

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
Запорізький національний технічний університет

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

та розрахунково-графічні завдання з вищої математики
(теорія рядів)

для студентів ФРТ та ФІОТ

усіх форм навчання

2013

Методичні вказівки та розрахунково-графічні завдання з вищої математики (теорія рядів) для студентів ФРТ та ФІОТ усіх форм навчання/ Укл.: Г.А. Шишканова, Т.І. Левицька, І.С. Пожуєва – Запоріжжя: ЗНТУ, 2013. – 74 с.

Містить розрахунково-графічні завдання, теоретичні відомості та приклади виконання завдань з курсу “Вища математика” за темою “Теорія рядів” для студентів ФРТ та ФІОТ.

Укладачі
Шишканова Г.А., к.ф-м.н., доцент
Левицька Т.І., к.т.н., доцент
Пожуєва І.С., к.т.н., доцент

Рецензент:
Мастиновський Ю.В., к.т.н., доцент

Відповідальний
за випуск
Левицька Т.І., к.т.н., доцент

З а т в е р д ж е н о
На засіданні кафедри
прикладної математики
протокол № 6 від 6.03.2013

ЗМІСТ

1 МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНИХ ЗАВДАНЬ	3	ТЕОРІЇ
РЯДІВ.....	4	
1.1 Знакододатні ряди. Ознаки збіжності.....	4	
1.2 Знакозмінні ряди. Ознака збіжності Лейбніца для знакопереміжних рядів.....	8	
1.3 Абсолютна і умовна збіжність знакозмінних рядів. Властивості абсолютно збіжних рядів.....	10	
1.4 Функціональний ряд і його область збіжності. Степеневий ряд. Інтервал збіжності. Радіус збіжності степеневого ряду.....	12	
1.5 Розвинення функцій в ряд. Наближені обчислення за допомогою рядів.....	16	
1.6 Розвинення функцій в ряд Фур'є.....	20	
2 РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ ЗАВДАННЯ.....	31	
3 ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ.....	49	
ЛІТЕРАТУРА.....	7	

1 МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНИХ ЗАВДАНЬ З ТЕОРІЇ РЯДІВ

1.1 Знакододатні ряди. Ознаки збіжності

Якщо $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ – нескінченна числова послідовність, то вираз

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

називається **числовим рядом**, а величини $u_1, u_2, \dots$ – членами цього ряду.

Побудуємо допоміжну послідовність частинних сум ряду $S_1 = u_1, S_2 = u_1 + u_2, \dots, S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n, \dots$. Якщо ця послідовність має скінчену границю $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, то ряд називається **збіжним**, а число S – **сумою ряду**. У випадку, коли границя не існує або є нескінченною, ряд називається **розбіжним**.

Якщо всі члени ряду є додатними, то ряд називається **знакододатним**.

1.1.1 Необхідна ознака збіжності ряду

Теорема. Якщо ряд $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ збіжний, то $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Приклад 1.

Що можна сказати про збіжність або розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^3 - 1}{4n^3 + 1}$, застосовуючи необхідну ознаку?

Так як $u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 - 1}{4n^3 + 1} = \frac{3}{4} \neq 0$, ряд розбігається (необхідна ознака збіжності не виконується).

1.1.2 Ознаки збіжності-розбіжності, що базуються на порівнянні рядів

Теорема (ознака порівняння). Нехай маємо два ряди з додатними членами:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (1.1)$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \quad (1.2)$$

причому $u_1 \leq v_1$, $u_2 \leq v_2$, ..., $u_n \leq v_n$, Тоді, якщо ряд (1.2) збігається, то ряд (1.1) теж збігається; якщо ж ряд (1.1) розбігається, то ряд (1.2) теж розбігається.

Теорема (гранична ознака порівняння). Якщо задано знакододатні ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n \neq 0$ і $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, причому $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n}$ існує і не дорівнює нулю, то ці ряди одночасно збіжні або розбіжні.

Приклад 2.

Дослідити збіжність наступних рядів за допомогою теорем порівняння:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{p}{4^n}.$$

$$\text{Оскільки } \sin \frac{p}{4^n} < \frac{p}{4^n}, \text{ то } 2^n \sin \frac{p}{4^n} < \frac{p}{2^n}. \text{ Ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p}{2^n} -$$

збіжний (геометрична прогресія із знаменником $q = \frac{1}{2} < 1$), отже, за теоремою порівняння збігається і даний ряд,

$$б) \sum_{n=1}^{\infty} tg^2 \frac{p}{4\sqrt{n}}.$$

Візьмемо для порівняння гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, який є розбіжним.

$$\text{Знайдемо } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{tg^2 \frac{p}{4\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{p}{16} tg^2 \frac{p}{4\sqrt{n}}}{\left(\frac{p}{4\sqrt{n}}\right)^2} = \frac{p}{16} \neq 0.$$

Отже, за теоремою порівняння і даний ряд розбіжний.

1.1.3 Ознака збіжності Даламбера

Теорема. Якщо в знакододадному ряді

$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$ існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$, то ряд

збігається за умови, що $q < 1$, і розбігається коли $q > 1$. Якщо $q = 1$, то ряд може бути як збіжним, так і розбіжним. В цьому випадку треба застосовувати інші ознаки збіжності.

Приклад 3.

Дослідити збіжність наступних рядів за допомогою теорем порівняння:

а) дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$.

Оскільки в загальному члені даного ряду є факторіал, для дослідження ряду застосовуємо ознаку Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} n!}{(n+1) 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n+1} = 0 < 1$$

Отже, за ознакою Даламбера ряд збігається,

б) дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-2)}{2^{n+1} \cdot n!}$.

Застосуємо ознаку Даламбера:

$$u_n = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-2)}{2^{n+1} \cdot n!}, \quad u_{n+1} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-2) \cdot (3n+1)}{2^{n+1} \cdot (n+1)!}.$$

Знайдемо границю відношення $(n+1)$ -го члена ряду до n -го, коли $n \rightarrow \infty$. Маємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-2) \cdot (3n+1) 2^{n+1} n!}{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-2) \cdot 2^{n+2} (n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2(n+1)} = \frac{3}{2} > 1,$$

тому ряд розбігається.

1.1.4 Ознака збіжності Коші (радикальна)

Теорема. Якщо існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = q$, то при $q < 1$ ряд напевне збігається, а при $q > 1$ ряд напевне розбігається, при $q = 1$ питання збіжності ряду відкрите.

Приклад 4.

Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)n^2}{n^{n^2} 3^n}$.

В загальному члені присутній степінь n , отже можна застосувати ознаку Коші:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(n+1)n^2}{n^{n^2} 3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{n^n 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})^n}{3} = \frac{e}{3} < 1$$

Ряд за ознакою Коші збігається.

1.1.5 Інтегральна ознака збіжності Коші

Теорема. Якщо функція $f(x)$ на проміжку $[1, \infty)$ є неперервною, додатною і монотонно спадною, то числовий ряд $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$, де $u_n = f(n)$ збігається, якщо збігається невластний інтеграл $\int_1^{\infty} f(x) dx$ і розбігається, якщо цей невластний інтеграл розбігається.

Приклад 5.

Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n(\ln^2 n + 1)}$.

Радикальну ознаку збіжності Коші тут застосувати не можливо. За ознакою Даламбера $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$. (перевірте самостійно).

Застосуємо інтегральну ознаку Коші. Маємо $u_n = \frac{\ln n}{n(\ln^2 n + 1)}$. Розглянемо функцію $f(x) = \frac{\ln x}{x(\ln^2 x + 1)}$. Вона неперервна на проміжку $[1, +\infty)$ і монотонно спадає на ньому. Обчислимо невластний інтеграл:

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} f(x) dx &= \int_1^{\infty} \frac{\ln x dx}{x(\ln^2 x + 1)} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{d(\ln^2 x + 1)}{2(\ln^2 x + 1)} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \ln(\ln^2 x + 1) \right]_1^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} (\ln(\ln^2 b + 1) - \ln 1) \right] = \infty \end{aligned}$$

Інтеграл $\int_1^{\infty} f(x) dx$ розбігається, отже і даний ряд розбігається.

1.2 Знакозмінні ряди. Ознака збіжності Лейбніца для знакопереміжних рядів

Якщо серед членів ряду є як додатні, так і від'ємні (при цьому і тих, і інших необмежена кількість), то такий ряд називається знакозмінним.

Знакозмінний ряд називається знакопереміжним, якщо будь-які два члени $q > 1$ ряду, які стоять поряд, мають протилежні знаки. Знакопереміжний ряд можна записати так:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n-1} u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n,$$

де всі числа u_n додатні.

Ознака Лейбніца.

Якщо члени даного ряду монотонно спадають за абсолютною величиною і $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, то знакопереміжний ряд збігається, та його сума за абсолютною величиною не перебільшує абсолютної величини першого члена.

Приклад 1.

Довести збіжність ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} + \dots$$

Даний ряд задовольняє умовам ознаки Лейбніца. Члени ряду за абсолютною величиною монотонно спадають, так як

$$1 > \frac{1}{3} > \frac{1}{5} > \dots \text{ і } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n-1} = 0,$$

отже, за ознакою Лейбніца ряд збігається.

Знакопереміжний ряд, який задовольняє умовам ознаки Лейбніца, має таку властивість: якщо суму такого ряду замінити n -ю частковою сумою

$$S_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n-1} u_n,$$

тобто відкинути залишок $R_n = S - S_n$, то при цьому буде допущена похибка, абсолютна величина якої менша за абсолютну величину першого відкинутого члена u_{n+1} .

Приклад 2.

Обчислити з точністю до 0,01 суму S ряду:

$$1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{6^3} + \dots$$

Даний ряд збігається за ознакою Лейбніца. Відкинувши всі члени, починаючи з $\frac{1}{5^3}$, ми припустимо похибку, яка менша 0,01.

Так як перший із відкинутих членів має знак плюс, то сума перших чотирьох членів

$S_4 = 1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{27} - \frac{1}{64} = \frac{1549}{1728}$ є наближеним значенням суми даного ряду.

1.3 Абсолютна і умовна збіжність знакозмінних рядів. Властивості абсолютно збіжних рядів

Нехай маємо ряд з членами довільного знака

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (1.3)$$

Складемо новий ряд із абсолютних величин членів ряду (1.3):

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots + |u_n| + \dots \quad (1.4)$$

Ряд (1.3) називається абсолютно збіжним, якщо збігається ряд, складений із абсолютних величин його членів, тобто збігається ряд (1.4).

Ряд (1.3) називається умовно збіжним, якщо він збігається, але ряд, складений із абсолютних величин його членів, тобто ряд (1.4), розбігається.

Нехай ряд (1.3) з членами довільного знака збігається абсолютно. Якщо в цьому ряді вибрати тільки додатні або тільки від'ємні члени, то одержані ряди будуть обидва збіжні. Якщо ж ряд (1.3) збігається умовно, то ряди, складені тільки із додатних або тільки від'ємних його членів, будуть розбіжними рядами.

Абсолютно збіжні ряди мають такі властивості:

Властивість 1. Якщо ряд (1.3) збігається абсолютно і має суму S , то будь-який ряд, одержаний з нього будь-якою перестановкою членів, збігається також абсолютно і має суму S .

Властивість 2. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ абсолютно збіжні і їх суми відповідно дорівнюють S і S_1 , то ряд, складений із всіх

добутків виду $u_i v_k (i, k = 1, 2, 3...)$, взятих в якому завгодно порядку, також збігається абсолютно і його сума дорівнює $S \cdot S_1$.

Ряд складений із всіх добутоків виду $u_i v_k (i, k = 1, 2, 3...)$, називають добутком абсолютно збіжних рядів $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

Приклад 1.

Довести, що ряд $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{9} + \frac{1}{4} - \frac{1}{27} + \frac{1}{8} - \dots$ збігається абсолютно.

Додатні члени даного ряду утворюють збіжну геометричну прогресію $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$, сума якої дорівнює 2. Аналогічно від'ємні члени даного ряду утворюють геометричну прогресію $-\frac{1}{3} - \frac{1}{9} - \frac{1}{27} - \frac{1}{81} - \dots$, сума якої дорівнює $\left(-\frac{1}{2}\right)$. Отже, даний ряд збігається абсолютно і сума його дорівнює $\frac{3}{2}$.

Приклад 2.

Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n+1}$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$ – знакочередуваний,

$\frac{1}{4} > \frac{1}{7} > \frac{1}{10} > \dots > \frac{1}{3n+1} > \frac{1}{3n+4} > \dots$ члени ряду спадають за абсолютною величиною, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n+4} = 0$. За ознакою Лейбніца ряд збігається. Ряд із абсолютних величин членів даного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+1}$ – розбіжний, тому що за теоремою порівняння

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{3}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – розбіжний. Отже даний ряд збігається умовно.

1.4 Функціональний ряд і його область збіжності. Степеневий ряд. Інтервал збіжності. Радіус збіжності степеневого ряду

Нехай дана послідовність функцій $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$, які мають спільну область визначення. Функціональним рядом називається складений із цих функцій вираз наступного вигляду:

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = \sum u_n(x). \quad (1.5)$$

Функціональний ряд (1.5) при одних значеннях аргументу x може бути збіжним числовим рядом, а при інших значеннях аргументу x – розбіжним числовим рядом. Якщо функціональний ряд (1.5) збігається при $x = x_0$, то кажуть, що ряд збігається в точці x_0 .

Областю збіжності ряду (1.5) називається сукупність всіх значень аргументу x , при яких цей ряд збігається.

Приклад 1.

Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$.

Знайдемо $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\ln^n x|} = |\ln x|$. Тоді за ознакою Коші ряд збігається абсолютно, якщо $|\ln x| < 1$, тобто при $-1 < \ln x < 1$, або $\frac{1}{e} < x < e$, ряд розбігається при $|\ln x| > 1$, тобто для $0 < x < \frac{1}{e}$ і

$x > e$. При $|\ln x| = 1$ – сумнівний випадок, $x_1 = \frac{1}{e}$, $x_2 = e$.

Підставляючи $x_1 = \frac{1}{e}$, одержимо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ – розбіжний ряд, тому що $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$. при $x_2 = e$ одержимо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ – розбіжний ряд.

Отже, область збіжності ряду: $-\frac{1}{e} < x < e$.

Якщо член $u_n(x)$ функціонального ряду (1.5) зі степеневими функціями аргументу x , то ряд називається степеневим:

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots, \quad (1.6)$$

де x_0 - дане число, а $a_0, a_1, a_2, \dots$ - відомі числові коефіцієнти. Як частинний випадок, коли $x_0 = 0$, одержимо степеневий ряд:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \quad (1.7)$$

Степеневий ряд (1.7) завжди збігається при $x = 0$.

Визначення області збіжності степеневого ряду (1.7) базується на теоремі Абеля.

Теорема Абеля. Якщо степеневий ряд (1.7) збігається при $x = x_0$ ($x_0 \neq 0$), то він збігається абсолютно при будь-якому значенні x , яке задовольняє нерівність $|x| < |x_0|$.

Якщо степеневий ряд (1.7) розбігається при $x = x_0$, то він розбігається і при будь-якому значенні x , яке задовольняє нерівність $|x| > |x_0|$.

Із теореми Абеля випливає, якщо степеневий ряд збігається в точці $x_0 \neq 0$, то він збігається в інтервалі $(-|x_0|, |x_0|)$. Можна довести, що для всякого степеневому ряду, який має точки збіжності (окрім точки $x=0$) і точки розбіжності, існує деяке число $R > 0$, при цьому ряд збігається у всіх точках, для яких $|x| < R$, і розбігається у всіх точках, для яких $|x| > R$. Це число R називається радіусом збіжності ряду (1.7).

Якщо ряд (1.7) збігається тільки при $x=0$, то покладемо $R=0$. Якщо ж ряд (1.7) збігається при будь-якому значенні x , то покладають $R=\infty$. Інтервалом збіжності ряду (1.7) називається інтервал $(-R, R)$. Щоб знайти область збіжності степеневому ряду (1.7), треба спочатку визначити інтервал збіжності $(-R, R)$ і після цього з'ясувати питання про збіжність ряду на кінцях інтервалу, тобто при $x=R$ і $x=-R$.

На практиці радіус збіжності степеневому ряду (1.7) відшуковують за допомогою ознаки Даламбера або Коші.

Застосовуємо ознаку Даламбера до ряду, складеному із абсолютних величин членів ряду (1.7).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot |x| = q \cdot |x|, \text{ де } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q.$$

Ряд (1.7) збігається абсолютно при всіх тих значеннях x , які задовольняють нерівність $q|x| < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{q} \Rightarrow -\frac{1}{q} < x < \frac{1}{q}$. Оскільки

$$-R < x < R, \quad (1.8)$$

тому радіус збіжності

$$R = \frac{1}{q} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|. \quad (1.9)$$

Слід зауважити, що формула (1.8) має місце тільки в тому випадку, коли степінь x при переході від одного члена до наступного зростає строго на одиницю.

При застосуванні ознаки Коші радіус збіжності $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$

Для степеневих рядів справедливі наступні теореми.

Теорема 1. Збіжний степеневий ряд можна почленно диференціювати будь-яке число раз всередині його області збіжності.

Теорема 2. Збіжний степеневий ряд можна почленно інтегрувати на будь-якому проміжку, який знаходиться всередині області збіжності даного ряду.

Приклад 2.

Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (x+2)^n}{5^n (1+4n)}$.

Заданий ряд – степеневий. Знаходимо радіус збіжності ряду:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n 5^{n+1} (1+4(n+1))}{5^n (1+4n) 2^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5(4n+5)}{2(4n+1)} = \frac{5}{2}.$$

Інтервал абсолютної збіжності ряду $-\frac{5}{2} < x+2 < \frac{5}{2} \Rightarrow -\frac{9}{2} < x < \frac{1}{2}$.

Дослідимо збіжність ряду на кінцях інтервалу збіжності. При $x = \frac{1}{2}$ одержимо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+4n}$ – розбіжний, при $x = -\frac{9}{2}$

знакопочережний ряд $\sum \frac{(-1)^n}{1+4n}$, який збігається за теоремою

Лейбніца. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+4n}$ – розбіжний, отже даний ряд збігається

умовно. Область збіжності: $-\frac{9}{2} \leq x < \frac{1}{2}$.

Приклад 3.

Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n3^n}$.

$$a_n = \frac{1}{n3^n}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)3^{n+1}},$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)3^{n+1}}{n3^n} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 3 \cdot 1 = 3.$$

При $x = -3$ одержуємо ряд: $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n} + \dots$, який збігається за ознакою Лейбніца. При $x = 3$ одержуємо гармонічний ряд, який, як відомо, розбігається. Область збіжності ряду: $[-3, 3)$.

1.5 Розвинення функцій в ряд. Наближені обчислення за допомогою рядів

Нехай функція $f(x)$ нескінченно диференційована в деякому околі точки x_0 , тоді наступний ряд має назву ряду Тейлора функції $f(x)$ по степеням $(x - x_0)$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Розглянемо приклади розвинення елементарних функцій в степеневий ряд по степеням x , тобто ряд Тейлора при $x_0 = 0$:

$$1. e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \dots \quad (|x| < \infty)$$

$$2. \sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

$$(|x| < \infty)$$

$$3. \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (|x| < \infty)$$

$$4. \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

$$(-1 < x \leq 1)$$

5.

$$\arctg x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \quad (|x| \leq 1)$$

$$(1+x)^a = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1)\dots[a-(n-1)]}{n!} \cdot x^n = 1 + \frac{a}{1!} x + \frac{a(a-1)}{2!} x^2 +$$

$$6. + \dots + \frac{a(a-1)\dots[a-(n-1)]}{n!} x^n + \dots \quad (|x| < 1)$$

$$7. \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \quad (|x| < 1).$$

Приклад 1.

Розвинути в степеневий ряд функцію $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ за

степенями x , використовуючи розвинення у ряд основних елементарних функцій. Побудувати графіки самої функції та перші чотири наближення розвинення у степеневий ряд.

Задану функцію можна записати таким чином

$f(x) = (1+x)^{-\frac{1}{2}}$. Для того щоб знайти шуканий ряд, досить в розвиненні

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!} x + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n + \dots$$

покласти $m = -\frac{1}{2}$. Тоді одержуємо:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}x^2 + \frac{-1\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}x^3 + \dots$$

або
$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2^2} \frac{3}{2!}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 3!}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2^4 4!}x^4 + \dots$$

Побудуємо графіки самої функції $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ та її перші

чотири наближення розвинення у степеневий ряд в межах області збіжності, які наведено на рис. 1.1.

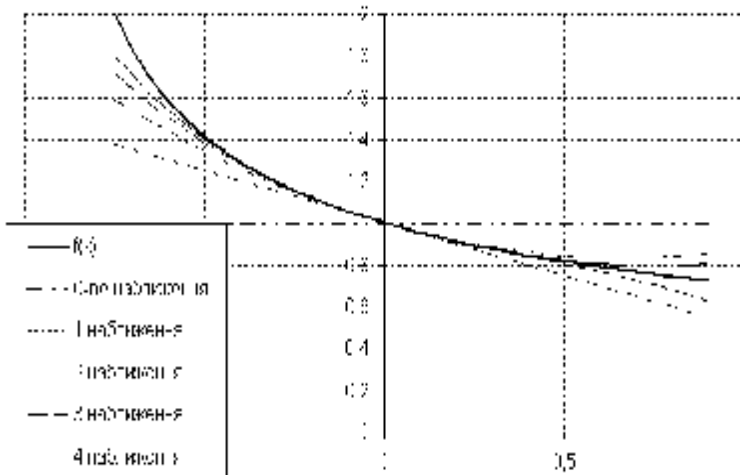


Рисунок - 1.1

Приклад 2.

Обчислити $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ з точністю до 0,001.

Так як для даного інтеграла не можна застосувати формулу Ньютона – Лейбніца, то розвинемо підінтегральну функцію e^{-x^2} в степеневий ряд, а потім будемо почленно інтегрувати одержаний збіжний ряд у вказаних межах. Замінивши в розвиненні функції

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

x на $-x^2$ одержимо шукане розвинення

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \dots$$

Отже

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-x^2} dx &= \int_0^1 \left[1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{10}}{5!} + \dots \right] dx = \\ &= \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} - \frac{x^{11}}{11 \cdot 5!} + \dots \right]_0^1 = \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320} + \dots \end{aligned}$$

Одержаний знакочередуваний ряд задовольняє умовам теореми Лейбніца. Так як шостий член цього ряду за абсолютною величиною менше 0,001, то для забезпечення точності досить врахувати тільки суму перших п'яти левів. Таким чином,

$$\int_0^1 e^{-x^2} dz \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} \approx 0,747.$$

Приклад 3.

Знайти зазначене число членів розвинення в ряд розв'язку диференційного рівняння при заданих початкових умовах

$$y'' = x \sin y' \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = \frac{p}{2} \quad (\text{до } x^4).$$

Точка $x=1$ не є особовою для даного рівняння, тому його розв'язок можна шукати у вигляді ряду:

$$y = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3$$

маємо $f(1) = 0$, $f'(1) = p/2$. Знайдемо 2-у і 3-у похідні:

$$f''(1) = 1 \cdot \sin \frac{p}{2} = 1, \quad f'''(x) = \sin y' + xy'' \cos y', \quad f'''(1) = 1$$

Підставляючи знайдені значення похідних в шуканий ряд, отримаємо розв'язок даного рівняння

$$y = \frac{p}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3.$$

Приклад 4.

Знайти зазначене число членів розвинення в ряд розв'язку диференційного рівняння при заданих початкових умовах

$$y'' = xy, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 \quad (\text{до } x^4)$$

Розв'язок рівняння будемо шукати у вигляді ряду:

$$y = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

маємо $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$. Знайдемо 2-у і 3-у похідні:

$$f''(1) = 0 \cdot 1 = 0, \quad f'''(x) = y + xy', \quad f'''(0) = 1 + 0 \cdot 1 = 1.$$

Підставляючи знайдені значення похідних в шуканий ряд, отримаємо розв'язок даного рівняння

$$y = 1 + \frac{1}{1}x + \frac{0}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 = 1 + x + \frac{1}{6}x^3.$$

1.6 Розвинення функцій в ряд Фур'є

Для функції з будь-яким періодом $2l$ розвинення в ряд Фур'є, коли воно можливе, має такий вигляд:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right). \quad (1.10)$$

Коефіцієнти a_0 , a_n , b_n обчислюються за формулами

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Якщо функція $f(x)$ парна, то розвинення в ряд Фур'є має вигляд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l},$$

де $a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx.$

Якщо функція $f(x)$ непарна, то

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad \text{де } b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Достатні умови розвинення функції в ряд Фур'є сформульовані в наступній теоремі.

Теорема Діріхле. Якщо в інтервалі $[-l, l]$ функція має скінчене число точок розриву першого роду (або неперервна) і скінчене число точок екстремуму (або не має зовсім), то цей ряд Фур'є збігається, тобто має суму $S(x)$, у всіх точках цього інтервалу.

При цьому:

- а) в точках неперервності функції $f(x)$ ряд збігається до самої функції, $S(x) = f(x)$,
- б) в кожній точці розриву x_k функції $f(x)$ ряд збігається до півсуми односторонніх границь функції зліва і справа.

$$S(x) = \frac{1}{2} \left[\lim_{x \rightarrow x_{k-0}} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_{k+0}} f(x) \right],$$

в) в обох граничних точках інтервалу $[-l, l]$ ряд збігається до півсуми односторонніх границь функції, коли x прямує до цих точок з середини інтервалу

$$S(-l) = S(l) = \frac{1}{2} \left[\lim_{x \rightarrow l+0} f(x) + \lim_{x \rightarrow l-0} f(x) \right].$$

Приклад 1.

Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x) = \frac{x}{2}$ в інтервалі $(0, 2p)$.

Побудувати графіки самої функції та перші чотири наближення розвинення у ряд Фур'є.

Спочатку перевіряємо, що дана функція у вказаному інтервалі задовольняє умовам Діріхле .

Задана функція не є парною і не є непарною, тому обчислюємо її коефіцієнти Фур'є за загальними формулами, покладаючи $l=p$ і беручи границями інтегралів 0 та $2p$, оскільки функція задана в інтервалі $(0, 2p)$:

$$a_n = \frac{1}{p} \int_0^{2p} \frac{x}{2} \cos nx dx = \frac{1}{2p} \left(\frac{x}{n} \sin nx \Big|_0^{2p} - \frac{1}{n} \int_0^{2p} \sin nx dx \right) = \quad n=1, 2, \dots$$

$$= \frac{1}{2pn^2} \cos nx \Big|_0^{2p} = \frac{\cos 2pn - 1}{2pn^2} = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_0^{2p} \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{4p} \Big|_0^{2p} = p$$

$$b_n = \frac{1}{p} \int_0^{2p} \frac{x}{2} \sin nx dx = \frac{1}{2p} \left(\frac{\sin nx}{n^2} - \frac{x \cos nx}{n} \right) \Big|_0^{2p} = -\frac{1}{n}$$

Підставляючи одержані значення коефіцієнтів a_n та b_n в тригонометричний ряд (1.10), одержимо шукане розвинення даної функції в ряд Фур'є:

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{p} \int_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{p}{2} - \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 3x}{3} - \dots$$

Побудуємо графіки функції $f(x) = \frac{x}{2}$ та її перші чотири наближення розвинення у ряд Фур'є, дивись рис.1.2.

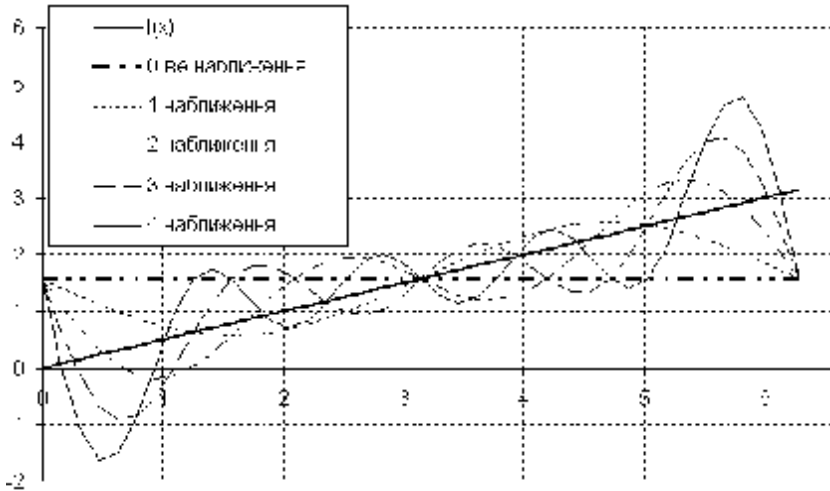


Рисунок - 1.2

Приклад 2.

Розвинути в ряд Фур'є функцію

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \in (-3;0) \\ 3, & x \in (0;3) \end{cases}$$

Побудувати графіки самої функції та її перші чотири наближення розвинення у ряд Фур'є.

Функція є періодичною з періодом $2l=6$, отже, $l=3$.

Очевидно, що функція є ні парною, ні непарною, отже,

$$y = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{np x}{3} + b_n \sin \frac{np x}{3}.$$

Обчислимо коефіцієнти ряду.

$$a_0 = \frac{1}{3} \int_{-3}^3 y(x) dx = \frac{1}{3} \left[\int_{-3}^0 (2x-1) dx + \int_0^3 3 \cdot dx \right],$$

$$I_1 = \int_{-3}^0 (2x-1) dx = 2 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{-3}^0 - x \Big|_{-3}^0 = 0 - 9 - (0 + 3) = -12,$$

$$I_2 = \int_0^3 3 dx = 3x \Big|_0^3 = 9 - 0 = 9,$$

$$a_0 = \frac{1}{3}(-12 + 9) = -1;$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{3} \int_{-3}^3 y(x) \cos \frac{np x}{3} dx = \\ &= \frac{1}{3} \left[\int_{-3}^0 (2x-1) \cos \frac{np x}{3} dx + \int_0^3 3 \cdot \cos \frac{np x}{3} dx \right], \end{aligned}$$

$$I_1 = \int_{-3}^0 (2x-1) \cos \frac{np x}{3} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \begin{array}{l} u = 2x - 1 \quad du = 2 \cdot dx \\ dv = \cos \frac{np \cdot x}{3} \quad v = \frac{3}{np} \sin \frac{np \cdot x}{3} \end{array} \right\} = \\
&= (2x - 1) \cdot \frac{3}{np} \sin \frac{np \cdot x}{3} \Big|_{-3}^0 - \frac{3}{np} \cdot 2 \int_{-3}^0 \sin \frac{np \cdot x}{3} dx = \\
&= \frac{3}{np} (2x - 1) \sin \frac{np \cdot x}{3} \Big|_{-3}^0 - \frac{6}{np} \cdot \left(-\frac{3}{np} \right) \cdot \cos \frac{np \cdot x}{3} \Big|_{-3}^0 = \\
&= \frac{3}{np} \cdot \left(-1 \cdot \sin \frac{np \cdot (-3)}{3} - (-7) \sin \frac{np \cdot (-3)}{3} \right) + \\
&\quad + \frac{18}{n^2 p^2} \cdot \left(\cos 0 - \cos \frac{np \cdot (-3)}{3} \right) = \\
&= \frac{18}{n^2 p^2} \cdot \left(\cos 0 - \cos \frac{np}{3} \right) = \frac{18}{n^2 p^2} \cdot (1 - (-1)^n), \\
I_2 &= \int_0^3 3 \cdot \cos \frac{np \cdot x}{3} dx = 3 \frac{3}{np} \sin \frac{np \cdot x}{3} \Big|_0^3 = \frac{9}{np} \left(\sin \frac{np \cdot 3}{3} - \sin 0 \right) = 0, \\
a_n &= \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{18}{n^2 p^2} \cdot (1 - (-1)^n) + 0 \right] = \frac{6}{n^2 p^2} \cdot (1 - (-1)^n); \\
b_n &= \frac{1}{3} \int_{-3}^3 y(x) \sin \frac{np \cdot x}{3} dx = \\
&= \frac{1}{3} \left[\int_{-3}^0 (2x - 1) \sin \frac{np \cdot x}{3} dx + \int_{-3}^0 3 \cdot \sin \frac{np \cdot x}{3} dx \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-3}^0 (2x-1) \sin \frac{np x}{3} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = 2x-1 \quad du = 2 \cdot dx \\ dv = \sin \frac{np x}{3} dx \quad v = -\frac{3}{np} \cos \frac{np x}{3} \end{array} \right\} = \\
&= (2x-1) \cdot \left(-\frac{3}{np} \right) \cos \frac{np x}{3} \Big|_{-3}^0 - \left(-\frac{3}{np} \right) \cdot 2 \int_{-3}^0 \cos \frac{np x}{3} dx = \\
&= -\frac{3}{np} (2x-1) \cos \frac{np x}{3} \Big|_{-3}^0 + \frac{6}{np} \cdot \frac{3}{np} \cdot \sin \frac{np x}{3} \Big|_{-3}^0 = \\
&= -\frac{3}{np} \left(-\cos 0 - (-7) \cdot \cos \frac{-3np}{3} \right) + \frac{18}{n^2 p^2} \left(\sin \frac{0}{3} - \sin \frac{-3np}{3} \right) = \\
&= -\frac{3}{np} \cdot \left(-1 + 7 \cdot \cos \frac{-3np}{3} \right) + \frac{18}{n^2 p^2} \left(0 - \sin \frac{-3np}{3} \right) = \\
&= -\frac{3}{np} \cdot \left(-1 + 7 \cdot \cos \frac{-3np}{3} \right) + \frac{18}{n^2 p^2} \left(0 - \sin \frac{-3np}{3} \right) = \\
&= -\frac{3}{np} \cdot \left(-1 + 7 \cdot \cos \frac{-3np}{3} \right) + \frac{18}{n^2 p^2} \left(0 - \sin \frac{-3np}{3} \right) = \\
&= -\frac{3}{np} \cdot \left(-1 + 7 \cdot \cos \frac{-3np}{3} \right) + \frac{18}{n^2 p^2} \left(0 - \sin \frac{-3np}{3} \right) = \\
I_2 &= \int_0^3 3 \cdot \sin \frac{np x}{3} dx = 3 \cdot \left(-\frac{3}{np} \right) \cos \frac{np x}{3} \Big|_0^3 = \\
&= -\frac{9}{np} \left(\cos \frac{np \cdot 3}{3} - \cos 0 \right) = -\frac{9}{np} \left((-1)^n - 1 \right) = \frac{9}{np} \left(1 - (-1)^n \right), \\
b_n &= \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{3}{np} \cdot \left(1 - 7 \cdot (-1)^n \right) + \frac{9}{np} \cdot \left(1 - (-1)^n \right) \right] = \frac{1}{np} \cdot \left(4 - 10 \cdot (-1)^n \right).
\end{aligned}$$

Таким чином, ряд має вигляд

$$\begin{aligned}
y(x) &= -\frac{1}{2} + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^2 p^2} \left(1 - (-1)^n \right) \cos \frac{np x}{3} + \frac{1}{np} \left(4 - 10 \cdot (-1)^n \right) \sin \frac{np x}{3}
\end{aligned}$$

Графіки функції $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \in (-3;0) \\ 3; & x \in (0;3) \end{cases}$ та її перші чотири наближення розвинення у ряд Фур'є побудовано на рис.1.3.

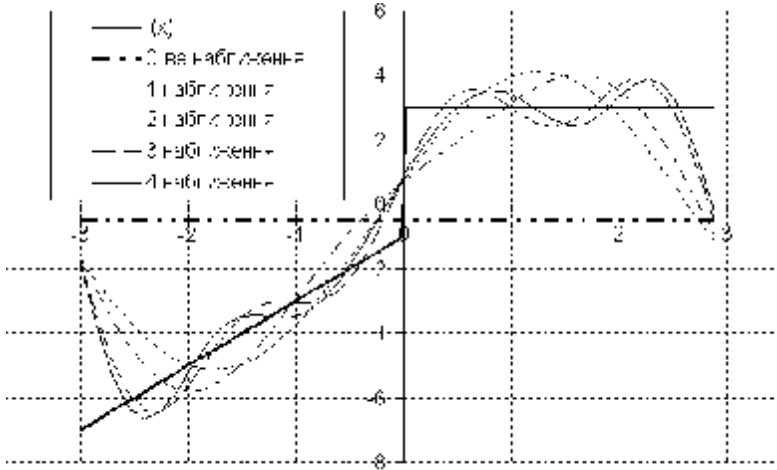


Рисунок - 1.3

Приклад 3.

На проміжку $[-4; 4]$ періодичну з періодом $T = 8$ функцію $y=f(x)$ задано графічно на рис. 1.4.

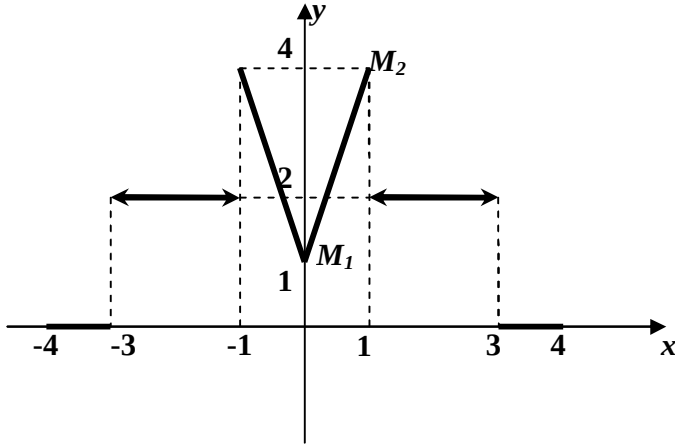


Рисунок - 1.4

Період функції $2l=8$, отже, півперіод $l=4$. Графік є симетричним відносно осі Oy , тому функція парна та розкладається в ряд Фур'є за косинусами:

$$y = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos \frac{n\pi x}{4}.$$

Задамо функцію аналітично. Запишемо рівняння прямої, яка проходить через точки $M_1(0;1)$ та $M_2(1;4)$.

Користуючись рівнянням $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$, маємо

$$\frac{x-0}{1-0} = \frac{y-1}{4-1}; \quad x = \frac{y-1}{3}; \quad y-1=3x.$$

Таким чином, $y=3x+1$ для $x \in [0;1]$.

Якщо $x \in (1;3)$, то $y=2$; при $x \in [3;4]$ $y=0$.

$$\text{Остаточно } y = \begin{cases} 3x+1, & x \in [0; 1] \\ 2, & x \in (1; 3) \\ 0, & x \in [3; 4] \end{cases}.$$

Обчислимо коефіцієнти Фур'є:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{l} \int_0^l y(x) dx = \frac{2}{4} \left(\int_0^1 (3x+1) dx + \int_1^3 2 dx + \int_3^4 0 dx \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^1 3x dx + \int_0^1 dx + 2x \Big|_1^3 \right) = \frac{1}{2} \left(3 \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 + x \Big|_0^1 + 2(3-1) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} (1^2 - 0^2) + (1-0) + 4 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} + 5 \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{2} = \frac{13}{4}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l y(x) \cos \frac{np x}{l} dx = \frac{2}{4} \left(\int_0^1 (3x+1) \cos \frac{np x}{4} dx + \int_1^3 2 \cos \frac{np x}{4} dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_3^4 0 \cdot \cos \frac{np x}{4} dx \right) = \\ &\quad \left\{ \begin{array}{l} u = 3x+1 \quad du = 3dx \\ dv = \cos \frac{np x}{4} dx \quad v = \frac{4}{np} \sin \frac{np x}{4} \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \left((3x+1) \cdot \frac{4}{np} \sin \frac{np x}{4} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{4}{np} \sin \frac{np x}{4} \cdot 3 dx + 2 \cdot \frac{4}{np} \sin \frac{np x}{4} \Big|_1^3 \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left(\frac{4}{np} \left((3 \cdot 1 + 1) \cdot \sin \frac{np}{4} - 1 \cdot \sin \frac{np}{4} \right) - \frac{12}{np} \cdot \left(-\frac{4}{np} \cdot \cos \frac{np}{4} \right) \right) \Big|_0^1 + \\
&\quad + \frac{8}{np} \left(\sin \frac{3np}{4} - \sin \frac{np}{4} \right) \Big|_0^1 = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{np} \left(4 \cdot \sin \frac{np}{4} + \frac{12}{np} \left(\cos \frac{np}{4} - \cos \frac{np}{4} \right) + 2 \left(\sin \frac{3np}{4} - \sin \frac{np}{4} \right) \right) = \\
&= \frac{4}{np} \left(\sin \frac{np}{4} + \sin \frac{3np}{4} + \frac{6}{np} \cos \frac{np}{4} - \frac{6}{np} \right). \\
y &= \frac{13}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{np} \left(\sin \frac{np}{4} + \sin \frac{3np}{4} + \frac{6}{np} \cos \frac{np}{4} - \frac{6}{np} \right) \cos \frac{np}{4} x.
\end{aligned}$$

Зауваження. Цілком коректною є задача побудови ряду Фур'є для функції, яку задано лише на скінченному проміжку $[-l; l]$. Треба лише зауважити, що застосовувати отримане розв'язання можна виключно для значень аргументу із зазначеного проміжку.

2 РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ ЗАВДАННЯ

2.1 За допомогою ознак збіжності дослідити збіжність рядів

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 5^n}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(2n)!}$

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-2)^3}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)}{(n+2)!}$

4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 - 1}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3 - 1}{n!}$

5. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^3}{1+n^4}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(3n)!}$

6. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{p}{2n}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2} \cdot 3^n}$

г) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{n^2+1} \right)^{n^2}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2+1)^2}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)}$

г) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^3-1}}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}$

г) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-3}{3n+1} \right)^{n^2}$

7. б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{(n+1)!}$ г) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$
 а) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{p}{3^n}$ 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^n \frac{p}{2n}$
8. б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n (3 + e^{-n})}$
 а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+10}}$ 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2 + 1}{3n^2 + 2n} \right)^n$
9. б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{(n+1)!}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg^2 n}{1 + n^2}$
 а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^3}}$ 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+2} \right)^n$
10. б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n2^n}}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \sqrt{n}}{\sqrt{n}}$
 а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+3n}{2+3n^2} \right)^2$ 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{\ln^n(n+1)}$
11. б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 2n + 1}{2^{n+5}(n^2 + 1)}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+n^2) \arctg^3 n}$
 а) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{n^4 + 1}}$ 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{n} \right)^{n/3}$
12. б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$
 а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(2n-1) \cdot 3^n}$ 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n-8}{1+3n} \right)^n$
- б) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{p}{2^n}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n(\ln^4 n + 1)}$

$$13. \quad a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-3)}}$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n^2}{(n+1)!}$$

$$14. \quad a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2+5)^{3/2}}$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(n+1)!}$$

$$15. \quad a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 5^{n-1}}$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{n!}$$

$$16. \quad a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n^2+n+1)^5}$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(n^2+1)} 3^n}{n \cdot 2^{n/2}}$$

$$17. \quad a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+8}{n^4+2n+3}$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$18. \quad a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+2}}{n+1}$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{(n+3)!}$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n+1)^{3n} \cdot 2^n}$$

$$r) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n^2}}$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \arccos^n \frac{3}{n^2}$$

$$r) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+4}$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{5+3n} \right)^{4n}$$

$$r) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} \sin \sqrt{n}}$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2} \cdot \frac{1}{5^n}$$

$$r) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(n+1) \ln(n+1)}$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2}{3n^2+1} \right)^{n^2}$$

$$r) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{5n+5}{5n-4} \right)^n$$

$$r) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{n^2}$$

$$19. \quad \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^3}{1+n^2}$$

$$\text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$$

$$20. \quad \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{4n^3+2n+3}$$

$$\text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{5^n}$$

$$21. \quad \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n-1}{n^3\sqrt{n}}$$

$$\text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)!}{(n+3)!}$$

$$22. \quad \text{a) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3\sqrt{n}-\sqrt{n}}$$

$$\text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{n^3+8}$$

$$23. \quad \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}}{n^3+3}$$

$$\text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!-n!}{n^3}$$

$$24. \quad \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n^2+2n}{3n^4+5}}$$

$$\text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{4n}}{n^2+1}$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+5} \right)^n$$

$$\text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3\sqrt{n}}$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln \left(3 + \frac{4}{n} \right) \right)^{-n}$$

$$\text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{1/n}}{n^2}$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} 3^n \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$$

$$\text{г) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n) \ln(\ln n)}$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{n}{n+1} \right)^n$$

$$\text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n}$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{n\sqrt{2}}{2n+1} \right)^n$$

$$\text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{1}{n}}{n^2}$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n(n+1)^{n^2}}$$

$$\text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+n^2) \operatorname{arctg} n}$$

25. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)\sqrt[3]{n+2}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{n+1} \right)^n$
 в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{(2n-1)!}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$
26. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^3+4}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}$
 в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{3^n(n+2)}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg \sqrt{n}}{(1+n)\sqrt{n}}$
27. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{4n^3+5n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctg \frac{1}{n} \right)^n$
 в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{10^{3n-1}}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{4\sqrt[4]{n^3}}$
28. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{p}{n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1} \right)^{2n}$
 в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2n+1}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg^3 n}{1+n^2}$
29. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^5+1}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1} \right)^{n/2}$
 в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\cos^2 n}$
30. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^3+1}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{3n-1}$
 в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{5^n}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{\ln^2 n}}{n}$

2.2 Дослідити збіжність заданих знакозмінних рядів

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$$

$$2. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 7^n}$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(3n-2)!}$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2n}{3n+5} \right)^n$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(-1)^{n-1}}{n(n+2)}$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n-3)}{n^2 - 1}$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n} \right)^n$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(2n+1)^n}$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3 \sqrt{\ln n}}$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$$

$$13. \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(\arctg \frac{n}{n+1} \right)^n$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(n^2 + n + 1)^3}$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{p}{4^n}$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} 3^n \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \sqrt{3n+1}}$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{(n+2)^3 \sqrt[3]{n+1}}$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-5}{5n+10}$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln^n(n+1)}$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{3} \right)^n$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n \sqrt{n+2}}$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{(n^2 + 1) \sqrt{n}}$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-3n}{8n+2} \right)^n$$

$$26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{3^{n+2}}$$

$$27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\arctg(n+1)}$$

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n^4 + 1}}{n^2 + 3}$$

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3}{5} \right)^{2n+1}$$

$$30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n \sqrt{n+1}}{n^2 + 3}$$

2.3 Знайти інтервал збіжності та дослідити поведінку степеневому ряду на кінцях інтервалу збіжності

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+2}}{n=1} (x-2)^n$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} (x+5)^n \frac{1}{(2n+1)\sqrt{n+3}}$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{(2n-1)^2 2^n} (x-2)^n$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2 + 2n}$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (x+1)^n}{n}$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(2n+1) \cdot 3^n}$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^n (x+1)^n}{2^{n-1} n^n}$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(3n-1)^2} (x-3)^n$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2 3^{2n+1}}$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{n^2 + 2n - 1}$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5n-3)(x+4)^n}{(n+1)^2 3^{n+1}}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{(n+1)^2} \cdot \frac{(x-3)^n}{2^{n+1}}$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^{2n}}{(3n-2)^{2n}} (x-1)^n$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} (x-1)^n$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} (x-5)^n$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n}}{n+3}$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^{2n-1}}{5n \cdot 9^n}$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2 2^n} x^n$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n \cdot 3^n}$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+2}}{n+1} (x-2)^n$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n (n^2+1)}{(n^3+3)\sqrt{n}}$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{3n-2}$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^{n-1} n(n+1)}$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{(3n-1)3^n}$$

$$27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n 3^n}{n \cdot 2^n}$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2x-4}{3} \right)^n$$

$$26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1}$$

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n n}{(n+1)4^n}$$

$$30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3} \left(\frac{x-6}{3} \right)^n$$

2.4 Розвинути функції у ряд по степенях x , використовуючи готові розвинення у ряд основних елементарних функцій. Побудувати графіки самої функції та перші чотири наближення розвинення у степеневий ряд

$$1. f(x) = \sqrt{x}e^x$$

$$2. f(x) = x \ln(1+x^2)$$

$$3. f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

$$4. f(x) = \frac{x - \arctg x}{x^3}$$

$$5. f(x) = \cos^2 x$$

$$6. f(x) = (1+x)e^{-x}$$

$$7. f(x) = \sin 3x + x \cos 3x$$

$$8. f(x) = \sqrt[3]{x-2}$$

$$9. f(x) = \frac{1}{3x+4}$$

$$10. f(x) = x \cdot e^{-x}$$

$$11. f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x}$$

$$12. f(x) = x \cdot e^{-x}$$

$$13. f(x) = \sin x^2$$

$$14. f(x) = \arctg x^2$$

$$15. f(x) = x \ln(1-x^2)$$

$$16. f(x) = e^{\frac{x^{21}}{3}}$$

$$17. f(x) = x \cdot \arctg x$$

$$18. f(x) = \sqrt{1+x^2}$$

$$19. f(x) = \frac{\sin x^2}{x^2}$$

$$20. f(x) = \sqrt{x} \cos x$$

$$21. f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$$

$$22. f(x) = \frac{e^{-2x} - 1}{x}$$

$$23. f(x) = \frac{1 - \cos x}{x}$$

$$24. f(x) = 1 - \sqrt[3]{1-x}$$

$$25. f(x) = \frac{x - \sin x}{x^2}$$

$$26. f(x) = \frac{2}{1-3x^2}$$

$$27. f(x) = \frac{x^2}{1+x}$$

$$28. f(x) = (x-1)^2 \arctg x$$

$$29. f(x) = \ln(1-x+x^2)$$

$$30. f(x) = \sin^2 x$$

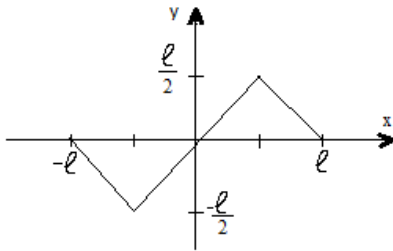
2.5 Розвинути в ряд Фур'є задані функції у вказаних інтервалах. Побудувати графіки самої функції та її перші чотири наближення розвинення у ряд Фур'є

1. Функцію $y = \frac{p}{4} - \frac{x}{2}$ на інтервалі $(0, p)$ в ряд по косинусах.
2. Функцію $y = x^2$ на інтервалі $(-p, p)$.
3. Функцію $f(x) = \begin{cases} x; -p < x < 0 \\ 1; 0 < x < p \end{cases}$
4. Функцію $f(x) = \begin{cases} x; -p < x < 0 \\ x+1; 0 < x < p \end{cases}$
5. Функцію $y = |x|$ на інтервалі $(-1, 1)$
6. Функцію $f(x) = \begin{cases} \sin 2x; |x| < p/2 \\ 0; |x| \geq p/2 \end{cases}$
7. Функцію $y = 2 - |x|$ на інтервалі $(-1, 1)$.
8. Функцію $f(x) = x - 1$ на інтервалі $(-p, p)$.
9. Функцію $y = \frac{p}{4} - x$ на інтервалі $(0, p)$ по синусах.
10. Функцію $y = e^x - 1$ в ряд по синусах на інтервалі $(0, 2p)$.
11. Функцію $y = e^x$ на інтервалі $(-1, 1)$.
12. Функцію $y = |1 - x|$ на інтервалі $(-2, 2)$.
13. Функцію $f(x) = \begin{cases} -1; -p \leq x \leq 0 \\ x; 0 < x \leq p \end{cases}$
14. Функцію $f(x) = \begin{cases} x+p; -p \leq x \leq 0 \\ p-x; 0 < x \leq p \end{cases}$
15. Функцію $f(x) = \begin{cases} 1; -p \leq x \leq 0 \\ 2x; 0 < x \leq p \end{cases}$

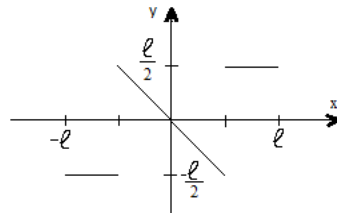
16. Функцію $f(x) = \begin{cases} \frac{p}{2}; -p \leq x \leq 0 \\ p - x; 0 < x \leq p \end{cases}$
17. Функцію $f(x) = \begin{cases} -2x; -p \leq x \leq 0 \\ 3x; 0 \leq x \leq p \end{cases}$
18. Функцію $f(x) = \begin{cases} -\frac{p}{4}; -2 \leq x \leq 0 \\ x; 0 < x \leq 2 \end{cases}$
19. Функцію $f(x) = \begin{cases} 1; -4 < x < 0 \\ x; 0 \leq x < 4 \end{cases}$
20. Функцію $f(x) = \begin{cases} -x; 0 \leq x < 1 \\ x - 2; 1 \leq x < 2 \end{cases}$
21. Функцію $f(x) = 2x$ в ряд по косинусах на інтервалі $(0, p)$.
22. Функцію $f(x) = 1 - x$ при $-1 \leq x < 1$.
23. Функцію $f(x) = x + 1$ при $0 < x < 2$ - в ряд по синусах.
24. Функцію $f(x) = \cos 2x$ у ряд по синусах на інтервалі $(0, p)$
25. Функцію $f(x) = 2x - 1$ при $-p \leq x \leq p$.
26. Функцію $f(x) = \begin{cases} -x + 1; -1 < x \leq 0 \\ 2x; 0 < x < 1 \end{cases}$
27. Функцію $f(x) = 3 - 2x$, $-3 < x < 3$
28. Функцію $f(x) = 2x - 3$ на інтервалі $[-p, p]$
29. Функцію $f(x) = 3 - |x|$ на інтервалі $(-5, 5)$.
30. Функцію $f(x) = |x| - 5$ на інтервалі $(-2, 2)$.

2.6 Розвинути в ряд Фур'є функції, які задано графічно

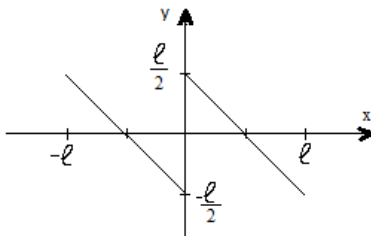
1.



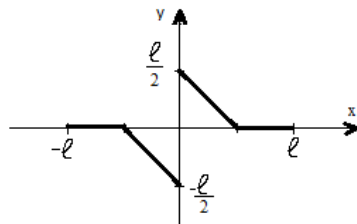
2.



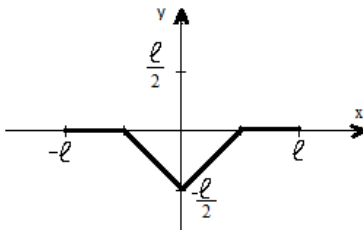
3.



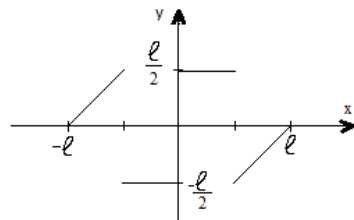
4.



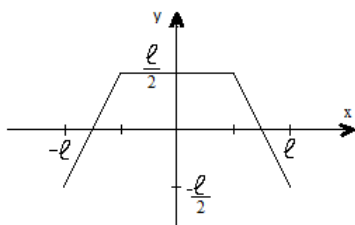
5.



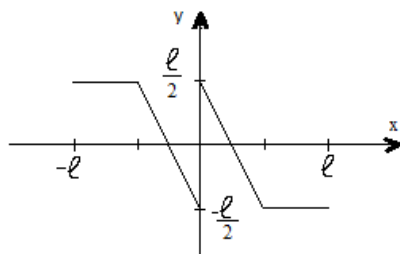
6.



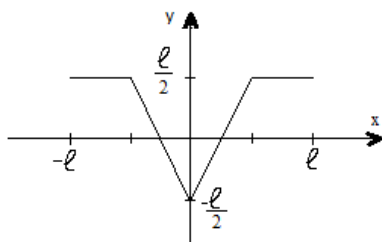
7.



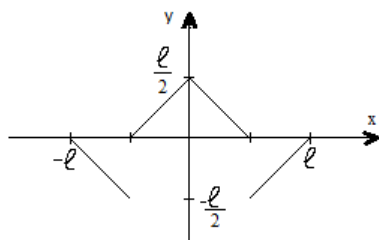
8.



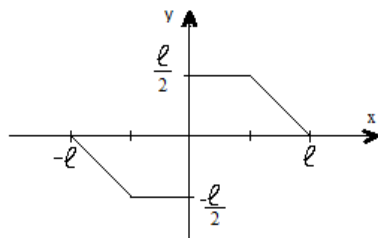
9.



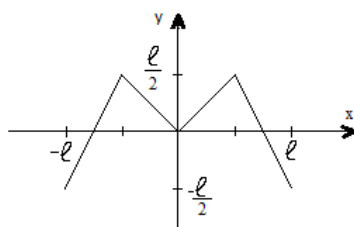
10.



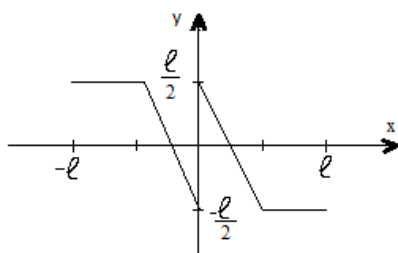
11.



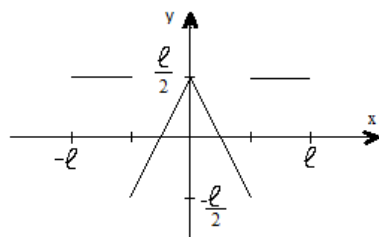
12.



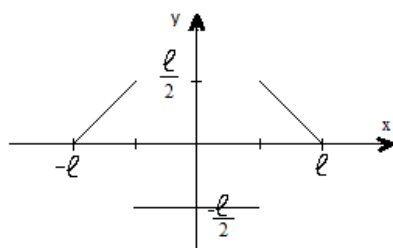
13.



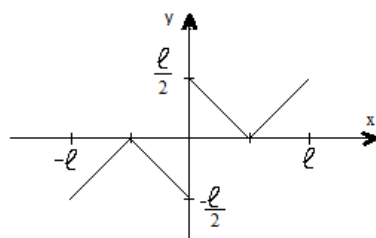
14.



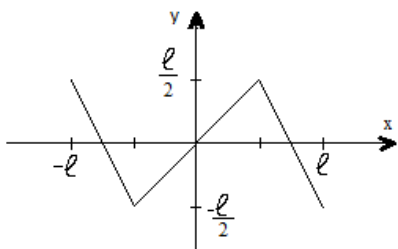
15.



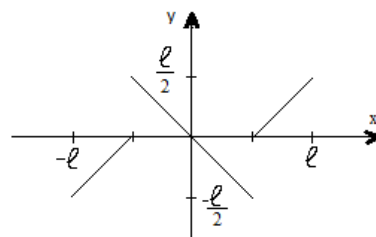
16.



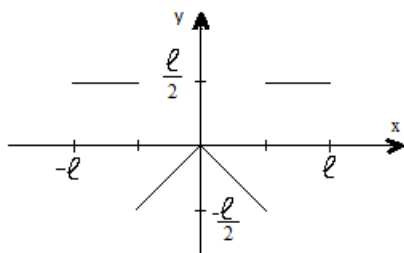
17.



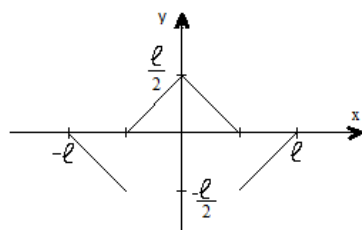
18.



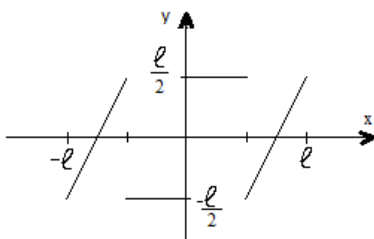
19.



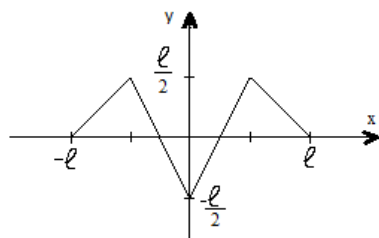
20.



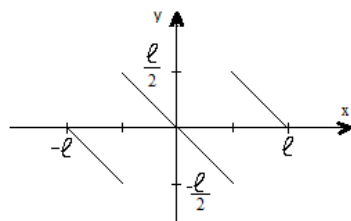
21.



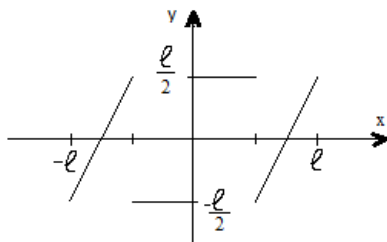
22.



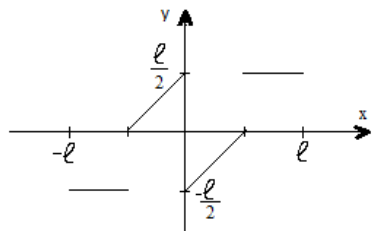
23.



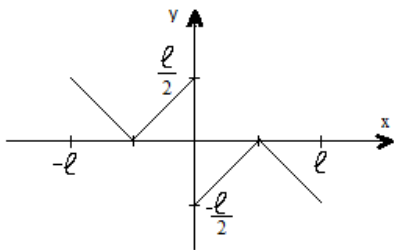
24.



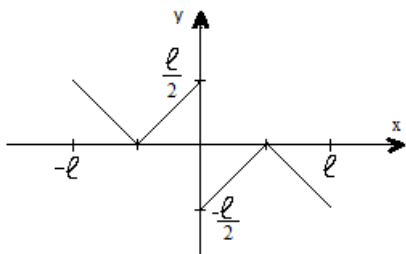
25.



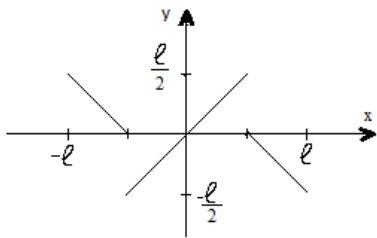
26.



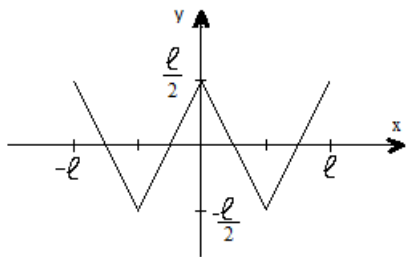
27.



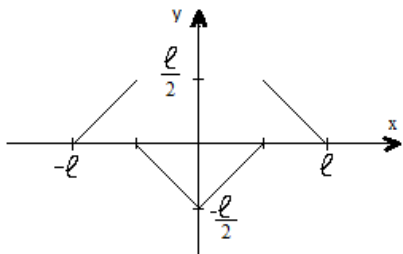
28.



29.



30.



2.7 Обчислити інтеграл з похибкою до 0.001

$$1. \int_0^{0.1} e^{-5x^2} dx$$

$$3. \int_0^{0.1} \frac{1 - e^{-2x}}{x} dx$$

$$5. \int_0^{0.2} \sin(25x^2) dx$$

$$7. \int_0^{0.4} \frac{\ln(1 + x/2)}{x} dx$$

$$9. \int_0^{0.5} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^4}}$$

$$11. \int_0^{0.2} e^{-2x^2} dx$$

$$13. \int_0^{0.2} \frac{1 - e^{-x}}{x} dx$$

$$15. \int_0^{0.3} e^{-7x^2} dx$$

$$17. \int_0^{0.2} \cos(25x^2) dx$$

$$19. \int_0^{0.4} \frac{1 - e^{-x/2}}{x} dx$$

$$21. \int_0^{2.5} \frac{dx}{\sqrt[3]{125+x^3}}$$

$$2. \int_0^1 \cos x^2 dx$$

$$4. \int_0^{1.5} \frac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}$$

$$6. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{16+x^4}}$$

$$8. \int_0^{0.1} \sin(100x^2) dx$$

$$10. \int_0^1 \frac{\ln(1 + x/5)}{x} dx$$

$$12. \int_0^{0.5} \cos(4x^2) dx$$

$$14. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{64+x^3}}$$

$$16. \int_0^{0.4} \sin\left(\frac{5x}{2}\right)^2 dx$$

$$18. \int_0^{1.5} \frac{dx}{\sqrt[4]{81+x^4}}$$

$$20. \int_0^{0.1} \frac{\ln(1+2x)}{x} dx$$

$$22. \int_0^{0.4} e^{-\frac{3x^2}{4}} dx$$

$$23. \int_0^{0.5} \sin(4x^2) dx$$

$$25. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{256+x^4}}$$

$$27. \int_0^{2.5} \frac{dx}{\sqrt[3]{625+x^4}}$$

$$29. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{8+x^3}}$$

$$24. \int_0^{0.4} \cos\left(\frac{5x}{2}\right)^2 dx$$

$$26. \int_0^{0.5} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$$

$$28. \int_0^1 \cos\left(\frac{9x}{4}\right)^2 dx$$

$$30. \int_0^{0.3} e^{-6x^2} dx$$

2.8 Зайти перші п'ять членів розвинення в ряд розв'язку диференційного рівняння за умовою $y(0)=y'(0)=1$

$$1. y'' = y \cos x + x$$

$$3. y'' = y' x^2 + 2 \cos y$$

$$5. y'' = 5x \sin y + x^2$$

$$7. y'' = y' x^2 - y e^{-x} + 1$$

$$9. y'' = -4 e^{-y} + y \cos x$$

$$11. y'' = y^2 \cos x - 2y$$

$$13. y'' = 2x e^{-y} + 3x^2 y'$$

$$15. y'' = y \sin x^2 - 3e^y$$

$$17. y'' = 2xy' + y e^{-x}$$

$$19. y'' = -xy - 2 \sin x^2$$

$$2. y'' = -3e^y + x^2 y'$$

$$4. y'' = 6x^2 y' - x \cos^2 y$$

$$6. y'' = -y^2 e^x + y' x^2$$

$$8. y'' = 2xy + y' \sin x$$

$$10. y'' = 1 + x^2 y' - e^y$$

$$12. y'' = -2x e^{-x} + x^2 y'$$

$$14. y'' = 5e^y - x \cos y$$

$$16. y'' = 3x^2 + \cos y$$

$$18. y'' = x^2 \sin y - 2y'$$

$$20. y'' = 4y^2 + 2x e^{-y}$$

21. $y'' = 3x^2 y' - e^x$

23. $y'' = -x^2 y' - 2xy + 1$

25. $y'' = y \cos x^2 - 5 e^y$

27. $y'' = 3xy' - y e^{-x}$

29. $y'' = xy + 5 \sin x^2$

22. $y'' = y^3 x - 3 \cos^2 x$

24. $y'' = -2x^2 y' + y^2$

26. $y'' = 3x^2 y' + \cos y$

28. $y'' = x^2 \cos y - 4y'$

30. $y'' = y^2 - 5x e^{-y}$

3 ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

1. Яким є розкладання в ряд Маклорена функції $f(x) = 1/\sqrt[3]{x^3 + 1}$?

1. $f(x) = 1 - \frac{1}{3}x^3 + \dots + (-1)^n \frac{1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{3^n \cdot n!} x^{3n} + \dots$

2. $f(x) = 1 + \frac{1}{3}x^3 + \dots + \frac{1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{3^n \cdot n!} x^{3n} + \dots$

3. $f(x) = 1 - \frac{1}{3}x + \dots + (-1)^n \frac{1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{3^n \cdot n!} x^n + \dots$

4. $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \dots + (-1)^n \frac{1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{3^n \cdot n!} x^{3n} + \dots$

2. Яким є розкладання в ряд Маклорена функції $f(x) = \ln(10+x)$ і якою є область збіжності цього ряду?

1. $f(x) = \ln 10 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n \cdot 10^n}, x \in \left(-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right]$

2. $f(x) = \ln 10 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{(n+1) \cdot 10^n}, x \in \left(-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right)$

3. $f(x) = \ln 10 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n \cdot 10^n}, x \in (-10, 10]$

4. $f(x) = \ln 10 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n \cdot 10^n}, x \in (-10, 10)$

3. Яким є розкладання в ряд Маклорена функції $f(x) = \cos 5x$ і яким є інтервал збіжності цього ряду?

1. $f(x) = 1 - \frac{(5x)^2}{2!} + \frac{(5x)^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n (5x)^{2n}}{(2n)!} + \dots, x \in (-\infty, +\infty)$

2. $f(x) = 1 + \frac{(5x)^2}{2!} + \frac{(5x)^4}{4!} - \dots + \frac{(5x)^{2n}}{(2n)!} + \dots, x \in (-\infty, +\infty)$

$$3. f(x) = \frac{(5x)^2}{2!} - \frac{(5x)^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n (5x)^{2n}}{(2n)!} + \dots, x = 0.$$

$$4. f(x) = \frac{(5x)^2}{2!} + \frac{(5x)^4}{4!} - \dots + \frac{(5x)^{2n}}{(2n)!} + \dots, x \in (-\infty, +\infty).$$

4. Яким є розкладання в ряд Маклорена функції $f(x) = \sin x^2$ і якою є область збіжності цього ряду?

$$1. f(x) = x^3 - \frac{x^5}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{4n+1}}{(2n)!} + \dots, x \in (-1, 1).$$

$$2. f(x) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} x^{4n-2}}{(2n-1)!} + \dots, x \in (-\infty, +\infty).$$

$$3. f(x) = x^3 - \frac{x^5}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{(2n-1)!} + \dots, x \in (-\infty, +\infty).$$

$$4. f(x) = x^3 - \frac{x^5}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} x^{4n+1}}{(2n)!} + \dots, x = 0.$$

5. Яким є розкладання в ряд Маклорена функції $f(x) = x^2 / (1 + x^2)$ і якою є область збіжності цього ряду?

$$1. f(x) = x - x^3 + x^5 - \dots + (-1)^{n+1} x^{2n-1} + \dots, x \in (-1, 1).$$

$$2. f(x) = -x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots, x \in [-1, 1].$$

$$3. f(x) = x^2 - x^4 + \dots + (-1)^{n+1} x^{2n} + \dots, x \in (-1, 1).$$

$$4. f(x) = x^5 - x^7 + x^9 - \dots + (-1)^{n+1} x^{2n+3} + \dots, x \in (-\infty, \infty).$$

6. Яким є розкладання многочлена $f(x) = -3 + x - x^2 + 2x^3$ в ряд Тейлора за степенями $x-1$?

$$1. -3 + x - x^2 + 2x^3 = -1 + 5(x-1) + 5(x-1)^2 + 2(x-1)^3.$$

$$2. -3 + x - x^2 + 2x^3 = 5(x-1)^3 + 5(x-1)^2 + 2(x-1).$$

$$3. -3 + x - x^2 + 2x^3 = -1 + (x-1) + (x-1)^2 + (x-1)^3.$$

$$4. -3 + x - x^2 + 2x^3 = 5(x-1) - 3(x-1)^2 + 2(x-1)^3 - 1.$$

7. Яким є розкладання многочлена $f(x) = 4x^3 + 5x^2 - 3x - 2$ в ряд Тейлора за степенями $x-1$?

$$1. 4x^3 + 5x^2 - 3x - 2 = 4 + 19(x-1) + 7(x-1)^2 + 4(x-1)^3.$$

$$2. 4x^3 + 5x^2 - 3x - 2 = 4 + 19(x-1)^3 + 7(x-1)^2 + 4(x-1).$$

$$3. 4x^3 + 5x^2 - 3x - 2 = 9(x-1) + 6(x-1)^2 - 12(x-1)^3.$$

$$4. 4x^3 + 5x^2 - 3x - 2 = (x-1)^3 + (x-1)^2 + (x-1).$$

8. Яким є розкладання многочлена $f(x) = 5x^3 - 7x^2 - 3x + 2$ в ряд Тейлора за степенями $x-1$?

$$1. f(x) = (x-1) + (x-1)^2 + (x-1)^3.$$

$$2. f(x) = 5(x-1) + 23(x-1)^2 + 30(x-1)^3.$$

$$3. f(x) = 5(x-1)^3 + 23(x-1)^2 + 30(x-1) - 3.$$

$$4. f(x) = -3 + 5(x-1) + 23(x-1)^2 + 30(x-1)^3.$$

9. Яким є розкладання многочлена $f(x) = -7 + 12x + 3x^2 - x^3$ в ряд Тейлора за степенями $x-1$?

$$1. f(x) = -1 + 3(x-1) - 12(x-1)^2 - 6(x-1)^3.$$

$$2. f(x) = 3(x-1) - 2(x-1)^2 - (x-1)^3.$$

$$3. f(x) = -(x-1)^3 - 5(x-1)^2 + 6(x-1).$$

$$4. f(x) = 4(x-1) - 2(x-1)^2 - 6(x-1)^3 - 1.$$

10. Яким є розкладання многочлена $f(x) = 4 + 2x^2 - 7x^3$ в ряд Тейлора за степенями $x-1$?

$$1. f(x) = -1 - 10(x-1) - 4(x-1)^2.$$

$$2. f(x) = -1 - 3(x-1) - 10(x-1)^2 - 14(x-1)^3.$$

$$3. f(x) = -3(x-1)^3 - 10(x-1)^2 - 14(x-1).$$

$$4. f(x) = -6 - (x-1) - 6(x-1)^2 - 10(x-1)^3.$$

11. Яким є розкладання функції $f(x) = 2^x$ в ряд Маклорена?

$$1. f(x) = 1 + x \cdot \ln 2 + \frac{x^3 \cdot \ln^5 2}{3!} + \frac{x^5 \cdot \ln^5 2}{5!} + \dots$$

$$2. f(x) = x \cdot \ln 2 + \frac{x^2 \cdot \ln^2 2}{2!} + \frac{x^3 \cdot \ln^3 2}{3!} + \dots$$

$$3. f(x) = 1 + x \cdot \ln 2 + \frac{x^2 \cdot \ln^2 2}{2!} + \frac{x^3 \cdot \ln^3 2}{3!} + \dots$$

$$4. f(x) = 1 + \frac{x^2 \cdot \ln^2 2}{2!} + \frac{x^4 \cdot \ln^4 2}{4!} + \dots$$

11. Яким є розкладання функції $f(x) = \cos^2 x$ в ряд Маклорена?

$$1. f(x) = 1 + x^2 - \frac{2^3 x^4}{4!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$2. f(x) = 1 - x^2 + \frac{2^4 x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$3. f(x) = 1 - \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{2^4 x^4}{4!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$4. f(x) = 1 - x^2 + \frac{2^3 x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

12. Яким є розкладання функції $f(x) = \frac{\cos 3x}{x}$ в ряд Маклорена?

$$1. f(x) = \frac{1}{x} - \frac{9x}{2!} + \frac{81x^3}{4!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{3^{2n-2} x^{2n-3}}{(2n-2)!} + \dots$$

$$2. f(x) = \frac{1}{x} - \frac{3x^2}{2!} + \frac{3x^4}{4!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{3x^{2n-3}}{(2n-2)!} + \dots$$

$$3. f(x) = 1 - \frac{9x^2}{2!} + \frac{81x^4}{4!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{3^{2n-2} x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \dots$$

$$4. f(x) = \frac{1}{x} + \frac{9x^2}{2!} + \frac{81x^3}{4!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{3^{2n-2} x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \dots$$

13. Яким є розкладання функції $f(x) = 1/\sqrt{16+5x}$ в ряд Маклорена?

$$1. f(x) = 1 - \frac{5}{32}x - \frac{3 \cdot 5^2}{2! \cdot 2^{10}}x^3 - \dots - \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^{5n} \cdot n!} 5^n x^n - \dots$$

$$2. f(x) = 1 - \frac{5x}{32} + \frac{125x^3}{2 \cdot 16^2} - \dots - (-1)^n \frac{5^n x^n}{n! \cdot 16^{n-1}} - \dots$$

$$3. f(x) = \frac{1}{4} - \frac{5}{2^7}x + \dots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^{5n+2} \cdot n!} 5^n x^n + \dots$$

$$4. f(x) = \frac{1}{4} + \frac{5}{2^7}x + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^{5n+2} \cdot n!} 5^n x^n + \dots$$

14. Яким є розкладання в ряд Маклорена функції $f(x) = x \sqrt[3]{27-x}$?

$$1. f(x) = x + \frac{x^2}{3^3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot x^3}{3^3 \cdot 2!} + \dots + \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{3^3 \cdot n!} x^n + \dots$$

$$2. f(x) = 1 + \frac{x^2}{3^3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot x^3}{3^3 \cdot 2!} + \dots + \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{3^{3n} \cdot n!} x^{n+1} + \dots$$

$$3. f(x) = 3x - \frac{x^2}{3^3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot x^3}{3^7 \cdot 2!} - \dots + (-1)^n \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (3n-4)}{3^{4n-1} \cdot n!} x^{n+1} + \dots$$

$$4. f(x) = 3x - \frac{x^2}{3^3} - \frac{1 \cdot 2 \cdot x^3}{3^7 \cdot 2!} - \dots - \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (3n-4)}{3^{4n-1} \cdot n!} x^{n+1} + \dots$$

15. Яким є розкладання функції $f(x) = \ln(1+5x)$ в ряд Маклорена?

$$1. f(x) = x - \frac{5x^2}{2} + \frac{25x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{5^{n-1} x^n}{n} + \dots$$

$$2. f(x) = 5x - \frac{25x^2}{2} + \frac{125x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{(5x)^n}{n} + \dots$$

$$3. f(x) = 5 - \frac{25x}{2} + \frac{125x^2}{3} - \dots + \frac{5^n x^{n-1}}{n} + \dots$$

$$4. f(x) = 5x - \frac{5x^2}{2} + \frac{5x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{5x^n}{n} + \dots$$

16. Яким є розкладання функції $f(x) = \arcsin(x^2/2)$ в ряд Маклорена?

$$1. f(x) = x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{(2n-1)}{2n} \cdot \frac{x^{4n+2}}{(2n+1) 2^{2n+1}} + \dots$$

$$2. f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^6}{2^3 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{(2n-1)}{2n} \cdot \frac{x^{4n+2}}{(2n+1) 2^{2n+1}} + \dots$$

$$3. f(x) = x^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^6}{3} + \dots + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{(2n-1)}{2n} \cdot \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)} + \dots$$

$$4. f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^6}{2^3 \cdot 3} - \dots + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{(2n-1)}{2n} \cdot \frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1) 2^{2n+1}} + \dots$$

17. Яким є розкладання функції $f(x) = x \sin 3x$ в ряд Маклорена?

$$1. f(x) = 3 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n-1)!}$$

$$2. f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{3^{2n} (2n-1)!}$$

$$3. f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^{2n-1} x^{2n}}{(2n-1)!}$$

$$4. f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n+1} x^{2n}}{(2n+1)!}$$

18. Яким є розкладання функції $f(x) = e^{-x}/x$ в ряд за степенями x ?

$$1. f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}. \quad 2. f(x) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n-1}}{n!}.$$

$$3. f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}. \quad 4. f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n-1}}{n!}.$$

19. Яким є розкладання функції $f(x) = \frac{\arcsin x}{x} - x$ в ряд за степенями x ?

$$1. f(x) = 1 - x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{x^{2n}}{2n+1}.$$

$$2. f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{x^{2n}}{2n+1} - x.$$

$$3. f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{x^{2n}}{2n}.$$

$$4. f(x) = x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

20. Яким є розкладання функції $f(x) = x \operatorname{sh} x$ в ряд Маклорена?

$$1. f(x) = \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{4!} + \frac{x^7}{6!} + \dots. \quad 2. f(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots.$$

$$3. f(x) = \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{5!} + \dots. \quad 4. f(x) = \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} + \dots.$$

21. Яким є розкладання функції $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x}$ в ряд Маклорена?

$$1. f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{2n-1}. \quad 2. f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}.$$

$$3. f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n-1}}{2n-1}. \quad 4. f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{4n-3}}{2n-1}.$$

22. Яким є розкладання функції $f(x) = \cos x \cdot \operatorname{ch} x$ в ряд Маклорена?

$$1. f(x) = 1 + \frac{4x^4}{4!} + \frac{16x^8}{8!} + \dots + \frac{4^{n-1} x^{4(n-1)}}{(4n-4)!} + \dots$$

$$2. f(x) = 1 - \frac{4x^4}{4!} + \frac{16x^8}{8!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{4^{n-1} x^{4(n-1)}}{(4n-4)!} + \dots$$

$$3. f(x) = 1 - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^8}{8!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{4(n-1)}}{(4n-4)!} + \dots$$

$$4. f(x) = x - \frac{4x^4}{4!} + \frac{16x^8}{8!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{4^{n-1} x^{4(n-1)}}{(4n-4)!} + \dots$$

23. Яким є розкладання функції $f(x) = e^x \sin x$ в ряд Маклорена?

$$1. f(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \dots + \sin \frac{pn}{4} \cdot \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$2. f(x) = x + x^2 + \frac{2x^3}{3!} - \frac{4x^5}{5!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$3. f(x) = x + x^2 + \frac{2x^3}{3!} - \frac{4x^5}{5!} + \dots + \sqrt{2^n} \sin \frac{pn}{4} \cdot \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$4. f(x) = 1 + x^2 + \frac{2x^3}{3!} - \frac{4x^5}{5!} + \dots + \sqrt{2^n} \sin \frac{pn}{4} \cdot \frac{x^n}{n!} + \dots$$

24. Система функцій (скінченна чи нескінченна) $\{\varphi_n(x)\}$ називається ортогональною на відрізьку $[a; b]$, якщо:

$$1. \int_a^b \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = \begin{cases} 1, & m = n; \\ C = \text{const} \neq 0, & m \neq n. \end{cases}$$

$$2. \int_a^b \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = \begin{cases} C = \text{const} \neq 0, & m = n; \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

$$3. \int_a^b |\varphi_n(x) \varphi_m(x)| dx = \begin{cases} 1, & m = n; \\ C = \text{const} \neq 1, & m \neq n. \end{cases}$$

$$4. \int_a^b \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = \begin{cases} 0, & m = n; \\ C = \text{const} \neq 0, & m \neq n. \end{cases}$$

25. Яка з наступних систем функцій є ортогональною на відрізку $[-1; 1]$?

1. $\{1; x; 3x^2 + (3/2)x\}$.
2. $\{1; x; 3x - 1/2\}$.
3. $\{1; x; (3/2)x^2 - 1/2\}$.
4. $\{1; x^2; x + (1/2)x^2\}$.

26. Яка з наступних систем функцій є ортогональною на відрізку $[-1; 1]$?

1. $\{1; x; 2x^2 - 1\}$.
2. $\{1; x; 3x^2 - 1/2\}$.
3. $\{1; x^2; x + x^3\}$.
4. $\{x; 2x - 3x^2; x^3\}$.

27. Яка з наступних систем функцій є ортогональною на відрізку $[-\pi; \pi]$?

1. $\{1; \sin x; \cos(x/2)\}$.
2. $\{1; \sin x; \cos 2x\}$.
3. $\{x; \sin 2x; \cos 2x\}$.
4. $\{1; \sin 2x; \cos(x/2)\}$.

28. Тригонометричним рядом називається функціональний ряд вигляду ...

$$1. f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

$$2. f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \operatorname{tg} nx + b_n \operatorname{ctg} nx).$$

$$3. f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{x}{n} + b_n \sin \frac{x}{n} \right).$$

$$4. f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \operatorname{tg} \frac{x}{n} + b_n \operatorname{ctg} \frac{x}{n} \right).$$

29. Яким є розкладання періодичної функції $f(x) = x$, $x \in (-\pi; \pi)$ з періодом $T = 2\pi$ в ряд Фур'є?

$$1. f(x) = 2 \left(\sin 2x - \frac{1}{2} \sin 3x + \frac{1}{3} \sin 4x - \dots \right).$$

$$2. f(x) = 2 \left(\sin x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \dots \right).$$

$$3. f(x) = 2 \left(\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \dots \right).$$

$$4. f(x) = 2(\sin x - \sin 2x + \sin 3x - \dots).$$

30. Яким є розкладання періодичної функції $f(x) = |x|$, $x \in (-\pi; \pi)$ з періодом $T = 2\pi$ в ряд Фур'є?

$$1. f(x) = \frac{p}{2} - \frac{4}{p} \left(\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \dots \right).$$

$$2. f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{p^2} \left(\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \dots \right).$$

$$3. f(x) = \frac{p}{2} - \left(\cos x + \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{5} \cos 5x + \dots \right).$$

$$4. f(x) = \frac{p}{2} - \left(\cos x + \frac{1}{3^2} \sin 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \dots \right).$$

31. Яким є розкладання періодичної функції $f(x) = x^2$, $x \in (-\pi; \pi)$ з періодом $T = 2\pi$ в ряд Фур'є?

$$1. f(x) = \frac{1}{3} - \frac{4}{p} \left(\sin px - \frac{1}{2^2} \sin 2px + \frac{1}{3^2} \sin 3px - \dots \right).$$

$$2. f(x) = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2} \cos px - \frac{1}{3} \cos 2px + \frac{1}{4} \cos 3px - \dots \right).$$

$$3. f(x) = \frac{1}{3} - \frac{4}{p^2} \left(\cos px - \frac{1}{2^2} \cos 2px + \frac{1}{3^2} \cos 3px - \dots \right).$$

$$4. f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{p^2} \left(\cos px - \frac{1}{2^2} \sin 2px + \frac{1}{3^2} \cos 3px - \dots \right).$$

32. Яким є розкладання періодичної функції $f(x) = |2x|$, $x \in (-\pi; \pi)$ з періодом $T = 2\pi$ в ряд Фур'є?

$$1. f(x) = p - \frac{8}{p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n+1)x}{(n+1)^2}.$$

$$2. f(x) = p - \frac{8}{p^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+2)x}{(2n+2)^2}.$$

$$3. f(x) = 2p - \frac{8}{p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n)x}{(2n)^2}.$$

$$4. f(x) = p - \frac{8}{p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}.$$

33. Яким є розкладання періодичної функції $f(x) = x + 3$, $x \in (-2; 2)$ з періодом $T = 4$ в ряд Фур'є?

$$1. f(x) = 3 + \frac{4}{p^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{np\pi x}{2}.$$

$$2. f(x) = 3 + \frac{4}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{np\pi x}{2}.$$

$$3. f(x) = 3 + \frac{1}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \sin \frac{np\pi x}{2}.$$

$$4. f(x) = 3 + \frac{4}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n} \cos \frac{np\pi x}{2}.$$

34. Яким є розкладання періодичної функції $f(x) = x^3$, $x \in (-\pi; \pi)$

з періодом $T = 2\pi$ в ряд Фур'є?

$$1. f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{12}{n^3} - \frac{2p^2}{n} \right) \cos npx.$$

$$2. f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{12}{n^3} - \frac{2p^2}{n} \right) \sin nx.$$

$$3. f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{2}{n^3} - \frac{2\pi^2}{n^2} \right) \sin nx.$$

$$4. f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{12}{n^3} - \frac{2p^2}{n} \right) \sin nx.$$

35. Яким є розкладання періодичної функції $f(x) = e^x$, $x \in (-\pi; \pi)$ з періодом $T = 2\pi$ в ряд Фур'є?

$$1. f(x) = \frac{2}{p} \operatorname{ch} p \cdot \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 + 1} (\cos nx - n \sin nx) \right].$$

$$2. f(x) = \frac{2}{p} e^p \cdot \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} (\cos nx - n \sin nx) \right].$$

$$3. f(x) = \frac{2}{p} e^{p-1} \cdot \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 + 1} (\cos nx - n \sin nx) \right].$$

$$4. f(x) = \frac{2}{p} \operatorname{sh} p \cdot \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} (\cos nx - n \sin nx) \right].$$

36. Яким є розкладання періодичної функції $f(x) = x - 2$, $x \in (-2; 2)$ з періодом $T = 4$ в ряд Фур'є?

$$1. f(x) = -1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{pn} \sin \frac{pnx}{2}.$$

$$2. f(x) = -2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{4}{pn} \sin \frac{pnx}{2}.$$

$$3. f(x) = -2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n+1} \frac{4}{pn} \cos \frac{pnx}{2}.$$

$$4. f(x) = -2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n} \sin \frac{pnx}{2}.$$

37. Яким є розкладання періодичної функції $f(x) = \frac{p-x}{2}$, $x \in (0; 2\pi)$ з періодом $T = 2\pi$ в ряд Фур'є?

$$1. f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

$$2. f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{n}.$$

$$3. f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}.$$

$$4. f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n}.$$

38. Яким є розкладання періодичної функції $f(x) = \sin \frac{x}{2}$, $x \in (-\pi; \pi)$ з періодом $T = 2\pi$ в ряд Фур'є?

$$1. f(x) = \frac{2}{p^2} \left(\frac{\sin x}{3} - \frac{\sin 2x}{15} + \frac{\sin 3x}{35} - \dots \right).$$

$$2. f(x) = \frac{1}{p} \left(\frac{2 \sin x}{3} - \frac{4 \sin 2x}{15} + \frac{6 \sin 3x}{35} - \dots \right).$$

$$3. f(x) = \frac{2}{p} \left(\frac{4 \sin x}{3} - \frac{8 \sin 2x}{15} + \frac{12 \sin 3x}{35} - \dots \right).$$

$$4. f(x) = \frac{2}{p} \left(\frac{4 \sin 2x}{3} - \frac{8 \sin 3x}{15} + \frac{12 \sin 4x}{35} - \dots \right).$$

39. Яким є розкладання періодичної функції $f(x) = \cos 2x$, $x \in (0; \pi)$ з періодом $T = \pi$ в ряд Фур'є?

$$1. f(x) = -\frac{2}{p} \left(\frac{\sin x}{3} - \frac{3\sin 3x}{5} - \frac{5\sin 5x}{7} - \dots \right).$$

$$2. f(x) = \frac{4}{p^2} \left(\frac{\sin x}{3} + \frac{3\sin 3x}{5} + \frac{5\sin 5x}{21} - \dots \right).$$

$$3. f(x) = -\frac{4}{p} \left(\frac{\sin x}{3} - \frac{\sin 3x}{5} - \frac{\sin 5x}{7} - \dots \right).$$

$$4. f(x) = -\frac{4}{p} \left(\frac{\sin x}{3} - \frac{3\sin 3x}{5} - \frac{5\sin 5x}{21} - \dots \right).$$

40. Яким є розкладання періодичної функції $f(x) = \sin 3x$, $x \in (0; \pi)$ з періодом $T = \pi$ в ряд Фур'є?

$$1. f(x) = \frac{2}{p} \left(\frac{1}{18} + \frac{\cos 2x}{5} - \frac{\cos 4x}{7} - \dots \right).$$

$$2. f(x) = \frac{12}{p} \left(\frac{1}{18} + \frac{\cos 2x}{5} - \frac{\cos 4x}{7} - \dots \right).$$

$$3. f(x) = \frac{12}{p} \left(\frac{1}{3} + \frac{\cos 2x}{5} + \frac{\cos 4x}{7} + \dots \right).$$

$$4. f(x) = \frac{12}{p^2} \left(\frac{1}{8} + \frac{\cos 2x}{5} - \frac{\cos 4x}{7} - \dots \right).$$

41. Яким є розкладання періодичної функції $f(x) = \cos \frac{x}{3}$, $x \in (-\pi; \pi)$ з періодом $T = 2\pi$ в ряд Фур'є?

$$1. f(x) = \frac{3}{p} \left(\frac{3}{2} + \frac{3\cos x}{8} - \frac{3\cos 2x}{35} + \dots \right).$$

$$2. f(x) = \frac{2}{p} \left(\frac{3}{2} + \frac{3\cos 2x}{8} - \frac{3\cos 3x}{35} + \dots \right).$$

$$3. f(x) = \frac{\sqrt{3}}{p^2} \left(\frac{3}{2} + \frac{3\cos x}{8} - \frac{3\cos 2x}{32} + \dots \right).$$

$$4. f(x) = \frac{\sqrt{3}}{p} \left(\frac{3}{2} + \frac{3\cos x}{8} - \frac{3\cos 2x}{35} + \dots \right).$$

42. Яким є розкладання в ряд Фур'є за синусами функції $f(x) = 3$, яка задана на інтервалі $(0; \pi)$?

$$1. f(x) = \frac{2}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}.$$

$$2. f(x) = \frac{12}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n-1)x}{n-1}.$$

$$3. f(x) = \frac{12}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$

$$4. f(x) = \frac{2}{p} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n-1} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$

43. Яким є розкладання періодичної функції $f(x) = x - 1$, $x \in (-1; 1)$ з періодом $T = 2$ в ряд Фур'є?

$$1. f(x) = -1 + \frac{2}{p} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin pnx}{n}.$$

$$2. f(x) = \frac{2}{p} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin pnx}{2n}.$$

$$3. f(x) = -1 + \frac{1}{p} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin pnx}{n}.$$

$$4. f(x) = -1 + \frac{2}{p} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n}.$$

44. Яким є розкладання періодичної функції $f(x) = 2x - 3$, $x \in (-3; 3)$ з періодом $T = 6$ в ряд Фур'є?

$$1. f(x) = -3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{pn} \sin \frac{pnx}{3}.$$

$$2. f(x) = -3 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{12}{\pi n} \sin \frac{\pi nx}{3}.$$

$$3. f(x) = -3 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin \frac{pnx}{3}.$$

$$4. f(x) = -3 + \frac{12}{p} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{pnx}{2}.$$

45. Яким є розкладання періодичної функції $f(x) = x^2 - 1$, $x \in (-1; 1)$ з періодом $T = 2$ в ряд Фур'є?

$$1. f(x) = -\frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{8}{\pi(n)^2} \cos 2\pi nx.$$

$$2. f(x) = -\frac{10}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n+1} \frac{4}{(pn)^2} \cos pnx.$$

$$3. f(x) = -\frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{(\pi n)^2} \cos \pi nx.$$

$$4. f(x) = -\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{8}{(pn)^2} \cos pnx.$$

46. Яким є розкладання періодичної функції $f(x) = |x| + 1$, $x \in (-\pi; \pi)$ з періодом $T = 2\pi$ в ряд Фур'є?

$$1. f(x) = \frac{p}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{p(2n-1)^2} \cos(2n-1)x.$$

$$2. f(x) = \frac{2+p}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4}{p(2n-1)^2} \cos(2n-1)x.$$

$$3. f(x) = \frac{2+p}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{p(2n-1)^2} \cos(2n-1)x.$$

$$4. f(x) = 1 + \frac{p}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{p(2n+1)^2} \cos(2n+1)x.$$

47. Яким є розкладання періодичної функції $f(x) = x/3$, $x \in (-\pi; \pi)$ з періодом $T = 2\pi$ в ряд Фур'є?

$$1. f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{3n} \sin nx.$$

$$2. f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{3n} \cos 2nx.$$

$$3. f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3n} \sin nx.$$

$$4. f(x) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3pn} \sin nx.$$

48. Яким є розкладання періодичної функції $f(x) = x^2/\pi^2$, $x \in (-\pi; \pi)$ з періодом $T = 2\pi$ в ряд Фур'є?

$$1. f(x) = \frac{p}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{8}{np^2} \cos nx.$$

$$2. f(x) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{4}{(n\pi)^2} \sin nx.$$

$$3. f(x) = \frac{1}{3p} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3}{np} \cos nx.$$

$$4. f(x) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{8}{(np)^2} \cos nx.$$

49. Яким є розкладання періодичної функції $f(x) = x + p$, $x \in (-\pi; \pi)$ з періодом $T = 2\pi$ в ряд Фур'є?

$$1. f(x) = p + 2 \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots \right).$$

$$2. f(x) = 2 \left(\sin 2x - \frac{\sin 3x}{2} + \frac{\sin 4x}{3} - \frac{\sin 5x}{4} + \dots \right).$$

$$3. f(x) = p^2 + 2 \left(\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 4x}{4} + \dots \right).$$

$$4. f(x) = p + 2 \left(\sin px - \frac{\sin 2px}{2} + \frac{\sin 3px}{3} - \frac{\sin 4px}{4} + \dots \right).$$

50. Яким є розкладання періодичної функції $f(x) = sh x$, $x \in (-\pi; \pi)$ з періодом $T = 2\pi$ в ряд Фур'є?

$$1. f(x) = \frac{2p}{3} \left(\frac{\sin x}{1^2 + 1} - \frac{\sin 2x}{2^2 + 1} + \frac{\sin 3x}{3^2 + 1} - \dots \right).$$

$$2. f(x) = \frac{2e^{2p}}{p} \left(\frac{\sin x}{1^2 + 2} - \frac{2\sin 2x}{2^2 + 2} + \frac{3\sin 3x}{3^2 + 2} - \dots \right).$$

$$3. f(x) = \frac{2}{p} \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{2\sin 2x}{2^2} + \frac{3\sin 3x}{3^2} - \dots \right).$$

$$4. f(x) = \frac{2shp}{p} \left(\frac{\sin x}{1^2 + 1} - \frac{2\sin 2x}{2^2 + 1} + \frac{3\sin 3x}{3^2 + 1} - \dots \right).$$

51. Яким є розкладання в ряд Фур'є за косинусами функції $f(x) = 2^x$, яка задана на інтервалі $(0; 1)$?

$$1. f(x) = \frac{1}{2\ln 2} + \frac{2\ln 2}{p^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (2 \cdot (-1)^n - 1) \cos pnx.$$

$$2. f(x) = \frac{1}{2\ln 2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (2 \cdot (-1)^n - 1) \cos 2\pi nx.$$

$$3. f(x) = \frac{1}{\ln 2} + \frac{\ln 2}{p^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} ((-1)^n - 1) \cos pnx.$$

$$4. f(x) = \frac{1}{2\ln 2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (-1)^n \cos 2\pi n x.$$

52. Яким є розкладання в ряд Фур'є за косинусами функції $f(x) = \sin x$, яка задана на інтервалі $(0; \pi)$?

$$1. f(x) = \frac{2}{p} + \frac{4}{p^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{1-2n^2}.$$

$$2. f(x) = \frac{2}{p} + \frac{4}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{1-(2n)^2}.$$

$$3. f(x) = \frac{2}{p} + \frac{1}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{1-(2n)^2}.$$

$$4. f(x) = \frac{2}{p} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{1-4n^2}.$$

53. Яким є розкладання в ряд Фур'є за синусами функції $f(x) = 2x$, яка задана на інтервалі $(0, p)$?

$$1. f(x) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n+1} \frac{\sin nx}{n}.$$

$$2. f(x) = 4p \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin 2nx}{n}.$$

$$3. f(x) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}.$$

$$4. f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}.$$

54. Яким є розкладання в ряд Фур'є за синусами функції $f(x) = 2 - x$, яка задана на інтервалі $(0, 2)$?

$$1. f(x) = \frac{2}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{pnx}{2}. \quad 2. f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{pn} \sin \frac{nx}{2}.$$

$$3. f(x) = \frac{4}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{pn} \sin \frac{pnx}{2}. \quad 4. f(x) = \frac{4}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{pnx}{2}.$$

55. Яким є розкладання в ряд Фур'є за синусами функції $f(x) = \pi/4 - x/2$, яка задана на інтервалі $(0, p)$?

$$1. f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{2n}. \quad 2. f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2n}.$$

$$3. f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2px}{2n}. \quad 4. f(x) = \frac{1}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2n}.$$

56. Яким є розкладання в ряд Фур'є за косинусами функції $f(x) = (x+1)^2$, яка задана на інтервалі $(0, 1)$?

$$1. f(x) = \frac{1}{6} + \frac{7}{p^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos pnx$$

$$2. f(x) = \frac{7}{6} + \frac{8}{p^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1/2}{n^2} \cos pnx.$$

$$3. f(x) = \frac{7}{6} + \frac{1}{p^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1/4}{n^2} \cos pnx.$$

$$4. f(x) = \frac{7}{6} + \frac{8}{p^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos pnx.$$

57. Яким є розкладання в ряд Фур'є за синусами функції $f(x) = \cos 2x$, яка задана на інтервалі $(0, p)$?

$$1. f(x) = -\frac{4}{p} \left(\frac{\sin x}{2^2} + \frac{3\sin 3x}{3^2} + \frac{5\sin 5x}{5^2} + \dots \right).$$

$$2. f(x) = -\frac{4}{p^2} \left(\frac{\sin x}{2} + \frac{3\sin 3x}{3} + \frac{5\sin 5x}{5} + \dots \right).$$

$$3. f(x) = -\frac{4}{p} \left(\frac{\sin x}{2^2 - 1} + \frac{3\sin 3x}{2^2 - 3^2} + \frac{5\sin 5x}{2^2 - 5^2} + \dots \right).$$

$$4. f(x) = -\frac{4}{p} \left(\frac{\sin x}{2^2 + 1} + \frac{3 \sin 3x}{2^2 + 3^2} + \frac{5 \sin 5x}{2^2 + 5^2} + \dots \right).$$

58. Яким є розкладання в ряд Фур'є за косинусами функції $f(x) = x + 2$, яка задана на інтервалі $(0, 1)$?

$$1. f(x) = \frac{5}{2} + \frac{2}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{(2n)^2} \cos \frac{p(2n-1)x}{2}.$$

$$2. f(x) = \frac{5}{2} + \frac{2}{p^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{(2n-1)^2} \cos \frac{px}{2}.$$

$$3. f(x) = \frac{5}{2} + \frac{2}{p^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n)^2} \cos \frac{pnx}{2}.$$

$$4. f(x) = \frac{5}{2} + \frac{2}{p^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{(2n-1)^2} \cos \frac{p(2n-1)x}{2}.$$

59. Яким є розкладання в ряд Фур'є за синусами функції $f(x) = \pi \cos 2x$, яка задана на інтервалі $(0, \pi/2)$?

$$1. f(x) = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{4n^2 - 1}.$$

$$2. f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin 4nx}{4n^2 - 1}.$$

$$3. f(x) = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin 4nx}{4n^2 - 1}.$$

$$4. f(x) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin 2nx}{4n^2 - 1}.$$

60. Яким є розкладання в ряд Фур'є за косинусами функції $f(x) = \pi \sin 2x$, яка задана на інтервалі $(0, \pi/2)$?

$$1. f(x) = 2 + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{1 - n^2}.$$

$$2. f(x) = 2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 4nx}{1 - 4n^2}.$$

$$3. f(x) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos 2nx}{1 - 4n^2}.$$

$$4. f(x) = 2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos 4nx}{1 - 4n^2}.$$

61. Яким є розкладання в ряд Фур'є за синусами функції $f(x) = e^{x/\pi}$, яка задана на інтервалі $(0; \pi)$?

$$1. f(x) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n n}{1 + \pi^2 n^2} \sin nx.$$

$$2. f(x) = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n n}{1 + \pi^2 n^2} \sin 2nx.$$

$$3. f(x) = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n n}{1 + \pi^2 n^2} \sin nx.$$

$$4. f(x) = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n n}{1 + \pi^2 n^2} \sin nx.$$

62. Яким є розкладання в ряд Фур'є за косинусами функції $f(x) = e^{x/\pi}$, яка задана на інтервалі $(0; \pi)$?

$$1. f(x) = e + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e - 1}{1 + \pi^2 n^2} \cos 2nx.$$

$$2. f(x) = e + 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e + 1}{1 + \pi^2 n^2} \cos nx.$$

$$3. f(x) = e - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e + 1}{1 + \pi^2 n^2} \cos 2nx.$$

$$4. f(x) = e - 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e - 1}{1 + \pi^2 n^2} \cos nx.$$

63. Яким є розкладання в ряд Фур'є за синусами функції $f(x) = x \sin x$, яка задана на інтервалі $(0; \pi)$?

$$1. f(x) = \frac{\pi}{2} \sin x - \frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin 2nx}{(4n^2 - 1)^2}.$$

$$2. f(x) = \frac{\pi}{4} \sin x - \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin 2nx}{(4n^2 - 1)^2}.$$

$$3. f(x) = \frac{\pi}{2} \sin x - \frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{(4n^2 - 1)^2}.$$

$$4. f(x) = \frac{\pi}{4} \sin x - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin 2nx}{(4n^2 - 1)^2}.$$

64. Яким є розкладання в ряд Фур'є за косинусами функції $f(x) = x \sin x$, яка задана на інтервалі $(0; \pi)$?

$$1. f(x) = 1 - (1/2) \cos x + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 - n^2} \cos nx.$$

$$2. f(x) = 1 - (1/2) \cos x + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{1 - 4n^2} \cos 2nx.$$

$$3. f(x) = 1 - 4 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 - n^2} \cos 2nx.$$

$$4. f(x) = -2 \cos x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{1 - n^2} \cos nx.$$

65. Яким є розкладання в ряд Фур'є за синусами функції $f(x) = x \cos x$, яка задана на інтервалі $(0; \pi)$?

$$1. f(x) = (1/2) \sin x + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 - 1} \sin nx.$$

$$2. f(x) = -(1/2) \sin x - 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 - 1} \sin nx.$$

$$3. f(x) = -(1/2) \sin x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - 1} \sin 2nx.$$

$$4. f(x) = -(1/2) \sin x + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - 1} \sin nx.$$

66. Яким є розкладання в ряд Фур'є за косинусами функції $f(x) = x \cos x$, яка задана на інтервалі $(0; \pi)$?

$$1. f(x) = -\frac{4}{\pi} + \pi \cos x - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n^2 + 1) \cos 2nx}{(4n^2 - 1)^2}.$$

$$2. f(x) = -\frac{2}{\pi} + \pi \cos x - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n^2 + 1) \cos 4nx}{(4n^2 - 1)^2}.$$

$$3. f(x) = -\frac{2}{\pi} + \pi \cos x - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n^2 + 1) \cos 2nx}{(4n^2 - 1)^2}.$$

$$4. f(x) = -\frac{4}{\pi} + \pi \cos x - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n^2 + 1)n \cos 2nx}{(4n^2 - 1)^2}.$$

67. Яким є розкладання в ряд Фур'є за косинусами функції $f(x) = (x + \pi) \sin x$, яка задана на інтервалі $(0; \pi)$?

$$1. f(x) = 3 - \frac{1}{2} \cos x + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^n + 1}{n^2 - 1} \cos nx.$$

$$2. f(x) = 3 - \frac{1}{2} \cos x + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^{n+1} - 1}{n^2 - 1} \cos nx.$$

$$3. f(x) = 3 - \frac{1}{2} \cos x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^{n+1} - 1}{(n^2 - 1)^2} \cos nx.$$

$$4. f(x) = 3 - \frac{1}{2} \cos x + 4 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^{n+1} - 1}{n^2 - 1} \cos nx.$$

68. Яким є розкладання в ряд Фур'є за синусами функції $f(x) = (x + \pi) \sin x$, яка задана на інтервалі $(0; \pi)$?

$$1. f(x) = \frac{3\pi}{2} \sin x + \frac{4}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} - 1}{(n^2 - 1)^2} n \sin nx.$$

$$2. f(x) = \frac{\pi}{2} \sin x + \frac{4}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2 - 1} n \sin nx.$$

$$3. f(x) = \frac{3\pi}{2} \sin x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} - 1}{(n^2 - 1)^2} \sin nx.$$

$$4. f(x) = \frac{\pi}{2} \sin x + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{(n^2 - 1)^2} n \sin nx.$$

69. Яким є розкладання в ряд Фур'є за синусами функції $f(x) = x^2 - 2\pi x$, яка задана на інтервалі $(0; \pi)$?

$$1. f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pi^2 n^2 + 1)(-1)^{n+1} - 1}{n^3} \sin nx.$$

$$2. f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2 + 1)(-1)^n - 2}{n^3} \sin nx.$$

$$3. f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pi^2 n^2 + 2)(-1)^n + 2}{n^3} \sin nx.$$

$$4. f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pi^2 n^2 + 2)(-1)^n - 2}{n^3} \sin nx.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для ВТУЗов. – М.: 1970-1986.- т.1,2.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика: Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука. - 1980.
3. Берман Г.М. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1960-1977
4. Сборник задач по математике для вузов/под ред. А.Е.Ефимова, В.П. Демидовича. М.: Высш. Шк., 1978. – ч.1,2.
5. Сборник задач по курсу Высшей математики/ под ред. Г.И.Кручковича. – М.:Высш. Шк., 1973
6. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высш.Шк., 1980. – ч.1,2.