

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
Запорізький національний технічний університет

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ  
до виконання індивідуальних завдань з дисципліни  
«Математичне моделювання двигунів внутрішнього згорання»  
для студентів спеціальності  
133 «Галузеве машинобудування»,  
освітня програма «Двигуни внутрішнього згорання»,  
усіх форм навчання

Запоріжжя  
2018

Методичні вказівки до виконання індивідуальних завдань з дисципліни «Математичне моделювання двигунів внутрішнього згорання» для студентів спеціальності 133 «Галузеве машинобудування», освітня програма «Двигуни внутрішнього згорання», усіх форм навчання / Укл.: П. В. Цокотун, В. М. Онуфрієнко. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2018. – 29 с.

Укладачі: П.В. Цокотун, ст. викл. кафедри ДВЗ,  
В.М. Онуфрієнко, д.ф.-м.н., професор,  
завідувач кафедри ВМ,

Рецензент: В.О. Мазін, к.т.н., доцент кафедри ДВЗ

Відповідальний за  
випуск: Г.І. Слинько, д.т.н., професор,  
завідувач кафедри ДВЗ

Затверджено на засіданні кафедри  
«Двигуни внутрішнього згорання»,  
Протокол № 1 від 23 серпня 2018 р.

Рекомендовано до видання  
НМК Транспортного факультету,  
протокол № 57 від 29 вересня 2018 р.

## ЗМІСТ

|                                                                                              |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| ВСТУП                                                                                        | 4  |
| 1 ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ №1 МАТЕМАТИЧНЕ<br>МОДЕЛЮВАННЯ ТЕХНІЧНИХ ЗАДАЧ                       | 5  |
| 1.1 Схема розв'язку                                                                          | 5  |
| 1.2 Варіанти завдань для індивідуального завдання №1                                         | 7  |
| 2 ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ №2 МЕТОДИ ОБРОБКИ<br>ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ                        | 11 |
| 2.1 Лінійне інтерполювання функцій однієї змінної                                            | 11 |
| 2.2 Знаходження центру розподілу випадкової величини                                         | 11 |
| 2.3 Статистична оцінка параметрів розподілу випадкової<br>величини                           | 12 |
| 2.4 Обчислення коефіцієнта кореляції                                                         | 12 |
| 2.5 Апроксимація функції методом найменших квадратів                                         | 13 |
| 2.5.1 Залежність виду $y = kx + b$                                                           | 13 |
| 2.5.2 Залежність виду $y = a \cdot b^x$                                                      | 13 |
| 2.6 Варіанти завдань для індивідуального завдання №2                                         | 14 |
| 3 ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ №3 МЕТОД ЛАГРАНЖА                                                   | 17 |
| 3.1 Схема розв'язку                                                                          | 17 |
| 3.2 Варіанти завдань для індивідуального завдання №3                                         | 18 |
| 4 ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ №4 СИМПЛЕКСНИЙ МЕТОД<br>РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ | 19 |
| 4.1 Схема розв'язку                                                                          | 19 |
| 4.2 Приклад розв'язку                                                                        | 21 |
| 4.3 Варіанти завдань для індивідуального завдання №4                                         | 24 |
| 5 ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ №5 РІШЕННЯ ЗВИЧАЙНИХ<br>ДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ТА СИСТЕМ             | 25 |
| 5.1 Схема розв'язку                                                                          | 25 |
| 5.2 Рішення диференційних рівнянь методом Ейлера                                             | 26 |
| 5.3 Рішення диференційних рівнянь методом Ейлера з<br>перерахунком                           | 26 |
| 5.4 Рішення диференційних рівнянь удосконаленим методом<br>Ейлера                            | 27 |
| 5.5 Варіанти завдань для індивідуального завдання №5                                         | 27 |
| РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА                                                                     | 29 |

## ВСТУП

Методичні вказівки призначені для виконання індивідуальних завдань з дисципліни «Математичне моделювання двигунів внутрішнього згорання» і мають на меті ознайомити студентів із сучасними методами обробки даних, в тому числі за допомогою персонального комп'ютера.

Кожен студент виконує індивідуальне завдання, що складається з п'яти задач:

- математичне моделювання технічних задач;
- методи обробки експериментальних даних;
- метод Лагранжа;
- симплексний метод розв'язування задач лінійного програмування;
- рішення звичайних диференціальних рівнянь та систем.

Структура методичних вказівок складається з п'яти основних розділів, кожен з яких включає:

- теоретичну частину та аналіз задачі;
- варіантні розрахунки для практичного розв'язання певної задачі.

## 1 ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ №1

### МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕХНІЧНИХ ЗАДАЧ

#### 1.1 Схема розв'язку

Математичне моделювання займається дослідженням властивостей та розробкою методів розв'язку задач виду: знайти значення змінних  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , які належать заданій множині  $X$  і перетворюють в екстремум функцію  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  цих змінних. Джерелом такого роду задач є кожна галузь практичної діяльності людини в сфері техніки і економіки.

Згідно з прийнятою в математичному програмуванні і моделюванні термінологією, елементи множини  $X$  називають допустимими розв'язками (планами). Функцію  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , яка підлягає максимізації (мінімізації), називається цільовою. Допустимий розв'язок, який перетворює в екстремум цільову функцію, називається оптимальним розв'язком задачі.

Множина  $X$  допустимих розв'язків задається як множина розв'язків системи рівнянь, або нерівностей. Система рівнянь і нерівностей, яка визначає множину  $X$ , називають системою обмежень задачі.

При розгляді задач математичного програмування і моделювання будемо розрізняти два етапи: постановку задачі та її розв'язання. Математика, як відомо, досліджує нереальні об'єкти і відношення, а їх абстракції. Однією з таких абстракцій є математична модель, яка формально описує математичними співвідношеннями явище, що вивчається, і відтворює найбільш суттєві його риси.

Приклад: Цех випускає два види продукції: для внутрішніх ( $A$ ) і зовнішніх ( $B$ ) потреб. Для виробництва продукції використовують два види сировини  $S_1, S_2$ . Початкові дані наведені в таблиці.

| Вид сировини             | Добові запаси сировини | Витрати сировини на 10 шт. |     |
|--------------------------|------------------------|----------------------------|-----|
|                          |                        | $A$                        | $B$ |
| $S_1$                    | 6                      | 1                          | 2   |
| $S_2$                    | 8                      | 2                          | 1   |
| Ціна за 10 шт. продукції |                        | 3                          | 2   |

Добовий попит на продукцію  $A$  не перевищує попиту на продукцію  $B$  більше ніж на 5 шт., а попит на продукцію  $A$  ніколи не перевищує 10 шт. на добу. Яку кількість продукції кожного виду повинен заготовляти цех, щоб мати максимальний прибуток від реалізації продукції.

Щоб скласти математичну модель необхідно:

- ідентифікувати змінні (величини даної задачі, що знаходимо);
- записати обмеження, які накладаються на змінні, щоб виконувались умови, характерні для системи, яка моделюється;
- сформулювати мету, для досягнення якої з допустимих значень змінних необхідно вибрати ті, що відповідають оптимальному (найкращому) розв'язанню задачі.

У нашому прикладі необхідно знайти обсяг виробництва кожного із видів продукції, щоб мати максимальний прибуток від реалізації продукції, враховуючи обмеження на попит та витрати сировини.

Змінні:

$x_1$  – добовий обсяг (шт.) виробництва продукції  $A$ ;

$x_2$  – добовий обсяг (шт.) виробництва продукції  $B$ .

Цільова функція: якщо вартість 10 шт. продукції  $A$  дорівнює 3 умовно пропорційним одиницям, то добовий прибуток від реалізації буде  $3x_1$ , а прибуток від реалізації продукції  $B$  буде  $2x_2$ . Загальний прибуток  $L = 3x_1 + 2x_2$ .

Обмеження:

- витрати сировини не повинні перевищувати її запасів:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6; \\ 2x_1 + x_2 \leq 8; \end{cases}$$

- обмеження на попит продукції мають вигляд

$$x_1 - x_2 \leq 5;$$

$$x_2 \leq 10;$$

- природне обмеження полягає в тому, що обсяги виробництва продукції не можуть бути від'ємними:

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0.$$

Таким чином, математична модель задачі має наступний вигляд.

Знайти невід'ємний розв'язок системи нерівностей:

$$x_1 + 2x_2 \leq 6;$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8;$$

$$x_1 - x_2 \leq 5;$$

$$x_2 \leq 10,$$

при якому функція  $L = 3x_1 + 2x_2$  досягає максимального значення.

## 1.2 Варіанти завдань для індивідуального завдання №1

**Варіант 1.** З листового прокату необхідно викроїти заготовки чотирьох видів. Один лист довжиною 184 см можна розрізати на заготовки 45, 50, 65 і 85 см. Усього заготовок кожного виду необхідно 90, 96, 88 і 56 шт. Способи розрізування одного листа на заготовки та величина відходів при кожному способі надані в таблиці.

| Довжина заготовки, см | Кількість заготовок з одного листа при розрізуванні способом |   |   |   |    |    |
|-----------------------|--------------------------------------------------------------|---|---|---|----|----|
|                       | 1                                                            | 2 | 3 | 4 | 5  | 6  |
| 45                    | 2                                                            | 2 | 1 | 1 | -  | -  |
| 50                    | 1                                                            | - | - | 1 | -  | -  |
| 65                    | -                                                            | - | 2 | - | 1  | 1  |
| 85                    | -                                                            | 1 | - | 1 | -  | 1  |
| Відходи               | 44                                                           | 9 | 9 | 4 | 19 | 34 |

Визначити, яку кількість листів по кожному із способів необхідно розрізати, щоб мати необхідну кількість заготовок даного виду при мінімальних загальних відходах.

**Варіант 2.** Для виробництва трьох видів продукції  $A$ ,  $B$  та  $C$  використовують три різні види сировини. Кожен із видів сировини може бути використаний у кількості не більше ніж 180, 210, 244 кг. Норми витрат кожного з видів сировини на одиницю продукції даного виду і ціна одиниці продукції кожного виду подані в таблиці.

| Види сировини          | Норми витрат сировини (кг) на одиницю продукції |     |     |
|------------------------|-------------------------------------------------|-----|-----|
|                        | $A$                                             | $B$ | $C$ |
| I                      | 4                                               | 1   | 1   |
| II                     | 3                                               | 1   | 3   |
| III                    | 1                                               | 2   | 5   |
| Ціна одиниці продукції | 10                                              | 14  | 12  |

Знайти план випуску продукції, при якому буде забезпечена її максимальна вартість.

**Варіант 3.** Деталі  $A$ ,  $B$ ,  $C$  можна обробляти на трьох верстатах (I, II, III). В таблиці вказані норми витрат часу на обробку верстатом відповідної деталі, вартість 1 години роботи верстату і граничний час роботи верстату.

Припускаючи, що будь-яка деталь може оброблятися на будь-якому з верстатів, знайти оптимальну виробничу програму за одним із критеріїв:

- максимум товарної продукції;
- максимум сумарного прибутку.

| Верстат | Норма часу обробки |     |     | Вартість 1 години роботи верстата | Час роботи верстата, год |
|---------|--------------------|-----|-----|-----------------------------------|--------------------------|
|         | $A$                | $B$ | $C$ |                                   |                          |
| I       | 0,3                | 0,1 | 0,2 | 30                                | 50                       |
| II      | 0,5                | 0,2 | 0,4 | 20                                | 60                       |
| III     | 0,4                | 0,5 | 0,3 | 15                                | 40                       |

**Варіант 4.** Механічний завод при виготовленні трьох різних деталей I, II, III використовує токарні, фрезерні та стругальні верстати. При цьому обробку кожної деталі можна вести трьома різними технологічними способами  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ . В таблиці вказані норми часу на обробку деталі на відповідному верстаті кожним технологічним способом, а також ресурси (станко/год) кожної групи верстатів. Прибуток від продажу кожного виду виробів складає 22, 18, 30 грн.

Скласти оптимальний план навантаження виробничих потужностей, який забезпечує максимальний прибуток.

| Тип<br>верстата | Норми часу на обробку деталей, год |       |       |       |       |       |       |       |       | Ресурс<br>часу,<br>год |
|-----------------|------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------------------------|
|                 | I                                  |       |       | II    |       |       | III   |       |       |                        |
|                 | $T_1$                              | $T_2$ | $T_3$ | $T_1$ | $T_2$ | $T_3$ | $T_1$ | $T_2$ | $T_3$ |                        |
| токарний        | 1,0                                | 0,9   | 1,1   | 1,2   | 1,5   | –     | 0,9   | –     | –     | 200                    |
| фрезерний       | 0,8                                | 0,8   | 1,3   | 0,9   | 1,1   | 1,3   | 1,1   | 0,8   | –     | 400                    |
| стругальний     | –                                  | 0,7   | 1,0   | 0,7   | –     | 1,3   | 1,3   | 0,6   | –     | 300                    |

**Варіант 5.** Цех випускає три види виробів (I, II, III), добовий план випуску становить: 90 одиниць виробу I, 70 – виробу II, 60 – виробу III. Добові ресурси на їх виготовлення такі: 780 одиниць виробничого устаткування, 850 одиниць сировини, 790 одиниць електроенергії. Витрати їх на одиницю виготовленої продукції подано в таблиці:

| Ресурси                | Витрати ресурсів на одиницю виробів |    |     |
|------------------------|-------------------------------------|----|-----|
|                        | I                                   | II | III |
| виробниче устаткування | 2                                   | 3  | 4   |
| сировина               | 1                                   | 4  | 5   |
| електроенергія         | 3                                   | 4  | 2   |
| вартість 6 грн.        | 8                                   | 7  | 6   |

Скільки виробів треба виготовити (якого типу і в якій кількості), щоб мати максимальний прибуток від випущеної понад план продукції?

**Варіант 6.** Для перевезення пасажирів використовують автобус і маршрутне таксі. Дані про витрати матеріалів і коштів на обслуговування, запаси ресурсів і прибуток за 1 рейс наведені в таблиці. Скласти план перевезень (кількість рейсів автобуса та маршрутного таксі), що приносить максимальний прибуток.

| Ресурси                      | Автобус | Маршрутне таксі | Запас |
|------------------------------|---------|-----------------|-------|
| Бензин, т                    | 0,3     | 0,2             | 3,1   |
| Масло, л                     | 2       | 0,5             | 18    |
| Витрати на техн. обсл., у.о. | 48      | 64              | 752   |
| Прибуток, у.о.               | 80      | 60              |       |

**Варіант 7.** Підприємство має у своєму розпорядженні ресурси сировини і робочої сили, необхідні для виробництва 2-х видів продукції. Витрати ресурсів на виготовлення однієї тони кожного продукту, прибуток, одержуваний підприємством від реалізації тонни продукту, а також запаси ресурсів зазначені в наступній таблиці.

| Ресурс                                  | Продукт 1 | Продукт 2 | Запас ресурсу |
|-----------------------------------------|-----------|-----------|---------------|
| Сировина, т                             | 3         | 5         | 120           |
| Трудові затрати, год.                   | 14        | 12        | 400           |
| Прибуток на одиницю продукції, ум.од./т | 30        | 35        |               |

Визначити план випуску продукції, при якому буде досягнуто максимальний прибуток.

**Варіант 8.** На підприємстві для виготовлення трьох видів запасних частин для автомобілів використовується три види ресурсів. Дані про запаси ресурсів, норми витрат на одну запчастину і прибуток від продажу однієї запасної частини наведені в таблиці:

| Ресурси                                      | Витрати ресурсів на виготовлення 1 запчастини, кг |          |          | Загальна кількість ресурсів, кг |
|----------------------------------------------|---------------------------------------------------|----------|----------|---------------------------------|
|                                              | <i>A</i>                                          | <i>B</i> | <i>C</i> |                                 |
| I                                            | 5                                                 | 5        | 2        | 200                             |
| II                                           | 4                                                 | -        | 3        | 300                             |
| III                                          | -                                                 | 2        | 4        | 800                             |
| Прибуток від реалізації запчастини (гр. од.) | 5                                                 | 8        | 6        |                                 |

Визначити план випуску продукції, при якому досягається максимальний прибуток.

## 2 ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ №2

### МЕТОДИ ОБРОБКИ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ

В наукових дослідженнях, техніці і масовому виробництві часто доводиться зустрічатися з результатами (числовими характеристиками) експериментів, дослідів, операцій, явищ.

Необхідність осмислити ці результати приводить до постановки математичних задач:

- лінійної та нелінійної інтерполяції;
- ранжирування (упорядкування числових характеристик);
- статистичної оцінки параметрів розподілу;
- знаходження кореляції випадкових величин;
- апроксимації отриманої залежності емпіричної формули методом найменших квадратів.

#### 2.1 Лінійне інтерполювання функцій однієї змінної

Деяка функція  $y(x)$  задана таблично.

Таблиця 1 – Задана функція

|   |       |       |       |     |       |
|---|-------|-------|-------|-----|-------|
| x | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | ... | $x_n$ |
| y | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | ... | $y_n$ |

Знайти значення цієї функції при  $x = t$ , не належачи до таблиці, але належить до інтервалу  $[x_1, x_n]$ .

Для знаходження значення функції  $y(x)$  при  $x = t$  скористуємося формулою лінійної інтерполяції

$$y_t = y_{i-1} + \frac{t - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} (y_i - y_{i-1}),$$

де  $x_{i-1} < t < x_i$ .

#### 2.2 Знаходження центру розподілу випадкової величини

Двовимірна випадкова величина задана системою крапок  $A_i(x_i, y_i)$  (див. табл. 1). Знайти координату центру розсіювання:

$$\xi_x = \mu_x, \quad \xi_y = \mu_y,$$

де  $\mu_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ ;  $\mu_y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$  – математичне очікування;

і знайти крапку, найменше віддалену від центру розсіювання. Всі відстані від точки  $O(\mu_x, \mu_y)$  до інших точок знаходимо за формулою

$$r_i = \sqrt{(\mu_x - x_i)^2 + (\mu_y - y_i)^2}.$$

Із найдених величин  $r_i$  знаходимо **min**.

### 2.3 Статистична оцінка параметрів розподілу випадкової величини

Заданий закон розподілу дискретної випадкової величини  $x_i$ .

|       |       |       |     |       |
|-------|-------|-------|-----|-------|
| $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_n$ |
| $p_i$ | $p_1$ | $p_2$ | ... | $p_n$ |

Вичислити початкові моменти перших чотирьох порядків

$$\alpha_k = \sum_{i=1}^n p_i x_i^k, \quad k = 1, 2, 3, 4;$$

і центральні моменти

$$\mu_k = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - \alpha_k)^k, \quad k = 1, 4.$$

Обчислимо показник асиметрії

$$S = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3} - 3,$$

та показник ексцесу

$$E_x = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3,$$

де  $G_x = \sqrt{D_x}$  – оцінка середньоквадратичного відхилення;

$D_x = \mu_2$  – дисперсія.

### 2.4 Обчислення коефіцієнта кореляції

Задана таблиця випадкових величин (див. табл. 1). Визначити коефіцієнт кореляції системи випадкових величин. Для визначення оцінки коефіцієнта кореляції скористаємося формулами

$$r_{xy} = \frac{cov_{xy}}{\sigma_x \sigma_y},$$

де

$$cov_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n^2},$$

$$G_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \left( \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right)^2$$

$$G_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i^2}{n} - \left( \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} \right)^2$$

## 2.5 Апроксимація функції методом найменших квадратів

### 2.5.1 Залежність виду $y = kx + b$

Деяка функція задано таблично (див. табл. 1). Табличні дані відповідають залежності виду  $y = kx + b$ , необхідно знайти параметри  $k$  і  $b$ .

Згідно методу найменших квадратів, найпривабливішими коефіцієнтами  $k$  і  $b$  вважаються ті, у яких сума відхилень

$$S(k, b) = \sum_{i=1}^n [(kx + b) - y_i]^2$$

буде мінімальною.

Використовуючи необхідні умови екстремуму функції двох змінних, отримуємо систему:

$$\begin{cases} a_{11}k + a_{12}b = c_1 \\ a_{21}k + a_{22}b = c_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= \sum_{i=1}^n x_i^2; & a_{12} &= \sum_{i=1}^n x_i; & c_1 &= \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i; \\ a_{21} &= \sum_{i=1}^n x_i; & a_{22} &= n; & c_2 &= \sum_{i=1}^n y_i; \end{aligned}$$

Розв'язуючи систему знаходимо параметри  $k$  і  $b$ .

### 2.5.2 Залежність виду $y = a \cdot b^x$

Нехай деяка функція задана таблично (див. табл. 1) та приблизно відповідає формулі  $y = a \cdot b^x$ . Для знаходження параметрів  $a$  і  $b$  прологарифмуємо вираз  $y = a \cdot b^x$ , маємо  $\ln y = \ln a + x \ln b$ .

Введемо нову змінну  $z = \ln y$ , тоді  $z = \ln a + x \ln b$ . Перерахуємо таблицю 1 в нових змінних ( $x, z$ ), отримаємо

|     |       |       |       |       |
|-----|-------|-------|-------|-------|
| $x$ | $x_1$ | $x_2$ | ..... | $x_n$ |
| $z$ | $z_1$ | $z_2$ | ..... | $z_n$ |

За методом найменших квадратів параметри  $a$  і  $b$  знаходяться із умов мінімуму суми відхилень

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^n [(\ln b \cdot x_i + \ln a) - z_i]^2$$

Далі значення  $a$  і  $b$  знаходяться за алгоритмом, як у попередньому випадку, при знаходженні коефіцієнтів  $k$  і  $b$  в залежності  $y = kx + b$ .

## 2.6 Варіанти завдань для індивідуального завдання №2

Варіант 1. Знайти координати центра розподілу, знайти точку найменше віддалену від центру.

|     |   |       |       |       |       |      |       |
|-----|---|-------|-------|-------|-------|------|-------|
| $x$ | 2 | 2,1   | 2,3   | 2,4   | 2,5   | 2,7  | 3     |
| $y$ | 3 | 3,174 | 3,466 | 3,784 | 3,929 | 4,22 | 5,185 |

$$t = 2,387.$$

Варіант 2. Знайти координати центра розподілу, знайти точку найменше віддалену від центру.

|     |        |        |        |        |        |        |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $x$ | 0,63   | 0,64   | 0,65   | 0,66   | 0,67   | 0,68   |
| $y$ | 0,5894 | 0,5972 | 0,6052 | 0,6131 | 0,6210 | 0,6288 |

$$t = 0,6682.$$

Варіант 3. Заданий закон розподілу дискретної випадкової величини  $X$ . Вичислити початкові і центральні моменти перших чотирьох порядків, визначити симетрію і ексцес.

|     |      |     |      |      |      |      |      |
|-----|------|-----|------|------|------|------|------|
| $x$ | 3,05 | 4,5 | 6,4  | 5,82 | 9,21 | 5,44 | -5,4 |
| $y$ | 10,2 | 0,6 | -2,7 | 6,43 | 6,15 | 0,16 | 3,72 |

Варіант 4. Заданий закон розподілу дискретної випадкової величини  $X$ . Вичислити початкові і центральні моменти перших чотирьох порядків, визначити симетрію і ексцес.

|     |       |      |      |     |       |
|-----|-------|------|------|-----|-------|
| $x$ | 20,25 | -1   | 5,1  | 3,4 | 2,88  |
| $y$ | 1,21  | -2,1 | 4,24 | 0,5 | -1,21 |

Варіант 5. Заданий закон розподілу дискретної випадкової величини  $X$ . Вичислити початкові і центральні моменти перших чотирьох порядків, визначити симетрію і ексцес.

|     |       |       |      |       |       |
|-----|-------|-------|------|-------|-------|
| $x$ | 2,251 | 2,433 | 2,98 | 3,521 | 4,011 |
| $y$ | 0,4   | 0,2   | 0,1  | 0,1   | 0,2   |

$n = 5$ .

Варіант 6. Заданий закон розподілу дискретної випадкової величини  $X$ . Вичислити початкові і центральні моменти перших чотирьох порядків, визначити симетрію і ексцес.

|     |       |       |        |       |       |       |
|-----|-------|-------|--------|-------|-------|-------|
| $x$ | -1,46 | -0,52 | -0,012 | 0,438 | 0,987 | 1,312 |
| $y$ | 0,2   | 0,3   | 0,35   | 0,1   | 0,02  | 0,03  |

$n = 6$ .

Варіант 7. Обчислити коефіцієнт кореляції випадкових величин, заданих таблично.

|     |       |       |       |       |       |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|
| $x$ | 0,25  | 0,38  | 0,40  | 0,43  | 0,49  |
| $y$ | 2,863 | 2,434 | 2,074 | 2,287 | 2,122 |

Варіант 8. Обчислити коефіцієнт кореляції випадкових величин, заданих таблично.

|     |       |       |       |       |       |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|
| $x$ | 0,53  | 0,63  | 0,69  | 0,93  | 1,5   |
| $y$ | 0,337 | 0,345 | 0,349 | 0,371 | 0,426 |

Варіант 9. Використовуючи метод найменших квадратів, апроксимувати таблично задану функцію залежністю  $y = kx + b$ .

|     |        |        |        |        |        |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|
| $x$ | -0,61  | 0,82   | 0,87   | 0,93   | 0,95   |
| $y$ | 1,0751 | 0,8905 | 0,9592 | 1,0417 | 1,0832 |

Варіант 10. Використовуючи метод найменших квадратів, апроксимувати таблично задану функцію залежністю  $y = kx + b$ .

|     |        |         |        |          |          |
|-----|--------|---------|--------|----------|----------|
| $x$ | -3,21  | 4,62    | 5,39   | 6,05     | 7,11     |
| $y$ | 8,3836 | -10,045 | -4,857 | -13,4106 | -16,1408 |

Варіант 11. Використовуючи метод найменших квадратів, апроксимувати таблично задану функцію залежністю  $y = a \cdot b^x$ .

|     |      |      |      |      |
|-----|------|------|------|------|
| $x$ | 0,25 | 0,37 | 0,44 | 0,55 |
| $y$ | 2,57 | 2,31 | 2,12 | 1,92 |

**Варіант 12.** Використовуючи метод найменших квадратів, апроксимувати таблично задану функцію залежністю  $y = a \cdot b^x$ .

|     |        |        |         |        |        |
|-----|--------|--------|---------|--------|--------|
| $x$ | 0,39   | 1,80   | 1,98    | 2,37   | 4,13   |
| $y$ | 1,0695 | 0,1262 | 0,11051 | 0,0859 | 0,0358 |

## 3 ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ №3 МЕТОД ЛАГРАНЖА

### 3.1 Схема розв'язку

Для задачі нелінійного програмування знайти екстремальні значення цільової функції  $f(x,y)$  методом Лагранжа за умови  $g(x, y) = 0$ .

Метод Лагранжа складається в виконанні наступних дій:

- а) Якщо в системі обмежень зустрічаються нерівності, то вводити допоміжні змінні, преобразуємо нерівності в рівняння.
- б) Для заданої системи обмежень і цільової функції скласти функцію Лагранжа:

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y,\lambda) + \lambda(b - g(x,y)),$$

де  $\lambda$  – невизнані коефіцієнти

$b$  – константи функції  $g(x,y)$ .

- в) Прирівняти до нуля всі приватні похідні першого порядку функції  $L$ , та отримати систему рівнянь (в загальному випадку нелінійних рівнянь):

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} L = \frac{\partial f}{\partial x} - \left( \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} L = \frac{\partial f}{\partial y} - \left( \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} L = b - g(x, y) = 0. \end{cases}$$

- г) Розв'язати отриману систему і, тим самим, знайти всі стаціонарні точки  $(x^0, y^0)$  функції  $f$ , тобто такі точки, в яких функція може мати екстремуми (мінімуми чи максимуми).

5. Дослідити кожну точку на наявність в неї екстремуму функції  $f$ , застосовуючи наступну теорему.

Якщо функція дворазово диференційна в околиці стаціонарної точки  $S = (x^0, y^0)$ , причому усі її другі похідні в цій околиці безперервні, то функція  $f$  має в точці  $S$ :

- мінімум – якщо усі числа  $D_1, D_2$  є додатними,
- максимум – якщо знаки чисел  $D_1, D_2$  чергуються, починаючи з від'ємного, де

$$D_1 = a_{11}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$a_{sr} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_s \partial y} (x^0, y^0) = \frac{\partial}{\partial x_r} \left( \frac{\partial f}{\partial y_s} (x^0, y^0) \right).$$

Якщо числа  $D_s$  не є додатними або їх знаки не чередуються, то питання про наявність екстремума функції у стаціонарній точці є відкритим і потребує додаткових досліджень.

### 3.2 Варіанти завдань для індивідуального завдання №3

- |                                                |                          |
|------------------------------------------------|--------------------------|
| Варіант 1. $f(x,y) = 4 - 2x^2 + y^2$ ;         | $g(x,y) = x + y - 1$ .   |
| Варіант 2. $f(x,y) = x^2 + 2xy + 5$ ;          | $g(x,y) = x - y - 4$ .   |
| Варіант 3. $f(x,y) = 3x^2 - x + 2y^2 + 1$ ;    | $g(x,y) = x + y - 4$ .   |
| Варіант 4. $f(x,y) = x^2 - y^2$ ;              | $g(x,y) = x - y - 4$ .   |
| Варіант 5. $f(x,y) = xy^2$ ;                   | $g(x,y) = x + 2y - 1$ .  |
| Варіант 6. $f(x,y) = x^2 + 2xy^2 + y^2 + 4y$ ; | $g(x,y) = 2x - 6y + 4$ . |
| Варіант 7. $f(x,y) = x^2 + 4x + y^2 + 8y$ ;    | $g(x,y) = x + y - 18$ .  |
| Варіант 8. $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ ;          | $g(x,y) = 4x + 6y - 6$ . |
| Варіант 9. $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4$ ;          | $g(x,y) = 2x + y$ .      |
| Варіант 10. $f(x,y) = 7 - x^2 - 2y^2$ ;        | $g(x,y) = x - y - 3$ .   |
| Варіант 11. $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 3$ ;        | $g(x,y) = x + 2y - 4$ .  |
| Варіант 12. $f(x,y) = x^2 + 8xy + 2y^2$ ;      | $g(x,y) = x + y - 5$ .   |

## 4 ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ №4 СИМПЛЕКСНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

### 4.1 Схема розв'язку

Розглянемо цей метод у застосуванні до канонічної задачі мінімізації:

$$\min L = \sum_{j=1}^n c_j x_j,$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (n > m).$$

Кількість рівнянь в системі обмежень дорівнює рангу системи, і тому число  $K = n - m$ , є кількість незалежних змінних.

Виберемо змінні  $x_1, x_2, \dots, x_K$  незалежними, а решту (базисні) -  $x_{K+1}, \dots, x_n$ , та цільову функцію виразимо через них. Перепозначимо базисні змінні:

$$x_{K+1} = x'_1, x_{K+2} = x'_2, x_n = x'_m.$$

Отримаємо систему обмежень та цільову функцію запишемо у вигляді:

$$x'_1 = \beta_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1K}x_K)$$

$$x'_2 = \beta_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2K}x_K)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x'_m = \beta_m - (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mK}x_K)$$

$$L = \gamma_0 - (\gamma_1x_1 + \gamma_2x_2 + \dots + \gamma_Kx_K)$$

і складемо комплекс у таблицю.

| Базисні змінні | Вільні члени | Незалежні змінні |     |            |     |            |
|----------------|--------------|------------------|-----|------------|-----|------------|
|                |              | $x_1$            | ... | $x_j$      | ... | $x_k$      |
| $x'_1$         | $\beta_1$    | $a_{11}$         | ... | $a_{1j}$   | ... | $a_{1k}$   |
| ...            | ...          | ...              | ... |            | ... |            |
| $x'_i$         | $\beta_i$    | $a_{i1}$         | ... | $a_{ij}$   | ... | $a_{ik}$   |
| ...            | ...          | ...              | ... |            | ... |            |
| $x'_m$         | $\beta_m$    | $a_{m1}$         | ... | $a_{mj}$   | ... | $a_{mk}$   |
| $L$            | $\gamma_0$   | $\gamma_1$       | ... | $\gamma_j$ | ... | $\gamma_k$ |

Припустимо, що всі вільні члени  $\beta_1, \dots, \beta_m$  невід'ємні. Тоді, якщо надати незалежним змінним нульові значення, отримуємо базисний розв'язок:

$$x_1 = 0; \dots, x_k = 0, x'_1 = \beta_1, \dots, x'_m = \beta_m \text{ і } L = \gamma_0.$$

Якщо серед коефіцієнтів цільової функції  $(\gamma_1, \dots, \gamma_k)$  є додатні, то розв'язок не буде оптимальним і його можна поліпшити, тобто зменшити значення  $L$ .

Зменшення значення функції  $L$  пов'язане зі збільшенням значення незалежної змінної, для якої коефіцієнт в останньому рядку симплекс-таблиці більше за нуль. Виберемо її. Нехай це буде  $x_j$ . Змінну  $x_j$  необхідно ввести до складу базисних змінних  $x'_1, x'_2, \dots, x'_m$  вивести до складу незалежних, тобто поміняти їх ролями. Визначення такої базисної змінної проводиться наступним чином: порівнюють між собою відношення вільних членів до додатних коефіцієнтів  $j$ -го стовпця і вибирають між, хай -  $\frac{\beta_i}{a_{ij}}$ . Це означає, що необхідно поміняти місцями змінні  $x_j$  і  $x'_i$ . Якщо додатних коефіцієнтів у  $j$ -му стовбці таблиці немає, то цільова функція необмежена на множині припустимих розв'язків.

Процедура заміни базисних змінних визначається коефіцієнтом  $a_{ij}$ , який називають розв'язувальним елементом, а рядок і стовпець, на перетині яких він знаходиться – розв'язуючим.

Табличний алгоритм заміни змінних полягає у наступному:

1. Виділити в таблиці розв'язуючий елемент  $a_{ij}$ , обчислити  $\lambda = 1/a_{ij}$  і записати значення  $\lambda$  у нижню частину тієї ж клітинки.

2. Елементи розв'язувального рядка помножити на  $\lambda$ , розв'язувального стовпця на  $-\lambda$  і знайдені значення записати до нижніх частин відповідних клітинок.

3. Підкреслити у розв'язувальному рядку верхні числа, а у розв'язувальному стовпці – нижні.

4. У нижній частині решти клітинок (що не належать до розв'язувальних рядка та стовпця) записати добуток підкреслених чисел, які розташовані у тому ж рядку і тому ж стовпці

5. Перейти до нової симплекс-таблиці, в якій:

- поміняти місцями  $x_j$  та  $x_i$ ;
- в клітинки розв'язувальних рядка та стовпця записати числа з нижніх частин відповідальних клітинок попередньої таблиці;
- решту клітинок заповнити сумою чисел, розташованих у нижній та верхній частинах відповідних клітинок попередньої таблиці.

#### 4.2 Приклад розв'язку

Знайти max лінійної форми  $L = 2x_1 - x_4$  при обмеженнях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 = 20 \\ x_2 + 2x_4 \geq 5 \\ -x_1 - x_2 + x_3 \leq 8 \end{cases} \quad x_i \geq 0 \quad i = 1, 4.$$

Задача знаходження max функції  $L$  еквівалентна задачі знаходження min функції:

$$L_1 = -L = -2x_1 + x_4.$$

Введемо допоміжні змінні ( $x_5$  і  $x_6$ ) і запишемо обмеження у вигляді системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 20 \\ x_2 + 2x_4 - x_5 = 5 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_6 = 8 \end{cases} \quad x_i \geq 0 \quad i = 1, 6.$$

Кількість змінних  $n = 6$ , кількість обмежень  $m = 3$ , тоді кількість незалежних змінних  $n - m = 3$ . Виберемо незалежні змінні ( $x_3, x_4, x_5$ ) і виразимо через них базисні змінні ( $x_1, x_2, x_6$ ) та цільову функцію. Маємо:

$$\begin{aligned} x_2 &= 5 - 2x_4 + x_5 \\ x_1 &= 15 - 5x_3 + 2x_4 - x_5 \end{aligned}$$

$$x_6 = 8 + x_1 + x_2 - x_3 = 28 - 6x_2$$

$$L_1 = -2(15 - 5x_3 + 2x_4 - x_5) + x_4 = -30 + 10x_3 - 3x_4 + 2x_5$$

Стандартний запис задачі:

$$x_2 = 5 - (2x_4 - x_5)$$

$$x_1 = 15 - (5x_3 - 2x_4 + x_5)$$

$$x_6 = 28 - (6x_3)$$

$$\min L_1 = -30 - (-10x_3 + 3x_4 - 2x_5).$$

Складаємо симплекс-таблицю.

| Базисні<br>змінні | Вільні члени | Незалежні змінні |          |       |
|-------------------|--------------|------------------|----------|-------|
|                   |              | $x_3$            | $x_4$    | $x_5$ |
| $x_1$             | 15           | 5                | -2       | 1     |
| $x_2$             | 5            | 0                | <u>2</u> | -1    |
| $x_6$             | 28           | 6                | 0        | 0     |
| $L_1$             | -30          | -10              | 3        | -2    |

Таблиці відповідає опорний розв'язок:

$$x_1 = 15; x_2 = 5; x_3 = 0; x_4 = 0; x_5 = 0; x_6 = 28; L_1 = -30.$$

Так як серед коефіцієнтів цільової функції є додатні, то розв'язок не оптимальний.

Виберемо розв'язувальний елемент. Розв'язувальним стовпцем буде стовпець коеф. при змінних  $x_4$ , а розв'язувальним рядком – рядок коеф. при  $x_2$ , розв'язувальний елемент  $a_{24} = 2$ .

Згідно з наведених вище алгоритмом роботи з симплекс-таблицею, виділимо розв'язувальний елемент, обчислимо  $\lambda = 1/2$ , помножимо на  $1/2$  всі елементи розв'язувального рядка, та на  $-1/2$  всі елементи розв'язувального стовпця. Знайдені значення запишемо у нижній частині відповідних клітинок таблиці. Підкреслимо у розв'язувальному рядку верхні числа, а у розв'язувальному стовпці – нижні. У нижній частині решти клітинок таблиці записуємо добуток підкреслених чисел, які розташовані у тому ж рядку і тому ж стовпці. Отримуємо таблицю.

| Базисні змінні | Вільні члени | Незалежні змінні |          |           |
|----------------|--------------|------------------|----------|-----------|
|                |              | $x_3$            | $x_4$    | $x_5$     |
| $x_1$          | 15           | 5                | -2       | 1         |
|                | 5            | 0                | <u>1</u> | -1        |
| $x_2$          | <u>5</u>     | <u>0</u>         | <u>2</u> | <u>-1</u> |
|                | 5/2          | 0                | 1/2      | -1/2      |
| $x_6$          | 28           | 6                | 0        | 0         |
|                | 0            | 0                | <u>0</u> | 0         |
| $L_1$          | -30          | -10              | 3        | -2        |
|                | -15/2        | 0                | -3/2     | 3/2       |

Перейдемо до нової симплекс – таблиці, керуючись правилами алгоритму, наведеного вище.

| Базисні змінні | Вільні члени      | Незалежні змінні |                  |                  |
|----------------|-------------------|------------------|------------------|------------------|
|                |                   | $x_3$            | $x_4$            | $x_5$            |
| $x_1$          | 20                | 5                | 1                | 0                |
| $x_4$          | <del>5</del> /2   | 0                | <del>1</del> /2  | <del>-1</del> /2 |
| $x_6$          | 28                | 6                | 0                | 0                |
| $L_1$          | <del>-75</del> /2 | -10              | <del>-3</del> /2 | <del>-1</del> /2 |

Остання таблиця відповідає розв'язку:

$$x_1 = 20; x_2 = 0; x_3 = 0; x_4 = 5/2; x_5 = 0; x_6 = 28;$$

Тоді  $L_1 = -75/2$ . Так як серед коефіцієнтів цільової функції нема додатних, то знайдений розв'язок є оптимальним.

Таким чином, при тих же значеннях змінних досягається  $L_1 = 75/2$ .

### 4.3 Варіанти завдань для індивідуального завдання №4

Варіант 1.  $L = 5x_1 - x_3 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ x_2 + 2x_4 \leq 1 \\ x_i \geq 0; \quad i = 1, 4 \end{cases}$$

Варіант 2.  $L = 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 \leq 6 \\ x_2 - x_3 + x_4 \leq 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 5 \\ x_i \geq 0; \quad i = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

Варіант 3.  $L = 2x_1 - 3x_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 \leq 4 \\ x_i \geq 0; \quad i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

Варіант 4.  $L = x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 + x_5 = 6 \\ 8x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_6 = 12 \\ x_i \geq 0; \quad i = 1, \dots, 6 \end{cases}$$

Варіант 5.  $L = 2x_1 - 5x_2 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 7 \geq 0 \\ x_2 + 5x_3 + 3 \leq 0 \\ -3x_1 + 5x_2 + 3 \geq 0 \\ x_i \geq 0; \quad i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

Варіант 6.  $L = 2x_3 - x_4 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 2x_2 + 3x_4 \leq 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 8 \\ 2x_3 + x_5 \leq 10 \\ x_i \geq 0; \quad i = 1, 2, \dots, 5 \end{cases}$$

Варіант 7.  $L = 2x_1 - x_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \leq 4 \\ x_2 \leq 5 \\ x_i \geq 0; \quad i = 1, 2. \end{cases}$$

## 5 ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ №5 РІШЕННЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ТА СИСТЕМ

Серед задач, з якими приходиться мати діло в обчислювальній практиці, значну частину складають задачі для звичайних диференціальних рівнянь. Такі задачі виникають як безпосередньо при математичному моделюванні багатьох реальних явищ, так і при вирішенні ряду більш складних математичних задач. При цьому часто точне рішення розглянутої задачі не вдається виразити через елементарні функції.

Взагалі при розв'язанні технічних задач доводиться користуватися приблизними методами рішення подібних задач. Ці методи розділяють на аналітичні і чисельні.

### 5.1 Схема розв'язку

Нехай на відрізку  $a = x_0 \leq x \leq x_n = b$  потрібно знайти рішення  $y(x)$  диференціального рівняння

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

з заданим кроком  $\Delta x = H$  і задовольняюче при  $x = x_0$  початковій умові  $y(x_0) = y_0$ . Умови існування і єдності рішення поставленої задачі Коши будемо вважати виконаними.

Якщо задана система :

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f(x, y, z) \\ \dot{z} &= \varphi(x, y, z) \end{aligned} \quad (2)$$

та потребує знайти рішення  $y(x)$ ,  $z(x)$  даної системи на відрізку  $x_0 \leq x \leq x_n$ , з заданим кроком  $\Delta x = H$  і задовольняючих при  $x = x_0$  початковим умовам  $y(x_0) = y_0$ ;  $z(x_0) = z_0$ .

Якщо задано диференціальне рівняння другого порядку, його легко звести до системи двох рівнянь першого порядку, наприклад

$$y'' = F(x, y), \quad \text{при} \quad y(x_0) = y_0; \quad \dot{y} = (x_0) = \overline{y_0},$$

позначимо  $\dot{y} = z(x)$  запишемо систему

$$\begin{aligned} \dot{y} &= z(x) \\ \dot{z} &= F(x, y) \end{aligned}$$

при початкових умовах  $y(x_0) = y_0$ ;  $z(x_0) = z_0$ .

## 5.2 Рішення диференціальних рівнянь методом Ейлера

Обчислення задачі (1) проводимо за формулою:

$$y_{i+1} = y_i + H \cdot f(x_i, y_i), \quad (i = 0, 1, \dots)$$

$$x_{i+1} = x_i + H$$

Обчислення задачі (2) проводимо за формулами:

$$y_{i+1} = y_i + H \cdot f(x_i, y_i, z_i)$$

$$z_{i+1} = z_i + H \cdot \varphi(x_i, y_i, z_i)$$

## 5.3 Рішення диференціальних рівнянь методом Ейлера з перерахунком

Обчислення задачі (1) проводимо за формулою

$$y_{i+1} = y_i + H(f_i, f_{1i})/2,$$

де

$$f_i = f(x_i, y_i);$$

$$f_{1i} = f(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1});$$

$$\bar{y}_{i+1} = y_i + H \cdot f_i$$

Обчислення задачі (2) проводимо за формулами:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(2)}, z_{i+1}^{(2)}) \cdot H$$

$$z_{i+1} = z_i + \varphi(x_{i+1}, y_{i+1}^{(2)}, z_{i+1}^{(2)}) \cdot H,$$

де

$$f_i = f(x_i, y_i, z_i); \quad \varphi_i = \varphi(x_i, y_i, z_i);$$

$$y_{i+1}^{(1)} = y_i + H \cdot f_i; \quad z_{i+1}^{(1)} = z_i + H \cdot \varphi_i;$$

$$f_{i+1} = f(x_i + \Delta x, y_{i+1}^{(1)}, z_{i+1}^{(1)});$$

$$\varphi_{i+1} = \varphi(x_{i+1}, y_{i+1}^{(1)}, z_{i+1}^{(1)});$$

$$\bar{f} = (f_i, f_{i+1})/2; \quad \bar{\varphi} = (\varphi_i, \varphi_{i+1})/2;$$

$$y_{i+1}^{(2)} = y_i + H \cdot \bar{f};$$

$$z_{i+1}^{(2)} = z_i + H \cdot \bar{\varphi}.$$

## 5.4 Рішення диференційних рівнянь удосконаленим методом Ейлера

Обчислення задачі (1) проводимо за формулою:

$$y_{i+1} = y_i + H \cdot f_{i+\frac{1}{2}},$$

де

$$f_{i+\frac{1}{2}} = f(x_{i+\frac{1}{2}}; y_{i+\frac{1}{2}});$$

$$x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{H}{2};$$

$$y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{H}{2} \cdot f_i;$$

Обчислення задачі (2) проводимо за формулами:

$$y_{i+1} = y_i + H \cdot f(x_i + \frac{H}{2}; y_i + \frac{K_i}{2}; z_i + \frac{M_i}{2});$$

$$z_{i+1} = z_i + H \cdot \varphi(x_i + \frac{H}{2}; y_i + \frac{K_i}{2}; z_i + \frac{M_i}{2});$$

де

$$K_i = H \cdot f(x_i, y_i, z_i); \quad y_i = y(x_i);$$

$$M_i = H \cdot \varphi(x_i, y_i, z_i); \quad z_i = \varphi(x_i).$$

## 5.5 Варіанти завдань для індивідуального завдання №5

Варіант 1.  $y' = 2x + 0,1y^2$ ;  $y(0) = 0,2$ ;

Варіант 2.  $y' = x^2 + y$ ;  $y(0) = 0,4$ ;

Варіант 3.  $y' = 0,1x + 0,2y^2$ ;  $y(0) = 0,3$ ;

Варіант 4.  $y' = 0,1x^2 + 2xy$ ;  $y(0) = 0,8$ ;

Варіант 5.  $y' = 2x^2 + 3y^2$ ;  $y(0) = 0,2$ ;

Варіант 6.  $y' = 2y + z = \sin x$ ;  $y(\pi) = 1$ ;  $z(\pi) = 2$ ;

$$z' = 4y - 2z = \cos x; \quad [\pi; 4], \quad \Delta x = H = 0,1;$$

Варіант 7.  $y' + y = z + e^x$ ;  $y(0) = z(0) = 0$ ;

$$z' + z = y + e^x; \quad [0; 1], \quad \Delta x = 0,1;$$

Варіант 8.  $y' + z - z = e^x$ ;  $y(0) = z(0) = 1$ ;

$$2y' + z + 2z = \cos x; \quad [1; 2]; \quad H = \Delta x = 0,1;$$

Варіант 9.  $z'' - yz^2 = 0$  ;  $z(0) = z'(0) = 1$ ;  $[0; 1]$  ,  $\Delta x = H = 0,1$ ;

Варіант 10.  $z'' + \frac{z}{y} + z = 0$ ;  $z(0) = 1$ ;  $z'(0) = 0$ ;  $[0; 1]$ ,

$\Delta x = H = 0,1$  .

## РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Вентцель Е. С. Исследование операций. – М.: Сов. радио, 1972. – 552 с.
2. Кузнецов Ю. Н., Козубов В. И., Волощенко А. Б. Математическое программирование. – М.: Высшая школа, 1980. – 302 с.
3. Акунич И. П. Математическое программирование в примерах и задачах : Уч. пособие для студ. – М.: Высшая школа, 1986. – 319 с.
4. Уайдд Д. Оптимальное проектирование – М.: Мир, 1981. – 272 с.
5. Батищев Д. И. Методы оптимального проектирования – М.: Радио и связь, 1984. – 232 с.
6. Данилин А. И. Методы оптимизации : Учеб. пособие. – Самара, 2011. – 66 с.
7. Мудченко А. А. Основы научных исследований : Учеб. пособие. – К.: Знание, 2000. – 114 с.
8. Романчиков В. І. Основи наукових досліджень. – К.: Центр навчальної літератури, 2007. – 254 с.
9. Філіпенко А. С. Основи наукових досліджень. – К.: Академвидав, 2005. – 208 с.