

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Запорізький національний технічний університет

ЗАТВЕРДЖУЮ
ректор ЗНТУ
проф. _____ С. Б. Беліков
« ____ » _____ 2018 р.

КОМПЛЕКС

навчально-методичного забезпечення дисципліни

«Дослідження операцій в транспортних системах»

для студентів денної та заочної форм навчання
зі спеціальності 275 «Транспортні технології»

**Частина II. Методичні вказівки до виконання практичних занять.
Розділ 3. *Теорія масового обслуговування. Теорія графів.***

Факультет: Транспортний
Кафедра: Транспортні технології

2018

Комплекс навчально-методичного забезпечення дисципліни «Дослідження операцій в транспортних системах» для студентів денної та заочної форм навчання зі спеціальності 275 «Транспортні технології» (частина II, розділ 3) / Склали: доц. Кузькін О. Ф., доц. Лащених О. А. — Запоріжжя : ЗНТУ, 2018.— 46 с.

Укладачі: доц., канд. техн. наук Кузькін О. Ф.
доц., канд. техн. наук Лащених О. А.

Рецензент: проф., д-р техн. наук Турпак С. М.

Відповідальний за випуск: старш. викл. Лебідь Г. О.

Затверджено на засіданні
Вченої ради Транспортного
факультету ЗНТУ
Протокол № ____ від «___» _____ 2018 р.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 9

РОЗІМКНЕНІ СИСТЕМИ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

Мета заняття: засвоєння розрахунку основних характеристик функціонування розімкненої одноканальної та багатоканальної систем масового обслуговування з очікуванням.

Стисла теоретична довідка

Теорія масового обслуговування вивчає оптимальні методи використання і характеристики систем масового обслуговування (СМО), тобто систем, у яких тривалість обслуговування замовлення є випадковою величиною, а замовлення надходять у випадкові моменти часу.

У теорії масового обслуговування об'єкт, що обслуговується, називається **вимогою**. Засоби, що обслуговують вимоги називаються **каналами обслуговування**. Найпоширенішим випадком, для якого отримані залежності показників функціонування системи від її параметрів, є випадок надходження пуасонівського (простішого) потоку вимок при експоненціальній тривалості обслуговування.

Розімкнена система масового обслуговування характеризується наступними особливостями функціонування: система обслуговування складається з обмеженої кількості каналів обслуговування n ; кожний канал обслуговування може одночасно обслуговувати тільки одну вимогу; кожна вимога, що надходить до системи, заставши всі канали вже зайнятими, стає до черги та знаходиться у ній доти, поки один з каналів обслуговування не звільниться. Якщо вимога надходить до системи, коли є вільний канал обслуговування, вона одразу ж приймається до обслуговування.

Джерело потоку вимог необмежене по своїм можливостям, хоча інтенсивність надходження вимог має певне значення λ . Тривалість обслуговування кожної вимоги $t_{\text{обс}}$ є випадковою величи-

ною, яка підлягає експоненціальному закону розподілу з параметром μ . Всі канали системи мають однакову продуктивність.

Розрахункові формули, що отримані для стаціонарного стану системи, наведені у таблиці 9.1.

Таблиця 9.1 — Розрахункові формули для розімкненої системи масового обслуговування

| Показник | Значення показника при кількості каналів обслуговування | |
|---|--|---|
| | $n = 1$ | $n > 1$ |
| 1. Параметр завантаження системи | $\alpha = \lambda/\mu = \lambda \cdot t_{\text{обс}}$ | |
| 2. Імовірність того, що всі канали обслуговування вільні | $P_0 = 1 - \alpha$ | $P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{(n-1)!(n-\alpha)}}$ |
| 3. Імовірність того, що k каналів зайняті | – | $P_k = \frac{\alpha^k}{k!} P_0 \quad (k = \overline{1, n})$ |
| 4. Імовірність того, що всі канали обслуговування зайняті | $\pi = \alpha$ | $\pi = \frac{\alpha^n P_0}{(n-1)!(n-\alpha)}$ |
| 5. Середня тривалість очікування вимогою початку обслуговування | $\bar{t}_{\text{оч}} = \frac{\alpha^2}{\lambda(1-\alpha)}$ | $\bar{t}_{\text{оч}} = \frac{\pi}{\mu(n-\alpha)}$ |
| 6. Середня довжина черги | $M_{\text{оч}} = \frac{\alpha^2}{1-\alpha}$ | $M_{\text{оч}} = \frac{\alpha^{n+1} P_0}{n \cdot n! \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^2}$ |
| 7. Середня кількість вимог у системі | $M_c = \frac{\alpha}{1-\alpha}$ | $M_c = M_{\text{оч}} + \alpha$ |
| 8. Середня кількість вільних каналів обслуговування | – | $N_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) P_k$ |

Наведені формули справедливі при виконанні умови $\alpha/n < 1$, інакше у системі обслуговування виникає черга безкінечної довжини.

Зміст практичного заняття та вихідні дані до його виконання

На контейнерний пункт, обладнаний n вантажними кранами, під навантаження надходить простіший потік автомобілів з інтенсивністю λ автомобілів на годину. Середня тривалість навантаження одного автомобіля становить $\bar{t}_{\text{обс}}$ годин. Використовуючи методи теорії масового обслуговування порівняти показники роботи контейнерного пункту при організації роботи за двома варіантами:

- 1) з рівномірним закріпленням автомобілів за кранами;
- 2) без закріплення автомобілів за кранами.

Вихідні дані до виконання завдання по варіантах наведені у таблиці 9.2.

Вказівка: у варіанті (1) розглядаються n одноканальних СМО, у варіанті (2) розглядається одна n -канальна СМО.

Таблиця 9.2 — Вихідні дані до практичного заняття 9

| Вар. | λ | $\bar{t}_{\text{обс}}$ | n | Вар. | λ | $\bar{t}_{\text{обс}}$ | n |
|------|-----------|------------------------|-----|------|-----------|------------------------|-----|
| 1 | 21,1 | 0,13 | 4 | 16 | 10,7 | 0,10 | 7 |
| 2 | 5,4 | 0,50 | 6 | 17 | 13,2 | 0,28 | 7 |
| 3 | 17,3 | 0,12 | 4 | 18 | 7,2 | 0,23 | 6 |
| 4 | 22,2 | 0,12 | 7 | 19 | 13,6 | 0,22 | 5 |
| 5 | 5,7 | 0,17 | 6 | 20 | 2,8 | 0,24 | 4 |
| 6 | 20,0 | 0,15 | 7 | 21 | 14,2 | 0,30 | 7 |
| 7 | 21,7 | 0,15 | 5 | 22 | 23,0 | 0,15 | 4 |
| 8 | 3,3 | 0,30 | 5 | 23 | 9,4 | 0,30 | 7 |
| 9 | 7,8 | 0,39 | 4 | 24 | 19,7 | 0,04 | 5 |
| 10 | 6,8 | 0,42 | 6 | 25 | 24,5 | 0,05 | 6 |

Продовження таблиці 9.2.

| Вар. | λ | $\bar{t}_{\text{обс}}$ | n | Вар. | λ | $\bar{t}_{\text{обс}}$ | n |
|------|-----------|------------------------|-----|------|-----------|------------------------|-----|
| 11 | 18,0 | 0,26 | 6 | 26 | 11,1 | 0,33 | 6 |
| 12 | 9,6 | 0,26 | 6 | 27 | 20,2 | 0,22 | 6 |
| 13 | 19,6 | 0,23 | 7 | 28 | 11,4 | 0,50 | 6 |
| 14 | 11,4 | 0,36 | 5 | 29 | 21,0 | 0,24 | 6 |
| 15 | 24,2 | 0,13 | 5 | 30 | 3,3 | 0,31 | 5 |

Приклад виконання завдання

Розглянемо приклад виконання завдання за наступних вихідних даних: $\lambda = 12,5 \text{ авт./год}$; $\bar{t}_{\text{обс}} = 0,25 \text{ год}$; $n = 5$.

Розв'язок.

У випадку рівномірного закріплення автомобілів за кранами маємо $n = 5$ одноканальних розімкнених СМО, до кожної з яких надходить потік вимог з інтенсивністю

$$\lambda' = \frac{\lambda}{n} = \frac{12,5}{5} = 2,5 \text{ авт./год.}$$

Використовуючи розрахункові формули для одноканальної СМО отримаємо:

1) інтенсивність обслуговування

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{\text{обс}}} = \frac{1}{0,25} = 4 \text{ авт./год};$$

2) параметр завантаження системи (імовірність того, що кран зайнятий навантаженням)

$$\alpha = \pi = \frac{2,5}{4} = 0,625;$$

3) імовірність того, що кран вільний від навантаження

$$P_0 = 1 - 0,625 = 0,375;$$

4) середня тривалість очікування автомобілем початку навантаження

$$\bar{t}_{\text{оч}} = \frac{0,625^2}{2,5(1 - 0,625)} = 0,417 \text{ год.};$$

5) середня довжина черги автомобілів

$$M_{\text{оч}} = \frac{0,625^2}{1 - 0,625} = 1,042 \text{ автомобіля};$$

6) середня кількість автомобілів на контейнерному пункті

$$M_c = \frac{0,625}{1 - 0,625} = 1,67 \text{ автомобілів.}$$

Таким чином, біля кожного з $n = 5$ кранів буде утворюватись черга довжиною $M_{\text{оч}} = 1,042$ автомобіля, що загалом становить на контейнерному пункті чергу з $5 \times 1,042 = 5,21$ автомобілів.

У випадку організації роботи пункту без закріплення автомобілів за кранами маємо одну п'ятиканальну СМО.

Використовуючи розрахункові формули для багатоканальної СМО отримаємо:

1) параметр завантаження системи

$$\alpha = 12,5 \cdot 0,25 = 3,125;$$

2) для виконання подальших розрахунків заповнимо розрахункову таблицю 9.3.

Таблиця 9.3 — Розрахунок багатоканальної розімкненої СМО

| k | $k!$ | α^k | $\frac{\alpha^k}{k!}$ | $P_k = \frac{\alpha^k}{k!} P_0$ | $(n - k)P_k$ |
|----------|------|------------|-----------------------|---------------------------------|--------------|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0,0405 | 0,2025 |
| 1 | 1 | 3,125 | 3,125 | 0,1266 | 0,5063 |
| 2 | 2 | 9,766 | 4,883 | 0,1978 | 0,5933 |
| 3 | 6 | 30,52 | 5,087 | 0,2060 | 0,4120 |
| 4 | 24 | 95,37 | 3,974 | 0,1609 | 0,1609 |
| Σ | | | 18,07 | | 1,875 |

3) імовірність того, що всі крани вільні від навантаження

$$P_0 = \frac{1}{18,07 + \frac{3,125^2}{(5-1)!(5-3,125)}} = 0,0405;$$

4) імовірність того, що всі крани зайняті навантаженням

$$\pi = \frac{3,125^2 \cdot 0,0405}{(5-1)!(5-3,125)} = 0,268;$$

5) середня тривалість очікування автомобілем початку навантаження

$$\bar{t}_{\text{оч}} = \frac{0,268}{4(5-3,125)} = 0,036 \text{ год.};$$

6) середня довжина черги автомобілів

$$M_{\text{оч}} = \frac{3,125^2 \cdot 0,0405}{5 \cdot 5! \left(1 - \frac{3,125}{5}\right)^2} = 0,447 \text{ автомобілів};$$

7) середня кількість автомобілів на контейнерному пункті

$$M_c = 0,447 + 3,125 = 3,572;$$

8) середня кількість вільних від навантаження кранів (сума значень останнього стовпчика табл. 9.3)

$$N_0 = 1,875.$$

Аналізуючи результати розрахунків бачимо, що у випадку організації роботи контейнерного пункту без закріплення автомобілів за кранами у порівнянні з варіантом закріплення автомобілів за кранами середня довжина черги зменшується з 5,21 до 0,447 автомобілів, а тривалість очікування зменшується з 0,417 год. до 0,036 год.

Контрольні запитання

1. Які задачі досліджує теорія масового обслуговування?
2. Дайте визначення каналу обслуговування та вимоги.
3. Назвіть особливості функціонування розімкненої системи масового обслуговування з очікуванням.
4. Перелічить вихідні дані, необхідні для розрахунку розімкненої СМО. За якої умови у системі не буде створюватись безкінечна черга?
5. Назвіть основні показники функціонування замкненої СМО.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 10

ЗАМКНЕНІ СИСТЕМИ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

Мета заняття: засвоєння розрахунку основних характеристик функціонування замкненої багатоканальної системи масового обслуговування з очікуванням.

Стисла теоретична довідка

В таких СМО вимоги, що обслужилися, знову повертаються до джерела вимог та доповнюють його. Система складається з n каналів обслуговування. Кожний канал може одночасно обслуговувати тільки одну вимогу. До системи надходить простіший потік вимог з інтенсивністю λ . Потік надходить з обмеженого джерела, так що у системі може знаходитися не більше m вимог. Тривалість обслуговування кожної вимоги $t_{\text{обс}}$ є випадковою величиною, яка підлягає експоненціальному закону розподілу з параметром μ . Вимоги, що надійшли до системи та застали хоча б один канал обслуговування вільним, одразу ідуть на обслуговування. Якщо ж всі канали обслуговування зайняті, то вимога стає до черги та очікує доти, доки один з каналів обслуговування не звільниться. Розрахункові формули, що отримані для стаціонарного стану системи, наведені у таблиці 10.1.

Для оцінки оптимальної кількості каналів обслуговування використовують критерій загальних витрат у системі

$$C = M_{\text{оч}} \cdot c_{\text{оч}} + N_0 \cdot c_{\text{пк}} \Rightarrow \min.$$

де $c_{\text{оч}}$ — витрати, що пов'язані з очікуванням вимогою обслуговування в одиницю часу, грн.;

$c_{\text{пк}}$ — витрати, що пов'язані з непродуктивним простоем каналу обслуговування в одиницю часу, грн.

Зміст практичного заняття та вихідні дані до його виконання

Транспортний цех підприємства здійснює транспортне обслуговування m виробничих цехів. Для перевезень вантажів наявні n автомобілів. Щогодини до транспортного цеху від виробничих цехів надходить в середньому λ вимог на перевезення вантажів.

Таблиця 10.1 — Розрахункові формули для замкненої системи масового обслуговування

| Показник | Значення показника |
|---|---|
| 1. Параметр завантаження системи | $\alpha = \lambda/\mu = \lambda \cdot \bar{t}_{\text{обс}}$ |
| 2. Імовірність того, що всі канали обслуговування вільні | $P_0 = \left[\sum_{k=0}^n \frac{m! \alpha^k}{k!(m-k)!} + \sum_{k=n+1}^m \frac{m! \alpha^k}{n^{k-n} n!(m-k)!} \right]^{-1}$ |
| 3. Імовірність того, що k каналів зайняті | $P_k = \begin{cases} \frac{m! \alpha^k}{k!(m-k)!} P_0 & 1 \leq k < n; \\ \frac{m! \alpha^k}{n^{k-n} n!(m-k)!} P_0 & n \leq k \leq m. \end{cases}$ |
| 4. Середня довжина черги | $M_{\text{оч}} = \sum_{k=n+1}^m \frac{(k-n)m! \alpha^k}{n^{k-n} n!(m-k)!} P_0 = \sum_{k=n+1}^m (k-n) P_k$ |
| 5. Середня тривалість очікування вимогою початку обслуговування | $\bar{t}_{\text{оч}} = \frac{M_{\text{оч}}}{\lambda}$ |
| 6. Середня кількість вимог у системі | $M_c = \sum_{k=1}^m k P_k = M_{\text{оч}} + \sum_{k=0}^n n \frac{\alpha^k m!}{k!(m-k)!} P_0$ |
| 7. Середня кількість вільних каналів обслуговування | $N_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) P_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k)m! \alpha^k}{k!(m-k)!} P_0$ |

Середня тривалість обслуговування одного виробничого цеху складає $t_{\text{обс}}$ годин. Внаслідок несвоечасного подавання автомобілів під навантаження кожен з виробничих цехів несе збитки в розмірі $c_{\text{оч}} = 250$ грн/год. Витрати транспортного цеху від непродуктивного простою одного автомобіля складають $c_{\text{пк}} = 50$ грн/год.

Провести аналіз роботи транспортної системи методами теорії масового обслуговування та визначити оптимальну кількість автомобілів для виконання перевезень.

Вихідні дані до виконання завдання по варіантах наведені у таблиці 10.2.

Таблиця 10.2 — Вихідні дані до практичного заняття 10

| Вар. | λ | $t_{\text{обс}}$ | n | m | Вар. | λ | $t_{\text{обс}}$ | n | m |
|------|-----------|------------------|-----|-----|------|-----------|------------------|-----|-----|
| 1 | 0,7 | 1,2 | 4 | 7 | 16 | 2,7 | 0,75 | 6 | 8 |
| 2 | 1,2 | 0,8 | 3 | 6 | 17 | 0,75 | 0,9 | 3 | 5 |
| 3 | 0,5 | 0,8 | 5 | 8 | 18 | 0,58 | 0,34 | 3 | 6 |
| 4 | 1,5 | 0,6 | 4 | 6 | 19 | 1,85 | 0,8 | 4 | 6 |
| 5 | 2,5 | 0,45 | 5 | 8 | 20 | 2,35 | 1,1 | 3 | 7 |
| 6 | 3,4 | 0,55 | 6 | 8 | 21 | 1,7 | 0,95 | 4 | 8 |
| 7 | 2,8 | 0,5 | 4 | 7 | 22 | 3,4 | 0,76 | 5 | 8 |
| 8 | 0,8 | 0,7 | 3 | 6 | 23 | 2,8 | 0,6 | 5 | 7 |
| 9 | 2,6 | 0,85 | 4 | 6 | 24 | 1,9 | 0,4 | 4 | 8 |
| 10 | 1,6 | 0,44 | 6 | 9 | 25 | 2,6 | 0,45 | 3 | 6 |
| 11 | 3,2 | 0,53 | 6 | 8 | 26 | 2,7 | 0,85 | 6 | 9 |
| 12 | 2,8 | 1,1 | 4 | 7 | 27 | 4,2 | 0,11 | 5 | 7 |
| 13 | 1,6 | 1,3 | 3 | 8 | 28 | 4,9 | 0,67 | 4 | 6 |
| 14 | 2,4 | 1,8 | 5 | 9 | 29 | 2,6 | 1,03 | 4 | 7 |
| 15 | 3,2 | 1,1 | 5 | 6 | 30 | 2,2 | 0,53 | 4 | 8 |

Приклад виконання завдання

Розглянемо приклад виконання завдання за наступних вихідних даних: $\lambda = 3$ вимог/год; $\bar{t}_{\text{обс}} = 0,5$ год; $n = 3$; $m = 6$.

Розв'язок.

1) розраховуємо параметр завантаження системи $\alpha = 3 \cdot 0,5 = 1,5$.

Подальші розрахунки зводимо до таблиці 10.3. Значення другого стовпчика розраховуємо за формулами що витікають з формули (3) таблиці 10.1

$$\frac{P_k}{P_0} = \begin{cases} \frac{m! \alpha^k}{k!(m-k)!} & 1 \leq k < n; \\ \frac{m! \alpha^k}{n^{k-n} n!(m-k)!} & n \leq k \leq m. \end{cases}$$

2) імовірність того, що всі автомобілі вільні від обслуговування виробничих цехів

$$P_0 = 1/364,38 = 0,0027.$$

Значення у знаменнику дорівнює сумі значень другого стовпчика таблиці 10.3.

Таблиця 10.3 — Розрахунок багатоканальної замкненої СМО

| k | P_k/P_0 | P_k | $k \cdot P_k$ | $(k-n)P_k$ | $(n-k)P_k$ |
|----------|---------------|-------------|---------------|------------|------------|
| 0 | 1 | 0,0027 | 0,000 | – | 0,008 |
| 1 | 9 | 0,025 | 0,025 | – | 0,049 |
| 2 | 33,75 | 0,093 | 0,185 | – | 0,093 |
| 3 | 67,50 | 0,185 | 0,556 | 0 | – |
| 4 | 101,25 | 0,278 | 1,111 | 0,278 | – |
| 5 | 101,25 | 0,278 | 1,389 | 0,556 | – |
| 6 | 50,625 | 0,139 | 0,834 | 0,417 | – |
| Σ | 364,38 | 1,00 | 4,10 | 1,25 | 0,15 |

3) імовірності станів системи P_k отримаємо помноживши значення з другого стовпчика таблиці 10.3 на знайдене значення P_0 .

4) середня кількість виробничих цехів, що очікують на обслуговування (середня довжина черги) дорівнює сумі значень п'ятого стовпчика таблиці 10.3:

$$M_{оч} = 1,25 \text{ цехів.}$$

5) середня тривалість очікування цехом початку обслуговування

$$\bar{t}_{\text{оч}} = \frac{1,25}{3} = 0,417 \text{ год.};$$

6) середня кількість виробничих цехів, що обслуговуються чи очікують на обслуговування (середня кількість вимог у системі) дорівнює сумі значень четвертого стовпчика таблиці 10.3

$$M_c = 4,1 \text{ цеха.}$$

7) середня кількість автомобілів, що очікують вимоги на обслуговування (кількість вільних каналів обслуговування) дорівнює сумі значень останнього стовпчика таблиці 10.3

$$N_0 = 0,15 \text{ автомобілів.}$$

Для визначення оптимальної кількості автомобілів розрахуємо середню довжину черги та середню кількість вільних каналів обслуговування системи за кількості каналів обслуговування від $n = 1$ до $n = 6$. Для кожного варіанту розрахуємо витрати від очікування цехами автомобілів, витрати від простою автомобілів та сумарні витрати. Результати зводимо до таблиці 10.4.

Таблиця 10.4 — Показники та витрати в системі обслуговування за різної кількості каналів обслуговування

| n | M _{оч} | N ₀ | Витрати в системі | | |
|----------|-----------------|----------------|--|---|---------------|
| | | | від простою цехів M _{оч} c _{оч} | від простою автомобілів N ₀ c _{пк} | загальні C |
| 1 | 4,33 | 0,001 | 1082,5 | 0,05 | 1082,55 |
| 2 | 2,69 | 0,01 | 672,5 | 0,5 | 673 |
| 3 | 1,25 | 0,15 | 312,5 | 7,5 | 320 |
| 4 | 0,38 | 0,63 | 95 | 31,5 | 126,5 |
| 5 | 0,06 | 1,43 | 15 | 71,5 | 86,5 |
| 6 | 0,00 | 2,40 | 0 | 120 | 120 |

Таким чином бачимо, що для досягнення мінімальних витрат у системі обслуговування, кількість автомобілів у транспортному цеху підприємства доцільно збільшити до 5 одиниць.

Контрольні запитання

1. Поясніть різницю у функціонуванні між розімкненою та замкненою системами масового обслуговування.
2. Чи є обмеженою кількість можливих станів розімкненої системи масового обслуговування? замкненої системи масового обслуговування?
3. Які вихідні дані необхідні для розрахунку показників функціонування замкненої СМО?
4. Як визначити оптимальну кількість каналів замкненої системи масового обслуговування за критерієм мінімальних витрат у системі обслуговування?

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 11

СИСТЕМИ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ З ГРУПОВИМ НАДХОДЖЕННЯМ ВИМОГ

Мета заняття: засвоєння розрахунку основних характеристик функціонування розімкненої багатоканальної системи масового обслуговування з очікуванням та груповим надходженням вимог.

Стисла теоретична довідка

У таких СМО вимоги надходять на обслуговування групами. Система масового обслуговування складається з n каналів обслуговування. Всі канали мають однакову продуктивність, яка характеризується інтенсивністю обслуговування μ . Тривалість обслуговування підлягає експоненціальному закону розподілу. До системи

надходить пуасонівський потік вимог з щільністю λ груп вимог в одиницю часу. У кожній групі міститься m вимог. Якщо вимоги, що надійшли до системи, застануть всі канали обслуговування зайнятими, вони стають до черги та очікують, поки хоча б один з каналів обслуговування не звільниться. Якщо ж при надходженні вимог є вільні канали обслуговування, вимоги одразу приймаються до обслуговування.

Розрахункові формули, що отримані для стаціонарного стану системи масового обслуговування з груповим надходженням вимог, наведені у таблиці 11.1.

Таблиця 11.1 — Розрахункові формули для системи масового обслуговування з груповим надходженням вимог

| Показник | Значення показника |
|--|--|
| 1. Параметр завантаження системи | $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$ |
| 2. Імовірність того, що всі канали обслуговування вільні | $P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} f_k}$ <p>де f_k — відношення P_k/P_0 для всіх можливих станів системи</p> $f_k = \begin{cases} 1, & \text{при } k = 0; \\ \frac{\lambda + (k-1)\mu}{k\mu} f_{k-1}, & \text{при } k = 0 \dots m-1; \\ \frac{\lambda + (k-1)\mu}{k\mu} f_{k-1} + \frac{\lambda}{k\mu} f_{k-m}, & \text{при } k = m \dots n; \\ \frac{\lambda + n\mu}{n\mu} f_{k-1} - \frac{\lambda}{n\mu} f_{k-m}, & \text{при } k > n. \end{cases}$ |
| 3. Середня довжина черги | $M_{оч} = \sum_{k=n+1}^{\infty} (k-n)P_k$ |

Продовження таблиці 11.1.

| Показник | Значення показника |
|---|---|
| 4. Середня тривалість очікування вимогою початку обслуговування | $\bar{t}_{\text{оч}} = \frac{M_{\text{оч}}}{\lambda}$ |
| 5. Середня кількість вимог у системі | $M_c = \sum_{k=0}^{\infty} kP_k$ |
| 6. Середня кількість вільних каналів обслуговування | $N_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)P_k$ |

Зміст практичного заняття та вихідні дані до його виконання

На n колій зливу залізничної станції з інтенсивністю λ подач на добу надходять цистерни з нафтопродуктами. Кожна подача складається з m цистерн. Інтенсивність зливу нафтопродуктів така, що за добу на кожній колії розвантажується в середньому μ цистерн.

Необхідно оцінити роботу колій зливу станції, якщо кожна цистерна подачі може розвантажуватися на будь-якій вільній колії зливу нафтопродуктів.

Вихідні дані для виконання завдання за варіантами наведені у таблиці 11.2.

Таблиця 11.2 — Вихідні дані до практичного заняття 11

| Вар. | λ | μ | n | m | Вар. | λ | μ | n | m |
|------|-----------|-------|-----|-----|------|-----------|-------|-----|-----|
| 1 | 3 | 3 | 6 | 4 | 5 | 5 | 3 | 4 | 2 |
| 2 | 2 | 3 | 5 | 3 | 6 | 5 | 4 | 6 | 3 |
| 3 | 4 | 2 | 7 | 3 | 7 | 6 | 3 | 8 | 3 |
| 4 | 3 | 4 | 6 | 4 | 8 | 2 | 3 | 8 | 6 |

Продовження таблиці 11.2.

| Вар. | λ | μ | n | m | Вар. | λ | μ | n | m |
|------|-----------|-------|-----|-----|------|-----------|-------|-----|-----|
| 9 | 1 | 2 | 7 | 5 | 20 | 2 | 2 | 6 | 4 |
| 10 | 4 | 3 | 5 | 3 | 21 | 4 | 3 | 3 | 5 |
| 11 | 6 | 2 | 7 | 2 | 22 | 5 | 3 | 8 | 4 |
| 12 | 5 | 3 | 8 | 3 | 23 | 2 | 2 | 7 | 5 |
| 13 | 4 | 2 | 8 | 3 | 24 | 2 | 1 | 8 | 3 |
| 14 | 3 | 3 | 5 | 4 | 25 | 4 | 5 | 8 | 5 |
| 15 | 6 | 4 | 6 | 3 | 26 | 3 | 6 | 6 | 5 |
| 16 | 1 | 2 | 7 | 6 | 27 | 3 | 5 | 5 | 6 |
| 17 | 3 | 4 | 5 | 4 | 28 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| 18 | 6 | 3 | 5 | 2 | 29 | 4 | 3 | 7 | 4 |
| 19 | 7 | 4 | 8 | 3 | 30 | 5 | 2 | 8 | 3 |

Приклад виконання завдання

Розглянемо приклад виконання завдання за наступних вихідних даних: $\lambda = 3$ подачі/добу; $\mu = 2$ цистерни/добу; $n = 6$; $m = 3$.

Розв'язок.

1) розраховуємо параметр завантаження системи

$$\alpha = \frac{3}{2} = 1,5.$$

Подальші розрахунки за формулами (2) таблиці 11.1 подані у таблиці 11.3. Розрахунок значень f_k припиняємо, коли його значення стає меншим за 0,01;

2) імовірність того, що всі колії зливу вільні

$$P_0 = \frac{1}{9,857} = 0,101;$$

Таблиця 11.3 — Розрахунок СМО з груповим надходженням вимог

| k | $f_k = P_k/P_0$ | P_k | kP_k | $(k - n)P_k$ | $(n - k)P_k$ |
|----------|-----------------|-------|--------------|--------------|--------------|
| 0 | 1,000 | 0,101 | 0 | – | 0,606 |
| 1 | 1,500 | 0,067 | 0,067 | – | 0,355 |
| 2 | 1,875 | 0,189 | 0,378 | – | 0,756 |
| 3 | 1,687 | 0,170 | 0,510 | – | 0,510 |
| 4 | 1,335 | 0,135 | 0,540 | – | 0,270 |
| 5 | 0,907 | 0,092 | 0,460 | – | 0,092 |
| 6 | 0,560 | 0,057 | 0,342 | – | – |
| 7 | 0,366 | 0,037 | 0,259 | 0,037 | – |
| 8 | 0,231 | 0,023 | 0,184 | 0,040 | – |
| 9 | 0,149 | 0,025 | 0,135 | 0,045 | – |
| 10 | 0,095 | 0,010 | 0,100 | 0,040 | – |
| 11 | 0,061 | 0,006 | 0,066 | 0,030 | – |
| 12 | 0,039 | 0,004 | 0,048 | 0,024 | – |
| 13 | 0,0251 | 0,003 | 0,039 | 0,021 | – |
| 14 | 0,0162 | 0,002 | 0,029 | 0,016 | – |
| 15 | 0,0103 | 0,001 | 0,025 | 0,014 | – |
| Σ | 9,857 | | 3,307 | 0,345 | 2,57 |

3) середня кількість цистерн, що очікують зливу (середня довжина черги) є сумою значень п'ятого стовпчика таблиці 11.3:

$$M_{\text{оч}} = 0,345 \text{ цистерн};$$

4) середня кількість цистерн на станції (середня кількість вимог у системі) дорівнює сумі значень четвертого стовпчика таблиці 11.3

$$M_c = 3,307 \text{ цистерн};$$

5) середня кількість вільних колій зливу (середня кількість вільних каналів обслуговування) — сума значень останнього стовпчику таблиці 11.3

$$N_0 = 2,57 \text{ колій};$$

б) середня тривалість очікування цистерною початку зливу

$$\bar{t}_{\text{оч}} = \frac{0,345}{3} = 0,115 \text{ доби} = 2,76 \text{ год.}$$

Контрольні запитання

1. У чому полягають особливості функціонування розімкненої системи масового обслуговування з очікуванням та груповим надходженням вимог?
2. Які вихідні дані необхідні для розрахунку СМО з очікуванням та груповим надходженням вимог?
3. Як розраховуються імовірності можливих станів СМО з груповим надходженням вимог?

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ № 12

СИСТЕМИ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ З ОБМЕЖЕНОЮ ДОВЖИНОЮ ЧЕРГИ

Мета заняття: засвоєння розрахунку основних характеристик функціонування багатоканальної системи масового обслуговування з обмеженою довжиною черги.

Стисла теоретична довідка

Такі СМО характеризуються наступними особливостями функціонування: система обслуговування складається з обмеженої кількості каналів обслуговування n ; кожний канал обслуговування може одночасно обслуговувати тільки одну вимогу; кожна вимога,

що надходить до системи, заставши всі канали вже зайнятими, стає до черги тільки за умови, що в ній вже знаходиться менше ніж m вимог. Якщо кількість вимог у черзі дорівнює m (більшою вона бути не може), вимога залишає систему не обслуженою. Якщо вимога надходить до системи, коли є вільний канал обслуговування, воно одразу ж приймається до обслуговування.

Джерело потоку вимог необмежене за своїми можливостями, щільність потоку має певне значення λ . Тривалість обслуговування кожної вимоги $t_{\text{обс}}$ є випадковою величиною, яка підлягає експоненціальному закону розподілу з параметром μ . Всі канали системи мають однакову продуктивність.

Розрахункові формули, що отримані для стаціонарного стану системи, наведені у таблиці 12.1.

Таблиця 12.1 — Розрахункові формули для системи масового обслуговування з обмеженою довжиною черги

| Показник | Значення показника |
|---|---|
| 1. Параметр завантаження системи | $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$ |
| 2. Імовірність того, що всі канали обслуговування вільні | $P_0 = \left[1 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{s=1}^m \left(\frac{\alpha}{n} \right)^s \right]^{-1}$ |
| 3. Імовірність того, що k каналів зайняті | $P_k = \frac{\alpha^k}{k!} P_0 \text{ при } k \leq n$ |
| 4. Імовірність того, що k каналів зайняті та s вимог стоять у черзі | $P_{n+s} = \frac{\alpha^n}{n!} \left(\frac{\alpha}{n} \right)^s P_0$ |
| 5. Імовірність відмови в обслуговуванні | $P_{\text{відм}} = \frac{\alpha^{n+m}}{n^m n!} P_0$ |
| 6. Середня довжина черги | $M_{\text{оч}} = \sum_{s=1}^m s P_{n+s}$ |
| 7. Середня тривалість очікування вимогою початку обслуговування | $\bar{t}_{\text{оч}} = \frac{M_{\text{оч}}}{\lambda}$ |

Продовження таблиці 12.1.

| Показник | Значення показника |
|---|--|
| 8. Середня кількість вільних каналів обслуговування | $N_0 = n - \sum_{k=1}^n kP_k + n \sum_{k=1}^m P_{n+k}$ |
| 9. Середня кількість вимог у системі | $M_c = n - N_0 + M_{оч}$ |

**Зміст практичного заняття
та вихідні дані до його виконання**

На дільницю поточного ремонту навантажувачів цеху безрейкового транспорту машинобудівного підприємства надходять у випадкові моменти часу навантажувачі, що вийшли з ладу, з інтенсивністю λ навантажувачів на добу. Дільниця має n постів для виконання поточного ремонту та майданчик тимчасового зберігання навантажувачів, що потребують ремонту, на m навантажувачів. Тривалість ремонту навантажувача залежить від характеру поломки, наявності запасних частин та розподілена за експоненціальним законом з середнім значенням $\bar{t}_{обс}$ діб. Методами теорії масового обслуговування оцінити показники функціонування дільниці ремонту. Визначити також, як зміняться ці показники при введенні в дію ще одного приміщення для ремонту навантажувачів.

Вихідні дані до виконання завдання по варіантах наведені у таблиці 12.2.

Таблиця 12.2 – Вихідні дані до практичного заняття 12

| Вар. | λ | $\bar{t}_{обс}$ | n | m | Вар. | λ | $\bar{t}_{обс}$ | n | m |
|------|-----------|-----------------|-----|-----|------|-----------|-----------------|-----|-----|
| 1 | 5,5 | 0,50 | 2 | 3 | 5 | 2,7 | 2,00 | 5 | 3 |
| 2 | 3,1 | 0,67 | 2 | 4 | 6 | 1,8 | 2,20 | 3 | 4 |
| 3 | 4,5 | 0,80 | 3 | 5 | 7 | 0,75 | 2,00 | 2 | 2 |
| 4 | 3,5 | 1,30 | 4 | 4 | 8 | 1,2 | 3,00 | 3 | 4 |

Продовження таблиці 12.2.

| Вар. | λ | $\bar{t}_{\text{обс}}$ | n | m | Вар. | λ | $\bar{t}_{\text{обс}}$ | n | m |
|------|-----------|------------------------|-----|-----|------|-----------|------------------------|-----|-----|
| 9 | 2,25 | 0,85 | 2 | 5 | 20 | 3,5 | 2,00 | 5 | 3 |
| 10 | 2,5 | 1,25 | 3 | 2 | 21 | 2,0 | 0,80 | 1 | 4 |
| 11 | 4,0 | 0,67 | 3 | 3 | 22 | 0,75 | 5,00 | 3 | 4 |
| 12 | 3,8 | 1,00 | 4 | 2 | 23 | 0,9 | 2,85 | 2 | 4 |
| 13 | 2,7 | 1,54 | 4 | 3 | 24 | 1,6 | 0,83 | 1 | 5 |
| 14 | 1,9 | 2,00 | 4 | 5 | 25 | 2,5 | 1,00 | 3 | 2 |
| 15 | 2,2 | 2,50 | 5 | 2 | 26 | 0,7 | 2,00 | 2 | 1 |
| 16 | 1,5 | 0,50 | 1 | 2 | 27 | 3,2 | 1,15 | 4 | 2 |
| 17 | 1,75 | 0,45 | 1 | 3 | 28 | 5,0 | 1,00 | 4 | 3 |
| 18 | 2,1 | 0,75 | 2 | 3 | 29 | 4,5 | 0,80 | 3 | 3 |
| 19 | 1,1 | 3,00 | 3 | 5 | 30 | 6,0 | 0,40 | 2 | 2 |

Приклад виконання завдання

Розглянемо приклад виконання завдання за наступних вихідних даних: $\lambda = 2$ навантажувачі/добу; $\mu = 0,5$ навантажувачів/добу; $n = 2$; $m = 4$.

Розв'язок.

1) визначаємо параметр завантаження системи

$$\alpha = \frac{2}{0,5} = 4;$$

2) імовірність того, що всі ремонтні пости вільні

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{4^1}{1!} + \frac{4^2}{2!} + \frac{4^2}{2!} \left[\left(\frac{4}{2}\right)^1 + \left(\frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{4}{2}\right)^3 + \left(\frac{4}{2}\right)^4 \right]} = 0,00395;$$

3) імовірність того, що несправному навантажувачу буде відмовлено у ремонті

$$P_{\text{відм}} = \frac{4^6}{2^4 \cdot 2! \cdot 0,00395} = 0,5056,$$

Тобто, близько 50% всіх навантажувачів не будуть відремонтовані.

4) для розрахунку середньої довжини черги навантажувачів, що очікують ремонту, розрахуємо імовірності P_{n+s}

$$P_{n+1} = \frac{4^2}{2!} \left(\frac{4}{2}\right)^1 \times 0,00395 = 0,0632;$$

$$P_{n+2} = \frac{4^2}{2!} \left(\frac{4}{2}\right)^2 \times 0,00395 = 0,1264;$$

$$P_{n+3} = \frac{4^2}{2!} \left(\frac{4}{2}\right)^3 \times 0,00395 = 0,2528;$$

$$P_{n+4} = \frac{4^2}{2!} \left(\frac{4}{2}\right)^4 \times 0,00395 = 0,5056.$$

5) середня довжина черги навантажувачів

$$M_{\text{оч}} = 1 \cdot 0,0632 + 2 \cdot 0,1264 + 3 \cdot 0,2528 + 4 \cdot 0,5056 = 3,1;$$

6) середня тривалість очікування навантажувачем початку ремонту

$$\bar{t}_{\text{оч}} = \frac{3,1}{2} = 1,55 \text{ доби};$$

7) середня кількість вільних постів ремонту

$$N_0 = 2 - 1 \frac{4^1}{1!} 0,00395 - 2 \frac{4^2}{2!} 0,00395 - 2(0,0632 + 0,1264 + 0,2528 + 0,5056) = 0,025.$$

Розраховуємо ті ж самі показники при кількості постів ремонту $n = 3$, результати зводимо до таблиці 12.3.

Таблиця 12.3 — Результати розрахунку

| Показник | Значення показника при кількості постів | |
|-----------------------|---|---------|
| | $n = 2$ | $n = 3$ |
| $P_{\text{відм}}$ | 0,5056 | 0,2910 |
| $M_{\text{оч}}$ | 3,1 | 2,27 |
| $\bar{t}_{\text{оч}}$ | 1,55 | 1,13 |
| N_0 | 0,025 | 0,16 |

Таким чином бачимо, що відсоток відремонтованих на дільниці навантажувачів збільшується приблизно на 21%, а тривалість очікування навантажувачем ремонту зменшується майже на півдобу (0,42 доби).

Контрольні запитання

1. У чому полягають особливості функціонування системи масового обслуговування з обмеженою довжиною черги?
2. У якому випадку у системі масового обслуговування з обмеженою довжиною черги вимозі, що надходить, буде відмовлено в обслуговуванні?
3. Яким чином розраховуються імовірності всіх можливих станів системи масового обслуговування з обмеженою довжиною черги?

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №13

ПОШУК НАЙКОРОТШИХ ВІДСТАНЕЙ НА ТРАНСПОРТНИХ МЕРЕЖАХ ТА НАЙКОРОТШОЇ ЗВ'ЯЗУЮЧОЇ МЕРЕЖІ

Мета заняття: вивчення основних понять теорії графів, алгоритмів пошуку найкоротших відстаней на транспортних мережах та побудови найкоротшої зв'язуючої мережі.

Стисла теоретична довідка

Транспортну мережу можна представити у вигляді графу (рисунок 13.1). **Графом** називається пара множин $G = (X, A)$, де X — множина вершин графа, а A — множина ребер графа.

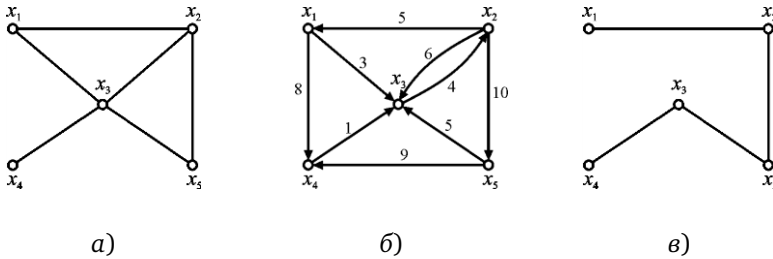


Рисунок 13.1 — Приклади графів

Граф називається **орієнтованим**, якщо ребра множини A орієнтовані (для ребер графа задані напрямки, що позначаються стрілками). Графи, наведені на рисунку 13.1, *а, в* є неорієнтованими, а граф, наведений на рисунку 13.2, *б* є орієнтованим. У випадку, якщо граф є орієнтованим, його ребра називають **дугами**.

Кожне ребро (дугу) можна записати у вигляді (i, j) , де i — початкова вершина, а j — кінцева вершина. При цьому кажуть, що вершини i та j є суміжними, а ребро (дуга) (i, j) є **інцидентною** вершинам i та j . Якщо початкова та кінцева вершини ребра (дуги) співпадають, таке ребро (дугу) називають **петлею**.

У орієнтованому графі якщо дуга виходить з вершини i та заходить до вершини j , вершина j називається **образом** по відношенню до вершини i , а вершина i називається **прообразом** по відношенню до вершини j .

Граф називається **зваженим**, якщо його ребрам (вершинам) поставлені у відповідність деякі числа, що називаються вагою ребра (вершини). Вагою ребра на графі транспортній мережі може виступати, наприклад, його довжина, вагою вершини — наявність чи потреба цієї вершини (вантажного пункту) у деякому виді вантажу.

Маршрутом у неорієнтованому графі називається послідовність ребер, у якій кожне ребро a_i (за винятком, можливо, першого та останнього ребер) зв'язане з ребрами a_{i-1} та a_{i+1} своїми кінцевими вершинами. У орієнтованому графі маршрут називають **шляхом**. Маршрут і цикл можна задавати послідовністю вершин. Наприклад, послідовність вершин $x_1 - x_2 - x_3 - x_4$ для графа на рисунку 13.1, a є маршрутом, а послідовність вершин $x_1 - x_4 - x_3 - x_2$ для графа на рисунку 13.1, b є шляхом. Маршрут (шлях) називається **замкненим**, якщо у ньому початкова та кінцева вершини співпадають.

Ланцюгом (простим шляхом) називається маршрут (шлях) у графі (орієнтованому графі), у якому жодна вершина не повторюється двічі. **Циклом** називається замкнений маршрут (шлях), у якому жодна з вершин, окрім першої та останньої, не повторюється двічі.

Граф називається **зв'язним**, якщо будь-які дві його вершини з'єднані ланцюгом (простим шляхом). **Деревом** називають зв'язний граф без циклів (рисунок 13.1, b). **Мінімальне остійне дерево** графа є деревом, сума ваг ребер якого є найменшою, та яке містить на одиницю менше ребер, ніж кількість вершин графа. Мінімальне остійне дерево графа називають **найкоротшою зв'язуючою мережею**.

Пошук мінімального остійного дерева графа (алгоритм Краскала).

Побудувати незв'язний граф, що утворений множиною вершин вихідного графа. Упорядкувати ребра вихідного графа у порядку збільшення їх ваг.

Додавати ребра з упорядкованої множини ребер до множини вершин графа таким чином, щоб при додаванні чергового ребра не утворювався цикл. Таке додавання проводити доти, поки кількість ребер дерева не стане рівним значенню, на одиницю меншому ніж кількість вершин вихідного графа.

Пошук найкоротшої відстані між вершинами графа (алгоритм Дейкстри).

Алгоритм знаходить найкоротші шляхи від деякої вершини s до всіх інших вершин графа за умови невід'ємності ваг його ребер.

Крок 1. Вершині s , від якої шукаються найкоротші шляхи, приписати постійну позначку $v(s) = 0$. Всім іншим вершинам приписати тимчасові позначки $v(x_i) = +\infty$.

Крок 2. Для всіх ребер x_i , інцидентних вершині s , та таких, що мають тимчасову позначку, змінити позначки у відповідності з формулою $v(x_i) = \min\{v(x_i); v(s) + c(s, x_i)\}$, де $c(s, x_i)$ — вага ребра (s, x_i) .

Крок 3. Знайти вершину з мінімальною тимчасовою позначкою. Позначити таку позначку як постійну. Позначити ребро, що з'єднує цю вершину з її прообразом, стрілкою. Прийняти цю вершину у якості s та перейти до кроку 2.

Алгоритм повторюють доти, доки всі вершини графа не отримають постійні позначки. По закінченні роботи алгоритму позначка деякої вершини дає довжину найкоротшого шляху, від цієї вершини до початкової, а сам шлях можна відновити за допомогою ребер зі стрілками.

**Зміст практичного заняття
та вихідні дані до його виконання**

Для заданого графа транспортної мережі знайти найкоротшу зв'язуючу мережу з використанням алгоритму Краскала та найкоротші відстані від вершини x_1 (варіанти 1–5), x_3 (варіанти 6–10), x_5 (варіанти 11–15), x_7 (варіанти 16–20), x_9 (варіанти 21–25) до

всіх інших вершин мережі, використовуючи алгоритм Дейкстри. Вихідні дані до виконання завдання по варіантах наведені на рисунку 13.2. та у таблиці 13.1.

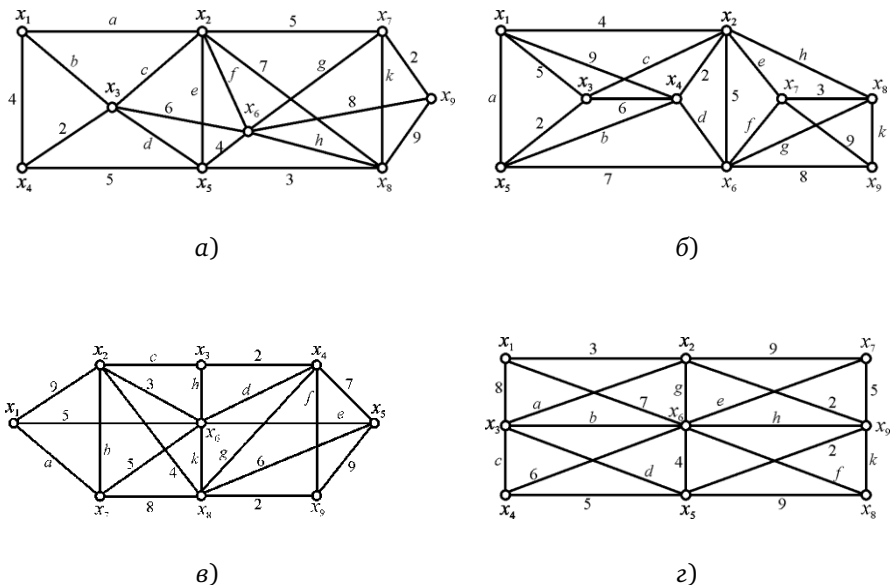


Рисунок 13.2 — Варіанти схем транспортної мережі

Таблиця 13.1 — Вихідні дані до виконання практичного заняття 13

| Варіант | Схема | Довжина ланок транспортної мережі, км | | | | | | | | |
|---------|----------|---------------------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> | <i>d</i> | <i>e</i> | <i>f</i> | <i>g</i> | <i>h</i> | <i>k</i> |
| 1 | <i>a</i> | 9 | 1 | 10 | 10 | 5 | 11 | 2 | 8 | 1 |
| 2 | <i>б</i> | 8 | 2 | 10 | 12 | 10 | 4 | 6 | 10 | 10 |
| 3 | <i>в</i> | 2 | 7 | 5 | 7 | 9 | 8 | 12 | 10 | 5 |
| 4 | <i>г</i> | 9 | 6 | 9 | 5 | 7 | 9 | 10 | 11 | 7 |
| 5 | <i>a</i> | 3 | 6 | 12 | 3 | 5 | 7 | 8 | 4 | 3 |
| 6 | <i>б</i> | 11 | 3 | 7 | 2 | 8 | 12 | 4 | 2 | 7 |

Продовження таблиці 13.1.

| Вариант | Схема | Довжина ланок транспортної мережі, км | | | | | | | | |
|---------|----------|---------------------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> | <i>d</i> | <i>e</i> | <i>f</i> | <i>g</i> | <i>h</i> | <i>k</i> |
| 7 | <i>в</i> | 11 | 9 | 10 | 7 | 8 | 2 | 4 | 7 | 12 |
| 8 | <i>г</i> | 3 | 11 | 11 | 3 | 8 | 11 | 5 | 3 | 2 |
| 9 | <i>а</i> | 9 | 1 | 12 | 4 | 2 | 7 | 7 | 9 | 8 |
| 10 | <i>б</i> | 4 | 11 | 10 | 1 | 8 | 5 | 12 | 3 | 11 |
| 11 | <i>в</i> | 1 | 11 | 3 | 5 | 4 | 7 | 12 | 11 | 7 |
| 12 | <i>г</i> | 2 | 3 | 7 | 2 | 6 | 6 | 3 | 2 | 2 |
| 13 | <i>а</i> | 8 | 7 | 8 | 1 | 4 | 12 | 1 | 8 | 6 |
| 14 | <i>б</i> | 5 | 6 | 11 | 10 | 5 | 4 | 3 | 3 | 9 |
| 15 | <i>в</i> | 2 | 1 | 2 | 4 | 2 | 11 | 7 | 8 | 12 |
| 16 | <i>г</i> | 4 | 10 | 12 | 6 | 10 | 6 | 1 | 1 | 8 |
| 17 | <i>а</i> | 1 | 1 | 6 | 12 | 11 | 3 | 10 | 7 | 12 |
| 18 | <i>б</i> | 9 | 7 | 6 | 1 | 2 | 10 | 3 | 10 | 4 |
| 19 | <i>в</i> | 9 | 1 | 8 | 2 | 7 | 6 | 12 | 8 | 6 |
| 20 | <i>г</i> | 10 | 8 | 4 | 11 | 1 | 11 | 1 | 8 | 9 |
| 21 | <i>а</i> | 7 | 8 | 9 | 8 | 4 | 12 | 7 | 2 | 1 |
| 22 | <i>б</i> | 6 | 4 | 12 | 4 | 10 | 5 | 9 | 1 | 1 |
| 23 | <i>в</i> | 2 | 11 | 2 | 1 | 8 | 8 | 2 | 2 | 10 |
| 24 | <i>г</i> | 8 | 11 | 3 | 6 | 4 | 11 | 1 | 1 | 11 |
| 25 | <i>а</i> | 8 | 8 | 11 | 9 | 1 | 8 | 10 | 5 | 1 |
| 26 | <i>б</i> | 4 | 3 | 6 | 7 | 8 | 5 | 5 | 6 | 3 |
| 27 | <i>в</i> | 9 | 9 | 3 | 11 | 4 | 3 | 7 | 8 | 4 |
| 28 | <i>г</i> | 5 | 3 | 7 | 8 | 8 | 9 | 12 | 3 | 5 |
| 29 | <i>а</i> | 5 | 2 | 6 | 7 | 8 | 10 | 5 | 4 | 3 |
| 30 | <i>б</i> | 4 | 7 | 7 | 6 | 3 | 8 | 10 | 3 | 8 |

Приклад виконання завдання

Розглянемо приклад виконання завдання для графа транспортної мережі, наведеного на рисунку 13.3.

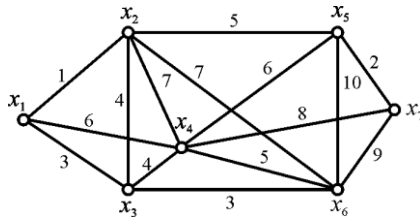


Рисунок 13.3 — Схема транспортної мережі (приклад)

Розв'язок.

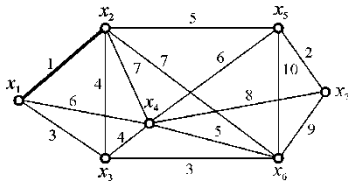
Пошук найкоротшої зв'язуючої мережі з використанням алгоритму Краскала.

Згідно алгоритму знаходимо на мережі ланку з найменшою довжиною. Це ланка (x_1, x_2) з $c(x_1, x_2) = 1$ (рисунок 13.4, а). Позначаємо її жирною лінією на схемі мережі.

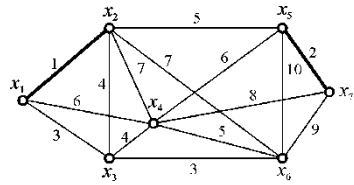
Наступною ланкою з найменшою довжиною є ланка (x_5, x_7) з $c(x_5, x_7) = 2$. Додаємо її до будованого остійного дерева, оскільки це не призводить до виникнення циклу (рисунок 13.4, б). Наступним до рішення включаємо ланки (x_1, x_3) (рисунок 13.4, в) та (x_3, x_6) (рисунок 13.4, г), що мають однакову найменшу довжину 3.

Наступним включаємо до дерева ланку (x_3, x_4) довжиною 4 (рисунок 13.4, д). Наступну ланку (x_2, x_3) з мінімальною довжиною 4 до дерева не включаємо, оскільки це призводить до утворення циклу $x_1 - x_2 - x_3$. З тих самих міркувань надалі не включаємо до дерева ланку (x_4, x_6) довжиною 5 (утворюється цикл $x_3 - x_4 - x_6$).

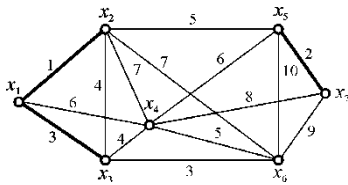
Останнім включаємо до найкоротшої зв'язуючої мережі ланку (x_2, x_5) довжиною 5 і рішення припиняємо, оскільки кількість ланок у дереві дорівнює 6, що на одиницю менше, ніж кількість вершин транспортної мережі. Довжина найкоротшої зв'язуючої мережі дорівнює 18 км.



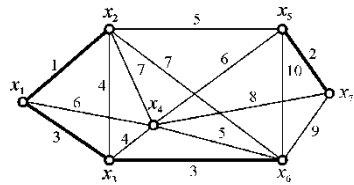
a)



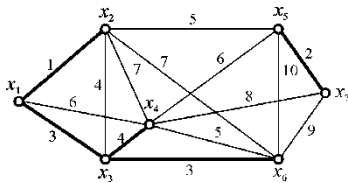
б)



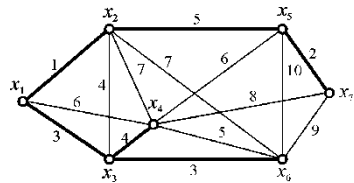
в)



г)



д)



е)

Рисунок 13.4 — Знаходження найкоротшої зв'язуючої мережі (алгоритм Краскала)

Пошук найкоротших відстаней між вершинами мережі з використанням алгоритму Дейкстри.

Знайдемо найкоротші відстані від вершини x_2 до всіх інших вершин мережі.

Крок 1. Приписуємо вершині x_2 постійну позначку $v(x_2) = 0$ (будемо позначати постійні позначки зірочкою). Іншим вершинам приписуємо тимчасові позначки $v(x_i) = +\infty$ (рисунок 13.5, а).

Крок 2. Переглядаємо ланки, інцидентні вершині x_2 (на рисунку 13.5, а позначені пунктиром) та для кожної суміжної вершини перераховуємо значення позначки:

ланка (x_2, x_1) :

$$v(x_1) = \min\{v(x_1); v(x_2) + c(x_1, x_2)\} = \min\{+\infty; 0 + 1\} = 1;$$

ланка (x_2, x_3) :

$$v(x_3) = \min\{v(x_3); v(x_2) + c(x_2, x_3)\} = \min\{+\infty; 0 + 4\} = 4;$$

ланка (x_2, x_4) :

$$v(x_4) = \min\{v(x_4); v(x_2) + c(x_2, x_4)\} = \min\{+\infty; 0 + 7\} = 7;$$

ланка (x_2, x_5) :

$$v(x_5) = \min\{v(x_5); v(x_2) + c(x_2, x_5)\} = \min\{+\infty; 0 + 5\} = 5;$$

ланка (x_2, x_6) :

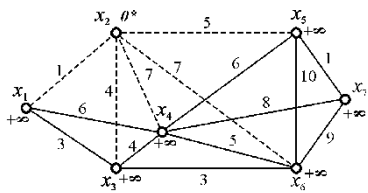
$$v(x_6) = \min\{v(x_6); v(x_2) + c(x_2, x_6)\} = \min\{+\infty; 0 + 7\} = 7.$$

Крок 3. Знаходимо вершину з мінімальною тимчасовою позначкою. Це вершина x_1 з позначкою $v(x_1) = 1$. Позначаємо її як постійну. Ланку (x_2, x_1) позначаємо стрілкою (рисунок 13.5, б).

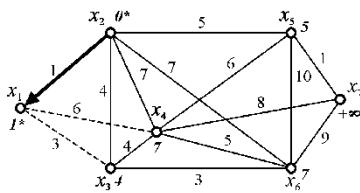
Повертаємось до кроку 2, приймаючи вершину x_1 в якості початкової. Переглядаємо ланки, інцидентні вершині x_1 , позначені тимчасовими позначками, та для кожної суміжної вершини перераховуємо значення позначки:

ланка (x_1, x_4) :

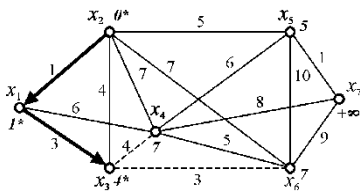
$$v(x_4) = \min\{v(x_4); v(x_1) + c(x_1, x_4)\} = \min\{7; 1 + 6\} = 7;$$



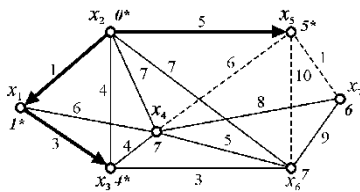
a)



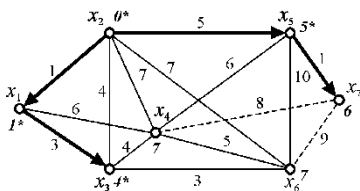
б)



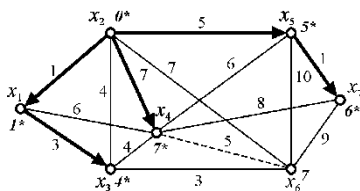
в)



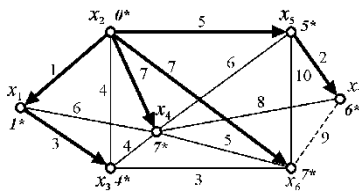
г)



д)



е)



ж)

Рисунок 13.5 — Этапы пошуку найкоротших відстаней на транспортній мережі (приклад)

ланка (x_1, x_3) :

$$v(x_3) = \min\{v(x_3); v(x_1) + c(x_1, x_3)\} = \min\{4; 1 + 3\} = 4.$$

Знаходимо вершину з мінімальною тимчасовою позначкою. Це вершина x_3 з позначкою $v(x_3) = 4$. Позначаємо її як постійну. Ланку (x_1, x_3) позначаємо стрілкою (рисунок 13.5, в).

Приймаємо вершину x_3 в якості початкової. Перераховуємо тимчасові позначки суміжних з нею вершин:

ланка (x_3, x_4) :

$$v(x_4) = \min\{v(x_4); v(x_3) + c(x_3, x_4)\} = \min\{7; 4 + 4\} = 7;$$

ланка (x_3, x_6) :

$$v(x_6) = \min\{v(x_6); v(x_3) + c(x_3, x_6)\} = \min\{7; 4 + 3\} = 7.$$

Мінімальну тимчасову позначку на цьому етапі розрахунків має вершина x_5 з позначкою $v(x_5) = 5$. Позначаємо її як постійну, ланку (x_2, x_5) позначаємо стрілкою (рисунок 13.5, з).

Приймаємо вершину x_5 в якості початкової. Перераховуємо тимчасові позначки суміжних з нею вершин:

ланка (x_5, x_4) :

$$v(x_4) = \min\{v(x_4); v(x_5) + c(x_5, x_4)\} = \min\{7; 5 + 6\} = 7;$$

ланка (x_5, x_6) :

$$v(x_6) = \min\{v(x_6); v(x_5) + c(x_5, x_6)\} = \min\{7; 5 + 10\} = 7;$$

ланка (x_5, x_7) :

$$v(x_7) = \min\{v(x_7); v(x_5) + c(x_5, x_7)\} = \min\{7; 5 + 1\} = 6.$$

Знаходимо вершину з мінімальною тимчасовою позначкою. Це вершина x_7 з позначкою $v(x_7) = 6$. Позначаємо її як постійну, ланку (x_5, x_7) позначаємо стрілкою (рисунок 13.5, д).

Приймаємо вершину x_7 в якості початкової. Перераховуємо тимчасові позначки суміжних з нею вершин:

ланка (x_7, x_4) :

$$v(x_4) = \min\{v(x_4); v(x_7) + c(x_7, x_4)\} = \min\{7; 6 + 8\} = 7;$$

ланка (x_7, x_6) :

$$v(x_6) = \min\{v(x_6); v(x_7) + c(x_7, x_6)\} = \min\{7; 6 + 9\} = 7.$$

Мінімальну тимчасову позначку 7 мають вершини x_4 та x_6 . У цьому випадку можна обрати у якості початкової будь-яку з них. Оберемо, наприклад, вершину x_4 . Позначимо її як постійну, ланку (x_2, x_4) позначимо стрілкою (рисунок 13.5, е).

Приймаючи вершину x_4 в якості початкової перераховуємо тимчасову позначку єдиної суміжної з нею вершини x_6 :

$$v(x_6) = \min\{v(x_6); v(x_4) + c(x_4, x_6)\} = \min\{7; 7 + 5\} = 7.$$

Остаточно позначаємо позначку вершини x_6 як постійну і на цьому припиняємо розрахунки, оскільки не залишилось жодної вершини з тимчасовою позначкою (рисунок 13.5, ж). Позначка біля вершини мережі показує найкоротшу відстань від цієї вершини до вершини x_2 . Найкоротші шляхи від вершини x_2 до всіх інших вершин мережі показані стрілками.

Контрольні запитання

1. Дайте визначення наступним поняттям: *граф*, *орієнтований граф*, *зважений граф*, *ребро*, *дуга*, *маршрут*, *шлях*, *простий шлях*, *ланцюг*, *цикл*, *дерево*.

2. Дайте поняття суміжності вершин та інцидентності ребер графа.

3. У якому випадку граф називають зв'язним?

4. Для чого використовують алгоритм Краскала і у чому полягає його сутність?

5. Викладіть кроки алгоритму Дейкстри для пошуку найкоротших відстаней між вершинами графа. Для яких графів він не може бути застосований?

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №14

ПОШУК МАКСИМАЛЬНОГО ПОТОКУ У ТРАНСПОРТНІЙ МЕРЕЖІ

Мета заняття: вивчення методу пошуку максимального потоку у транспортній мережі з використанням теореми Форда-Фалкерсона.

Стисла теоретична довідка

Транспортною мережею (чи просто **мережею**) у теорії графів називають орієнтований зважений граф, що задовольняє наступним умовам:

1) відсутні петлі;

2) існує тільки одна вершина s , що не має жодного прообраза (тобто вершина, з якої дуги виходять, але жодна не входить). Ця вершина називається **витоком** мережі;

3) існує тільки одна вершина t , що не має жодного образа (тобто вершина, до якої дуги заходять, але жодна не виходить). Ця вершина називається **стоком** мережі;

4) кожній дузі (i, j) поставлено у відповідність невід'ємне ціле число $p(i, j) \geq 0$, що називається **пропускною спроможністю** дуги.

Потік у мережі — це функція, що ставить у відповідність дугам даної мережі деякі невід’ємні дійсні числа $\varphi(i, j)$, що задовольняють наступним умовам:

а) потік у дузі не повинен перевищувати її пропускну спроможність;

б) для кожної вершини мережі, крім витoku та стоку, справедлива властивість *збереження потоку*: сумарний потік, що заходить до вершини повинен дорівнювати сумарному потоку, що виходить з неї.

Дуга мережі називається **насиченою**, якщо потік у цій дузі дорівнює її пропускній спроможності.

Задача про максимальний потік полягає у пошуку таких потоків по дугах, коли сумарний потік, що протікає з витoku до стоку є максимальним. Одним з методів пошуку максимального потоку є метод, що побудований на понятті розрізу мережі та теоремі Форда-Фалкерсона.

Розріз мережі є множиною найменшої кількості дуг, що відділяють виток від стоку. Тобто, розріз транспортної мережі поділяє її на дві нез’язані частини, причому до першої частини входить виток, а до другої — стік. Сумарна пропускну спроможність цих дуг називається *пропускну спроможністю розрізу*.

Теорема (Форда-Фалкерсона). Для будь-якої транспортної мережі величина максимального потоку з витoku до стоку дорівнює мінімальній пропускній спроможності розрізу мережі, що відокремлює виток від стоку.

Алгоритм пошуку максимального потоку у мережі.

Крок 1. Перенумерувати всі вершини мережі довільним чином, окрім витoku та стоку.

Крок 2. Задати у мережі початковий потік (наприклад, нульовий).

Крок 3. Вершинам мережі приписати цілочислові помітки, а дугам — знаки «+» чи «-» за наступними правилами:

а) вершині-витoku приписати позначку «0»;

б) найти непомічену вершину j , що суміжна поміченій вершині i . Якщо потік по дузі (i, j) менше пропускної спроможності цієї дуги, тобто $\varphi_{ij} < p(i, j)$, то вершині j приписується помітка.

Якщо вершина j є образом поміченої вершини i , то вершина j отримує мітку, що дорівнює номеру вершини i , дуга (i, j) отримує помітку «+», після чого переходять до розгляду наступної вершини.

Якщо вершина j не має жодного поміченого прообразу і потік по дузі додатний ($\varphi > 0$), то вершина j отримує мітку, що дорівнює номеру вершини i , дуга (i, j) отримує помітку «-», після чого переходять до розгляду наступної вершини.

Процес приписування позначок продовжується доти, доки всі вершини, що задовольняють зазначеним вище умовам, не отримують помітки.

Крок 4. Якщо в результаті приписування поміток вершина-стік не отримала помітки, то потік у мережі є максимальним і задача вирішена, інакше переходять до кроку 5.

Крок 5. Розглянути послідовність вершин $L = (t, \dots, s)$, помітка кожної з яких дорівнює номеру наступної за нею вершини, та множину дуг M , що з'єднують суміжні вершини з послідовності L . Побудувати новий потік за наступною схемою:

а) якщо дуга належить множині M та має помітку «+», то потік по цій дузі збільшити на k ;

б) якщо дуга належить множині M та має помітку «-», то потік по цій дузі зменшити на k ;

в) якщо дуга не належить множині M , то потік по цій дузі не змінюється.

Схема знаходження k .

$$k = \min\{k_1; k_2\}.$$

Для знаходження k_1 переглядають всі дуги, що належать множині M та мають позначку «+». Для кожної такої дуги обчислюють різницю між пропускною спроможністю дуги та потоком у цій дузі. З цих значень вибирають найменше та присвоюють k_1 .

Для знаходження k_2 переглядають всі дуги, що належать множині M та мають позначку « \rightarrow ». З цих дуг вибирають дугу з найменшим потоком і значення потоку по цій дузі присвоюють k_2 .

Переходять до кроку 3.

Зміст практичного заняття та вихідні дані до його виконання

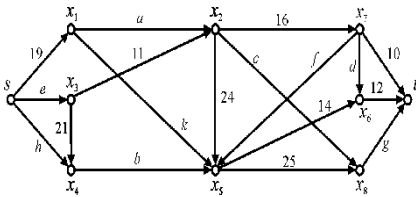
Знайти максимальний потік у транспортній мережі. Вихідні дані до виконання заняття наведені у таблиці 14.1 та на рисунку 14.1.

Таблиця 14.1 — Вихідні дані до виконання практичного заняття 14

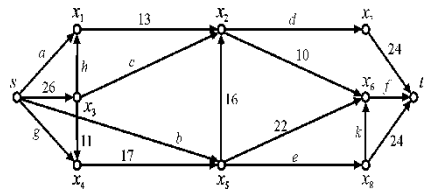
| Вариант | Схема | Пропускна спроможність дуг мережі | | | | | | | | |
|---------|----------|-----------------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> | <i>d</i> | <i>e</i> | <i>f</i> | <i>g</i> | <i>h</i> | <i>k</i> |
| 1 | <i>a</i> | 12 | 18 | 19 | 17 | 18 | 12 | 10 | 20 | 20 |
| 2 | <i>б</i> | 15 | 14 | 18 | 17 | 19 | 16 | 16 | 20 | 20 |
| 3 | <i>в</i> | 19 | 16 | 20 | 15 | 10 | 11 | 18 | 15 | 12 |
| 4 | <i>г</i> | 17 | 15 | 16 | 17 | 14 | 13 | 16 | 18 | 15 |
| 5 | <i>a</i> | 17 | 17 | 14 | 17 | 12 | 12 | 11 | 17 | 10 |
| 6 | <i>б</i> | 15 | 13 | 15 | 10 | 13 | 17 | 18 | 11 | 15 |
| 7 | <i>в</i> | 14 | 16 | 10 | 17 | 20 | 14 | 10 | 20 | 18 |
| 8 | <i>г</i> | 14 | 18 | 17 | 11 | 18 | 10 | 14 | 15 | 20 |
| 9 | <i>a</i> | 13 | 20 | 15 | 13 | 20 | 17 | 10 | 15 | 10 |
| 10 | <i>б</i> | 19 | 17 | 13 | 12 | 15 | 13 | 16 | 12 | 10 |
| 11 | <i>в</i> | 10 | 17 | 17 | 19 | 20 | 11 | 13 | 17 | 18 |
| 12 | <i>г</i> | 13 | 20 | 18 | 10 | 15 | 11 | 14 | 19 | 17 |
| 13 | <i>a</i> | 16 | 16 | 16 | 19 | 10 | 13 | 13 | 19 | 11 |
| 14 | <i>б</i> | 15 | 18 | 16 | 15 | 14 | 17 | 13 | 15 | 19 |
| 15 | <i>в</i> | 12 | 15 | 20 | 13 | 10 | 20 | 14 | 19 | 10 |
| 16 | <i>г</i> | 14 | 12 | 20 | 19 | 18 | 12 | 17 | 13 | 15 |
| 17 | <i>a</i> | 18 | 19 | 15 | 15 | 10 | 19 | 19 | 19 | 14 |

Продовження таблиці 14.1.

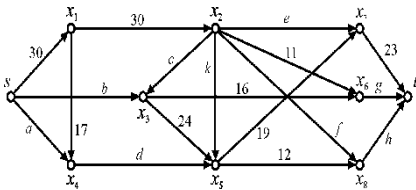
| Вариант | Схема | Пропускна спроможність дуг мережі | | | | | | | | |
|---------|----------|-----------------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> | <i>d</i> | <i>e</i> | <i>f</i> | <i>g</i> | <i>h</i> | <i>k</i> |
| 18 | <i>б</i> | 19 | 18 | 14 | 12 | 19 | 11 | 12 | 15 | 10 |
| 19 | <i>в</i> | 15 | 19 | 16 | 20 | 13 | 17 | 16 | 17 | 12 |
| 20 | <i>г</i> | 18 | 12 | 19 | 13 | 12 | 13 | 14 | 14 | 19 |
| 21 | <i>а</i> | 15 | 19 | 18 | 16 | 19 | 12 | 19 | 16 | 17 |
| 22 | <i>б</i> | 14 | 15 | 18 | 18 | 10 | 13 | 16 | 20 | 14 |
| 23 | <i>в</i> | 20 | 16 | 11 | 11 | 13 | 13 | 10 | 10 | 19 |
| 24 | <i>г</i> | 12 | 15 | 19 | 20 | 18 | 15 | 13 | 14 | 13 |
| 25 | <i>а</i> | 12 | 19 | 19 | 10 | 14 | 12 | 14 | 19 | 18 |



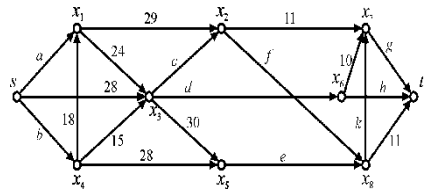
а)



б)



в)



г)

Рисунок 14.1 — Варіанти схем транспортної мережі

Приклад виконання завдання

Розглянемо приклад виконання завдання для графа транспортної мережі, наведеного на рисунку 14.2.

Потік у дузі будемо показувати підкресленим числом поряд з нею. Помітки вершин будемо записувати у дужках поряд з номером вершини. Помітки дуг «+» та «-» будемо записувати у кружечках поряд з відповідною дугою. Насичені дуги будемо позначати жирною лінією.

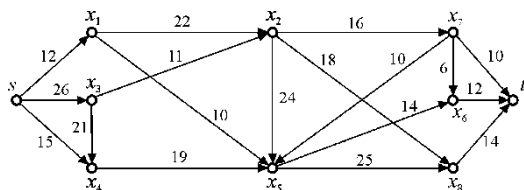


Рисунок 14.2 — Схема транспортної мережі (приклад)

Розв'язок.

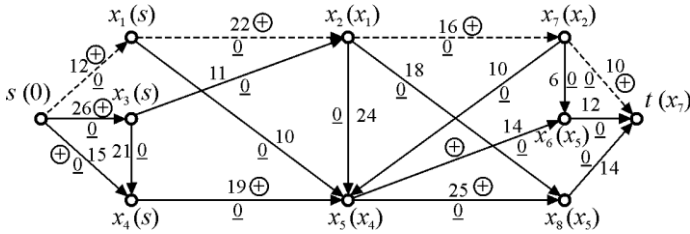
Крок 2. Задаємо у мережі нульовий потік (рисунок 14.3).

Крок 3. Приписуємо витоку s позначку 0. Розглядаємо вершини, суміжні з витокком. Вершина x_1 отримує помітку s , оскільки потік по дузі (s, x_1) менше ніж її пропускна спроможність. Дуга (s, x_1) отримує помітку «+». Аналогічним чином, помітку s отримують вершини x_3 та x_4 . Надалі, розглядаємо непомічені вершини, що суміжні вже поміченим вершинам x_1, x_3 та x_4 . Наприклад, вершину x_2 помічаємо, розглядаючи дугу (x_1, x_2) . Оскільки потік у цій дузі (він зараз дорівнює нулю) не перевищує її пропускної спроможності (22), вершина x_2 отримує помітку x_1 , а дуга (x_1, x_2) — помітку «+». Приписування поміток продовжуємо, поки це можливо (рисунок 14.3).

Крок 4. В результаті приписування поміток вершина-стік отримала помітку x_7 . Це означає, що потік не є максимальним і розв'язування слід продовжити. Переходимо до кроку 5.

Крок 5. Рухаючись в зворотному порядку від вершини-стоку до вершини-витоку згідно з помітками отримуємо послідовність вершин для збільшення потоку $L = (t, x_7, x_2, x_1, s)$ (показаний пунктирними лініями на рисунку 14.3). Для знаходження k — величини, на яку можна збільшити потік у мережі, знаходимо k_1 та k_2 . Оскільки у послідовності L відсутні дуги з помітками « \rightarrow », то покладемо $k_2 = +\infty$. Для знаходження k_1 розраховуємо для всіх дуг послідовності L різницю між пропускнуною спроможністю дуги та потоком у ній. В результаті отримаємо:

$$\begin{aligned} \text{дуга } (x_7, t): & \quad 10 - 0 = 10; \\ \text{дуга } (x_2, x_7): & \quad 16 - 0 = 16; \\ \text{дуга } (x_1, x_2): & \quad 22 - 0 = 22; \\ \text{дуга } (s, x_1): & \quad 12 - 0 = 12. \end{aligned}$$



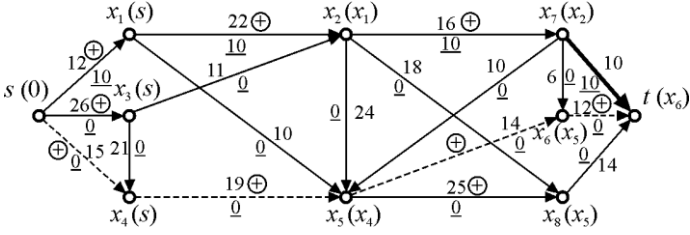
$$L = (t, x_7, x_2, x_1, s); \quad k_1 = 10; \quad k_2 = +\infty; \quad k = 10.$$

Рисунок 14.3 — Початкові потоки і помітки на першій ітерації

Найменше з отриманих значень дорівнює 10, тому $k_1 = 10$, а $k = \min\{10; +\infty\} = 10$.

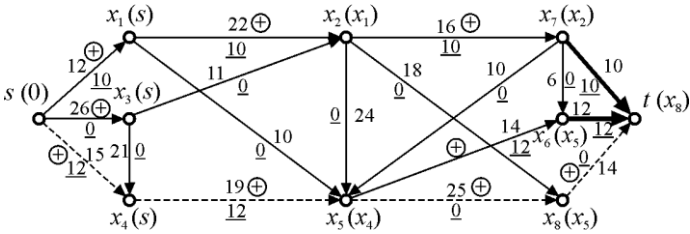
Збільшуємо потік у всіх дугах послідовності L на 10, оскільки всі вони мають позначку « \oplus ». В результаті дуга (x_7, t) стає насиченою (рисунок 14.4).

Подальший розрахунок згідно алгоритму показаний на рисунках 14.5 – 14.9.



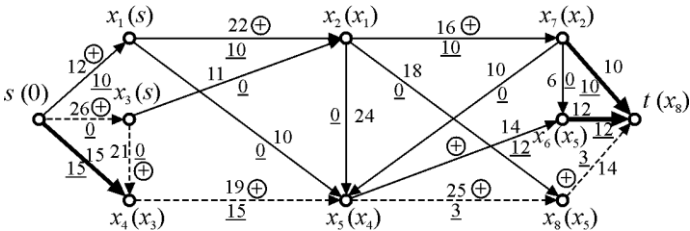
$$L = (t, x_6, x_5, x_4, s); \quad k_1 = 12; \quad k_2 = +\infty; \quad k = 12.$$

Рисунок 14.4 — Потіки після першої ітерації і помітки на другій ітерації



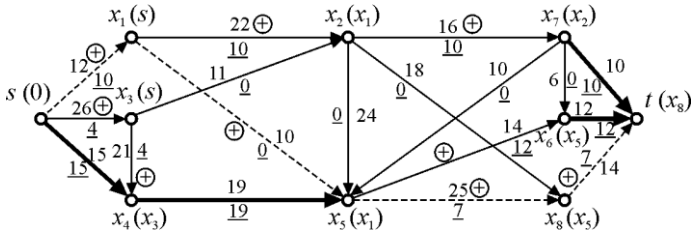
$$L = (t, x_8, x_5, x_4, s); \quad k_1 = 3; \quad k_2 = +\infty; \quad k = 3.$$

Рисунок 14.5 — Потіки після другої ітерації і помітки на третій ітерації



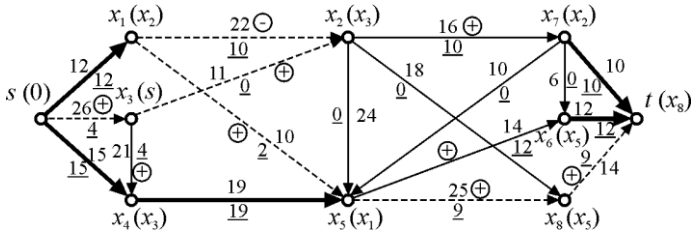
$$L = (t, x_8, x_5, x_4, x_3, s); \quad k_1 = 4; \quad k_2 = +\infty; \quad k = 4.$$

Рисунок 14.6 — Потіки після третьої ітерації і помітки на четвертій ітерації



$L = (t, x_8, x_5, x_1, s); k_1 = 2; k_2 = +\infty; k = 2.$

Рисунок 14.7 — Потоки після четвертої ітерації і помітки на п'ятій ітерації



$L = (t, x_8, x_5, x_1, x_2, x_3, s); k_1 = 5; k_2 = 12; k = 5.$

Рисунок 14.8 — Потоки після п'ятої ітерації і помітки на шостій ітерації

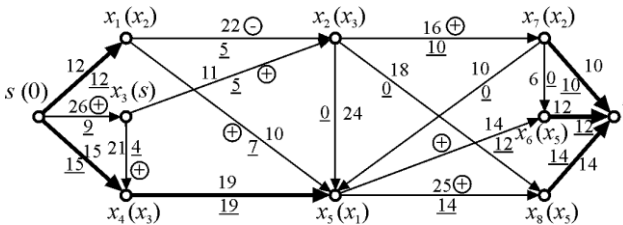


Рисунок 14.9 – Максимальний потік і помітки на сьомій ітерації

Виконуючи приписування поміток на сьомій ітерації бачимо, що вершина-стік t не отримала помітки. Це означає, що максимальний потік у мережі знайдено. Він дорівнює 36. Мінімальний розріз складають насичені дуги (x_7, t) , (x_6, t) та (x_5, t) , сума пропускних спроможностей яких дорівнює максимальному потоку.

Контрольні запитання

1. Дайте поняття наступним визначенням: *транспортна мережа, потік, насичена дуга, розріз*.
2. Сформулюйте задачу про максимальний потік у мережі.
3. Укажіть зміст теореми Форда-Фалкерсона.
4. Як виконується приписування поміток вершинам і дугам мережі? Які значення мають помітки і за яких умов вони їх набувають?
5. Яким чином збільшується потік у транспортній мережі і за якої умови знайдений потік є максимальним?