

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Запорізький національний технічний університет

**ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ ДО РОЗРАХУНКОВИХ
РОБІТ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ.**

**РОЗДІЛИ «ЛІНІЙНА АЛГЕБРА», «ВЕКТОРНА АЛГЕБРА»,
«АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ», «ПРЯМА ТА
ПЛОЩИНА У ПРОСТОРІ», «ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ»,
«ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ»**

**для студентів технічних спеціальностей
денної форми навчання**

2017

Індивідуальні завдання до розрахункових робіт з вищої математики. Розділи «Лінійна алгебра», «Векторна алгебра», «Аналітична геометрія на площині», «Пряма та площина у просторі», «Поверхні другого порядку», «Лінійні оператори» студентів технічних спеціальностей денної форми навчання./ Укл.: Засовенко А.В., Килимник І.М., Полякова Т.Г. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2017.- 82 с

Укладачі: Засовенко А.В., к.т.н., доцент,
Килимник І.М., к.т.н., доцент
Полякова Т.Г., асистент

Рецензент: Онуфрієнко Л.М., к.ф.-м.наук., доцент

Відповідальний за випуск: Килимник І.М., к.т.н., доцент

Затверджено на засіданні кафедри
вищої математики ЗНТУ
Протокол № 8 від 19.04.17 р.

Затверджено НМК машинобудівного
факультету ЗНТУ
Протокол № 7 від 17.05.17 р.

ЗМІСТ

	Стор.
1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА.	4
1.1 Аудиторні завдання	4
1.2 Індивідуальні завдання	8
2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА	26
2.1 Аудиторні завдання	26
2.2 Індивідуальні завдання	28
3. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ	45
3.1 Аудиторні завдання	45
3.2 Індивідуальні завдання	49
4. ПРЯМА ТА ПЛОЩИНА У ПРОСТОРИ	55
4.1 Аудиторні завдання	55
4.2 Індивідуальні завдання	57
5. ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ	60
5.1 Аудиторні завдання	60
5.2 Індивідуальні завдання	63
6. ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ	67
6.1 Аудиторні завдання	67
6.2 Індивідуальні завдання	69
7. ДОВІДКОВИЙ МАТЕРІАЛ «ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ»	78
ЛІТЕРАТУРА	82

1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

1.1 Аудиторні завдання

1.1.1 Розв'язати рівняння.

$$1) \begin{vmatrix} x+2 & 7 & 3 \\ x & x-1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{Відповідь: } \{0; 2\}.$$

$$2) \begin{vmatrix} 4 & x & 2 \\ x-2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{Відповідь: } \{6; -1\}.$$

1.1.2 Розв'язати нерівності.

$$1) \begin{vmatrix} x-2 & 4 & 3 \\ 0 & x+4 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} < 0 \quad \text{Відповідь: } x \in (-5; 2).$$

$$2) \begin{vmatrix} x-11 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & x-7 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} > 0 \quad \text{Відповідь: } x \in (4; 5).$$

1.1.3 Обчислити визначники 4-го порядку:

а) розклавши по елементам 1-го рядка;

б) використавши властивості визначників.

$$1) \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 3 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{Відповідь: } 30.$$

$$2) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{Відповідь: } -20$$

$$3) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{Відповідь: } 0.$$

$$4) \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} \quad \text{Відповідь: } 48.$$

1.1.4 Розв'язати системи лінійних неоднорідних рівнянь: а) за правилом Крамера; б) матричним способом; в) методом Гауса.

$$1) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 10 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases} \quad \text{Відповідь: } \{(3; -1; 0)\}$$

$$2) \begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 3z = 16 \\ 5y - z = 10 \end{cases} \quad \text{Відповідь: } \{(1; 3; 5)\}$$

$$3) \begin{cases} x + 2y - 4z = 1 \\ 2x + y - 5z = -1 \\ x - y - z = -2 \end{cases} \quad \text{Відповідь: } \begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = z + 1 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 2x - y + z = -2 \\ x + 2y + 3z = -1 \\ x - 3y - 2z = 3 \end{cases} \quad \text{Відповідь: } \emptyset.$$

1.1.5 Розв'язати системи лінійних однорідних рівнянь.

$$1) \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases} \quad \text{Відповідь: } \{(0;0;0)\}$$

$$2) \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + 4y + 2z = 0 \\ 3x + 7y + 3z = 0 \end{cases} \quad \text{Відповідь: } \begin{cases} x = 2t, \\ y = -3t, \\ z = 5t, \end{cases} \text{ де } t \in R$$

$$3) \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{Відповідь: } \begin{cases} x_1 = t, \\ x_2 = t, \\ x_3 = -t, \end{cases} \text{ де } t \in R$$

1.1.6 Виконати дії над матрицями.

$$1) (A - 2F) \cdot P \quad \text{Відповідь: } \begin{pmatrix} -13 & 21 & 20 \\ 5 & -19 & -24 \end{pmatrix}$$

$$2) S^T \cdot C - 2E \quad \text{Відповідь: } \begin{pmatrix} -1 & 2 & 13 & 3 \\ 6 & 9 & 11 & 5 \\ 4 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & -7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1.1.7 Розв'язати матричні рівняння.

$$1) \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{Відповідь: } X = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1,5 & -6 \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{Відповідь: } X = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1,3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$3) Y \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{Відповідь: } Y = \begin{pmatrix} -4 & 2,5 \\ 5 & -2,5 \end{pmatrix}$$

1.1.8 Дослідити систему лінійних неоднорідних рівнянь за теоремою Кронекера-Капеллі, знайти всі розв'язки системи.

$$1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1 \end{cases} \quad \text{Відповідь: } \begin{cases} x_1 = 2x_3 - 1 \\ x_2 = x_3 + 1 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \quad \text{Відповідь: } \begin{cases} x_1 = -1 + x_3 + x_4 \\ x_2 = 3 - x_3 - x_4 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{Відповідь: } \begin{cases} x_1 = 14t \\ x_2 = 21t \\ x_3 = x_4 = t \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1 \end{cases} \quad \text{Відповідь: } \begin{cases} x_1 = 10 - 10t \\ x_2 = t \\ x_3 = 15 - 16t \\ x_4 = 4 - 5t \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{Відповідь: } \begin{cases} x_1 = 8x_3 - 7x_4 \\ x_2 = 5x_4 - 6x_3 \end{cases}$$

1.2 Індивідуальні завдання

1.2.1 Розв'язати рівняння.

$$1. \begin{vmatrix} x & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 7 & x & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad 2. \begin{vmatrix} 5 & -1 & x \\ 12 & 1 & 3 \\ 7 & x & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad 3. \begin{vmatrix} 0 & x & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ x & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$4. \begin{vmatrix} x & -3 & 6 \\ 3 & 1 & x \\ 5 & -2 & 8 \end{vmatrix} = 0 \quad 5. \begin{vmatrix} 5 & -x & 8 \\ x & -3 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad 6. \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & x \\ 7 & x & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$7. \begin{vmatrix} 7 & x & -1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & x \end{vmatrix} = 0 \quad 8. \begin{vmatrix} 12 & x & 3 \\ 7 & 2 & x \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad 9. \begin{vmatrix} 2 & x & 3 \\ 5 & 2 & x \\ 7 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$10. \begin{vmatrix} 4 & x & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & x \end{vmatrix} = 0 \quad 11. \begin{vmatrix} -4 & -2 & 3 \\ 5 & x & -2 \\ x & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad 12. \begin{vmatrix} x & -3 & -2 \\ 4 & -2 & 2 \\ -5 & x & -4 \end{vmatrix} = 0$$

$$13. \begin{vmatrix} 1 & x & 5 \\ x & 3 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$14. \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ x & -2 & 2 \\ -5 & 1 & -x \end{vmatrix} = 0$$

$$15. \begin{vmatrix} 6 & 2 & -3 \\ x & 3 & 1 \\ 8 & 5 & -x \end{vmatrix} = 0$$

$$16. \begin{vmatrix} x & 2 & 7 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & x \end{vmatrix} = 0$$

$$17. \begin{vmatrix} 0 & x & 4 \\ x & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$18. \begin{vmatrix} -2 & 3 & -4 \\ x & -2 & 5 \\ -1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$$

$$19. \begin{vmatrix} 1 & -3 & x \\ 4 & x & 2 \\ -5 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

$$20. \begin{vmatrix} -1 & 7 & 2 \\ 3 & -x & -1 \\ x & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$21. \begin{vmatrix} 4 & x & 3 \\ x & 5 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$22. \begin{vmatrix} 7 & -x & -1 \\ x & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$23. \begin{vmatrix} 4 & x & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & -4 & x \end{vmatrix} = 0$$

$$24. \begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & -x & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$25. \begin{vmatrix} x & -2 & 5 \\ -2 & 3 & -4 \\ -1 & x & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$26. \begin{vmatrix} 3 & x & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ x & -4 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$27. \begin{vmatrix} x & 5 & 1 \\ 3 & -4 & x \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$28. \begin{vmatrix} -2 & x & -3 \\ 5 & 1 & x \\ 7 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$29. \begin{vmatrix} x & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & x \end{vmatrix} = 0$$

$$30. \begin{vmatrix} 4 & 1 & x \\ 1 & 5 & 2 \\ x & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

1.2.2 Розв'язати нерівність.

$$1. \begin{vmatrix} x+3 & 1 & 2 \\ 2 & x-1 & 2 \\ 7 & 0 & 7 \end{vmatrix} > 0$$

$$2. \begin{vmatrix} x+4 & 4 & -2 \\ 14 & x+5 & -7 \\ -4 & -2 & 2 \end{vmatrix} > 0$$

$$3. \quad \begin{vmatrix} x-2 & 5 & 1 \\ 4 & x+5 & -4 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} > 0$$

$$4. \quad \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & x-2 & 5 \\ -3 & 2 & x+3 \end{vmatrix} < 0$$

$$5. \quad \begin{vmatrix} x+7 & 4 & -3 \\ 5 & x-1 & -5 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} > 0$$

$$6. \quad \begin{vmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 5 & x+4 & 3 \\ 5 & -1 & x-3 \end{vmatrix} < 0$$

$$7. \quad \begin{vmatrix} x+4 & 4 & 3 \\ 2 & x+3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} > 0$$

$$8. \quad \begin{vmatrix} x+5 & 4 & 1 \\ 3 & x-1 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} < 0$$

$$9. \quad \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 0 & x+4 & 8 \\ -2 & 3 & x-5 \end{vmatrix} > 0$$

$$10. \quad \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 4 & x+5 & 2 \\ 8 & 2 & x+7 \end{vmatrix} < 0$$

$$11. \quad \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & x-3 & 7 \\ 5 & 2 & x+4 \end{vmatrix} > 0$$

$$12. \quad \begin{vmatrix} x+2 & 7 & 1 \\ 3 & x-3 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \end{vmatrix} < 0$$

$$13. \quad \begin{vmatrix} x+6 & 7 & 2 \\ 3 & x-1 & 3 \\ -5 & 0 & -5 \end{vmatrix} > 0$$

$$14. \quad \begin{vmatrix} x-14 & 2 & 3 \\ 3 & x-7 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} < 0$$

$$15. \quad \begin{vmatrix} 7 & 1 & 5 \\ 7 & x+8 & 3 \\ 7 & 1 & x+3 \end{vmatrix} > 0$$

$$16. \quad \begin{vmatrix} x+3 & 5 & 1 \\ 4 & x-1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} < 0$$

$$17. \begin{vmatrix} x+2 & 7 & 3 \\ -4 & x-3 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} > 0$$

$$18. \begin{vmatrix} 5 & -4 & 1 \\ 0 & x+7 & 7 \\ -5 & 4 & x-1 \end{vmatrix} < 0$$

$$19. \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & x+5 & 5 \\ 9 & 6 & x-1 \end{vmatrix} > 0$$

$$20. \begin{vmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 0 & x+8 & 4 \\ 7 & 5 & x-2 \end{vmatrix} < 0$$

$$21. \begin{vmatrix} x+3 & 5 & 2 \\ -2 & x-2 & -1 \\ 6 & 3 & 3 \end{vmatrix} > 0$$

$$22. \begin{vmatrix} x-4 & 5 & 1 \\ 3 & x+5 & 3 \\ 7 & 0 & 7 \end{vmatrix} < 0$$

$$23. \begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 4 & x+3 & 1 \\ -8 & 2 & x+5 \end{vmatrix} > 0$$

$$24. \begin{vmatrix} x-5 & 7 & 5 \\ 8 & x+3 & 8 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} < 0$$

$$25. \begin{vmatrix} 9 & 7 & 1 \\ 0 & x-1 & 8 \\ 9 & 7 & x+5 \end{vmatrix} > 0$$

$$26. \begin{vmatrix} x-10 & 2 & 9 \\ -1 & x+3 & 1 \\ 5 & -5 & -5 \end{vmatrix} < 0$$

$$27. \begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ -3 & x+1 & 9 \\ 6 & 4 & x+16 \end{vmatrix} > 0$$

$$28. \begin{vmatrix} x+7 & 4 & 1 \\ 2 & x-1 & -2 \\ 9 & 0 & -9 \end{vmatrix} < 0$$

$$29. \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 0 & x+8 & 7 \\ 6 & -2 & x-9 \end{vmatrix} > 0$$

$$30. \begin{vmatrix} x+8 & 5 & 2 \\ 2 & x-3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} < 0$$

1.2.3 Обчислити визначник 4-го порядку: а) розклавши по елементам 1-го рядка; б) використавши властивості визначників.

$$1. \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} \quad 2. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ -3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad 3. \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$4. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 5 & 6 \\ -3 & -5 & 1 & 7 \\ -4 & -6 & -7 & 1 \end{vmatrix} \quad 5. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad 6. \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$7. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix} \quad 8. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & 4 \end{vmatrix} \quad 9. \begin{vmatrix} -1 & 4 & 4 & 4 \\ -4 & 0 & 5 & 4 \\ -2 & -2 & 3 & 2 \\ -4 & -4 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$10. \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} \quad 11. \begin{vmatrix} 6 & 4 & 0 & 7 \\ 3 & 4 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} \quad 12. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$13. \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad 14. \begin{vmatrix} 8 & 5 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -5 & -3 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} \quad 15. \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 & 3 \\ 7 & 3 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$16. \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$17. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$18. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$19. \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$20. \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & -5 & -10 & -6 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

$$21. \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$22. \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 12 \\ 3 & 1 & 2 & 14 \\ 0 & 2 & 3 & 20 \\ 1 & 3 & 0 & 14 \end{vmatrix}$$

$$23. \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$24. \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 6 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$25. \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$26. \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 4 \\ -2 & -1 & 6 & 6 \\ 8 & 5 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

$$27. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$28. \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$29. \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 3 & 2 \\ -4 & -2 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$30. \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 3 & 7 & 6 & 5 \\ 4 & 2 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$

1.2.4 Розв'язати систему лінійних неоднорідних рівнянь: а) за правилом Крамера; б) матричним способом; в) методом Гауса.

$$1. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4 \end{cases} \quad 4. \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = -4 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 11 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -11 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4 \end{cases} \quad 6. \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1 \\ -x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -4 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ -x_1 + x_3 = -1 \end{cases} \quad 8. \begin{cases} 6x_1 + x_2 - 5x_3 = -17 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 - 3x_3 = -4 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -17 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \quad 10. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -1 \\ 3x_1 - 2x_2 = 8 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases} \quad 12. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -5 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -4 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 16 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2 \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -2 \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -3 \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4 \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = -3 \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 = 2 \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases}$$

1.2.5 Розв'язати системи лінійних однорідних рівнянь.

$$1. a) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 4x_1 - 11x_2 + 10x_3 = 0 \end{cases}$$

$$2. a) \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$3. a) \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$4. a) \begin{cases} 4x_1 - x_2 + 10x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

$$5. \text{ .a) } \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$6. \text{ .a) } \begin{cases} 3x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$7. \text{ .a) } \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

$$8. \text{ .a) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$9. \text{ .a) } \begin{cases} 5x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 7x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$10. \text{ .a) } \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ 7x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$11. \text{ .a) } \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$12. \text{ a) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$13. \text{ a) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - 9x_3 = 0 \end{cases}$$

$$14. \text{ a) } \begin{cases} 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 8x_1 - x_2 + 7x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$15. \text{ a) } \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$16. \text{ a) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$17. \text{ a) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$18. \text{ a) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 5x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$19. \text{ a) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$20. \text{ a) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$21. \text{ a) } \begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0 \\ 5x_1 - 8x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 7x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases}$$

$$22. \text{ a) } \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$23. \text{ a) } \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$24. \text{ a) } \begin{cases} 7x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 7x_1 - 6x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

$$25. \text{ a) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 7x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

$$26. \text{ а) } \begin{cases} 7x_1 - 6x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 - 8x_2 + 7x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$27. \text{ а) } \begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - 5x_3 = 0 \\ 7x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$28. \text{ а) } \begin{cases} 6x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 5x_1 + x_2 - 6x_3 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$29. \text{ а) } \begin{cases} 8x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \\ 7x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ 5x_1 - 4x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$30. \text{ а) } \begin{cases} x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

1.2.6 Виконати дії над матрицями.

$$1. AB + 2N^T. \quad 2. BC + 2E \quad 3. A \cdot (B + 3C^T).$$

$$4. C \cdot A^T + 3N \quad 5. A \cdot (2B - C^T). \quad 6. C \cdot B - 5E.$$

$$7. A \cdot (3C^T - B) \quad 8. A \cdot C^T - N^T. \quad 9. A \cdot (2B + C^T)$$

10. $B^T \cdot A^T + N$

11. $D^T M^T - 4E$

12. $D \cdot M + 4E$

13. $F \cdot M^T - N^T$

14. $F \cdot (M^T + 4D)$

15. $M \cdot D + 5E$

16. $F \cdot (M^T - 2D)$

17. $M \cdot F^T + 3N$

18. $F \cdot D + 2N^T$

19. $D^T M^T + 3E$

20. $F \cdot (3D - M^T)$

21. $H \cdot P + 3N^T$

22. $S \cdot P + 3E$

23. $H \cdot (P - 2S^T)$

24. $S \cdot H^T + 2N$

25. $H \cdot (3P - S^T)$

26. $S \cdot P - 3E$

27. $H \cdot (2S^T - P)$

28. $H \cdot S^T - N^T$

29. $H \cdot (3P - S^T)$

30. $P^T \cdot H^T - N$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ -3 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$S = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2.7 Розв'язати матричне рівняння.

1.
$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

2.
$$Y \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

3.
$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

4.
$$Y \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

5.
$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

6.
$$Y \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

7.
$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

8.
$$Y \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

9.
$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

10.
$$Y \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

11.
$$\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

12.
$$Y \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

13.
$$\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

14.
$$Y \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

15.
$$\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

16.
$$Y \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$

17.
$$\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

18.
$$Y \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

19.
$$\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

20.
$$Y \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$21. \quad \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -8 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$22. \quad Y \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$23. \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$24. \quad Y \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$25. \quad \begin{pmatrix} -8 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$26. \quad Y \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$27. \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$28. \quad Y \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$29. \quad \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$30. \quad Y \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

1.2.8 Дослідити систему лінійних неоднорідних рівнянь за теоремою Кронекера-Капеллі, знайти всі розв'язки системи.

$$1. \quad \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_4 = 2 \\ x_1 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

$$2. \quad \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_4 = -2 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 2 \\ 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -2 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$3. \quad \begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 2 \\ -2x_1 + x_3 + 2x_4 = -3 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -1 \\ x_2 - x_3 + 3x_4 = -4 \end{cases}$$

$$4. \quad \begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -4x_1 + 7x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 4 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_4 = -1 \\ x_1 + x_3 + 4x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ -2x_1 + 3x_3 + x_4 = -1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_4 = -1 \\ x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 + x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x_2 - x_3 + 3x_4 = -4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = -7 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 5 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_4 = -2 \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_4 = 1 \\ 7x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} x_2 - x_3 + 3x_4 = -4 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_4 = -5 \\ 2x_1 + x_3 + 4x_4 = -1 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ 4x_1 + 7x_3 + 7x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -1 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ -x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 5 \\ 3x_1 + 3x_3 - 2x_4 = 4 \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = -1 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 3 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 = 1 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 3 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 - 4x_2 - 2x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} -x_1 + 4x_2 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 1 \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1 \\ -x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} -2x_1 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ -4x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \\ x_2 - x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 2 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_4 = -1 \\ -5x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - 2x_4 = 1 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 5 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 3 \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -4 \\ -4x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 = -3 \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} 4x_1 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ -7x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 4 \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 5 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \\ -4x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 1 \\ -4x_1 + 4x_2 - 9x_3 + 10x_4 = 11 \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = -2 \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 2 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ 9x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 3 \\ -x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_4 = 4 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ -5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_3 - 3x_4 = -1 \end{cases} \quad 30. \begin{cases} -x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -2 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = -1 \\ 5x_1 - 6x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = -3 \end{cases}$$

2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

2.1 Аудиторні завдання

2.1.1 Задані т. $A(0, -1, 4)$, т. $B(0, -1, 4)$ та вектор $\vec{a} = (3, -2, 1)$.

Знайти: а) координати вектора $\vec{AB}$; б) перевірити колінеарність векторів $\vec{AB}$ і $\vec{a}$; в) порівняти довжини векторів $\vec{AB}$ і $\vec{a}$; г) порівняти напрямки векторів $\vec{AB}$ і $\vec{a}$ у випадку їх колінеарності.

Відповідь: а) $\vec{AB} = (-6, 4, -2)$; б), г) $\vec{AB} \uparrow \downarrow \vec{a}$; в) $|\vec{a}| = \sqrt{14}$, $|\vec{AB}| = 2\sqrt{14}$, $|\vec{AB}| = 2|\vec{a}|$.

2.1.2 Для векторів $\vec{a} = (1, -2, 4)$ і $\vec{b} = (0, 1, -3)$ знайти $|\vec{a} + \vec{b}|$, $|\vec{a} - \vec{b}|$, $|2\vec{a} - 3\vec{b}|$.

Відповідь: $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{3}$, $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{59}$, $|2\vec{a} - 3\vec{b}| = 3\sqrt{38}$.

2.1.3 Вектор $\vec{c} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$ розкладено за базисом $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Знайти розклад за цим базисом вектора $\vec{d}$, протилежно напрямленого до вектора $\vec{c}$, якщо відомий модуль вектора $|\vec{d}| = 12$.

Відповідь: $\vec{d} = (-8, -4, 8)$.

2.1.4 Дано чотири вектори $\vec{a} = (2, -2, 1)$, $\vec{b} = (0, -1, 2)$, $\vec{c} = (1, 4, 3)$, $\vec{m} = (7, 9, 9)$. Якщо вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис, знайти розв'язання вектора $\vec{m}$ за цим базисом.

Відповідь: $\vec{m} = 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$.

2.1.5 Знайти орт вектора $\vec{a} = (-2, 16, -8)$ та його напрямні косинуси.

Відповідь: $\vec{a}^0 = \left(-\frac{1}{9}, \frac{8}{9}, -\frac{4}{9}\right), \quad \cos \alpha = -\frac{1}{9}, \quad \cos \beta = \frac{8}{9},$
 $\cos \gamma = -\frac{4}{9}.$

2.1.6 Визначити при якому значенні α вектори $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \alpha\vec{k}$ та $\vec{b} = 2\vec{i} - 9\vec{j} + 6\vec{k}$ взаємно перпендикулярні.

Відповідь: $\alpha = -4.$

2.1.7 Знайти роботу, яку виконує сила $\vec{f} = (1, -2, 4)$, рухаючись прямолінійно із т. $A(1, -3, 2)$ в т. $B(-2, 4, 1)$.

Відповідь: $A = -21$ (од.роб).

2.1.8 Знайти вектор $\vec{m}$, якщо відомо, що він колінеарний до вектора $\vec{a} = (2, -1, 1)$ і скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{m} = 8$.

Відповідь: $\vec{m} = (3, -1, 1).$

2.1.9 Обчислити площу S паралелограма, побудованого на векторах $\vec{m} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ та $\vec{n} = \vec{a} - 2\vec{b}$. Знайти скалярний добуток $\vec{m} \cdot \vec{n}$.

Відомо, що $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 2$, $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{2}{3}\pi$.

Відповідь: $S = |\vec{m} \times \vec{n}| = 21$, $\vec{m} \cdot \vec{n} = -18 - \sqrt{3}.$

2.1.10 Знайти момент $\vec{M}$ сили $\vec{p} = (1, -2, 1)$ відносно точки $C(-1, 3, 1)$, якщо сила прикладена до точки $A(2, -1, 4)$.

Відповідь: $\vec{M} = (2, 0, -2).$

2.1.11 Задані координати вершин трикутника ABC : $A(1, 0, 0)$, $B(-1, 4, 6)$, $C(2, -4, -8)$. Знайти $S_{\triangle ABC}$ та внутрішній кут при вершині A .

Відповідь: $S_{\triangle ABC} = 3\sqrt{5}$ (кв.од.),

$\hat{A} = \arccos\left(-\frac{11}{3\sqrt{14}}\right) = \pi - \arccos\frac{11}{3\sqrt{14}}.$

2.1.12 З'ясувати чи знаходяться чотири точки: $A(-1, 2, 2)$, $B(-3, 4, 1)$, $C(2, -1, 1)$, $D(-2, 1, 0)$ на одній площині.

Відповідь: Ні, тому що $\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD} = 10 \neq 0$.

2.1.13 Обчислити об'єм тетраедра $ABCD$, якщо відомі координати вершин: $A(3, 3, -7)$, $B(3, 7, 1)$, $C(-1, 5, -2)$, $D(-5, 8, -4)$. З'ясувати, яку трійку: праву чи ліву утворюють вектори, на яких тетраedr побудований.

Відповідь: $V_{ABCD} = 24$ (куб.од.). Трійка векторів $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ – права, тому що $\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD} = 144 > 0$.

2.2 Індивідуальні завдання

2.2.1 Задані координати точок A , B та координати вектора $\vec{a}$.

Знайти: а) координати вектора $\overline{AB}$; б) перевірити колінеарність векторів $\overline{AB}$ і $\vec{a}$; в) порівняти довжини векторів $\overline{AB}$ і $\vec{a}$; г) порівняти напрямки векторів $\overline{AB}$ і $\vec{a}$ у випадку їх колінеарності.

- | | | | |
|-----|------------------------------|-------------------|-----------------|
| 1. | $\vec{a} = (-2, -6, 20)$, | $A(-3, -2, 6)$, | $B(-2, 1, -4)$ |
| 2. | $\vec{a} = (5, 17, -4)$, | $A(-2, 3, -5)$, | $B(8, 37, -13)$ |
| 3. | $\vec{a} = (-4, -9, 3)$, | $A(2, -2, 4)$, | $B(14, 25, -5)$ |
| 4. | $\vec{a} = (-24, -10, 10)$, | $A(3, 2, 1)$, | $B(15, 7, -4)$ |
| 5. | $\vec{a} = (15, -30, 6)$, | $A(6, 3, 7)$, | $B(1, 13, 5)$ |
| 6. | $\vec{a} = (10, -26, -8)$, | $A(-1, -2, -4)$, | $B(4, -15, -8)$ |
| 7. | $\vec{a} = (3, -2, -5)$, | $A(7, 2, 2)$, | $B(-2, 8, 17)$ |
| 8. | $\vec{a} = (-1, 9, -2)$, | $A(1, -5, -9)$, | $B(3, -23, -5)$ |
| 9. | $\vec{a} = (17, -4, 5)$, | $A(6, -5, -3)$, | $B(40, -13, 7)$ |
| 10. | $\vec{a} = (-9, 3, -4)$, | $A(3, 4, -6)$, | $B(30, -5, 6)$ |
| 11. | $\vec{a} = (-10, 10, -24)$, | $A(2, 3, -10)$, | $B(7, -2, 2)$ |
| 12. | $\vec{a} = (-30, 6, 15)$, | $A(-7, 1, -2)$, | $B(3, -1, -7)$ |
| 13. | $\vec{a} = (-26, -8, 10)$, | $A(6, 3, -2)$, | $B(-7, -1, 3)$ |

14.	$\bar{a}=(-2,-5, 3),$	$A(-1,-7, 8),$	$B (5, 8,-1)$
15.	$\bar{a}=(-9, 2, 1),$	$A(-2,-5, 5),$	$B (-20,-1, 7)$
16.	$\bar{a}=(-2,-6, 20),$	$A(4, 2, 0),$	$B (5, 5,-10)$
17.	$\bar{a}= (5,-1, 7),$	$A(-7, 5,-3),$	$B (3, 3, 11)$
18.	$\bar{a}=(-8, 9, 1),$	$A(1, 5,-2),$	$B (-23, 32, 1)$
19.	$\bar{a}= (3,-4, 2),$	$A(5, 8,-1),$	$B (-4, 20,-7)$
20.	$\bar{a}= (3,-5, 5),$	$A(-3, 5,-14),$	$B (3,-5,-4)$
21.	$\bar{a}= (10,-26,-8),$	$A(-10, 9, 8),$	$B (-5,-4, 4)$
22.	$\bar{a}=(-9, 6, 15),$	$A(13,-1, 6),$	$B (16,-3, 1)$
23.	$\bar{a}=(-1, 9,-2),$	$A(5,-6,-1),$	$B (7,-24, 3)$
24.	$\bar{a}= (5, 17,-4),$	$A(-3, 6,-5),$	$B (7, 40,-13)$
25.	$\bar{a}=(-4,-9, 3),$	$A(-6, 3, 4),$	$B (6, 30,-5)$
26.	$\bar{a}=(-24,-10, 10),$	$A(-10, 2, 3),$	$B (2, 7,-2)$
27.	$\bar{a}= (15,-30, 6),$	$A(-2,-7, 1),$	$B (-7, 3,-1)$
28.	$\bar{a}= (10,-26,-8),$	$A(-2, 6, 3),$	$B (3,-7,-1)$
29.	$\bar{a}= (3,-2,-5),$	$A(8,-1,-7),$	$B (-1, 5, 8)$
30.	$\bar{a}= (1,-9, 2),$	$A(5,-2,-5),$	$B (7,-20,-1).$

2.2.2 Для векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ знайти $|\bar{a} + \bar{b}|$, $|\bar{a} - \bar{b}|$, $|2\bar{a} - 3\bar{b}|$.

1.	$\bar{a}= (1,-2,0),$	$\bar{b}= (2,-4,-2)$
2.	$\bar{a}= (9,-6,-11),$	$\bar{b}= (-17, 7, 15)$
3.	$\bar{a}= (-3, 5, -8),$	$\bar{b}= (-1, 1, -4)$
4.	$\bar{a}= (1, -3, 5),$	$\bar{b}= (-11, 13, -10)$

- | | | |
|-----|---------------------------|----------------------------|
| 5. | $\bar{a} = (-4, 5, 1),$ | $\bar{b} = (-5, 13, 5)$ |
| 6. | $\bar{a} = (6, -2, -2),$ | $\bar{b} = (-9, 8, 4)$ |
| 7. | $\bar{a} = (4, 0, 8),$ | $\bar{b} = (8, -8, 16)$ |
| 8. | $\bar{a} = (1, 3, -7),$ | $\bar{b} = (-2, -1, 5)$ |
| 9. | $\bar{a} = (0, 10, -20),$ | $\bar{b} = (-10, 5, -10)$ |
| 10. | $\bar{a} = (4, 0, -1),$ | $\bar{b} = (-4, 4, -2)$ |
| 11. | $\bar{a} = (-2, 0, 1),$ | $\bar{b} = (-4, -2, 2)$ |
| 12. | $\bar{a} = (-6, -11, 9),$ | $\bar{b} = (7, 15, -17)$ |
| 13. | $\bar{a} = (5, -8, -3),$ | $\bar{b} = (1, -4, -1)$ |
| 14. | $\bar{a} = (-3, 5, 1),$ | $\bar{b} = (13, -10, -11)$ |
| 15. | $\bar{a} = (5, 1, -4),$ | $\bar{b} = (13, 5, -5)$ |
| 16. | $\bar{a} = (-2, -2, 6),$ | $\bar{b} = (8, 4, -9)$ |
| 17. | $\bar{a} = (0, 8, 4),$ | $\bar{b} = (-8, 16, 8)$ |
| 18. | $\bar{a} = (3, -7, 1),$ | $\bar{b} = (-1, 5, -2)$ |
| 19. | $\bar{a} = (10, -20, 0),$ | $\bar{b} = (5, -10, -10)$ |
| 20. | $\bar{a} = (0, -1, 4),$ | $\bar{b} = (4, -2, -4)$ |
| 21. | $\bar{a} = (0, 1, -2),$ | $\bar{b} = (-2, 2, -4)$ |
| 22. | $\bar{a} = (-11, 9, -6),$ | $\bar{b} = (15, -17, 7)$ |
| 23. | $\bar{a} = (-8, -3, 5),$ | $\bar{b} = (-4, -1, 1)$ |
| 24. | $\bar{a} = (5, 1, -3),$ | $\bar{b} = (-10, -11, 13)$ |
| 25. | $\bar{a} = (1, -4, 5),$ | $\bar{b} = (5, -5, 13)$ |
| 26. | $\bar{a} = (-2, 6, -2),$ | $\bar{b} = (4, -9, 8)$ |

$$27. \quad \vec{a} = (8, 4, 0), \quad \vec{b} = (16, 8, -8)$$

$$28. \quad \vec{a} = (-7, 1, 3), \quad \vec{b} = (5, -2, -1)$$

$$29. \quad \vec{a} = (-20, 0, 10), \quad \vec{b} = (-10, -10, 5)$$

$$30. \quad \vec{a} = (-1, 4, 0), \quad \vec{b} = (-2, -4, 4)$$

2.2.3 Вектор $\vec{c}$ розкладено за базисом $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Знайти розклад за цим базисом вектора $\vec{d}$, протилежно напрямленого до вектора $\vec{c}$, якщо відомий модуль вектора $\vec{d}$.

$$1. \quad \vec{c} = (-9; 3; -4,5), \quad |\vec{d}| = 21 \quad 2. \quad \vec{c} = (1; -1,5; 3), \quad |\vec{d}| = 35$$

$$3. \quad \vec{c} = (2; -4; -4), \quad |\vec{d}| = 3 \quad 4. \quad \vec{c} = (-2; 1; 2), \quad |\vec{d}| = 39$$

$$5. \quad \vec{c} = (5\frac{1}{3}; -5; 4), \quad |\vec{d}| = 25 \quad 6. \quad \vec{c} = (1; 2; -2), \quad |\vec{d}| = 6$$

$$7. \quad \vec{c} = (-1; 2; 2/3), \quad |\vec{d}| = 7 \quad 8. \quad \vec{c} = (1,2; 3; -2), \quad |\vec{d}| = 19$$

$$9. \quad \vec{c} = (16; -2; -8), \quad |\vec{d}| = 9 \quad 10. \quad \vec{c} = (2, 0; -1,5), \quad |\vec{d}| = 10$$

$$11. \quad \vec{c} = (-1; -1,5; 3), \quad |\vec{d}| = 21 \quad 12. \quad \vec{c} = (-2; -4; 4), \quad |\vec{d}| = 12$$

$$13. \quad \vec{c} = (-9; -12; 36), \quad |\vec{d}| = 13 \quad 14. \quad \vec{c} = (2; 3; -6), \quad |\vec{d}| = 14$$

$$15. \quad \vec{c} = (2; 2; -1), \quad |\vec{d}| = 15 \quad 16. \quad \vec{c} = (10; 3\frac{1}{3}; -5), \quad |\vec{d}| = 35$$

$$17. \quad \vec{c} = (3; -1; 1,5), \quad |\vec{d}| = 7 \quad 18. \quad \vec{c} = (1; -3; 1,5), \quad |\vec{d}| = 28$$

$$19. \quad \vec{c} = (-30; 20; 12), \quad |\vec{d}| = 19 \quad 20. \quad \vec{c} = (-7,5; 5; 15), \quad |\vec{d}| = 35$$

21. $\bar{c} = (3; -6, -2)$, $|\bar{d}| = 21$ 22. $\bar{c} = (-2, -2; 1)$, $|\bar{d}| = 12$
23. $\bar{c} = (5; 2,5; -5)$, $|\bar{d}| = 15$ 24. $\bar{c} = (2; 4; -1\frac{1}{3})$, $|\bar{d}| = 14$
25. $\bar{c} = (-3; -4; 3\frac{3}{4})$, $|\bar{d}| = 25$ 26. $\bar{c} = (-3; 6; -2)$, $|\bar{d}| = 35$
27. $\bar{c} = (1; 1; -0,5)$, $|\bar{d}| = 6$ 28. $\bar{c} = (-3; 2; -6)$, $|\bar{d}| = 28$
29. $\bar{c} = (5; -3; 7,5)$, $|\bar{d}| = 19$ $\bar{c} = (0; -28; 21)$, $|\bar{d}| = 5$

2.2.4 Дано чотири вектори: $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{m}$. Якщо вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ утворюють базис, знайти розвинення вектора $\bar{m}$ за цим базисом.

1. $\bar{a} = (2, 3, 1)$ $\bar{b} = (-3, 4, -5)$ $\bar{c} = (6, -1, 2)$ $\bar{m} = (17, -3, 10)$
2. $\bar{a} = (1, 2, 3)$ $\bar{b} = (1, -1, 1)$ $\bar{c} = (-3, 1, 2)$ $\bar{m} = (6, 5, 7)$
3. $\bar{a} = (1, -1, 4)$ $\bar{b} = (4, 5, -6)$ $\bar{c} = (-2, 3, -1)$ $\bar{m} = (8, -1, -4)$
4. $\bar{a} = (7, -1, 1)$ $\bar{b} = (2, 3, -4)$ $\bar{c} = (4, 2, -1)$ $\bar{m} = (-4, 5, -1)$
5. $\bar{a} = (2, 4, 1)$ $\bar{b} = (-2, 3, -4)$ $\bar{c} = (1, -1, 2)$ $\bar{m} = (-6, 3, -9)$
6. $\bar{a} = (2, 3, 3)$ $\bar{b} = (-3, -2, -4)$ $\bar{c} = (-2, 1, -1)$ $\bar{m} = (4, 11, 7)$
7. $\bar{a} = (1, 1, -1)$ $\bar{b} = (3, 4, 5)$ $\bar{c} = (1, 2, 3)$ $\bar{m} = (-2, -3, -10)$
8. $\bar{a} = (3, -1, 5)$ $\bar{b} = (-2, 2, -3)$ $\bar{c} = (-2, 3, -2)$ $\bar{m} = (2, 1, 3)$
9. $\bar{a} = (3, 5, 1)$ $\bar{b} = (2, -4, -3)$ $\bar{c} = (5, -3, 1)$ $\bar{m} = (-3, -9, 2)$
10. $\bar{a} = (1, 5, 3)$ $\bar{b} = (2, 1, 1)$ $\bar{c} = (3, -2, 1)$ $\bar{m} = (7, -7, 2)$
11. $\bar{a} = (3, 2, 2)$ $\bar{b} = (2, 3, 1)$ $\bar{c} = (1, 1, 3)$ $\bar{m} = (5, 1, 11)$
12. $\bar{a} = (1, 2, 3)$ $\bar{b} = (-2, 3, -2)$ $\bar{c} = (3, -4, -5)$ $\bar{m} = (6, 20, 6)$

- | | | | | |
|-----|-------------------------|-------------------------|--------------------------|----------------------------|
| 13. | $\bar{a} = (4, 2, 5)$ | $\bar{b} = (-3, 5, 6)$ | $\bar{c} = (2, -3, -2)$ | $\bar{m} = (9, 4, 18)$ |
| 14. | $\bar{a} = (1, 2, 4)$ | $\bar{b} = (1, -1, 1)$ | $\bar{c} = (2, 2, 4)$ | $\bar{m} = (-1, -4, -2)$ |
| 15. | $\bar{a} = (2, 3, 3)$ | $\bar{b} = (-1, 4, -2)$ | $\bar{c} = (-1, -2, 4)$ | $\bar{m} = (4, 11, 11)$ |
| 16. | $\bar{a} = (3, 2, 1)$ | $\bar{b} = (4, -1, 5)$ | $\bar{c} = (2, -3, 1)$ | $\bar{m} = (8, -9, -3)$ |
| 17. | $\bar{a} = (1, 8, 4)$ | $\bar{b} = (1, 3, 1)$ | $\bar{c} = (-1, -6, -3)$ | $\bar{m} = (1, 2, 3)$ |
| 18. | $\bar{a} = (1, 3, 3)$ | $\bar{b} = (-4, 1, -5)$ | $\bar{c} = (-2, 1, -6)$ | $\bar{m} = (0, 6, 7)$ |
| 19. | $\bar{a} = (7, 4, 2)$ | $\bar{b} = (-5, -9, 3)$ | $\bar{c} = (1, 11, 4)$ | $\bar{m} = (26, -25, -20)$ |
| 20. | $\bar{a} = (1, 5, 3)$ | $\bar{b} = (2, 1, -1)$ | $\bar{c} = (4, 2, 1)$ | $\bar{m} = (28, 5, 0)$ |
| 21. | $\bar{a} = (4, 6, 9)$ | $\bar{b} = (3, -4, 1)$ | $\bar{c} = (5, 1, 8)$ | $\bar{m} = (-9, 16, 2)$ |
| 22. | $\bar{a} = (-1, -4, 3)$ | $\bar{b} = (3, 1, -4)$ | $\bar{c} = (-2, 2, 5)$ | $\bar{m} = (-2, -17, 3)$ |
| 23. | $\bar{a} = (3, 1, 3)$ | $\bar{b} = (-1, 2, 2)$ | $\bar{c} = (5, 4, -1)$ | $\bar{m} = (2, 3, -22)$ |
| 24. | $\bar{a} = (4, 6, 2)$ | $\bar{b} = (3, -9, 1)$ | $\bar{c} = (8, 1, 8)$ | $\bar{m} = (3, 13, -7)$ |
| 25. | $\bar{a} = (4, 3, 1)$ | $\bar{b} = (3, 1, -2)$ | $\bar{c} = (1, 2, -1)$ | $\bar{m} = (0, 5, 3)$ |
| 26. | $\bar{a} = (-1, -4, 3)$ | $\bar{b} = (8, 3, -8)$ | $\bar{c} = (-2, 2, 5)$ | $\bar{m} = (-16, 15, 27)$ |
| 27. | $\bar{a} = (2, 7, 6)$ | $\bar{b} = (-1, 1, 4)$ | $\bar{c} = (-5, 4, -7)$ | $\bar{m} = (15, -4, 8)$ |
| 28. | $\bar{a} = (5, 2, -3)$ | $\bar{b} = (-3, 1, 5)$ | $\bar{c} = (4, -5, 1)$ | $\bar{m} = (10, 26, -13)$ |
| 29. | $\bar{a} = (-7, -2, 3)$ | $\bar{b} = (-3, 5, -4)$ | $\bar{c} = (1, 3, -5)$ | $\bar{m} = (1, 7, 2)$ |
| 30. | $\bar{a} = (3, -2, 8)$ | $\bar{b} = (-2, 4, -3)$ | $\bar{c} = (-1, 5, -2)$ | $\bar{m} = (8, 11, 20)$ |

2.2.5 Знайти орт вектора $\bar{a}$ та його напрямні косинуси.

- | | | | |
|----|-------------------------|----|--------------------------|
| 1. | $\bar{a} = (12, 9, -8)$ | 2. | $\bar{a} = (12, -8, 24)$ |
|----|-------------------------|----|--------------------------|

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| 3. $\vec{a} = (0, 4, -3)$ | 4. $\vec{a} = (3, 4, -12)$ |
| 5. $\vec{a} = (16, -8, 16)$ | 6. $\vec{a} = (-15, -10, 30)$ |
| 7. $\vec{a} = (15, 10, 6)$ | 8. $\vec{a} = (-18, 6, 9)$ |
| 9. $\vec{a} = (2, 9, -6)$ | 10. $\vec{a} = (26, -13, -26)$ |
| 11. $\vec{a} = (12, -16, 15)$ | 12. $\vec{a} = (10, -10, 5)$ |
| 13. $\vec{a} = (-12, 24, -3)$ | 14. $\vec{a} = (2, -8, 16)$ |
| 15. $\vec{a} = (-3, 18, 14)$ | 16. $\vec{a} = (8, 4, -8)$ |
| 17. $\vec{a} = (-30, 24, -32)$ | 18. $\vec{a} = (12, 30, -20)$ |
| 19. $\vec{a} = (4, -6, 12)$ | 20. $\vec{a} = (2, -4, 4)$ |
| 21. $\vec{a} = (-8, 0, 6)$ | 22. $\vec{a} = (12, -4, 18)$ |
| 23. $\vec{a} = (16, -18, 24)$ | 24. $\vec{a} = (28, -6, 36)$ |
| 25. $\vec{a} = (2, -2, 1)$ | 26. $\vec{a} = (1, 8, 4)$ |
| 27. $\vec{a} = (20, 0, 21)$ | 28. $\vec{a} = (12, -16, 0)$ |
| 29. $\vec{a} = (3, 6, -2)$ | 30. $\vec{a} = (24, -8, -6)$ |

2.2.6 Визначити при якому значенні α вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні.

- | | |
|--|--|
| 1. $\vec{a} = 7\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}$ | $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \alpha\vec{k}$ |
| 2. $\vec{a} = 3\vec{i} + 5\vec{j} + \alpha\vec{k}$ | $\vec{b} = 7\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$ |
| 3. $\vec{a} = -4\vec{i} - 3\vec{j} + 9\vec{k}$ | $\vec{b} = 6\vec{i} - 17\vec{j} + \alpha\vec{k}$ |
| 4. $\vec{a} = \alpha\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$ | $\vec{b} = 5\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ |
| 5. $\vec{a} = -2\vec{i} + \alpha\vec{j} + \vec{k}$ | $\vec{b} = -6\vec{i} + \vec{j} - 7\vec{k}$ |
| 6. $\vec{a} = 12\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}$ | $\vec{b} = 4\vec{i} + 9\vec{j} + \alpha\vec{k}$ |

- | | | |
|-----|--|--|
| 7. | $\bar{a} = -5\bar{i} - 3\bar{j} + 7\bar{k}$ | $\bar{b} = \alpha\bar{i} + 7\bar{j} - 2\bar{k}$ |
| 8. | $\bar{a} = -6\bar{i} + 5\bar{j} + \alpha\bar{k}$ | $\bar{b} = -16\bar{i} - 8\bar{j} - 7\bar{k}$ |
| 9. | $\bar{a} = -4\bar{i} + 5\bar{j} - 3\bar{k}$ | $\bar{b} = \alpha\bar{i} - 6\bar{j} + 2\bar{k}$ |
| 10. | $\bar{a} = \alpha\bar{i} + 2\bar{j} + 13\bar{k}$ | $\bar{b} = -2\bar{i} - 3\bar{j} + 2\bar{k}$ |
| 11. | $\bar{a} = -\bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}$ | $\bar{b} = 12\bar{i} - \alpha\bar{j} - 5\bar{k}$ |
| 12. | $\bar{a} = -7\bar{i} - 11\bar{j} + \bar{k}$ | $\bar{b} = -3\bar{i} + 3\bar{j} + \alpha\bar{k}$ |
| 13. | $\bar{a} = \alpha\bar{i} + 8\bar{j} - \bar{k}$ | $\bar{b} = 3\bar{i} + 5\bar{j} + \bar{k}$ |
| 14. | $\bar{a} = -5\bar{i} + \bar{j} - 7\bar{k}$ | $\bar{b} = -7\bar{i} + \alpha\bar{j} + 7\bar{k}$ |
| 15. | $\bar{a} = 15\bar{i} - 6\bar{j} + \bar{k}$ | $\bar{b} = -\bar{i} - 5\bar{j} + \alpha\bar{k}$ |
| 16. | $\bar{a} = 2\bar{i} - 3\bar{j} - \bar{k}$ | $\bar{b} = 7\bar{i} + 5\bar{j} - \alpha\bar{k}$ |
| 17. | $\bar{a} = 7\bar{i} - 5\bar{j} + 2\bar{k}$ | $\bar{b} = 3\bar{i} + 5\bar{j} + \alpha\bar{k}$ |
| 18. | $\bar{a} = 6\bar{i} + \alpha\bar{j} + 3\bar{k}$ | $\bar{b} = -4\bar{i} - 3\bar{j} + 9\bar{k}$ |
| 19. | $\bar{a} = -6\bar{i} + 2\bar{j} + \alpha\bar{k}$ | $\bar{b} = -2\bar{i} - 5\bar{j} + \bar{k}$ |
| 20. | $\bar{a} = 5\bar{i} + \bar{j} + \alpha\bar{k}$ | $\bar{b} = 4\bar{i} - 2\bar{j} + 6\bar{k}$ |
| 21. | $\bar{a} = 4\bar{i} + 9\bar{j} + 3\bar{k}$ | $\bar{b} = 12\bar{i} - 4\bar{j} + \alpha\bar{k}$ |
| 22. | $\bar{a} = -7\bar{i} + 7\bar{j} + \alpha\bar{k}$ | $\bar{b} = -5\bar{i} - 3\bar{j} + 7\bar{k}$ |
| 23. | $\bar{a} = 10\bar{i} - \bar{j} + 13\bar{k}$ | $\bar{b} = -4\bar{i} + \alpha\bar{j} + 3\bar{k}$ |
| 24. | $\bar{a} = -9\bar{i} - 6\bar{j} + 2\bar{k}$ | $\bar{b} = -4\bar{i} + 5\bar{j} + \alpha\bar{k}$ |
| 25. | $\bar{a} = 3\bar{i} + 2\bar{j} + 5\bar{k}$ | $\bar{b} = \alpha\bar{i} - 2\bar{j} + 8\bar{k}$ |

26. $\bar{a} = \alpha \bar{i} + 11\bar{j} - 5\bar{k}$ $\bar{b} = -\bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}$
27. $\bar{a} = -2\bar{i} + \alpha \bar{j} + \bar{k}$ $\bar{b} = -5\bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}$
28. $\bar{a} = -\bar{i} - 5\bar{j} - 15\bar{k}$ $\bar{b} = 15\bar{i} + \alpha \bar{j} + \bar{k}$
29. $\bar{a} = 4\bar{i} + 9\bar{j} + \alpha \bar{k}$ $\bar{b} = 12\bar{i} - 4\bar{j} + 2\bar{k}$
30. $\bar{a} = 16\bar{i} + \alpha \bar{j} + 7\bar{k}$ $\bar{b} = 6\bar{i} - 5\bar{j} - 8\bar{k}$

2.2.7 Знайти роботу, яку виконує сила $\bar{f}$, рухаючись прямолінійно із точки A в точку B .

1. $\bar{f} = (3, -2, 6)$, $A (2, -6, -1)$, $B (-3, -5, 2)$
2. $\bar{f} = (-2, 7, -1)$, $A (-4, 4, 3)$, $B (2, 5, -4)$
3. $\bar{f} = (5, -6, -1)$, $A (-3, 3, -2)$, $B (1, 5, 3)$
4. $\bar{f} = (-3, 7, -2)$, $A (-8, -1, 5)$, $B (-1, 2, 3)$
5. $\bar{f} = (8, -3, 7)$, $A (-2, -5, 7)$, $B (3, 2, 5)$
6. $\bar{f} = (-2, -3, 7)$, $A (-15, 8, 4)$, $B (-7, 3, 5)$
7. $\bar{f} = (1, -5, -2)$, $A (-10, -2, 2)$, $B (2, 1, -3)$
8. $\bar{f} = (4, 5, -1)$, $A (2, -1, -3)$, $B (-1, 2, -8)$
9. $\bar{f} = (7, 5, -4)$, $A (7, 5, -1)$, $B (5, 8, -3)$
10. $\bar{f} = (-2, 5, -3)$, $A (-8, 1, 3)$, $B (-1, 7, 5)$
11. $\bar{f} = (3, -4, 2)$, $A (-5, 2, 8)$, $B (2, 3, 5)$
12. $\bar{f} = (-3, 5, -2)$, $A (-5, -4, 12)$, $B (3, -6, -11)$
13. $\bar{f} = (-4, -3, 7)$, $A (2, 8, -3)$, $B (8, -9, -5)$
14. $\bar{f} = (3, 2, 13)$, $A (7, -6, 6)$, $B (5, -9, 8)$
15. $\bar{f} = (-7, -11, 5)$, $A (-8, 4, -3)$, $B (-5, 3, 2)$
16. $\bar{f} = (-12, 13, -2)$ $A (8, -7, -2)$, $B (9, -5, -3)$

17. $\vec{f} = (-9, 5, -4)$, $A (-3, 8, 2)$, $B (-7, 5, 3)$
18. $\vec{f} = (-6, 5, -4)$, $A (6, 3, -2)$, $B (-7, -5, 3)$
19. $\vec{f} = (-3, -5, 1)$, $A (5, 2, 3)$, $B (10, -5, 2)$
20. $\vec{f} = (11, -3, -4)$, $A (-10, 2, 6)$, $B (-13, 3, -8)$
21. $\vec{f} = (-8, 7, 1)$, $A (8, -2, -3)$, $B (5, -3, 1)$
22. $\vec{f} = (15, -6, 1)$, $A (4, -3, -5)$, $B (3, -8, 2)$
23. $\vec{f} = (5, -4, -7)$, $A (-4, -3, 10)$, $B (2, 4, 7)$
24. $\vec{f} = (-4, -3, -1)$, $A (4, -3, -1)$, $B (-5, 2, -4)$
25. $\vec{f} = (3, -2, 5)$, $A (-10, -3, -1)$, $B (7, 5, -3)$
26. $\vec{f} = (-5, 3, -7)$, $A (-4, -9, 3)$, $B (3, -5, -4)$
27. $\vec{f} = (2, 7, -3)$, $A (6, -11, 4)$, $B (-7, -3, 5)$
28. $\vec{f} = (-5, -13, 3)$, $A (5, 7, -2)$, $B (8, 3, -5)$
29. $\vec{f} = (7, -4, 1)$, $A (-5, -3, 2)$, $B (3, 2, -5)$
30. $\vec{f} = (12, -7, -2)$, $A (-8, -1, 2)$, $B (-5, 3, -9)$

2.2.8 Знайти вектор $\vec{m}$, якщо відомо, що він колінеарний до вектора $\vec{a}$ і скалярний добуток $\vec{m} \cdot \vec{a} = c$.

- 1.. $\vec{a} = (5, -1, 7)$, $c = 150$
2. $\vec{a} = (2, -3, 4)$, $c = -58$
3. $\vec{a} = (4, 2, -1)$, $c = 42$
4. $\vec{a} = (3, 2, -2)$, $c = -34$
5. $\vec{a} = (-6, 1, -3)$, $c = 92$
6. $\vec{a} = (1, -4, 6)$, $c = -106$
7. $\vec{a} = (2, -2, 7)$, $c = 114$
8. $\vec{a} = (-3, -4, 2)$, $c = -58$
9. $\vec{a} = (1, 7, -2)$, $c = 108$
10. $\vec{a} = (2, -6, 1)$, $c = -82$
11. $\vec{a} = (1, -3, -5)$, $c = 70$
12. $\vec{a} = (-4, 2, -3)$, $c = -58$
13. $\vec{a} = (7, -2, 4)$, $c = 138$
14. $\vec{a} = (-5, 1, -3)$, $c = -70$

- | | |
|--|--|
| 15. $\vec{a} = (2, -3, -2)$, $c = 34$ | 16. $\vec{a} = (-2, 1, -2)$, $c = -2$ |
| 17. $\vec{a} = (3, 4, -1)$, $c = 10$ | 18. $\vec{a} = (1, -2, 1)$, $c = 1$ |
| 19. $\vec{a} = (1, -2, 1)$, $c = 5$ | 20. $\vec{a} = (-3, 1, -2)$, $c = -3$ |
| 21. $\vec{a} = (2, -1, -2)$, $c = -3$ | 22. $\vec{a} = (-4, 1, 1)$, $c = -5$ |
| 23. $\vec{a} = (1, -3, 4)$, $c = 11$ | 24. $\vec{a} = (-1, 2, 1)$, $c = 4$ |
| 25. $\vec{a} = (4, -1, -1)$, $c = 4$ | 26. $\vec{a} = (-2, 1, -1)$, $c = -5$ |
| 27. $\vec{a} = (3, 2, -2)$, $c = 5$ | 28. $\vec{a} = (-2, 4, 1)$, $c = 7$ |
| 29. $\vec{a} = (2, -2, 3)$, $c = 8$ | 30. $\vec{a} = (-1, -2, 4)$, $c = -6$ |

2.2.9 Обчислити площу S паралелограма, побудованого на векторах $\vec{m}$ та $\vec{n}$. Знайти скалярний добуток $\vec{m} \cdot \vec{n}$. Відомі $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ та

$$\left(\vec{a}, \vec{b} \right).$$

- | | | | | |
|------------------------------------|--------------------------------|----------------------------------|-------------------|-------------------------------|
| 1. $\vec{m} = \vec{a} - 3\vec{b}$ | $\vec{n} = \vec{a} + 2\vec{b}$ | $ \vec{a} = 1/5$ | $ \vec{b} = 4$ | $(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/2$ |
| 2. $\vec{m} = \vec{a} + 3\vec{b}$ | $\vec{n} = 3\vec{a} - \vec{b}$ | $ \vec{a} = \sqrt{3}$ | $ \vec{b} = 1/3$ | $(\vec{a}, \vec{b}) = 2\pi/3$ |
| 3. $\vec{m} = 4\vec{a} - \vec{b}$ | $\vec{n} = \vec{a} + 2\vec{b}$ | $ \vec{a} = \sqrt{2}$ | $ \vec{b} = 2/3$ | $(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/4$ |
| 4. $\vec{m} = 3\vec{a} + \vec{b}$ | $\vec{n} = \vec{a} - 2\vec{b}$ | $ \vec{a} = \sqrt{2}$ | $ \vec{b} = 1$ | $(\vec{a}, \vec{b}) = 3\pi/4$ |
| 5. $\vec{m} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ | $\vec{n} = 2\vec{a} - \vec{b}$ | $ \vec{a} = 4/7$ | $ \vec{b} = 4$ | $(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/6$ |
| 6. $\vec{m} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ | $\vec{n} = \vec{a} - 2\vec{b}$ | $ \vec{a} = 3\sqrt{3}$ | $ \vec{b} = 2/7$ | $(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/3$ |
| 7. $\vec{m} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ | $\vec{n} = \vec{a} - \vec{b}$ | $ \vec{a} = 10$ | $ \vec{b} = 1/5$ | $(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/2$ |
| 8. $\vec{m} = 6\vec{a} - \vec{b}$ | $\vec{n} = \vec{a} + \vec{b}$ | $ \vec{a} = 11$ | $ \vec{b} = 2/7$ | $(\vec{a}, \vec{b}) = 5\pi/6$ |
| 9. $\vec{m} = 5\vec{a} + \vec{b}$ | $\vec{n} = \vec{a} - 3\vec{b}$ | $ \vec{a} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ | $ \vec{b} = 2$ | $(\vec{a}, \vec{b}) = 2\pi/3$ |
| 10. $\vec{m} = \vec{a} - 4\vec{b}$ | $\vec{n} = 3\vec{a} + \vec{b}$ | $ \vec{a} = 1$ | $ \vec{b} = 2$ | $(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/6$ |
| 11. $\vec{m} = 3\vec{a} - \vec{b}$ | $\vec{n} = \vec{a} + 2\vec{b}$ | $ \vec{a} = 2\sqrt{3}$ | $ \vec{b} = 2/3$ | $(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/3$ |

12.	$\bar{m} = \bar{a} - 2\bar{b}$	$\bar{n} = 2\bar{a} + \bar{b}$	$ \bar{a} = \sqrt{2}$	$ \bar{b} = 3$	$(\bar{a}, \bar{b}) = 3\pi/4$
13.	$\bar{m} = 3\bar{a} + 4\bar{b}$	$\bar{n} = \bar{b} - \bar{a}$	$ \bar{a} = 8$	$ \bar{b} = 2/7$	$(\bar{a}, \bar{b}) = \pi/2$
14.	$\bar{m} = 3\bar{a} - 2\bar{b}$	$\bar{n} = \bar{a} + 5\bar{b}$	$ \bar{a} = 1/2$	$ \bar{b} = 4$	$(\bar{a}, \bar{b}) = 5\pi/6$
15.	$\bar{m} = 5\bar{a} - \bar{b}$	$\bar{n} = \bar{a} + \bar{b}$	$ \bar{a} = 2$	$ \bar{b} = 3$	$(\bar{a}, \bar{b}) = \pi/6$
16.	$\bar{m} = 3\bar{a} - 5\bar{b}$	$\bar{n} = 2\bar{a} + 3\bar{b}$	$ \bar{a} = 2/3$	$ \bar{b} = \sqrt{3}$	$(\bar{a}, \bar{b}) = \pi/3$
17.	$\bar{m} = 4\bar{a} + \bar{b}$	$\bar{n} = \bar{a} - \bar{b}$	$ \bar{a} = 4$	$ \bar{b} = \sqrt{2}$	$(\bar{a}, \bar{b}) = \pi/4$
18.	$\bar{m} = 2\bar{a} - \bar{b}$	$\bar{n} = \bar{a} + 3\bar{b}$	$ \bar{a} = 3$	$ \bar{b} = 1$	$(\bar{a}, \bar{b}) = \pi/2$
19.	$\bar{m} = 2\bar{a} - 3\bar{b}$	$\bar{n} = 3\bar{a} + \bar{b}$	$ \bar{a} = 1$	$ \bar{b} = 4$	$(\bar{a}, \bar{b}) = \pi/6$
20.	$\bar{m} = \bar{a} + 3\bar{b}$	$\bar{n} = 7\bar{a} - 2\bar{b}$	$ \bar{a} = 2$	$ \bar{b} = 1/2$	$(\bar{a}, \bar{b}) = \pi/2$
21.	$\bar{m} = 5\bar{a} - \bar{b}$	$\bar{n} = 3\bar{a} + \bar{b}$	$ \bar{a} = 3$	$ \bar{b} = 2$	$(\bar{a}, \bar{b}) = 5\pi/6$
22.	$\bar{m} = 3\bar{a} + \bar{b}$	$\bar{n} = \bar{a} - 3\bar{b}$	$ \bar{a} = 1/2$	$ \bar{b} = 5\sqrt{2}$	$(\bar{a}, \bar{b}) = 3\pi/4$
23.	$\bar{m} = 6\bar{a} - \bar{b}$	$\bar{n} = \bar{a} + 2\bar{b}$	$ \bar{a} = 2\sqrt{3}$	$ \bar{b} = 2/3$	$(\bar{a}, \bar{b}) = 2\pi/3$
24.	$\bar{m} = \bar{a} + 4\bar{b}$	$\bar{n} = 2\bar{a} - \bar{b}$	$ \bar{a} = 2$	$ \bar{b} = \sqrt{3}$	$(\bar{a}, \bar{b}) = \pi/3$
25.	$\bar{m} = 2\bar{a} + 3\bar{b}$	$\bar{n} = \bar{a} - 2\bar{b}$	$ \bar{a} = 2/3$	$ \bar{b} = 6\sqrt{2}$	$(\bar{a}, \bar{b}) = \pi/4$
26.	$\bar{m} = 2\bar{a} - 5\bar{b}$	$\bar{n} = \bar{a} - 3\bar{b}$	$ \bar{a} = 29$	$ \bar{b} = 2$	$(\bar{a}, \bar{b}) = 5\pi/6$
27.	$\bar{m} = \bar{a} + 3\bar{b}$	$\bar{n} = \bar{a} - 2\bar{b}$	$ \bar{a} = 4$	$ \bar{b} = \sqrt{3}$	$(\bar{a}, \bar{b}) = \pi/3$
28.	$\bar{m} = 4\bar{a} - 3\bar{b}$	$\bar{n} = 5\bar{a} - 4\bar{b}$	$ \bar{a} = 1$	$ \bar{b} = 31$	$(\bar{a}, \bar{b}) = \pi/2$
29.	$\bar{m} = 2\bar{a} + 7\bar{b}$	$\bar{n} = 2\bar{a} - \bar{b}$	$ \bar{a} = 4$	$ \bar{b} = 1$	$(\bar{a}, \bar{b}) = \pi/6$
30.	$\bar{m} = 7\bar{a} + \bar{b}$	$\bar{n} = \bar{a} - 3\bar{b}$	$ \bar{a} = 1,5$	$ \bar{b} = \sqrt{2}$	$(\bar{a}, \bar{b}) = 3\pi/4$

2.2.10 Знайти момент $\bar{M}$ сили $\bar{p}$ відносно точки C , якщо сила прикладена до точки A .

1. $\bar{p} = (0, -4, -8)$, $A(-1, 2, 4)$, $C(3, 0, -1)$.

- | | | | |
|-----|-------------------------|------------------|-------------------|
| 2. | $\bar{p}=(-5, -7, -4),$ | $A(3, 10, -1),$ | $C(-6, 0, -3).$ |
| 3. | $\bar{p}=(4, -1, -10),$ | $A(-7, 3, 2),$ | $C(-4, 1, -8).$ |
| 4. | $\bar{p}=(-2, 2, 3),$ | $A(-2, -1, -1),$ | $C(-6, -1, -7).$ |
| 5. | $\bar{p}=(4, -5, 0),$ | $A(-3, 3, 5),$ | $C(-3, 7, 2).$ |
| 6. | $\bar{p}=(4, 0, 8),$ | $A(-1, -4, 2),$ | $C(1, 1, -2).$ |
| 7. | $\bar{p}=(7, 4, 5),$ | $A(-3, -3, -2),$ | $C(7, -1, 7).$ |
| 8. | $\bar{p}=(-1, -10, 4),$ | $A(-3, 6, -2),$ | $C(-5, -4, 1).$ |
| 9. | $\bar{p}=(-2, -3, 2),$ | $A(-7, 11, 3),$ | $C(-7, 17, 7).$ |
| 10. | $\bar{p}=(5, 0, -4),$ | $A(5, 2, 7),$ | $C(1, 5, 7).$ |
| 11. | $\bar{p}=(-8, 0, -4),$ | $A(-1, -4, 2),$ | $C(-6, 0, 0).$ |
| 12. | $\bar{p}=(-4, -5, -7),$ | $A(11, -3, 12),$ | $C(9, -12, 2).$ |
| 13. | $\bar{p}=(-10, 4, -1),$ | $A(12, 6, -7),$ | $C(2, 9, -9).$ |
| 14. | $\bar{p}=(2, 3, -2),$ | $A(6, -8, -5),$ | $C(6, -14, -9).$ |
| 15. | $\bar{p}=(0, 4, -5),$ | $A(7, -5, 2),$ | $C(4, -5, 6).$ |
| 16. | $\bar{p}=(0, 4, 8),$ | $A(-3, -6, -2),$ | $C(-7, -4, 3).$ |
| 17. | $\bar{p}=(5, 7, 4),$ | $A(2, -5, -2),$ | $C(11, 5, 0).$ |
| 18. | $\bar{p}=(-4, 1, 10),$ | $A(1, -5, -4),$ | $C(-2, -3, 6).$ |
| 19. | $\bar{p}=(2, -2, -3),$ | $A(-1, 1, 3),$ | $C(3, 1, 9).$ |
| 20. | $\bar{p}=(-4, 5, 0),$ | $A(1, 2, -7),$ | $C(1, -2, -4).$ |
| 21. | $\bar{p}=(-4, -8, 0),$ | $A(0, 1, 1),$ | $C(-2, -4, 5).$ |
| 22. | $\bar{p}=(-7, -4, -5),$ | $A(-2, -1, 2),$ | $C(-12, -3, -7).$ |
| 23. | $\bar{p}=(1, 10, -4),$ | $A(-1, 2, 1),$ | $C(1, 12, -2).$ |

- | | | | |
|-----|----------------------|----------------|----------------|
| 24. | $\bar{p}=(3,-2,2),$ | $A(-5,5,-2),$ | $C(-11,1,-2).$ |
| 25. | $\bar{p}=(-5,0,4),$ | $A(1,2,3),$ | $C(5,-1,3).$ |
| 26. | $\bar{p}=(8,0,4),$ | $A(-5,5,5),$ | $C(0,1,7).$ |
| 27. | $\bar{p}=(4,5,7),$ | $A(0,-4,-6),$ | $C(2,5,4).$ |
| 28. | $\bar{p}=(10,-4,1),$ | $A(-5,3,-4),$ | $C(5,0,2).$ |
| 29. | $\bar{p}=(-3,2,-2),$ | $A(-4,1,-3),$ | $C(2,5,-3).$ |
| 30. | $\bar{p}=(0,-4,5),$ | $A(-2,-10,9),$ | $C(1,-10,5).$ |

2.2.11 Задані координати вершин трикутника ABC . Знайти $S_{\triangle ABC}$ та внутрішній кут при вершині A .

1. $A(-3,-6,-2), B(-7,-4,3), C(-3,-2,6).$
2. $A(3,10,-1), B(-6,0,-3), C(-2,3,-5).$
3. $A(1,1,2), B(-1,1,3), C(2,-2,4).$
4. $A(2,-1,2), B(1,2,-1), C(3,2,1).$
5. $A(2,3,1), B(4,1,-2), C(6,3,7).$
6. $A(-1,2,4), B(3,0,-1), C(-1,-2,-4).$
7. $A(2,-5,-2), B(11,5,0), C(7,2,2).$
8. $A(0,-1,-1), B(-2,3,5), C(1,-5,-9).$
9. $A(-2,0,-4), B(-1,7,1), C(4,-8,-4).$
10. $A(-2,-1,-1), B(-4,1,2), C(-6,-1,-7).$
11. $A(1,0,1), B(5,-2,-4), C(1,-4,-7).$
12. $A(2,-2,-1), B(-7,-12,-3), C(-3,-9,-5).$
13. $A(5,-1,-2), B(6,-4,1), C(4,-4,-1).$
14. $A(7,2,4), B(3,3,1), C(7,-1,-2).$

15. $A(-1, 1, 3)$, $B(1, -1, 0)$, $C(3, 1, 9)$.
16. $A(2, -1, -4)$, $B(-2, 1, 1)$, $C(2, 3, 4)$.
17. $A(-2, -3, -3)$, $B(7, 7, -1)$, $C(3, 4, 1)$.
18. $A(4, -1, -3)$, $B(3, 2, -5)$, $C(6, -1, -4)$.
19. $A(3, -1, 4)$, $B(5, -5, -2)$, $C(2, 3, 12)$.
20. $A(5, -2, -5)$, $B(3, 0, -2)$, $C(1, -2, -11)$.
21. $A(-4, 2, -1)$, $B(0, 0, -6)$, $C(-4, -2, -9)$.
22. $A(-3, 12, 11)$, $B(-12, 2, 9)$, $C(-8, 5, 7)$.
23. $A(6, -3, -4)$, $B(7, 4, 1)$, $C(0, 5, -4)$.
24. $A(2, -3, -4)$, $B(4, -3, -5)$, $C(1, 0, -6)$.
25. $A(3, -7, 11)$, $B(5, -9, 8)$, $C(7, -7, 17)$.
26. $A(5, 5, -5)$, $B(1, 7, 0)$, $C(5, 9, 3)$.
27. $A(-4, -6, 0)$, $B(5, 4, 2)$, $C(1, 1, 4)$.
28. $A(-3, 4, -1)$, $B(1, 3, 2)$, $C(-3, 7, 5)$.
29. $A(1, 1, 2)$, $B(2, -2, 4)$, $C(-1, 1, 3)$.
30. $A(-5, 6, -8)$, $B(-7, 8, -5)$, $C(-9, 6, -14)$.

2.2.12 З'ясувати чи знаходяться чотири точки: A, B, C, D на одній площині.

1. $A(1, 2, -1)$, $B(-1, -2, -4)$, $C(5, 5, 0)$, $D(7, 9, 3)$
2. $A(2, -1, 0)$, $B(0, -3, -3)$, $C(4, 3, 3)$, $D(5, 9, 5)$
3. $A(-1, 1, 0)$, $B(2, 5, 2)$, $C(0, 2, 0)$, $D(7, 12, 6)$
4. $A(2, 1, -2)$, $B(-3, -3, -7)$, $C(6, 3, 2)$, $D(5, 2, -2)$
5. $A(-1, -2, 1)$, $B(2, 0, 2)$, $C(1, 1, 5)$, $D(0, -3, -2)$
6. $A(-2, 3, 1)$, $B(0, 4, 3)$, $C(2, 5, 3)$, $D(-5, 0, -2)$

- | | | | | |
|-----|--------------|----------------|---------------|--------------|
| 7. | A(2,-3,-2), | B (3,-6,-9), | C (3,-1, 1), | D (5,-1,-1) |
| 8. | A(-3, 1,-2), | B (1, 4, 1), | C (6, 6, 6), | D (2, 4, 2) |
| 9 | A(-5, 1, 3), | B (3, 4, 1), | C (-2, 2, 2), | D (-4, 1, 2) |
| 10. | A(3,-1,-2), | B (5, 0, 0), | C (9, 2, 2), | D (2,-3,-3) |
| 11. | A(1,-2, 2), | B (10, 0, 7), | C (2,-1, 1), | D (5,-1, 4) |
| 12. | A(2,-2, 2), | B (8, 0, 8), | C (6,-1, 3), | D (-7,-6,-7) |
| 13. | A(1, 1,-1), | B (5, 0,-7), | C (2,-2,-8), | D (3, 0,-5) |
| 14. | A(2, 2,-1), | B (6, 4, 3), | C (9, 5, 3), | D (1, 0,-2) |
| 15. | A(-2, 2,-1), | B (-1, 3,-2), | C (1, 2, 2), | D (6, 3, 5) |
| 16. | A(1,-2, 1), | B (1,-4, 0), | C (-1, 2, 0), | D (-6, 8,-4) |
| 17. | A(1, 1, 1), | B (-3, 8, 7), | C (4, 1, 0), | D (-2, 4, 4) |
| 18. | A(2, 1, 1), | B (4, 4, 2), | C (1, 1, 0), | D (4, 3, 3) |
| 19. | A(-1, 2, 2), | B(18,13, 19), | C (6, 6, 8), | D (1, 3, 3) |
| 20. | A(1,-2,-2), | B(2, -2, 1), | C (2,-5, 6), | D (2,-3, 2) |
| 21. | A(2, 1, 1), | B (4, 4, 5), | C (5, 2, 0), | D (5, 3, 2) |
| 22. | A(1,-2, 3), | B (2,-1, 4), | C (2, 3, 5), | D (0,-1, 2) |
| 23. | A(0, 1, 2), | B (-2, 0, 2), | C (5, 3, 1), | D (3, 2, 1) |
| 24. | A(1,-1,-1), | B (2,-3, 0), | C (2, 0, 0), | D(4, 2, 0) |
| 25. | A(3,-1, 2), | B (9, 6, 6), | C (5,-1, 1), | D (7, 2, 3) |
| 26. | A(1, 1, 4), | B (3, 3, 6), | C (5, 4, 5), | D (2,-1, 5) |
| 27. | A(2,-1, 1) | B (4,-7, 18), | C (3,-3, 7), | D (3,-1, 2) |
| 28. | A(-1, 2, 1), | B (-3, 2, 0), | C (1, 4, 2), | D (2, 9, 3) |
| 29. | A(2, 2,-2), | B (6, 9, 3), | C (4, 2,-3), | D (4, 5, 0) |
| 30. | A(-2,-2, 3), | B (-3,-4, 2), | C (0,-1, 5), | D (4, 1, 7) |

2.2.13 Обчислити об'єм тетраедра $ABCD$, якщо відомі координати вершин: A, B, C, D . З'ясувати, яку трійку: праву чи ліву утворюють вектори, на яких тетраедр побудований.

1. $A(1, 5, -7), B(-3, 6, 3), C(-2, 7, 3), D(-4, 8, -12).$
2. $A(2, 3, 1), B(4, 1, -2), C(6, 3, 7), D(7, 5, -3).$
3. $A(4, 1, -11), B(0, 2, -1), C(1, 3, -1), D(5, 4, -16).$
4. $A(-1, 2, 4), B(-1, -2, -4), C(3, 0, -1), D(7, -3, 1).$
5. $A(3, 10, -1), B(-2, 3, -5), C(-6, 0, -3), D(1, -1, 2).$
6. $A(-7, 3, 2), B(-3, 2, -8), C(-4, 1, -8), D(-2, 0, 7).$
7. $A(-2, -1, -1), B(-4, 1, 2), C(-6, -1, -7), D(-7, -3, 3).$
8. $A(-3, -4, 11), B(1, -5, 1), C(0, -6, 1), D(-4, -7, 16).$
9. $A(-3, -6, -2), B(-3, -2, 6), C(-7, -4, 3), D(-11, -1, 1).$
10. $A(2, -5, -2), B(7, 2, 2), C(11, 5, 0), D(4, 6, -5).$
11. $A(1, -5, -4), B(-3, -4, 6), C(-2, -3, 6), D(-4, -2, -9).$
12. $A(-1, 1, 3), B(1, -1, 0), C(3, 1, 9), D(4, 3, -1).$
13. $A(-1, 2, -9), B(-5, 3, 1), C(-4, 4, 1), D(0, 5, -14).$
14. $A(1, 0, 1), B(1, -4, -7), C(5, -2, -4), D(9, -5, -2).$
15. $A(2, -2, -1), B(-3, -9, -5), C(-7, -12, -3), D(0, -13, 2).$
16. $A(-2, 1, 12), B(2, 0, 2), C(1, -1, 2), D(3, -2, 17).$
17. $A(5, -2, -5), B(3, 0, -2), C(1, -2, -11), D(0, -4, -1).$
18. $A(-2, 2, 5), B(2, 1, -5), C(1, 0, -5), D(-3, -1, 10).$
19. $A(2, -1, -4), B(2, 3, 4), C(-2, 1, 1), D(-6, 4, -1).$
20. $A(-2, -3, -3), B(3, 4, 1), C(7, 7, -1), D(0, 8, -6).$
21. $A(9, -9, 2), B(5, -8, 12), C(6, -7, 12), D(4, -6, -3).$
22. $A(3, -7, 11), B(5, -9, 8), C(7, -7, 17), D(8, -5, 7).$

23. $A(-4, 3, -7)$, $B(-8, 4, 3)$, $C(-7, 5, 3)$, $D(-3, 6, -12)$.
 24. $A(-4, 2, -1)$, $B(-4, -2, -9)$, $C(0, 0, -6)$, $D(4, -3, -4)$.
 25. $A(-3, 12, 11)$, $B(-8, 5, 7)$, $C(-12, 2, 9)$, $D(-5, 1, 14)$.
 26. $A(0, -2, 5)$, $B(4, -3, -5)$, $C(3, -4, -5)$, $D(5, -5, 10)$.
 27. $A(-5, 6, -8)$, $B(-7, 8, -5)$, $C(-9, 6, -14)$, $D(-10, 4, -4)$.
 28. $A(3, 6, -2)$, $B(7, 5, -12)$, $C(6, 4, -12)$, $D(2, 3, 3)$.
 29. $A(5, 5, -5)$, $B(5, 9, 3)$, $C(1, 7, 0)$, $D(-3, 10, -2)$.
 30. $A(-4, -6, 0)$, $B(1, 1, 4)$, $C(5, 4, 2)$, $D(-2, 5, -3)$.

3. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

3.1 Аудиторні завдання

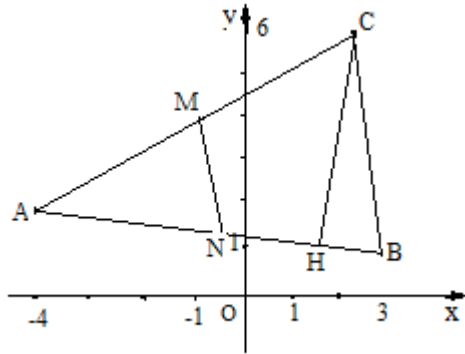
3.1.1 Трикутник ABC задано координатами його вершин: $A(-4, 2)$, $B(3, 1)$, $C(2, 6)$. Побудувати трикутник ABC в декартовій системі координат і знайти: а) довжину і рівняння сторони AB ; б) довжину і рівняння висоти CH , що проведена з вершини C на сторону AB ; в) координати т. H – точки перетину CH і AB ; г) рівняння середньої лінії MN , паралельної стороні BC ; д) тангенс кута при вершині B . Усі рівняння прямих представити у загальному вигляді.

Відповідь:

а) $(AB) x + 7y - 10 = 0$, $|AB| = 5\sqrt{2}$ (ліній. од.);

б) $(CH) 7x - y - 8 = 0$, $|CH| = 3,4\sqrt{2}$ (ліній. од.); в) т. $H(1,32; 1,24)$;

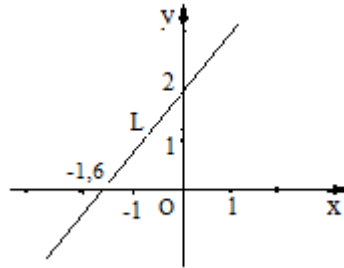
г) $(MN) 5x + y + 1 = 0$; д) $\operatorname{tg} \left(\hat{B} \right) = \frac{17}{6}$.



3.1.2 Задані т. $M(-1, 2)$ і пряма $L: 5x - 4y + 8 = 0$. Рівняння прямої L записати у «відрізках» і побудувати її. Скласти рівняння прямої L_1 , яка паралельна прямій L , і рівняння прямої L_2 , яка перпендикулярна прямій L . Ці прямі проходять через точку M .

Відповідь:

$$L: \frac{x}{-1,6} + \frac{y}{2} = 1,$$



$$L_1: 5x - 4y + 13 = 0; \quad L_2: 4x + 5y - 6 = 0.$$

3.1.3 Встановити назву кривої 2-го порядку. Знайти центр, піввісі для еліпса та гіперболи; для параболи – координати вершини, точки перетину з вісями координат і рівняння вісі симетрії. Зробити креслення в системі xOy .

а) $16x^2 + 25y^2 - 32x + 50y - 359 = 0$

б) $16x^2 - 9y^2 - 32x - 18y - 137 = 0$

в) $4x^2 - 9y^2 - 16x - 36y + 16 = 0$

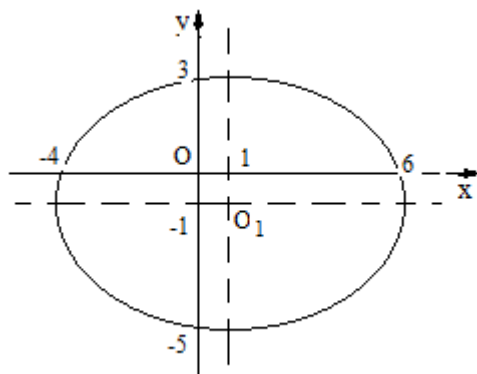
г) $2x^2 - 4x - y - 2 = 0$

д) $3y^2 - 12y + 2x + 10 = 0$

Відповідь:

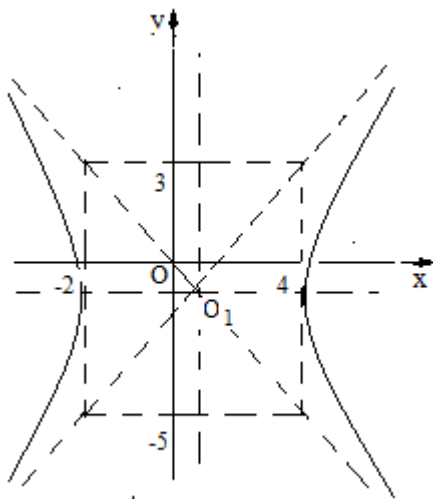
а) $\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$ – еліпс.

Центр $O_1(1, -1)$; $a=5$, $b=4$.

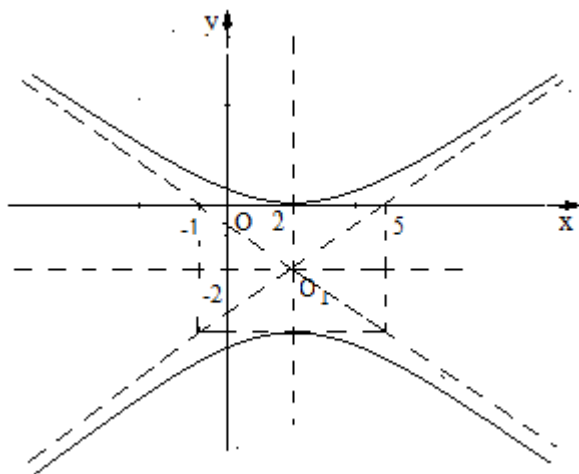


б) $\frac{(x-1)^2}{25} - \frac{(y+1)^2}{16} = 1$ –

гіпербола. Центр $O_1(1, -1)$;
 $a=3$, $b=4$.



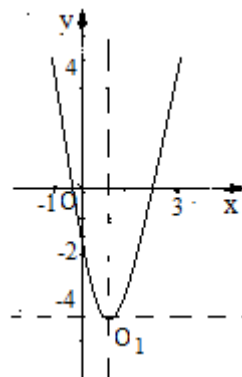
в) $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{4} = -1$ – гіпербола. Центр $O_1(2, -2)$; $a=3$, $b=2$.



г) $(x-1)^2 = \frac{1}{2}(y+4)$ – парабола.

Вершина $O_1(1, -4)$;

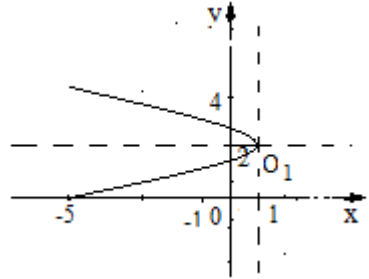
вісь симетрії $x=1$.



д) $(y-2)^2 = -\frac{2}{3}(x-1)$ – парабола.

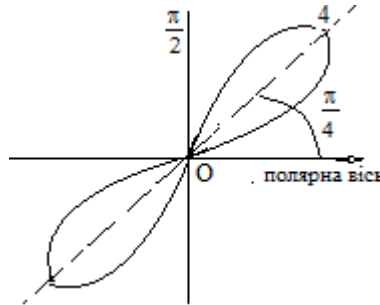
Вершина $O_1(1, 2)$;

вісь симетрії $y = 2$.



3.1.4 Рівняння кривої в декартовій системі координат $(x^2 + y^2)^2 = 32xy$ записати у полярній системі координат і побудувати її

Відповідь: $\rho = 4\sqrt{\sin 2\varphi}$ – лемніската Бернуллі



3.2. Індивідуальні завдання

3.2.1 Трикутник ABC задано координатами його вершин: A, B, C . Побудувати трикутник ABC в декартовій системі координат і знайти: а) довжину і рівняння сторони AB ; б) довжину і рівняння висоти CH , що проведена з вершини C на сторону AB ; в) координати т. H – точки перетину CH і AB ; г) рівняння середньої лінії MN , паралельної стороні BC ; д) тангенс кута при вершині B . Усі рівняння прямих представити у загальному вигляді.

- | | | |
|------------------|--------------|-------------|
| 1. $A(3, -2);$ | $B(5, 4);$ | $C(-3, 1).$ |
| 2. $A(2, -2);$ | $B(5, 3);$ | $C(1, 5).$ |
| 3. $A(2, -3);$ | $B(-1, 2);$ | $C(3, 4).$ |
| 4. $A(-1, 1);$ | $B(1, 6);$ | $C(7, 2).$ |
| 5. $A(-1, 6);$ | $B(5, -2);$ | $C(3, 2).$ |
| 6. $A(3, 4);$ | $B(5, -2);$ | $C(0, 6).$ |
| 7. $A(4, -6);$ | $B(2, -8);$ | $C(-1, 2).$ |
| 8. $A(-3, 1);$ | $B(-2, 2);$ | $C(2, 4).$ |
| 9. $A(3, 5);$ | $B(-1, -1);$ | $C(-4, 2).$ |
| 10. $A(1, -1);$ | $B(4, 8);$ | $C(-2, 3).$ |
| 11. $A(-2, 4);$ | $B(-6, -2);$ | $C(2, 2).$ |
| 12. $A(1, 1);$ | $B(-6, 2);$ | $C(2, -4).$ |
| 13. $A(-1, 4);$ | $B(4, 2);$ | $C(2, -5).$ |
| 14. $A(-2, -1);$ | $B(-6, 1);$ | $C(2, -8).$ |
| 15. $A(2, -8);$ | $B(5, 1);$ | $C(-6, 0).$ |
| 16. $A(2, 3);$ | $B(-2, -1);$ | $C(-4, 1).$ |
| 17. $A(-6, -2);$ | $B(4, -1);$ | $C(0, 4).$ |
| 18. $A(2, 1);$ | $B(3, 8);$ | $C(-4, 5).$ |
| 19. $A(-1, 4);$ | $B(6, -8);$ | $C(-2, 1).$ |
| 20. $A(2, -6);$ | $B(3, 3);$ | $C(-4, 8).$ |
| 21. $A(3, 8);$ | $B(6, -2);$ | $C(-2, 0).$ |
| 22. $A(-1, 4);$ | $B(-6, -8);$ | $C(3, 6).$ |
| 23. $A(2, -4);$ | $B(-6, 1);$ | $C(3, 4).$ |
| 24. $A(6, 3);$ | $B(2, -5);$ | $C(-4, 8).$ |

25. A (2 , 3) ; B (-6 , -4) ; C (-2 , 1) .
 26. A (-3 , 8) ; B (4 , 6) ; C (-6 , -8) .
 27. A (1 , 2) ; B (-8 , 1) ; C (-3 , -1) ;
 28. A (-6 , -1) ; B (1 , 2) ; C (-4 , 8) .
 29. A (1 , -1) ; B (6 , 4) ; C (-2 , 3) .
 30. A (-6 , 2) ; B (2 , -2) ; C (-4 , -5) .

3.2.2 Задані т. M і пряма L . Рівняння прямої L записати у «відрізках» і побудувати її. Скласти рівняння прямої L_1 , яка паралельна прямій L , і рівняння прямої L_2 , яка перпендикулярна прямій L . Ці прямі проходять через точку M .

Таблиця 3.1

№ вар	т. M	Пряма L	№ вар	т. M	Пряма L
1.	(-1,2)	$2x - y + 5 = 0$	16.	(1, -4)	$3x - 6y + 5 = 0$
2.	(2, -1)	$x - 3y - 1 = 0$	17.	(-3, 4)	$2x - 4y - 3 = 0$
3.	(-1, 3)	$3x - 4y - 4 = 0$	18.	(4, -3)	$x - y + 4 = 0$
4.	(3, -1)	$2x - y + 2 = 0$	19.	(-4, 3)	$6x - 3y + 1 = 0$
5.	(1, -2)	$5x - 3y + 4 = 0$	20.	(3, -4)	$x - 5y - 4 = 0$
6.	(-2, 1)	$3x - 2y - 2 = 0$	21.	(2, -4)	$4x - 2y + 3 = 0$
7.	(1, -3)	$x - 2y + 2 = 0$	22.	(-4, 2)	$5x - y + 4 = 0$
8.	(-3, 1)	$3x - 5y - 3 = 0$	23.	(-2, 4)	$3x - 6y - 7 = 0$
9.	(-2, 3)	$x - 5y + 1 = 0$	24.	(4, -2)	$6x - 3y + 1 = 0$
10.	(3, -2)	$4x - 5y - 2 = 0$	25.	(1, -5)	$x - 6y + 2 = 0$
11.	(-3, 2)	$2x - 4y + 5 = 0$	26.	(-5, 1)	$5x - 10y + 1 = 0$

№ вар	т. M	Пряма L	№ вар	т. M	Пряма L
12.	(2, -3)	$3x - 6y - 4 = 0$	27.	(-1, 5)	$10x - 5y + 1 = 0$
13.	(-1, 4)	$2x - y - 3 = 0$	28.	(5, -1)	$2x - 6y - 3 = 0$
14.	(4, -1)	$3x - 2y + 4 = 0$	29.	(2, -5)	$6x - 2y + 1 = 0$
15.	(-4, 1)	$2x - 4y - 7 = 0$	30.	(5, -2)	$2x - 8y + 1 = 0$

3.2.3 Встановити назву кривої 2-го порядку $a_ix^2 + b_iy^2 + c_ix + d_iy + k_i = 0$, $i=1,2,3$. Знайти центр, піввісі для еліпса та гіперболи; для параболи – координати вершини, точки перетину з вісями координат і рівняння вісі симетрії. Зробити креслення в системі xOy .

Таблиця 3.2

Вар	a_1	b_1	c_1	d_1	k_1	Вар	a_1	b_1	c_1	d_1	k_1
1	4	9	-16	54	61	16	25	16	50	-32	-359
2	1	4	6	-16	21	17	16	36	-32	-144	-416
3	9	4	18	32	37	18	9	25	-72	50	-56
4	25	1	100	-2	76	19	4	16	-24	-64	36
5	16	4	-64	-8	4	20	1	16	-6	-128	249
6	49	1	196	-6	156	21	25	4	100	-24	36
7	4	25	-24	50	-39	22	4	49	24	196	36
8	1	9	4	-18	4	23	16	9	-32	-54	-47
9	9	16	54	32	-47	24	25	9	150	-72	144
10	16	25	64	-150	-111	25	9	1	-36	-4	31
11	25	36	50	72	-839	26	4	36	8	72	-104
12	49	4	98	-16	-131	27	1	25	-6	-100	84
13	9	36	-18	144	-171	28	16	1	-64	4	52
14	4	1	-32	4	64	29	1	49	-4	98	4
15	1	36	2	288	541	30	49	9	98	-54	-311

Таблица 3.3

Вар	a_2	b_2	c_2	d_2	k_2	Вар	a_2	b_2	c_2	d_2	k_2
1	4	-9	-16	-54	-29	16	-25	16	-50	-32	391
2	-1	4	-6	-16	11	17	16	-36	-32	144	448
3	9	-4	18	-32	-19	18	-9	25	72	50	106
4	-25	1	-100	-2	-74	19	4	-16	-24	64	36
5	16	-4	-64	8	124	20	-1	16	6	-128	263
6	-49	1	-196	-6	-138	21	25	-4	100	24	164
7	4	-25	-24	-50	111	22	-4	49	-24	196	356
8	-1	9	-4	-18	14	23	16	-9	-32	54	79
9	9	-16	54	-32	209	24	-25	9	-150	-72	144
10	-16	25	-64	-150	561	25	9	-1	-36	4	41
11	25	-36	50	-72	889	26	-4	36	-8	72	176
12	-49	4	-98	-16	163	27	1	-25	-6	100	-66
13	9	-36	-18	-144	189	28	-16	1	64	4	-44
14	-4	1	32	4	-56	29	1	-49	-4	-98	4
15	1	-36	2	-288	-539	30	-49	9	-294	-36	36

Таблица 3.4

Вар	a_3	b_3	c_3	d_3	k_3	Вар	a_3	b_3	c_3	d_3	k_3
1	1	0	4	-6	22	16	0	1	-8	2	9
2	0	1	4	4	-8	17	1	0	2	6	13
3	1	0	-2	-8	33	18	0	1	-10	-2	-39
4	0	1	-6	2	13	19	1	0	6	4	17
5	1	0	4	-4	0	20	0	1	-6	2	-17
6	0	1	6	6	-3	21	1	0	-4	8	20
7	1	0	6	-10	19	22	0	1	-4	-4	16
8	0	1	-4	2	9	23	1	0	2	-10	-29
9	1	0	-6	-6	15	24	0	1	-8	4	28
10	0	1	8	6	-7	25	1	0	4	-6	-8
11	1	0	-2	-4	5	26	0	1	4	-2	-3
12	0	1	-10	4	14	27	1	0	2	8	17
13	1	0	2	-8	17	28	0	1	-6	-4	-8

Вар	a_3	b_3	c_3	d_3	k_3	Вар	a_3	b_3	c_3	d_3	k_3
14	0	1	4	-4	20	29	1	0	4	10	-6
15	1	0	-2	-6	25	30	0	1	-6	4	-8

3.2.4 Рівняння кривої в декартовій системі координат записати у полярній системі координат і побудувати її.

1. $(x^2 + y^2)^2 = 36(x^2 - y^2)$
2. $(x^2 + y^2)^2 = 18xy$
3. $(x^2 + y^2)^{3/2} = 4xy$
4. $(x^2 + y^2)^{3/2} = 4(x^2 - y^2)$
5. $(x^2 + y^2)^{3/2} = 3x^2y - y^3$
6. $(x^2 + y^2)^{3/2} = x^3 - 3xy^2$
7. $(x^2 + y^2)^{5/2} = 8xy(x^2 - y^2)$
8. $(x^2 + y^2)^3 = 16xy(x^2 - y^2)$
9. $(x^2 + y^2 - x)^2 = 4(x^2 + y^2)$
10. $(x^2 + y^2 - 3y)^2 = 9(x^2 + y^2)$
11. $(x^2 + y^2)^2 = 9(x^2 - y^2)$
12. $(x^2 + y^2)^2 = 8xy$
13. $(x^2 + y^2)^{3/2} = 6xy$
14. $(x^2 + y^2)^{3/2} = x^2 - y^2$
15. $(x^2 + y^2)^{3/2} = 2(3x^2y - y^3)$
16. $(x^2 + y^2)^{3/2} = 2(x^3 - 3xy^2)$
17. $(x^2 + y^2)^{5/2} = 4xy(x^2 - y^2)$

18. $(x^2 + y^2)^3 = 4xy(x^2 - y^2)$
19. $(x^2 + y^2 - 2x)^2 = 4(x^2 + y^2)$
20. $(x^2 + y^2)^2 = 16(x^2 - y^2)$
21. $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$
22. $(x^2 + y^2)^2 = xy$
23. $(x^2 + y^2)^{3/2} = 2(x^2 - y^2)$
24. $(x^2 + y^2)^{3/2} = 3(3x^2y - y^3)$
25. $(x^2 + y^2)^{3/2} = 3(x^3 - 3xy^2)$
26. $(x^2 + y^2)^{5/2} = 12xy(x^2 - y^2)$
27. $(x^2 + y^2 - 2x)^2 = 9(x^2 + y^2)$
28. $(x^2 + y^2)^3 = 36xy(x^2 - y^2)$
29. $(x^2 + y^2 - 2y)^2 = 4(x^2 + y^2)$
30. $(x^2 + y^2)^{3/2} = 3(x^2 - y^2)$

4. ПРЯМА ТА ПЛОЩИНА У ПРОСТОРИ

4.1 Аудиторні завдання

4.1.1 Задані точки: $A(0, 0, 2)$, $B(3, 0, 4)$, $C(-1, -1, 0)$, $D(5, 4, 1)$.

Треба:

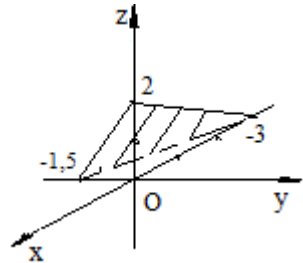
- 1) знайти рівняння площини (ABC) у загальному вигляді;
- 2) записати рівняння площини (ABC) у «відрізках» і побудувати її;
- 3) знайти канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку C паралельно прямій (AB) ;
- 4) скласти загальне рівняння площини, яка проходить через точку C перпендикулярно прямій (AB) ;

- 5) скласти рівняння площини, що проходить через точку D паралельно площині (ABC) ;
- 6) скласти параметричні рівняння прямої, яка проходить через точку D перпендикулярно площині (ABC) ;
- 7) знайти відстань d від точки D до площини (ABC) ;
- 8) знайти координати точки P , яка є проекцією точки D на площину (ABC) ;
- 9) знайти координати точки D_1 симетричної точки D відносно площини (ABC) ;
- 10) знайти кут α між прямими (AB) і (CD) ;
- 11) знайти кут ϕ між прямою (CD) і площиною (ABC) .

Відповідь:

1) $(ABC): 2x + 4y - 3z + 6 = 0$;

2) $(ABC): \frac{x}{-3} + \frac{y}{-\frac{3}{2}} + \frac{z}{2} = 1$;



3) $\frac{x}{3} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{2}$; 4) $3x + 2z + 3 = 0$; 5) $2x + 4y - 3z - 23 = 0$;

6) $\begin{cases} x = 2t + 5 \\ y = 4t + 4 \\ z = -3t + 1 \end{cases}$

7) $d = \sqrt{29}$; 8) $P(3, 0, 4)$; 9) $D_1(1, -4, 7)$;

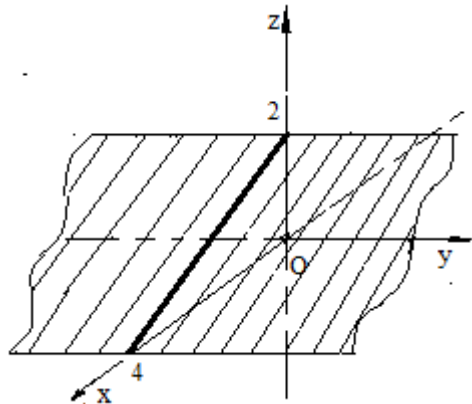
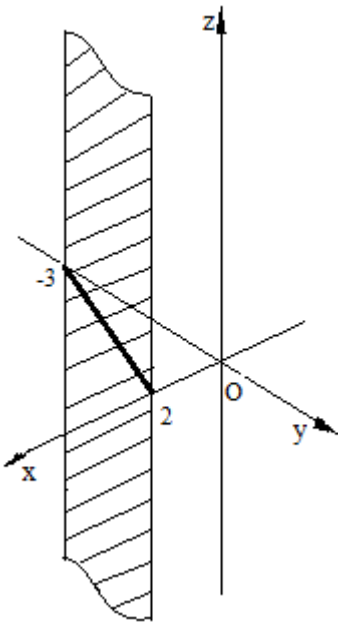
$$10) \alpha = \arccos \frac{20}{\sqrt{806}}; \quad 11) \phi = \arcsin \sqrt{\frac{29}{62}}.$$

4.1.2 Перетворити загальні рівняння площин на рівняння у «відрізках» та побудувати їх у декартовій системі координат: а) $3x - 2y - 6 = 0$; б) $x + 2z - 4 = 0$.

Відповідь:

$$а) \frac{x}{2} + \frac{y}{-3} = 1$$

$$б) \frac{x}{4} + \frac{z}{2} = 1$$



4.2 Індивідуальні завдання

4.2.1 Задані точки: $A(0, 0, 2)$, $B(3, 0, 4)$, $C(-1, -1, 0)$, $D(5, 4, 1)$.

Треба:

- 1) знайти рівняння площини (ABC) у загальному вигляді;
- 2) записати рівняння площини (ABC) у «відрізках» і побудувати її;
- 3) знайти канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку C паралельно прямій (AB) ;
- 4) скласти загальне рівняння площини, яка проходить через точку C перпендикулярно прямій (AB) ;
- 5) скласти рівняння площини, що проходить через точку D паралельно площині (ABC) ;
- 6) скласти параметричні рівняння прямої, яка проходить через точку D перпендикулярно площині (ABC) ;
- 7) знайти відстань d від точки D до площини (ABC) ;
- 8) знайти координати точки P , яка є проекцією точки D на площину (ABC) ;
- 9) знайти координати точки D_1 симетричної точки D відносно площини (ABC) ;
- 10) знайти кут α між прямими (AB) і (CD) ;
- 11) знайти кут ϕ між прямою (CD) і площиною (ABC) .

1.	$A(1; 1; 1),$	$B(3; 2; 1)$	$C(-5; -1; 2),$	$D(2; 0; 4).$
2.	$A(-2; 1; 1),$	$B(0; 2; 1),$	$C(-2; 2; 2),$	$D(-3; 1; -3).$
3.	$A(3; 1; 1),$	$B(1; 1; 2),$	$C(5; 2; 1),$	$D(6; -1; 2).$
4.	$A(3; 1; -1),$	$B(1; -1; 2),$	$C(5; -3; 2),$	$D(9; 7; -1).$
5.	$A(-8; 2; 1),$	$B(4; 1; -4),$	$C(-2; -1; 1)$	$D(6; -1; 6).$
6.	$A(-7; 1; 3),$	$B(5; 1; -3),$	$C(-5; 2; 1),$	$D(7; 2; 4)$
7.	$A(2; -5; 2)$	$B(-2; 3; 2),$	$C(1; 3; -1),$	$D(-1; -3; -5).$
8.	$A(0; 2; -2),$	$B(1; -6; 1),$	$C(2; -2; -2),$	$D(2; 3; 0).$

9.	$A (-1; -3; 2),$	$B (1; 1; -2),$	$C (-1; -1; 1),$	$D (-2; 0; -3).$
10.	$A (-2; 1; 5),$	$B (1; 1; -1),$	$C (2; -2; 3),$	$D (-2; 0; -2).$
11.	$A (1; 0; -4)$	$B (-2; 1; 0),$	$C (1; 1; -6),$	$D (2; 4; -5).$
12.	$A (-3; 1; 3),$	$B (1; 1; -5),$	$C (1; -2; 1),$	$D (2; 1; 2).$
13.	$A (1; -1; 2),$	$B (3; 1; 1),$	$C (-3; 0; -1)$	$D (0; 0; -4).$
14.	$A (1; 1; 3),$	$B (2; 2; 3),$	$C (2; 1; 1),$	$D (-2; 3; 4).$
15.	$A (1; 1; 1),$	$B (1; -1; 3),$	$C (-3; 1; -1),$	$D (-9; 3; 3).$
16.	$A (1; 1; 2),$	$B (-1; 1; 1),$	$C (-1; 2; 2),$	$D (-2; 4; -1).$
17.	$A (1; 1; 1),$	$B (3; 1; 2),$	$C (1; 0; 0),$	$D (6; 1; -1).$
18.	$A (2; 1; 1),$	$B (2; 2; 2),$	$C (4; 0; 1),$	$D (8; 3; -3).$
19.	$A (1; 1; 1),$	$B (2; 7; -1),$	$C (2; 1; 2),$	$D (3; 2; -2).$
20.	$A (2; 1; 1),$	$B (1; 7; -3),$	$C (1; -1; 1),$	$D (0; 0; 4).$
21.	$A (1; 2; 1),$	$B (2; 4; 1)$	$C (2; 2; 2),$	$D (-1; 5; 2).$
22.	$A (1; 5; 1),$	$B (-2; 3; 3),$	$C (3; 3; -2),$	$D (2; 4; 4).$
23.	$A (1; 2; -1),$	$B (-2; 4; 3),$	$C (3; 4; -2),$	$D (-2; 5; -1).$
24.	$A (1; 1; 1),$	$B (2; 3; 3),$	$C (0; 3; 1),$	$D (7; -7; -6).$
25.	$A (1; 2; 1),$	$B (2; 4; 3),$	$C (0; 4; 1),$	$D (0; 1; 4).$
26.	$A (1; 1; 3),$	$B (2; 2; 3),$	$C (1; 2; 1),$	$D (4; 0; 2).$

27.	$A(1; 1; 1),$	$B(3; 2; 3),$	$C(2; 2; 1),$	$D(0; 3; 4).$
28.	$A(1; 1; 2),$	$B(2; 2; 2),$	$C(3; 1; 0),$	$D(2; -1; 5).$
29.	$A(2; 1; 1),$	$B(2; -2; 0),$	$C(2; 0; 2),$	$D(-4; 5; 3).$
30.	$A(1; 1; 2),$	$B(2; 2; 6),$	$C(2; 1; 4),$	$D(2; 4; 1).$

5. ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

5.1 Аудиторні завдання

5.1.1. Звести рівняння поверхонь до канонічного вигляду, визначити тип поверхні, центр, піввісі. Зробити схематичне креслення у новій системі координат.

а) $4x^2 + 25y^2 + 100z^2 + 16x - 50y + 200z + 41 = 0$;

б) $x^2 + y^2 - z^2 + 2x - 4y + 2z + 4 = 0$;

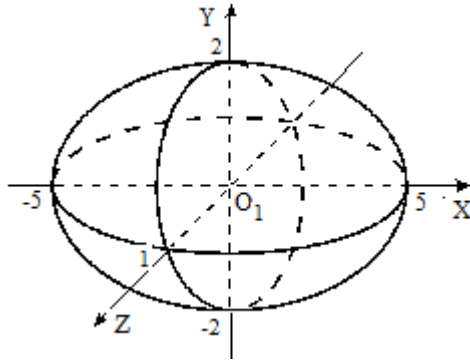
в) $x^2 + 2y^2 + 6x - 16y - 8z + 49 = 0$;

г) $4y^2 + z^2 + 16y - 2z + 13 = 0$;

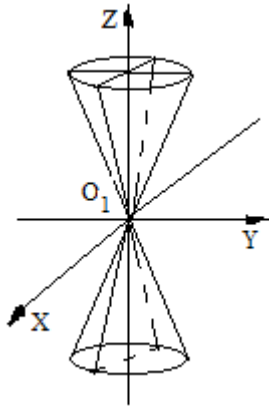
д) $4x^2 - 9z^2 - 8x - 36z - 68 = 0$.

Відповідь:

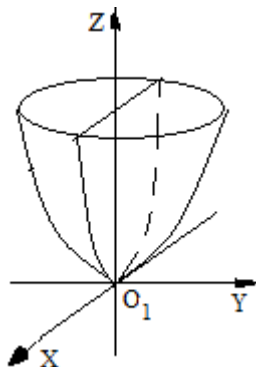
а) $\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{4} + \frac{(z+1)^2}{1} = 1$ – еліпсоїд. Центр $O_1(-2, 1, -1)$;
піввісі: $a = 5$, $b = 2$, $c = 1$.



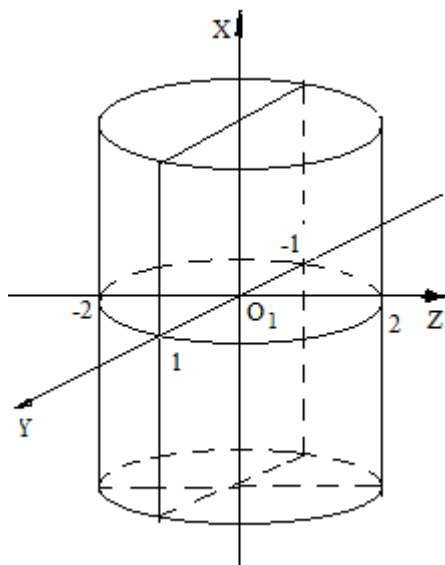
б) $(z-1)^2 = (x+1)^2 + (y-2)^2$ – конус, розташований вздовж вісі O_1Z .
Вершина $O_1(-1, 2, 1)$.



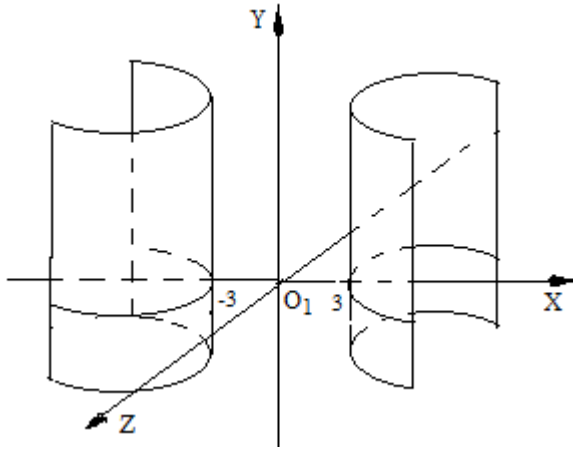
в) $z-1 = \frac{(x+3)^2}{8} + \frac{(y-4)^2}{4}$ – еліптичний параболоїд, розташований
в додатньому напрямку вісі O_1Z . Вершина $O_1(-3, 4, 1)$. Параметри:
 $2p=8 \Rightarrow p=4$; $2q=4 \Rightarrow q=2$.



- г) $\frac{(y+2)^2}{1} + \frac{(z-1)^2}{4} = 1$ – еліптичний циліндр, твірна якого паралельна вісі O_1X . Центр $O_1(0, -2, 1)$; піввісі: $b = 1$, $c = 2$.



- д) $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(z+2)^2}{4} = 1$ – гіперболічний циліндр, твірна якого паралельна вісі O_1Y . Центр $O_1(1, 0, -2)$; піввісі: $a = 3$; $b = 2$.



5.2 Індивідуальні завдання

5.2.1 Звести рівняння поверхонь до канонічного вигляду, визначити тип поверхні, центр, піввісі. Зробити схематичне креслення у новій системі координат.

1. а) $x^2 + z^2 - 4z + 2x - 4 = 0$;
 б) $x^2 + 2y^2 - 2x + 8y + 8z + 9 = 0$;
 в) $x^2 - 4y^2 + 16z^2 - 2x - 24y - 35 = 0$.
2. а) $2x^2 - y^2 - 4x - 2y - 3 = 0$;
 б) $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 16y - 2z = 0$;
 в) $x^2 - 9y^2 + 9z^2 + 4x - 18y - 18z - 5 = 0$.
3. а) $2x^2 + y^2 + 6z^2 + 6y + 12z - 3 = 0$;
 б) $16x^2 + 9z^2 + 64x + 32y - 18z + 41 = 0$;
 в) $3x^2 + 4y^2 - 6x + 8y - 5 = 0$.

4. a) $4x^2 - 2y^2 + z^2 - 16x - 8y + 2z - 7 = 0$;
б) $2y^2 - 4y + 5z + 7 = 0$;
в) $25x^2 + 4y^2 + 25z^2 - 150x + 16y + 141 = 0$.
5. a) $-9x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 18x - 16y - 18z - 20 = 0$;
б) $x^2 - 2x + y + 9 = 0$;
в) $4x^2 + 100y^2 + 25z^2 - 24x + 200y + 100z + 136 = 0$.
6. a) $9x^2 + 36y^2 + 4z^2 - 18x + 144y + 24z + 153 = 0$;
б) $16x^2 - 9y^2 - 32x + 160 = 0$;
в) $x^2 - 4y^2 + 2x - 8y - z = 0$.
7. a) $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 2z - 3 = 0$;
б) $3x^2 - 6x - 2z + 5 = 0$;
в) $4x^2 - 9y^2 + z^2 + 24x - 36y - 2z + 1 = 0$.
8. a) $9x^2 - 36y^2 + 4z^2 - 18x - 144y - 24z - 135 = 0$;
б) $3x^2 + 2y^2 + 6x - 4y - 1 = 0$;
в) $4x^2 - 4y^2 - 36z^2 + 16x - 8y + 72z - 40 = 0$.
9. a) $x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 4x - 4y - 6z - 9 = 0$;
б) $4x^2 + 25y^2 + 100z^2 + 16x - 50y + 200z + 41 = 0$;
в) $x^2 - 4y^2 - 8y + 12 = 0$.
10. a) $16x^2 + 9z^2 + 32x - 144y - 36z + 196 = 0$;
б) $x^2 + 2y^2 + 8y = 0$;
в) $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 2y - 8z + 22 = 0$.
11. a) $4x^2 - z^2 - 8x - 12 = 0$;

$$\text{б) } x^2 + 2y^2 - 8z^2 + 2x + 8y + 16z + 9 = 0;$$

$$\text{в) } x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 16y - 2z = 0.$$

$$12. \text{ а) } 5x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 20x - 8y - 24z - 40 = 0;$$

$$\text{б) } 16y^2 + 9z^2 - 144x - 64y + 36z - 188 = 0;$$

$$\text{в) } 3x^2 - 6x - 2y - 5 = 0.$$

$$13. \text{ а) } 2x^2 - z^2 - 4x = 0;$$

$$\text{б) } x^2 + 2y^2 - 2x + 8y + 8z + 9 = 0;$$

$$\text{в) } -x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 2x + 16y + 54z + 60 = 0.$$

$$14. \text{ а) } 3y^2 + 2z^2 - 6y + 4z - 1 = 0;$$

$$\text{б) } 9x^2 + 4y^2 - z^2 + 36x + 24y + 2z + 71 = 0;$$

$$\text{в) } 2x^2 + 8y^2 + z^2 - 8x - 48y + 72 = 0.$$

$$15. \text{ а) } 4x^2 - 25y^2 + 5z^2 - 8x + 50y + 20z + 99 = 0;$$

$$\text{б) } x^2 + z^2 - 6x + 8z - 39 = 0;$$

$$\text{в) } 4x^2 + 9z^2 + 36y - 18z + 81 = 0.$$

$$16. \text{ а) } x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 6x - 4y - 16z + 11 = 0;$$

$$\text{б) } x^2 + 2y^2 - 8z^2 + 2x - 8y + 16z - 7 = 0;$$

$$\text{в) } 2x^2 + 5y^2 - 4x + 10y - 3 = 0.$$

$$17. \text{ а) } x^2 + y^2 - z^2 + 2y - 2z = 0;$$

$$\text{б) } 3x^2 - 6x + 2z + 1 = 0;$$

$$\text{в) } 4x^2 + 9y^2 + z^2 - 8x - 36y + 6z + 13 = 0.$$

$$18. \text{ а) } x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 6z - 2 = 0;$$

$$\text{б) } x^2 + y^2 - 6x - 6y - 4z + 18 = 0;$$

$$\text{в)} y^2 + z^2 - 4y + 6z - 12 = 0.$$

$$19. \text{ а)} 9x^2 - z^2 - 18x - 18y - 6z = 0;$$

$$\text{б)} 4x^2 + 25y^2 - 25z^2 + 8x - 100y + 50z + 79 = 0;$$

$$\text{в)} x^2 - y^2 - 8x + 8y - 1 = 0.$$

$$20. \text{ а)} 2x^2 + y^2 + 4z^2 - 8x + 8z - 4 = 0;$$

$$\text{б)} 3x^2 - 2z^2 + 6x + 4z + 7 = 0;$$

$$\text{в)} x^2 + y^2 - z^2 - 2x + 2y + 2z + 2 = 0.$$

$$21. \text{ а)} 2x^2 - 4x + 3y + 5 = 0;$$

$$\text{б)} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 4z - 11 = 0;$$

$$\text{в)} 9x^2 - y^2 - z^2 + 2y - 6z - 10 = 0.$$

$$22. \text{ а)} 3z^2 + 2x + 6z + 3 = 0;$$

$$\text{б)} x^2 + y^2 - z^2 - 2x + 2y + 2z + 2 = 0;$$

$$\text{в)} 25x^2 + 4y^2 + 25z^2 - 150x + 16y + 141 = 0.$$

$$23. \text{ а)} 4x^2 - 36y^2 - 4z^2 + 16x + 72y - 8z - 40 = 0;$$

$$\text{б)} 16y^2 - 9z^2 + 144x - 32y - 54z + 79 = 0;$$

$$\text{в)} x^2 - z^2 - 2x - 2z - 4 = 0.$$

$$24. \text{ а)} 9x^2 - y^2 + z^2 - 2y + 4z - 6 = 0;$$

$$\text{б)} 2y^2 - 4y + 5z + 7 = 0;$$

$$\text{в)} 9x^2 + y^2 + 9z^2 + 4y - 18z + 13 = 0.$$

$$25. \text{ а)} x^2 - 2y^2 + z^2 - 2x - 8y - 6z + 10 = 0;$$

$$\text{б)} x^2 + z^2 - 2x = 0;$$

$$\text{в)} 4x^2 + 9y^2 + 36z^2 - 8x - 18y - 72z + 13 = 0.$$

26. а) $4x^2 - y^2 + 4z^2 - 8x + 4y + 8z + 4 = 0$;
 б) $2y^2 - 3z^2 + 4y + 6z - 7 = 0$;
 в) $16y^2 + 9z^2 - 144x - 64y + 36z - 188 = 0$.
27. а) $x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 4x - 4y - 6z - 9 = 0$;
 б) $x^2 - 4x + 3z + 1 = 0$;
 в) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 2z - 6 = 0$.
28. а) $16x^2 + 9y^2 - 32x - 36y - 144z - 92 = 0$;
 б) $3y^2 + 2x + 12y + 10 = 0$;
 в) $9x^2 - y^2 + 4z^2 - 18x - 2y + 4z - 24 = 0$.
29. а) $4x^2 - 9y^2 - z^2 + 8x + 18y - 4z - 45 = 0$;
 б) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 4z - 11 = 0$;
 в) $2x^2 + 5z^2 + 4x - 10z - 3 = 0$.
30. а) $y^2 + 4z^2 + 36x + 4y - 24z + 4 = 0$;
 б) $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0$;
 в) $4x^2 + y^2 + 4z^2 + 16x - 2y - 8z + 5 = 0$.

6. ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ

6.1 Аудиторні завдання

- 1) Нехай $\bar{a} = (x, y, z)$. Чи будуть лінійними наступні перетворення:
 $A\bar{a} = (x^2, x - z, y + z)$, $B\bar{a} = (1, x - z, y + z)$, $C\bar{a} = (x, x - z, y + z)$?

Відповідь: Ні, ні, так

2). Знайти матрицю в базисі $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, яка в базисі $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ має вигляд

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{якщо} \quad \bar{e}_1 = \bar{i} - \bar{j} + \bar{k}, \quad \bar{e}_2 = -\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}, \\ \bar{e}_3 = -\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}.$$

$$\text{Відповідь: } D' = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 23 \\ -3 & -1 & 15 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

3). Знайти власні значення та власні вектори матриці:

$$G = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Відповідь: } \lambda_1 = 1, \bar{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \lambda_2 = 3, \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \lambda_3 = 4, \bar{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4) Привести квадратичну форму до канонічного вигляду:

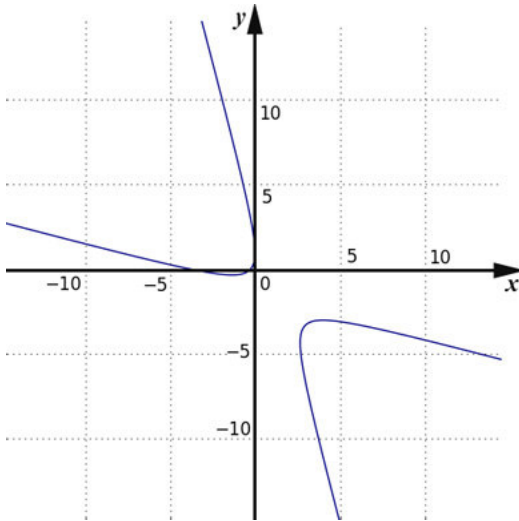
$$x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz.$$

$$\text{Відповідь: } F(x', y', z') = 3x'^2 - 2y'^2 + 6z'^2$$

5) Дослідити криву другого порядку та побудувати її:

$$x^2 + y^2 - 4xy + 4x - 2y + 1 = 0$$

$$\text{Відповідь: Канонічне рівняння } \frac{9}{16} \tilde{x}^2 - \frac{3}{16} \tilde{y}^2 = -1, \text{ це гіпербола.}$$



6.2 Індивідуальні завдання

- 1) Нехай $\bar{a} = (x, y, z)$. Чи будуть лінійними наступні перетворення:
 $\bar{A}\bar{a}$, $\bar{B}\bar{a}$, $\bar{C}\bar{a}$?
- 2) Знайти матрицю в базисі $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, яка в базисі $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ має вигляд D , якщо $\bar{e}_1 = \bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$, $\bar{e}_2 = -\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}$, $\bar{e}_3 = -\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$.
- 3) Знайти власні значення та власні вектори матриці G .
- 4) Привести квадратичну форму $F(x, y, z)$ до канонічного вигляду.
- 5) Дослідити криву другого порядку $\Phi(x, y) = 0$ та побудувати її.

1. $\bar{A}\bar{a} = (6x - 5y - 4z, 3x + 2y - z, y + 2z)$,
 $\bar{B}\bar{a} = (6 - 5y - 4z, 3x - 2y - z, y + 2)$, $\bar{C}\bar{a} = (z^4, 3x - z, y + 2z)$,
 $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$,
 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 2xy + 2xz + 2yz$,

$$\Phi(x, y) = -x^2 - y^2 + 4xy + 2x - 4y + 1.$$

$$\begin{aligned} 2. \quad & \bar{Aa} = (5x - 4y - 3z, 2x - y, y + 2), \\ & \bar{Ba} = (5x - 4y - 3z, 0, y^4 + 2z), \quad \bar{Ca} = (5x - 4y, 2x - z, y + 2z), \\ & D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \\ & F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 8xy + 4xz + 4yz, \\ & \Phi(x, y) = 2x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x - 2y + 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad & \bar{Aa} = (4x - 3y - 2z, x - z, x + 2y^4 + z), \\ & \bar{Ba} = (4x - 3y - 2z, x, x + 2y + 3z), \quad \bar{Ca} = (4x, x, y + z + 3), \\ & D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \\ & F(x, y, z) = x^2 + y^2 + 3z^2 + 2xy - 2xz - 2yz, \\ & \Phi(x, y) = 4xy + 4x - 4y. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad & \bar{Aa} = (3x + 2y + z, z, 2x - 3y + 4z), \\ & \bar{Ba} = (3x + 2y + z, z, 2x - 3y + 4), \quad \bar{Ca} = (3x, z, 2x^2 + y + z), \\ & D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \\ & F(x, y, z) = -2z^2 - 2xy + 2xz + 2yz, \\ & \Phi(x, y) = -2x^2 - 2y^2 + 2xy - 6x + 6y + 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. \quad & \bar{Aa} = (x + 6y - z, x - 2y - 3z, 4x + y - 6), \\ & \bar{Ba} = (x, x - 2y - 3z, xy + z), \quad \bar{Ca} = (x, x - 2y - 3z, x + y + z), \end{aligned}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$F(x, y, z) = 5x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 8xy + 4xz + 4yz,$$

$$\Phi(x, y) = -3x^2 - 3y^2 + 4xy - 6x + 4y + 2.$$

$$6. \quad \bar{Aa} = (2x + y, y - 2z, 3x - 4y^2 + z),$$

$$\bar{Ba} = (2x + y, y - 2z, 3x - 4y - 5z), \quad \bar{Ca} = (2x + y, y - 2, y + z),$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$F(x, y, z) = 5x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2xy + 2xz + 2yz,$$

$$\Phi(x, y) = -2xy - 2x - 2y + 1.$$

$$7. \quad \bar{Aa} = (x, x + 2y - 3z, 4x + 5y + 6z),$$

$$\bar{Ba} = (x, x + 2y - 3, y + z), \quad \bar{Ca} = (x, x + 2y + 3z, 4x^3 + 5y + z),$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$F(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4xy + 4xz - 8yz,$$

$$\Phi(x, y) = -x^2 - y^2 - 4xy - 4x - 2y + 2.$$

$$8. \quad \bar{Aa} = (3x - 2y - z, 1, x + 2y + 3z),$$

$$\bar{Ba} = (3x - 2y - z, 0, x^3 + 2y), \quad \bar{Ca} = (3x - 2y - z, z, x + 2y + 3z),$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$F(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz - 2yz,$$

$$\Phi(x, y) = -4x^2 - 4y^2 + 2xy + 10x - 10y + 1.$$

$$9. \quad \bar{Aa} = (2x - y, z, x + 2y + 3z^4),$$

$$\bar{Ba} = (2x - y, z, x + 2y + 3z), \quad \bar{Ca} = (2x - y, 1, x + 2y + 3),$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + 3z^2 + 8xy + 4xz + 4yz,$$

$$\Phi(x, y) = 4xy + 4x - 4y - 2.$$

$$10. \quad \bar{Aa} = (z, 2x + 3y - z, 5x + 6y + 7z),$$

$$\bar{Ba} = (z, 2x + 3y - 1, 5x + 6 + 7z), \quad \bar{Ca} = (z, 0, 5x^2 + 6y + z),$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix},$$

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 2yz,$$

$$\Phi(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy - 8x - 8y + 1.$$

$$11. \quad \bar{Aa} = (6x - 5y - 4z, 3x - 2y - z, 0),$$

$$\bar{Ba} = (6x - 5y - 4, 3x - 2y - z, 0), \quad \bar{Ca} = (6x - 5y - 4z, 3x - z^2, 0),$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$F(x, y, z) = 5x^2 + 3y^2 + 5z^2 - 4xy + 8xz + 4yz,$$

$$\Phi(x, y) = x^2 + y^2 + 4xy - 8x - 4y + 1.$$

$$12. \quad \bar{Aa} = (5x - 4y - 3, 2x - y, y + z^2),$$

$$\overline{Ba} = (5x - 4y - 3z, 2x - y, 1), \quad \overline{Ca} = (5x - 4y - 3z, 2x - y, y),$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$F(x, y, z) = 5x^2 + 3y^2 + 5z^2 - 2xy + 2xz + 2yz,$$

$$\Phi(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 2y - 7.$$

$$13. \quad \overline{Aa} = (4x - 3y - 2z, x^2, y + 2z),$$

$$\overline{Ba} = (4x - 3y - 2z, x, y + 2z), \quad \overline{Ca} = (4x - 3y - 2, x^2, y + 2),$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$F(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + 3z^2 - 4xy + 8xz + 4yz,$$

$$\Phi(x, y) = 2xy + 2x + 2y - 3.$$

$$14. \quad \overline{Aa} = (3x + 2y + z, 0, x - 2y + 3z),$$

$$\overline{Ba} = (3x + 2y + 1, 0, x - 2y + 3z), \quad \overline{Ca} = (3x + 2y + z, 0, x^2),$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$F(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz - 2yz,$$

$$\Phi(x, y) = 4x^2 + 4y^2 + 2xy + 12x + 12y + 1.$$

$$15. \quad \overline{Aa} = (x, y - 2z, 3x - 4y - 5),$$

$$\overline{Ba} = (x, y^2 - 2z, 3x - 4y - 5z), \quad \overline{Ca} = (x, y - 2z, 3x - 4y - 5z),$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$$F(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz,$$

$$\Phi(x, y) = 3x^2 + 3y^2 + 4xy + 8x + 12y + 1.$$

$$16. \bar{Aa} = (x + y, z^2, 2x - 3y + 4z),$$

$$\bar{Ba} = (x + y, z, 2x - 3y + 4z), \bar{Ca} = (x + y, z, 2x - 3 + 4z),$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix},$$

$$F(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz,$$

$$\Phi(x, y) = x^2 + y^2 - 8xy - 20x + 20y + 1.$$

$$17. \bar{Aa} = (x, y + 2, 3x + 4y + 5z),$$

$$\bar{Ba} = (x, y + 2z, 3 + 4y + 5z), \bar{Ca} = (x^3, y + 2z, 3x + 4y + 5z),$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$F(x, y, z) = 3x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 4xy - 4xz - 8yz,$$

$$\Phi(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 2xy - 6x + 2y + 1.$$

$$18. \bar{Aa} = (3x - 2y - 1, 0, x + 2y + 3z),$$

$$\bar{Ba} = (3x^2 - 2y - z, 0, x + 2y + 3z), \bar{Ca} = (3x - 2y - z, 0, 0),$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 13 & 2 & -2 \\ 6 & 9 & -6 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix},$$

$$F(x, y, z) = 3x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz,$$

$$\Phi(x, y) = 4xy + 4x + 4y + 1.$$

$$19. \bar{Aa} = (2x^2 - y + 5z, z, 2y + 3z),$$

$$\bar{Ba} = (2x - y + 5z, z, 2y + 3z), \quad \bar{Ca} = (2x - y + 5z, z, 2y + 3),$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$F(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + z^2 - 8xy - 4xz - 4yz,$$

$$\Phi(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 4xy + 6x - 4y - 7.$$

$$20. \bar{Aa} = (0, x - 2y + 3z, 4x + 5y + 6z),$$

$$\bar{Ba} = (0, x - 2y, 4x + 5y + 6), \quad \bar{Ca} = (0, x^3 - 2y, 4x + 5y + 6z),$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & -4 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix},$$

$$F(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz,$$

$$\Phi(x, y) = -4xy - 4x + 4y + 6.$$

$$21. \bar{Aa} = (6x - 5y - 4z, 3x - 2y - z, y),$$

$$\bar{Ba} = (6x - 5y - 4, 3x - z, y), \quad \bar{Ca} = (6x - 5y - 4z^2, 3x - 2y, 0),$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 2 & 13 & -4 \\ 2 & -2 & 11 \end{pmatrix},$$

$$F(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 4xz + 8yz,$$

$$\Phi(x, y) = 5x^2 + 5y^2 - 2xy + 10x - 2y + 1.$$

$$22. \bar{Aa} = (5x - 4y - 3, 2x - z, x + 2y + z),$$

$$B\bar{a} = (5x - 3z^2, 2x - z, x + 2y), \quad C\bar{a} = (5x - 4y, 2x - z, x + 2y),$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 19 & 2 & -2 \\ 6 & 15 & -6 \\ 2 & -2 & 11 \end{pmatrix},$$

$$F(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz + 2yz,$$

$$\Phi(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 4xy + 8x + 8y + 1.$$

$$23. \quad A\bar{a} = (x^2 - 2z, x + z, y + z + 1),$$

$$B\bar{a} = (x - 2z, x + z, x + y + z), \quad C\bar{a} = (x - 2z - 2, x + z, x + y + z),$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$F(x, y, z) = -z^2 - 8xy + 4xz + 4yz,$$

$$\Phi(x, y) = -x^2 - y^2 + 2xy + 2x - 2y + 1.$$

$$24. \quad A\bar{a} = (3x + 5z, 6x + 7y - z, 9x + z),$$

$$B\bar{a} = (3x + 5, 6x + 7y - z, 9x + z), \quad C\bar{a} = (3x + 5z, 6x^3 + 7y - z, 0),$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$F(x, y, z) = 2z^2 + 2xy - 2xz - 2yz,$$

$$\Phi(x, y) = 2x^2 + 2y^2 - 4xy - 8x + 8y + 1.$$

$$25. \quad A\bar{a} = (2x + 3y + 4, 5x + 6y - 7, 8y),$$

$$B\bar{a} = (2x + 3y + 4x^2, 5x + 6y, 0), \quad C\bar{a} = (2x + 3y + 4x, 5x + 6y, 0),$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$F(x, y, z) = 2z^2 + 8xy - 4xz - 4yz,$$

$$\Phi(x, y) = 3x^2 + 3y^2 + 2xy - 12x - 4y + 1.$$

$$26. \bar{Aa} = (x^2 + z, 2x + 3y + 4z, 2y + z),$$

$$\bar{Ba} = (x + z, 2x + 3y + 4z, 2y + z), \bar{Ca} = (x + 1, 2x + 3y + 4z, 2y),$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$F(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 - 2xy + 2xz + 2yz,$$

$$\Phi(x, y) = -4xy + 8x + 8y + 1$$

$$27. \bar{Aa} = (3x - 2y - z, y + 2z, 3x + y + z),$$

$$\bar{Ba} = (3x - 2y - 1, y + 2z, 3x + y + z), \bar{Ca} = (3x - 2y - z^3, 2z, 0),$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$F(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 - 8xy + 4xz + 4yz,$$

$$\Phi(x, y) = 2x^2 + 2y^2 - 2xy + 6x - 6y - 6.$$

$$28. \bar{Aa} = (2x - y, x + 2y + 2z, 5y + 6z),$$

$$\bar{Ba} = (2x - y^2, x + 2y + 2z, 0), \bar{Ca} = (2x - y, x + 2y + 2, 5y + 6z),$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 9 & -6 & -6 \\ -2 & 5 & -2 \\ -2 & 2 & 13 \end{pmatrix},$$

$$F(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 2xy + 2xz + 2yz,$$

$$\Phi(x, y) = x^2 + y^2 + 4xy + 4x + 2y - 5.$$

$$29. \bar{Aa} = (x^3 + 2y, 4x + 5y + 6z, 7x + 8y),$$

$$\bar{B}\bar{a} = (x + 2y, 4x + 5y + 6z, 7x + 8y), \quad \bar{C}\bar{a} = (x + 2, y + 6z, 8y),$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 7 \end{pmatrix},$$

$$F(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 8xy - 4xz - 4yz,$$

$$\Phi(x, y) = 4xy + 4x - 4y + 4.$$

$$30. \quad \bar{A}\bar{a} = (x + 2z, 3x + 4z, 6x - 7y + z),$$

$$\bar{B}\bar{a} = (x + 2, 3x + 4z, 6x - 7y + z), \quad \bar{C}\bar{a} = (x^2, 4z, 6x - 7y + z),$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix},$$

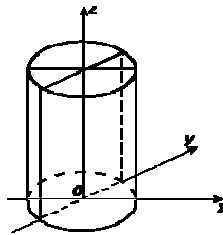
$$F(x, y, z) = -2x^2 + 5y^2 - 2z^2 + 4xy + 4yz,$$

$$\Phi(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 4xy + 4x + 4y - 1.$$

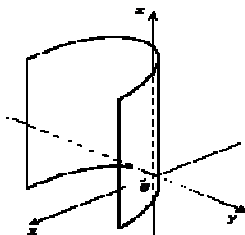
7. ДОВІДКОВИЙ МАТЕРІАЛ «ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ».

1) Циліндри поділяються на:

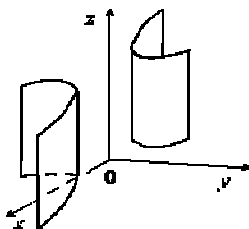
а) *еліптичний* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($x^2 + y^2 = R^2$ – *круговий* циліндр)



б) параболічний $y^2 = 2px$

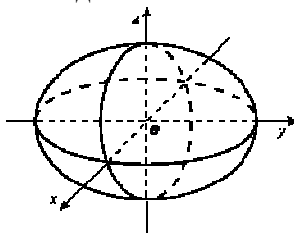


в) гіперболічний $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



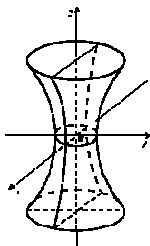
2) Поверхню, утворену обертанням заданої плоскої кривої L навколо заданої прямої (осі), розташованої в площині кривої L , називають **поверхнею обертання**. Розглянемо деякі з них.

а) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ – канонічне рівняння еліпсоїда. Числа a, b, c називаються *півосями* еліпсоїда.

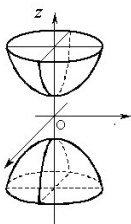


Якщо $a=b=c$ маємо сферу $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ з центром в початку координат.

б) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ – канонічне рівняння *однопорожнинного гіперболоїда*

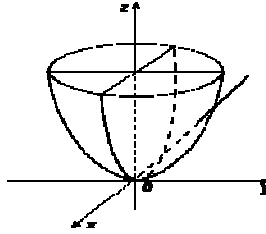


в) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ – канонічне рівняння *двопорожнинного гіперболоїда*

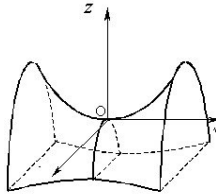


Обидва гіперболоїди є симетричні відносно координатних площин, а початок координат точка O є їх *центром* симетрії. Числа a, b, c називаються *півосями* гіперболоїда.

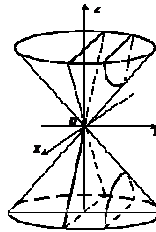
г) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$ – канонічне рівняння *еліптичного параболоїда*



д) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$ – канонічне рівняння гіперболічного параболоїда



е) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ – канонічне рівняння конуса



ЛІТЕРАТУРА

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Т.1. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.: Дрофа, 2004. – 288 с.
2. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне і інтегральне числення / Овчинников П.П. [та ін.] – К. : Техніка, 2003. – 600 с.
3. Вища математика. Модуль 1. Лінійна, векторна алгебра та аналітична геометрія: Навч. посібник / Антоненко В.Ф., Ключ І.С., Горідько Р.В., Чуб Л.О.– К. : Книжкове вид-во НАУ, 2006. – 300 с.
4. Вища математика: підручник. У 2 кн. Кн. 1 / Г. Й. Призва, В. В. Плахотник, Л. Д. Гординський та ін.; за ред. Г. Л. Кулініча. — К.: Либідь, 2003. — 400 с. — ISBN 966-06-0229-4.
5. Вся высшая математика: учеб. / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко и др. — Т. 1. — М.: Эдиториал УРСС, 2010. — 336 с. — ISBN 978-5-35401237-4.
6. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах с решениями. В 2 ч. Ч. 1: Учебное пособие для вузов / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М. : ОНИКС 21 век, 2002. – 304 с.
7. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навчальний посібник. У трьох частинах. Ч.1.- Х.: Веста, 2008. - 200с., іл.
8. Сборник индивидуальных задач по высшей математике : Учебное пособие. Ч.1/А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юроть. Под общей ред. А.П. Рябушко.- Мн.: Высш. шк., 1990.- 270 с.