\alpha-\beta)=F-F_2-m_2g\sin\beta,\\m_2a_2\sin(\alpha-\beta)=N_2-m_2g\cos\beta,\\F_2=\mu_2N_2.\end{cases}$$

Зауважимо, сили F і F_2 входять до цих систем виключно у вигляді своєї різниці. Тому, позначаючи $Z=F-F_2$, маємо

$$\begin{cases}m_1a_1=Z\cos\beta-N_2\sin\beta-F_1,\\N_1=Z\sin\beta+N_2\cos\beta+m_1g,\\F_1=\mu N_1.\end{cases}$$

$$\begin{cases}m_2a_2\cos(\alpha-\beta)+m_2g\sin\beta=Z,\\N_2=m_2a_2\sin(\alpha-\beta)+m_2g\cos\beta,\\F_2=\mu_2N_2.\end{cases}$$

Отримали шість рівнянь, які містять п'ять невідомих сил: Z, N_1, N_2, F_1, F_2. Поставимо за мету залишити одне рівняння з шести, позбувшись усіх невідомих сил. Підставимо перші два рівняння другої системи в першу:

$$\begin{cases} m_1 a_1 = \left(m_2 a_2 \cos(\alpha-\beta) + m_2 g \sin\beta\right)\cos\beta - \left(m_2 a_2 \sin(\alpha-\beta) + m_2 g \cos\beta\right)\sin\beta - F_1, \\ N_1 = \left(m_2 a_2 \cos(\alpha-\beta) + m_2 g \sin\beta\right)\sin\beta + \left(m_2 a_2 \sin(\alpha-\beta) + m_2 g \cos\beta\right)\cos\beta + m_1 g, \\ F_1 = \mu N_1. \end{cases}$$

Звідси з використанням формули синусу суми маємо

$$N_1 = m_2 a_2 \left(\cos(\alpha-\beta)\sin\beta + \sin(\alpha-\beta)\cos\beta\right) + $$
$$+ m_2 g \left(\sin^2\beta + \cos^2\beta\right) + m_1 g =$$
$$= m_2 a_2 \sin\alpha + (m_1 + m_2) g.$$

Цікаво зауважити, що цей результат не залежить від кута β. Тепер із використанням формули косинуса суми маємо

$$m_1 a_1 = m_2 a_2 \left(\cos(\alpha-\beta)\cos\beta - \sin(\alpha-\beta)\sin\beta\right) - F_1;$$
$$m_1 a_1 = m_2 a_2 \cos\alpha - \mu N_1;$$
$$m_1 a_1 = m_2 a_2 \cos\alpha - \mu\left(m_2 a_2 \sin\alpha + (m_1 + m_2) g\right).$$

Отримали рівняння, однорідне відносно мас. Маємо далі

$$m_1(a_1 + \mu g) = m_2(a_2 \cos\alpha - \mu a_2 \sin\alpha - \mu g);$$

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1 + \mu g}{a_2(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) - \mu g}.$$

Оскільки тіла m_1, m_2 починали рівноприскорений рух зі стану спокою, то $a_1 = \frac{u}{\tau}$, $a_2 = \frac{v}{\tau}$. Тоді остаточно отримуємо

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{u + \mu g \tau}{v(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) - \mu g \tau}.$$

Якщо постріл вважати «миттєвим», то $\tau \to 0$ і ця формула перетворюється на (3), і отже, узагальнює її.

У принципі наведені системи динаміки можна розв'язувати й далі, але питання знаходження сил не стояло.

Загалом можна було розробляти і більш складні моделі (ураховуючи негоризонтальність рейок, неізобарність процесу розширення порохових газів, можливість для гармати здійснювати не лише поступальний рух тощо). Але такі узагальнення, імовірно, не становлять ні навчально-методичного, ані науково-технічного інтересу.

ВИСНОВКИ

У роботі критично проаналізовано авторський розв'язок задачі 12.36 збірника [4] і побудовано альтернативні розв'язки в припущенні відсутності й наявності сил тяжіння в процесі пострілу.

Наголошено, що для незамкнених систем закон збереження імпульсу використовувати не можна, але доцільно використовувати закон збереження *проекції* імпульсу на вісь, перпендикулярну до зовнішньої рівнодійної. Показано, що у випадку «миттєвого» пострілу за застосування закону збереження проекції імпульсу силами тяжіння можна нехтувати.

ЛІТЕРАТУРА

1. *152-мм* пушка 2А36. — Режим доступу : https://ru.wikipedia.org/wiki/152-мм_пушка_2А36.
2. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Механика / Д. В. Сивухин. — Т. 1. — М. : Наука, 1979. — 520 с.
3. Тертя ковзання. — Режим доступу : https://uk.wikipedia.org/wiki/Тертя_ковзання.
4. Фізика. Комплексна підготовка до зовнішнього незалежного оцінювання / Уклад. Н. Струж, В. Мацюк, С. Остап'юк. — Тернопіль : Підручники і посібники, 2016. — 432 с.

ЖИТТЯ НА ДНІ ПОВІТРЯНОГО ОКЕАНУ

Люди живуть на дні повітряного океану (атмосфери). І так само, як у рідині, тиск за занурення найбільший на дні, і в повітрі тиск атмосфери найбільший на Землі. Він становить 101 000 Па. Це значить, що на один квадратний метр площі тіла діє сила F = 101 000 Па. А це відповідає тому, що на вас поклали вантаж масою 10,1 т. Щоб розібратися, чому людина витримує це, звернімося до розташування будівель за забудови міст.

За такої забудови (не суцільної) тиск усередині і зовні врівноважується і будівлі не руйнуються, хоча сили діють колосальні (площа будівель велика, $F = pS$, де S — площа). В організмі людини теж є повітря, яке пов'язане із зовнішнім. Тому зовнішній тиск врівноважується внутрішнім. Тут спрацьовує принцип сполучених посудин із газом.

Підготував В. Ф. Галущак, Михайло-Ларинська ЗОШ, Вітовський р-н, Миколаївська обл.