

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет «Запорізька політехніка»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять та самостійної роботи

з дисципліни

„ТЕОРІЯ ПОЛЯ“

для студентів спеціальності

176 „Мікро- та наносистемна техніка“,

освітня програма: „Мікро- та наноелектронні прилади і пристрої“

першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

денної й заочної форм навчання

Методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи з дисципліни „Теорія поля“ для студентів спеціальності 176 „Мікро- та наносистемна техніка“, освітня програма: „Мікро- та наноелектронні прилади і пристрої“ першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної й заочної форм навчання / Укл.: Андрій КОРОТУН, Валерій КУРБАЦЬКИЙ, Олександр БЕРЕЖНИЙ. – Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2025. – 40 с.

Укладачі: Андрій КОРОТУН, проф., канд. фіз.-матем. наук,
Валерій КУРБАЦЬКИЙ, доц., канд. фіз.-матем. наук,
Олександр БЕРЕЖНИЙ, аспірант

Рецензент: Валентин ПОГОСОВ, проф., д-р фіз.-матем. наук

Відповідальний за випуск: Андрій КОРОТУН, проф., канд. фіз.-матем. наук

Затверджено
на засіданні кафедри
інформаційної безпеки
та наноелектроніки

Протокол №5
від „22“ січня 2025 р.

Рекомендовано до видання
НМК ФІБЕК
Протокол №6
від “29“ січня 2025 р.

ЗМІСТ

1. Рівняння Максвелла в інтегральній формі	4
1.1 Основні формули та визначення	4
1.2 Приклади розв'язування задач	7
1.3 Задачі для самостійного розв'язування	14
2. Диференціальні оператори теорії поля	15
2.1 Основні формули та визначення	15
2.2 Приклади розв'язування задач	17
2.3 Задачі для самостійного розв'язування	22
3. Електро- та магніостатика	24
3.1 Основні формули та визначення	24
3.2 Приклади розв'язування задач	25
3.3 Задачі для самостійного розв'язування	30
4. Електромагнітні хвилі	32
4.1 Основні формули та визначення	32
4.2 Приклади розв'язування задач	34
4.3 Задачі для самостійного розв'язування	38
Рекомендована література	40

1. РІВНЯННЯ МАКСВЕЛА В ІНТЕГРАЛЬНІЙ ФОРМІ

1.1 Основні формули та визначення

Найбільш загальний вигляд системи рівнянь Максвелла в інтегральній формі для однорідного середовища такий:

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int \rho dV, \quad (1.1)$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (1.2)$$

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}, \quad (1.3)$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \quad (1.4)$$

Окрім характеристик електричного і магнітного поля, рівняння включають величини, які описують розподіл у середовищі *сторонніх* зарядів і струмів провідності. Величина ρ називається *об'ємною густиною заряду* і визначається так, що $dq = \rho dV$ є заряд, який знаходиться в об'ємі dV . Величина \mathbf{j} називається *вектором густини струму провідності* і визначається за формулою

$$\mathbf{j} = qn\mathbf{v}, \quad (1.5)$$

де n – концентрація у середовищі вільних заряджених частинок, тобто таких, які можуть перемішуватись на макроскопічні відстані, q – їх заряд, \mathbf{v} – середня швидкість.

Рівняння (1.3) рідко використовується в такому вигляді. Звичайно у правій частині рівняння залишають тільки один з двох членів, набагато більший за інший. *Діелектричне* середовище відзначається тим, що в ньому дуже мало заряджених частинок, які можуть вільно перемішуватись на макроскопічні відстані. Атоми (або молекули) середовища є електрично нейтральними; під дією поля негативні і позитивні заряди в атомах зазнають лише мікроскопічного зміщення. Це означає, що у діелектричному середовищі $n = 0$, тож маємо $\mathbf{j} = 0$.

Коли рівняння (1.1) – (1.4) використовуються разом, до них повинні бути додані співвідношення, які встановлюють зв'язок між векторами \mathbf{E} і \mathbf{D} , \mathbf{B} і \mathbf{H} . Скористуємось співвідношеннями $\mathbf{E} = \mathbf{D}/\varepsilon\varepsilon_0$, де величина $\varepsilon \equiv 1 + \chi$ називається *діелектричною проникністю*, і $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$. Отримуємо для однорідного ізотропного діелектричного середовища систему рівнянь

$$\oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \int \rho dV, \quad (1.6)$$

$$\oiint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (1.7)$$

$$\oiint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \varepsilon\varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}, \quad (1.8)$$

$$\oiint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \quad (1.9)$$

В рівняння (1.6) – (1.9) входять інтеграли трьох типів. Інтеграл в правій частині (1.6) дорівнює заряду, що знаходиться в об'ємі, за яким виконується інтегрування. Якщо це сукупність точкових зарядів, то

$$\int \rho dV = \sum_i q_i. \quad (1.10)$$

Поверхневий інтеграл $\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ за деякою поверхнею S називається *поток вектора \mathbf{A} крізь поверхню S* . Елемент поверхні визначається за формулою $d\mathbf{S} = \mathbf{e}_n dS$, де dS – площа маленької ділянки поверхні, \mathbf{e}_n – *одичинний вектор зовнішньої нормалі* до цієї ділянки. Він має модуль, який дорівнює одиниці, і спрямований вздовж перпендикуляру до поверхні в бік, що визначається за домовленістю. Потік можна записати в іншому вигляді:

$$\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_n dS = \int A_n dS, \quad (1.11)$$

де A_n – проекція вектора \mathbf{A} на напрямок зовнішньої нормалі.

Коло в позначенні поверхневого інтегралу $\oiint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ означає, що поверхня інтегрування замкнена. В рівняннях (1.6) і (1.7) потік поля визначається крізь *довільну замкнену* поверхню, що не перетинає границю середовища; в (1.6) вона охоплює об'єм, за яким виконується інтегрування у правій частині.

Криволінійний інтеграл $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$, де інтегрування проводиться за деякою замкненою лінією (*контуром*) Γ , називається *циркуляцією вектора \mathbf{A} по контуру Γ* . Елемент контуру визначається як $d\mathbf{r} = \mathbf{e}_t dr$, де dr – довжина дуги маленької ділянки контуру, \mathbf{e}_t – *одичний вектор дотичної* до контуру, спрямований вздовж дотичної в напрямку *обходу контуру*, який встановлюється за домовленістю.

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \oint \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_t dr = \oint A_t dr, \quad (1.12)$$

де A_t – проекція вектора \mathbf{A} на напрямок обходу контуру.

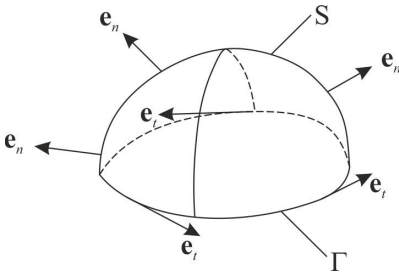


Рисунок 1.1 – Правилем гвинта

Поверхні, крізь які визначається потік у рівняннях (1.8) та (1.9), можуть мати довільну форму, не перетинають границі середовища і обмежуються довільними контурами, по яких розраховується циркуляція в правій частині цих рівнянь. Напрямок зовнішньої нормалі до поверхні і напрямком обходу контуру, що обмежує поверхню, пов'язані між собою за правилом гвинта (рис. 1.1).

У *провідниках* концентрація вільних зарядів настільки велика, що другим членом у правій частині рівняння (1.3) можна знехтувати:

$$\oiint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}. \quad (1.13)$$

Величина

$$\int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \equiv I, \quad (1.14)$$

де інтегрування проводиться по площині перерізу провідника, називається *силою струму*.

У багатьох задачах сила струму вважається заданою величиною. Якщо є суттєвим розподіл струму у провідному середовищі, то запишемо

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad (1.15)$$

де $\sigma = \text{const}$. Величина σ називається *електропровідністю*, або просто *провідністю*. Співвідношення (1.15) виконується, якщо середовище однорідне та ізотропне, і електричне поле змінюється не дуже швидко у часі і просторі.

За відсутності стороннього джерела енергії (зовнішнє змінне магнітне поле, джерело е.р.с.) струм не може існувати, тому що його протікання пов'язане з розсіюванням енергії. Таким чином, у стаціонарному випадку у провідному середовищі за відсутності сторонньої е.р.с. $\mathbf{E} = 0$. При цьому зовнішнє електричне поле або поле сторонніх зарядів у середовищі \mathbf{D} може бути відмінним від нуля.

1.2 Приклади розв'язування задач

Приклад 1.2.1. Розрахуйте потік вектора напруженості електричного

поля $\mathbf{E} = \frac{1}{2}E\mathbf{j} + \frac{\sqrt{3}}{2}E\mathbf{k}$ через ділянку площини xu , обмежену квадратним контуром із сторонами довжини a , паралельними осям координат. Знайдіть циркуляцію поля по цьому контуру.

Розв'язок

Одиничний вектор нормалі до площини контуру \mathbf{k} . Потік вектора \mathbf{E} крізь ділянку, обмежену контуром, дорівнює

$$\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{k} dS = \frac{\sqrt{3}}{2} E a^2.$$

Циркуляція вектора \mathbf{E} по контуру

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_l dr = \mathbf{E} \cdot \mathbf{i}a + \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}a + \mathbf{E} \cdot (-\mathbf{i})a + \mathbf{E} \cdot (-\mathbf{j})a = 0.$$

Відповідь: $\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{k} dS = \frac{\sqrt{3}}{2} E a^2$; $\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_r dr = 0$.

Приклад 1.2.2. Точковий заряд $q < 0$ знаходиться в початку координат. Запишіть рівняння ліній напруженості в площині xy .¹

Розв'язок

Поле точкового заряду

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

Його проєкції на осі координат

$$E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{r^3}, \quad E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{r^3}.$$

Рівняння ліній напруженості у площині xy має вигляд

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y}.$$

Користуючись виразами для проєкцій поля, приводимо це рівняння до вигляду

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

Інтегруючи, отримуємо остаточно

$$\frac{y}{x} = \text{const}.$$

Це рівняння сім'ї прямих, що проходять через початок координат.

Відповідь: $y/x = \text{const}$.

¹ Тут і далі, якщо не назване середовище, вважається, що це повітря.

Приклад 1.2.3. Отримати граничні умови для електричного поля – співвідношення між тангенціальними і нормальними компонентами електричного поля по різні сторони від границі розділу середовищ 1 і 2: $E_{1t} = E_{2t}$, $D_{1n} - D_{2n} = \sigma$, де σ – поверхнева густина сторонніх зарядів.

Розв'язок

Застосуємо рівняння

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

до прямокутника з достатньо малими сторонами l і h , сторони l паралельні межі поділу і розташовані з обох боків від неї, сторони h перетинають межу перпендикулярно. Нехай $h \rightarrow 0$. Циркуляція у лівій частині рівняння набуває вигляду $(E_{1t} - E_{2t})l$, потік у правій частині $Blh \rightarrow 0$. В результаті отримуємо граничну умову $E_{1t} = E_{2t}$.

Тепер розглянемо паралелепіпед, дві грані якого площею S паралельні межі поділу середовищ і розташовані з обох боків від неї, ребра h перетинають межу. Використаємо рівняння $\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q$. Знову $h \rightarrow 0$. Потік індукції $(D_{1n} - D_{2n})S$, заряд всередині паралелепіпеда $q = \sigma S$. Прирівнюючи, отримуємо

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma.$$

Приклад 1.2.4. Простір між обкладинками плоского конденсатора заповнений діелектриком з діелектричною сприйнятливостю χ . Густина заряду на обкладинках σ . Знайти напруженість поля між обкладинками і густину поляризаційного заряду.

Розв'язок

Стационарний стан в обкладинках буде при умові, що заряд (сторонній) зосереджений на внутрішній поверхні кожної обкладинки і має протилежні знаки на різних обкладинках, так що в об'ємі обкладинок $\mathbf{D}_2 = 0$, $\mathbf{E}_2 = 0$. Скориставшись граничними умовами (див.

приклад 1.2.3), отримуємо, що між обкладинками $E_t = 0$, $D_n = \sigma$ (індекс 1 випускаємо). Таким чином, вектор напруженості поля у середовищі між обкладинками має лише нормальну складову

$$E_n = \frac{\sigma}{(1 + \chi)\epsilon_0}.$$

З іншого боку, можна записати

$$E_n = \frac{\sigma'}{\epsilon_0},$$

де σ' – поверхнева густина *всього* заряду, тобто $\sigma' = \sigma + \sigma_{\text{пол}}$. Враховуючи це, знаходимо, що

$$\sigma_{\text{пол}} = -\frac{\chi}{1 + \chi}\sigma.$$

Відповідь: $\sigma_{\text{пол}} = -\frac{\chi}{1 + \chi}\sigma.$

Приклад 1.2.5. Точковий заряд $q > 0$ помістили в центр металевої сфери з внутрішнім радіусом R_1 і зовнішнім радіусом R_2 . Знайдіть поле. Як зміниться поле після заземлення сфери?

Розв'язок

Розглянемо спочатку випадок, коли сфера ізольована, тобто оточена діелектричним середовищем. Обираючи у формулі $\oiint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q$ в якості поверхні інтегрування сферу радіуса r , знаходимо, що

$$\mathbf{D} = \frac{q\mathbf{r}}{4\pi r^3}$$

для всіх значень r .

Далі,

$$\mathbf{E} = \frac{q\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad 0 < r < R_1;$$

$$\mathbf{E} = 0, \quad R_1 < r < R_2;$$

$$\mathbf{E} = \frac{q\mathbf{r}}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^3}, \quad r > R_2,$$

ϵ – діелектрична проникність оточуючого сферу середовища.

Коли сферу заземлюють, її зовнішню поверхню дротом з'єднують з провідником великої електричної ємності. Заряд q уходить із зовнішньої поверхні сфери «у землю». В результаті за межами сфери електричне поле зникає:

$$\mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{E} = 0, \quad r > R_2.$$

В стінці ($R_1 < r < R_2$) також $\mathbf{D} = 0$, $\mathbf{E} = 0$, у внутрішньому об'ємі $0 < r < R_1$ поле залишається незмінним.

Приклад 1.2.6. Знайдіть, яка кількість теплоти виділяється за 1 с в 1 мм^3 міді при густині струму 1 А/мм^2 . Електропровідність міді $5,9 \cdot 10^7 \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$.

Розв'язок

Теплова потужність в одиниці об'єму дорівнює

$$Q = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}.$$

Оскільки $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$, її можна переписати у вигляді

$$Q = \frac{j^2}{\sigma}.$$

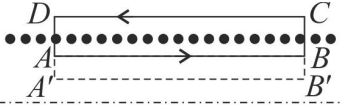
Розрахунок дає $Q = 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ Дж}$.

Приклад 1.2.7. Визначте індукцію магнітного поля соленоїда без осердя, довжина якого набагато більша за діаметр. Сила струму в соленоїді I , діаметр дроту d . Дріт намотаний

щільно, одним шаром. Чи залежить величина індукції всередині соленоїда від відстані до осі?

Розв'язок

На рисунку витки соленоїду у перерізі показані точками і хрестиками, в залежності від напрямку струму.



Перш за все, поле має тільки складову, спрямовану вздовж осі соленоїда.

Радіальна складова дорівнює нулю у всьому просторі, тому що інакше потік вектора індукції магнітного поля крізь циліндричну поверхню, коаксіальну з соленоїдом, не дорівнював би нулю і не задовольнялось би рівняння

$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$.

Далі, з рівняння $\oint_{ABB'A'} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = 0$ з урахуванням сказаного вище

випливає, що поле однакове на лініях AB і $A'B'$, тобто всередині соленоїда не залежить від відстані до осі. Таким же способом можна довести, що і зовні поле не залежить від відстані до осі. Оскільки у нескінченності (на відстані, набагато більшій за довжину соленоїда) поле дорівнює нулю, то приходимо до висновку, що у всьому просторі за межами соленоїда $\mathbf{B} = 0$.

Тепер розглянемо контур $ABCD$.

$$\oint_{ABCD} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = Bl = \mu_0 IN,$$

де l – довжина відрізка AB , N – кількість витків, що приходиться на цей відрізок.

Враховуючи, що $l/N = d$, отримуємо, що всередині соленоїда

$$B = \frac{\mu_0 I}{d}.$$

Відповідь: $B = \frac{\mu_0 I}{d}$.

Приклад 1.2.8. Для з'ясування принципу дії генератора змінного струму розглянемо квадратну дротяну рамку, що обертається в однорідному сталому магнітному полі. Вісь обертання проходить в площині рамки через її центр перпендикулярно до двох протилежних сторін, а напрямок поля перпендикулярний до осі обертання. Довжина сторони рамки a , кутова швидкість обертання ω , індукція поля B . Отримайте вираз для е.р.с.

Розв'язок

На кожний вільний електрон в об'ємі рамки діє сила Лоренца

$$\mathbf{F} = q_e (\mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

\mathbf{v} – швидкість електрона, пов'язана з обертанням рамки. Оскільки $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, де \mathbf{r} – радіус-вектор електрона, проведений з центру рамки, то отримуємо, що

$$\mathbf{F} = q_e ((\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{B}) = -q_e (\mathbf{B} \cdot \mathbf{r}) \boldsymbol{\omega} + q_e (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r} = -q_e (\mathbf{B} \cdot \mathbf{r}) \boldsymbol{\omega}.$$

Проведемо осі x і y у площині рамки з її центру, так щоб ось x була спрямована вздовж вектора $\boldsymbol{\omega}$, вектор зовнішньої нормалі до площини рамки спрямуємо вздовж осі z . Тоді

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{i}, \quad \mathbf{e}_n = \mathbf{k}, \quad \mathbf{r} = r \cos \alpha \mathbf{i} + r \sin \alpha \mathbf{j},$$

де α – кут між векторами \mathbf{r} та $\boldsymbol{\omega}$;

$$\mathbf{B} = B \cos \varphi \mathbf{k} + B \sin \varphi \mathbf{j},$$

де φ – кут між векторами \mathbf{B} та \mathbf{e}_n . В обраній системі координат

$$\mathbf{F} = -q_e \omega r B \sin \alpha \sin \varphi \mathbf{i},$$

причому $r \sin \alpha = \pm a/2$.

Знаходимо е.р.с. за її визначенням:

$$E = \frac{1}{q_e} \left[\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_t dr = a^2 B \omega \sin \varphi. \right.$$

Враховуючи, що $\varphi = \omega t + \varphi_0$, отримуємо

$$E = a^2 B \omega \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Легко бачити, що

$$E = -\frac{d\Phi}{dt},$$

де $\Phi = Ba^2 \cos(\omega t + \varphi_0)$ – потік вектора \mathbf{B} крізь площину рамки.

Відповідь: $E = a^2 B \omega \sin(\omega t + \varphi_0)$.

Задачі для самостійного розв'язування

1.3.1. Знайдіть циркуляцію вектора $\mathbf{A} = \mathbf{r}/r^3$ по колу з центром в початку координат.

Відповідь: 0.

1.3.2. Вісь обертання кола радіусу R проходить у площині кола через його центр перпендикулярно до напрямку однорідного магнітного поля \mathbf{B} . Кутова швидкість обертання ω . Як змінюється з часом потік поля крізь площину кола?

Відповідь: $\Phi = \pi BR^2 \cos(\omega t + \varphi_0)$.

1.3.3. Знайдіть напруженість електричного поля, яке створює у рідині з діелектричною проникністю ε занурена в неї заряджена металева куля радіусу R . Поверхнева густина заряду на кулі σ .

Відповідь: $\mathbf{E} = \frac{\sigma R^2 \mathbf{r}}{\varepsilon \varepsilon_0 r^3}$, $r > R$.

1.3.4. Знайдіть середню швидкість руху електронів в мідному дроті з площею перерізу 1 мм^2 , по якому тече струм 1 А . Концентрація вільних електронів в міді $8 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$.

Відповідь: $7,8 \cdot 10^{-5} \text{ м/с}$.

1.3.5. Отримайте граничні умови для магнітного поля на межі поділу слабких магнетиків 1 і 2: $H_{1t} = H_{2t}$, $H_{1n} = H_{2n}$.

Вказівка. Скористайтесь рівняннями

$$\oiint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad \text{та} \quad \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}.$$

1.3.6. Соленоїд без осердя має 100 витків, довжину 10 см і площу перерізу 1 см^2 . Через нього проходить синусоїдальний струм з частотою 50 Гц і амплітудою 1 А. Знайдіть, як змінюється з часом е.р.с. самоіндукції.

$$\text{Відповідь: } E = \frac{2\pi\nu\mu_0 N^2 SA}{L} \cos 2\pi\nu t = 3,9 \cdot 10^{-3} \cos 2\pi\nu t, \text{ В.}$$

2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ОПЕРАТОРИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

2.1 Основні формули та визначення

Оператор *набла* в декартовій прямокутній системі координат має вигляд

$$\nabla = \frac{\mathbf{i}\partial}{\partial x} + \frac{\mathbf{j}\partial}{\partial y} + \frac{\mathbf{k}\partial}{\partial z}. \quad (2.1)$$

Дії з оператором *набла*:

1) *градієнт* скалярної функції $\varphi(x, y, z)$:

$$\nabla\varphi = \frac{\mathbf{i}\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\mathbf{j}\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\mathbf{k}\partial\varphi}{\partial z}; \quad (2.2)$$

2) *дивергенція* векторного поля $\mathbf{A}(x, y, z)$:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}; \quad (2.3)$$

3) *ротор* векторного поля $\mathbf{A}(x, y, z)$:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}. \quad (2.4)$$

Оператор Лапласа визначається співвідношенням $\Delta = \nabla^2$ і в декартовій системі координат має вигляд

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2.5)$$

Диференціальні оператори теорії поля, окрім електродинаміки, зустрічаються ще в багатьох інших областях фізики. Наприклад, градієнт входить у вираз для густини потоку тепла:

$$\mathbf{h} = -\kappa \nabla T, \quad (2.6)$$

T – температура, κ – коефіцієнт теплопровідності. Дивергенція фігурує в законі збереження заряду

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (2.7)$$

\mathbf{j} – вектор густини струму, ρ – об'ємна густина заряду. Ротор входить до рівняння потенціальної течії рідини (газу)

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0, \quad (2.8)$$

$\mathbf{v}(\mathbf{r})$ – швидкість рідини.

Зазначимо дві інтегральні теореми теорії поля.

Теорема Гауса:

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}, \quad (2.9)$$

де S – поверхня довільної форми, яка замикає об'єм V .

Теорема Стокса:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}, \quad (2.10)$$

S – довільна поверхня, обмежена контуром Γ .

2.2 Приклади розв'язування задач

Приклад 2.2.1. Електричне поле описується виразом

$$\mathbf{D} = \begin{cases} aze_z, & |z| < d/2; \\ adze_z/2|z|, & |z| > d/2. \end{cases}$$

Розрахуйте $\nabla \cdot \mathbf{D}$. Який розподіл заряду створює таке поле?

Розв'язок

Розраховуючи $\nabla \cdot \mathbf{D}$, матимемо

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \begin{cases} a, & |z| < d/2; \\ 0, & |z| > d/2. \end{cases}$$

Таке поле створює заряд з об'ємною густиною

$$\rho(z) = \begin{cases} a, & |z| < d/2; \\ 0, & |z| > d/2 \end{cases}$$

(це можна перевірити, користуючись теоремою Гауса).

$$\text{Відповідь: } \nabla \cdot \mathbf{D} = \begin{cases} a, & |z| < d/2; \\ 0, & |z| > d/2; \end{cases} \quad \rho(z) = \begin{cases} a, & |z| < d/2; \\ 0, & |z| > d/2. \end{cases}$$

Приклад 2.2.2. Компоненти векторного поля визначаються за формулами

$$H_x = -\frac{ay}{x^2 + y^2}, \quad H_y = \frac{ax}{x^2 + y^2}, \quad H_z = 0.$$

Розрахуйте $\nabla \times \mathbf{H}$. Знайдіть фізичний аналог для поля \mathbf{H} .

Розв'язок

Оскільки $H_z = 0$, $\frac{\partial}{\partial z} = 0$, то

$$(\nabla \times \mathbf{H})_x = (\nabla \times \mathbf{H})_y = 0.$$

$$(\nabla \times \mathbf{H})_z = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{2a}{x^2 + y^2} - \frac{2a(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = 0.$$

Для того, що знайти фізичний аналог для поля \mathbf{H} , перепишемо його компоненти у полярних координатах:

$$H_x = -\frac{a \sin \varphi}{\rho}, \quad H_y = \frac{a \cos \varphi}{\rho}.$$

Бачимо, що

$$\mathbf{H} = \frac{a}{\rho} \mathbf{e}_\varphi,$$

де одиничний вектор $\mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j}$.

Розрахуємо циркуляцію поля по колу радіуса ρ з центром у початку координат. Напрямок обходу – проти стрілки годинника.

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \frac{a}{\rho} \rho d\varphi = 2\pi a.$$

Звідси робимо висновок, що аналогом поля \mathbf{H} є магнітне поле нескінченного прямолінійного дуже тонкого провідника із струмом величини $2\pi a$, спрямованого вздовж осі z .

Відповідь: $(\nabla \times \mathbf{H})_x = (\nabla \times \mathbf{H})_y = (\nabla \times \mathbf{H})_z = 0$; аналогом поля \mathbf{H} є магнітне поле нескінченного прямолінійного дуже тонкого провідника із струмом величини $2\pi a$, спрямованого вздовж осі z .

Приклад 2.2.3. Мідний дріт радіусу $a = 1$ мм рівномірно покритий шаром гуми товщиною $h = 0,2$ см з коефіцієнтом теп-

лопровідності $\kappa = 1,6 \cdot 10^{-3}$ Вт/см·К. Електричним струмом $I = 20$ А дріт нагрівається до температури T_1 , при цьому температура зовнішньої поверхні ізоляційного покриття T_2 залишається майже кімнатною. Знайдіть різницю температур $T_1 - T_2$. Питомий опір міді $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м.

Розв'язок

Густина потоку тепла визначається за формулою

$$\mathbf{h} = -\kappa \nabla T = \frac{-\kappa dT}{dr}.$$

Оскільки у шарі термоізоляції тепло не генерується і не втрачається, то для кожної ділянки довжиною l виконується умова $h \cdot 2\pi r l = \text{const}$, або

$$\frac{dT}{dr} = \frac{-C}{r}, \quad a \leq r \leq a + h,$$

де $C > 0$ – стала. Інтегруючи, отримуємо

$$T_1 - T_2 = C \ln \frac{a+h}{a}.$$

Потік тепла крізь поверхню ділянки дроту довжини l дорівнює $h = I^2 R / 2\pi a l$, де R – опір ділянки. Підставляючи $R = \rho l / \pi a^2$, отримуємо

$$h = \frac{I^2 \rho}{2\pi^2 a^3}.$$

Градієнт температури на поверхні дроту

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=a} = -\frac{I^2 \rho}{2\pi^2 \kappa a^3} = -\frac{C}{a}.$$

Звідси знаходимо C , і остаточно отримуємо

$$T_1 - T_2 = \frac{I^2 \rho}{2\pi^2 \kappa a^2} \ln \frac{a+h}{a} = 2,4 \text{ К.}$$

Відповідь: $T_1 - T_2 = 2,4 \text{ К.}$

Приклад 2.2.4. Покажіть, що якщо \mathbf{r} – радіус-вектор, проведений з початку координат у точку (x, y, z) , то $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$, $\nabla \times \mathbf{r} = 0$ ($r \neq 0$).

Розв'язок

Розраховуючи $\nabla \cdot \mathbf{r}$, матимемо

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3,$$

Аналогічно, для $\nabla \times \mathbf{r}$:

$$\nabla \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \mathbf{0}.$$

Приклад 2.2.5. Радіус-вектор \mathbf{r} , проведений з початку координат у точку (x, y, z) , можна представити у вигляді $\mathbf{r} = \nabla \varphi$. Знайдіть функцію $\varphi(\mathbf{r})$.

Розв'язок

Записуємо

$$\mathbf{r} = \mathbf{i} \partial \varphi / \partial x + \mathbf{j} \partial \varphi / \partial y + \mathbf{k} \partial \varphi / \partial z.$$

Прирівнюючи x -компоненти лівої і правої частин $x = \partial \varphi / \partial x$,

звідки

$$\varphi(x, y, z) = x^2 / 2 + f(y, z),$$

де $f(y, z)$ – деяка функція. Прирівнюючи інші компоненти, знаходимо остаточно

$$\varphi(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} = \frac{r^2}{2}.$$

Відповідь: $\varphi(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} = \frac{r^2}{2}.$

Приклад 2.2.6. Нехай $\mathbf{v}(x, y, z)$ – поле швидкостей твердого тіла, яке обертається навколо деякої осі. Покажіть, що $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, $\nabla \times \mathbf{v} = 2\boldsymbol{\omega}$, де $\boldsymbol{\omega}$ – вектор кутової швидкості.

Розв'язок

Швидкості точок твердого тіла дорівнюють $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, де \mathbf{r} – радіус-вектор точки тіла, проведений з точки O на осі обертання. Тоді

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial(\omega_y z - \omega_z y)}{\partial x} + \frac{\partial(\omega_z x - \omega_x z)}{\partial y} + \\ &+ \frac{\partial(\omega_x y - \omega_y x)}{\partial z} = 0. \end{aligned}$$

Аналогічно знаходимо

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{v} &= \mathbf{i} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \\ &= 2\omega_x \mathbf{i} + 2\omega_y \mathbf{j} + 2\omega_z \mathbf{k} = 2\boldsymbol{\omega}. \end{aligned}$$

Приклад 2.2.7. Довести, що $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}$.

Розв'язок

Використовуючи визначення $(\nabla \times \mathbf{A})$, отримуємо

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} & \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} & \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{vmatrix} = \\
&= \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \right) \mathbf{j} + \\
&\quad + \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} \right) \mathbf{k} = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) + \\
&+ \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) - \mathbf{i} \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right) - \\
&- \mathbf{j} \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \right) - \mathbf{k} \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}.
\end{aligned}$$

2.3 Задачі для самостійного розв'язування

2.3.1 Покажіть, що якщо \mathbf{r} – радіус-вектор, проведений з початку координат у точку (x, y, z) , то

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0, \quad \nabla \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0, \quad \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (r \neq 0).$$

2.3.2 Покажіть, що рівняння збереження заряду

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

можна отримати з рівнянь Максвелла

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} \quad \text{та} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

2.3.3 Покажіть, що згідно рівнянню

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

поле \mathbf{E} можна представити у вигляді

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

де \mathbf{A} – векторний потенціал магнітного поля $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$.

2.3.4 Знайдіть $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A})$.

Відповідь: 0.

2.3.5 Розрахуйте $\nabla \times (\nabla \psi)$.

Відповідь: 0.

2.3.6 Задано скалярне поле $\varphi = a \ln(x^2 + y^2)$, a – константа. Розрахуйте $\nabla \varphi$. Знайдіть фізичний аналог для поля $\nabla \varphi$.

Відповідь: У циліндричних координатах $\nabla \varphi = 2a\mathbf{e}_\rho / \rho$. Фізичний аналог – напруженість поля зарядженої нитки з лінійною густиною заряду $\tau = 4\pi a\epsilon_0$, розташованої вздовж осі z .

3. ЕЛЕКТРО- ТА МАГНІТОСТАТИКА

3.1 Основні формули та визначення

Система рівнянь електростатики:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \\ \nabla \times \mathbf{E} = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

де ρ – об'ємна густина сторонніх зарядів. Друге з цих рівнянь має розв'язок

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi, \quad (3.2)$$

де $\varphi(\mathbf{r})$ – довільна функція, яка називається *електростатичним потенціалом*. Вона визначена з точністю до константи. В електростатиці ця константа вибирається так, щоб потенціал дорівнював нулю у нескінченності.

Для розв'язання системи (3.1) необхідно встановити зв'язок між \mathbf{D} і \mathbf{E} . В однорідному ізотропному діелектричному середовищі цей зв'язок має вигляд $\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}$. Після підстановки (3.2) у перше рівняння (3.1) з урахуванням цього співвідношення отримуємо *рівняння Пуассона*

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}. \quad (3.3)$$

У випадку $\rho = 0$ маємо *рівняння Лапласа*

$$\Delta\varphi = 0. \quad (3.4)$$

Якщо відома функція $\rho(\mathbf{r})$, загальний розв'язок рівняння Пуассона має вигляд

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (3.5)$$

Проблема розв'язання рівняння Лапласа в деякій області при певних умовах, накладених на потенціал і його похідні на границі області, називається *крайовою задачею*.

Система рівнянь магнітостатики:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}, \end{cases} \quad (3.6)$$

де \mathbf{j} – густина струму провідності.

В слабомагнітному середовищі $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$. В такому випадку перше з рівнянь (3.6) набуває вигляду $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$. Його розв'язок

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (3.7)$$

де $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ – деяка функція, яка називається *векторним потенціалом*.

Співвідношення (3.7) не визначає векторний потенціал однозначно. Для цього у магнітостатиці використовують додаткову умову

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (3.8)$$

Тоді для векторного потенціалу отримуємо рівняння

$$\Delta \mathbf{A} = -\mathbf{j}. \quad (3.9)$$

Його розв'язок має вигляд

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (3.10)$$

3.2 Приклади розв'язування задач

Приклад 3.2.1. Запишіть рівняння екіпотенціальних поверхонь поля довгої зарядженої нитки в декартовій і циліндричній системах координат, виходячи з міркувань симетрії. Перевірити безпосереднім розрахунком. Густина заряду нитки τ Кл/м.

Розв'язок

Очевидно, що потенціал залежить тільки від відстані ρ до нитки. Тому екіпотенціальні поверхні – це циліндричні поверхні, вісь яких співпадає з ниткою. Їх рівняння $\rho = const$, або $x^2 + y^2 = const$. Перевіримо це безпосереднім розрахунком потенціалу за формулою

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\gamma(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},$$

де γ – об'ємна густина заряду.

Нехай нитка має довжину L , $L \gg \rho$, $L \gg z$. Враховуючи, що $\gamma dV' = \tau dz'$, записуємо

$$\begin{aligned} \varphi(z, \rho) &= \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dz'}{\sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}}. \\ \varphi &= \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln \left| z' - z + \sqrt{\rho^2 + (z' - z)^2} \right| \Big|_{z'=-L/2}^{z'=L/2} \approx \\ &= \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{1 + \sqrt{1 + (2\rho/L)^2}}{-1 + \sqrt{1 + (2\rho/L)^2}} \approx \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{L}{\rho}. \end{aligned}$$

Очевидно, що $\rho = const$ є екіпотенціальними поверхнями.

Приклад 3.2.2. Знайдіть потенціал поля диполя з моментом \mathbf{p} ($r \gg d$, r – відстань від диполя, d – плече диполя) і переконайтесь, що він задовольняє рівнянню Лапласа.

Розв'язок

Потенціал диполя дорівнює

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{d}/2|} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} + \mathbf{d}/2|},$$

де \mathbf{r} – радіус-вектор, проведений з центру диполя, вектор \mathbf{d} спрямований від $-q$ до q , $q > 0$.

Оскільки

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{d}/2|} - \frac{1}{|\mathbf{r}+\mathbf{d}/2|} \approx \frac{\sqrt{r^2+\mathbf{d}\cdot\mathbf{r}} - \sqrt{r^2-\mathbf{d}\cdot\mathbf{r}}}{r^2} \approx \frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{r}}{r^3},$$

вираз для потенціалу спрощується:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3},$$

де $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$ – момент диполя.

Далі знайдемо напруженість поля диполя:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(\mathbf{p} - \frac{3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^2} \right).$$

Перевіримо, що рівняння Лапласа $\Delta\varphi = -\nabla\cdot\mathbf{E} = 0$ задовольняється.

$$\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{p}}{r^3}\right) = -\frac{3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})}{r^5};$$

$$\nabla\cdot\left(-\frac{3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5}\right) = -\frac{3}{r^5}\cdot 4(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}) + (\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}\cdot\frac{15\mathbf{r}}{r^7} = \frac{3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})}{r^5};$$

$$-\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})}{r^5} + \frac{3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})}{r^5} \right) = 0.$$

Приклад 3.2.3. Визначте векторний потенціал поля прямолінійного тонкого провідника дуже великої довжини L , по якому тече струм I .

Розв'язок

1 спосіб: за допомогою теореми Стокса $\oint_{\Gamma} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_S \mathbf{H}\cdot d\mathbf{S}$.

Одразу відзначимо, що в силу додаткової умови $\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$, яка накладається у магнітостатиці на векторний потенціал, отримуємо

$$A_\rho = 0, \text{ оскільки } \int_{\rho=\text{const}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = A_\rho \int_{\rho=\text{const}} dS = 0.$$

Якщо в якості контуру Γ вибрати коло з центром на осі z , вздовж якої тече струм, то $\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0$, оскільки $H_z = 0$. Звідси випливає $A_\phi = 0$.

Нехай тепер контур Γ включає два відрізки довжини l , паралельні один одному і провіднику, розташовані на відстанях ρ та $\rho + d\rho$ від провідника. Кінці цих відрізків з'єднуються радіальними відрізками довжини $d\rho$. Поверхня S – прямокутник, обмежений контуром Γ , з вектором нормалі \mathbf{e}_ϕ . Тоді

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = (A_z(\rho) - A_z(\rho + d\rho))l,$$

$$\int_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Id\rho l}{2\pi\rho}.$$

Користуючись теоремою Стокса, приходимо до співвідношення

$$\frac{dA_z}{d\rho} = -\frac{I}{2\pi\rho}.$$

Інтегруючи, отримуємо

$$A_z = \frac{I}{2\pi} \ln \frac{1}{\rho} + \text{const}.$$

Вибираємо $\text{const} = \frac{I}{2\pi} \ln L$, щоб на великий відстані $\rho \approx L$ було $A \approx 0$. Таким чином,

$$\mathbf{A} = \frac{I\mathbf{e}_z}{2\pi} \ln \frac{L}{\rho}.$$

2 спосіб: за формулою $\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}dV'}{r}$.

Оскільки $\mathbf{j}dV' = I\mathbf{e}_z dz'$, отримуємо

$$\mathbf{A} = \frac{I\mathbf{e}_z}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dz'}{\sqrt{\rho^2 + (z-z')^2}} \approx \frac{I\mathbf{e}_z}{2\pi} \ln \frac{L}{\rho}$$

(див. задачу 1).

Приклад 3.2.4. Покажіть, що векторний потенціал поля прямолінійного тонкого і довгого провідника із струмом задовольняє рівнянню $\Delta\mathbf{A} = 0$ у всіх точках зовні провідника.

Розв'язок

$$\mathbf{A} = \frac{I\mathbf{e}_z}{2\pi} \ln \frac{L}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$\partial\mathbf{A}/\partial z = 0, \quad \partial\mathbf{A}/\partial x = -\frac{I\mathbf{e}_z}{\pi} \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad \partial^2\mathbf{A}/\partial x^2 = \frac{2I\mathbf{e}_z}{\pi} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$(x^2 + y^2 \neq 0).$$

Аналогічно отримуємо $\partial^2\mathbf{A}/\partial y^2 = -\frac{2I\mathbf{e}_z}{\pi} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$

$$\Delta\mathbf{A} = \partial^2\mathbf{A}/\partial x^2 + \partial^2\mathbf{A}/\partial y^2 = 0.$$

Приклад 3.2.5. Знайти векторний потенціал поля довгого соленоїда, в якому тече струм I . Щільність намотки соленоїда n витків/м, радіус соленоїда R .

Розв'язок

Користуємося теоремою Стокса $\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S}$. Контур Γ –

це коло радіуса r з центром на осі соленоїда, поверхня S – ділянка площини, перпендикулярної до осі соленоїда, обмежена контуром Γ . Оскільки поле \mathbf{H} спрямоване вздовж осі соленоїда, то поле \mathbf{A} лежить у площині, перпендикулярній до осі соленоїда, у всіх точках контуру

Γ має однакову величину і спрямоване по дотичній (у присутності радіальної складової було б $\nabla \cdot \mathbf{A} \neq 0$). Якщо $r < R$, то

$$\int_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = H \cdot \pi r^2 = \pi n I r^2,$$

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = A \cdot 2\pi r,$$

$$A = n I r / 2.$$

Коли $r > R$, то

$$\int_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \pi n I R^2,$$

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = A \cdot 2\pi r,$$

$$A = n I R^2 / 2r.$$

3.3 Задачі для самостійного розв'язування

- 3.3.1 Покажіть, що потенціал всіх точок площини, яка знаходиться посередині між двома однаковими за величиною і протилежними за знаком зарядами, дорівнює нулю, а поле спрямоване перпендикулярно до неї.
- 3.3.2 Перевірте, що вираз для потенціалу точкового заряду $\varphi = C/r$, C – константа, задовольняє рівнянню Лапласа всюди, за виключенням точки, де знаходиться заряд (в початку координат).
- 3.3.3 Диполем називається пара однакових за величиною і протилежних за знаком зарядів $\pm q$, що знаходяться на фіксованій відстані d один від одного. Моментом диполя називається величина $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$ (вектор \mathbf{d} спрямований від $-q$ до $+q$). Знайдіть обертальний момент, який діє на диполь з моментом \mathbf{p} в однорідному електричному полі \mathbf{E} . Яка орієнтація диполя відповідає стану стійкої рівноваги?

Відповідь: $\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$. Стану стійкої рівноваги відповідає однаковий напрямок векторів \mathbf{p} і \mathbf{E} .

- 3.3.4 Напруженість електричного поля $\mathbf{E} = E\mathbf{i}$, $E = \text{const}$. Отримайте формули для потенціалу поля і екіпотенціальних поверхонь.

Відповідь: $\varphi = -Ex + C$, C – стала. Рівняння екіпотенціальних поверхонь $x = \text{const}$.

- 3.3.5 Отримайте формулу $\mathbf{B} = \mu_0 I \mathbf{e}_\varphi / 2\pi r$ для індукції магнітного поля нескінченного прямолінійного струму I , спрямованому вздовж осі z . Розрахувати величину індукції на відстані 1 см від струму 1 А.

Відповідь: $B = 2 \cdot 10^{-5}$ Тл.

- 3.3.6 Виходячи з формули

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

для векторного потенціалу, отримайте формулу

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$

для напруженості магнітного поля.

4. ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ

4.1 Основні формули та визначення

Електромагнітне поле характеризується вектором напруженості електричного поля \mathbf{E} і вектором індукції магнітного поля \mathbf{B} (або вектором напруженості магнітного поля $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$ – для слабомагнітного середовища різниця між ними несуттєва). Якщо наведені певні співвідношення для електричного поля, відповідні формули для магнітного поля можна легко отримати за аналогією.

Хвильове рівняння має вигляд

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - v^2 \Delta \mathbf{E} = 0, \quad (4.1)$$

де v – *фазова швидкість* ЕМХ в даному середовищі.

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}, \quad (4.2)$$

де $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0} = 3 \times 10^8$ м/с – швидкість у вакуумі, ϵ – діелектрична проникність середовища, μ – магнітна проникність.

Одним з можливих розв'язків хвильового рівняння (4.1) є *плоска монохроматична ЕМХ*

$$\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}}_m e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}, \quad (4.3)$$

де $\tilde{\mathbf{E}}_m$ – в загальному випадку комплексний вектор. Частота ω , хвильове число $k = |\mathbf{k}|$ і швидкість поширення хвилі у середовищі v пов'язані між собою співвідношенням

$$\omega = vk. \quad (4.4)$$

Плоска монохроматична ЕМХ є поперечною:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (4.5)$$

Електричне і магнітне поля хвилі не є незалежними, вони пов'язані між собою співвідношенням

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B}. \quad (4.6)$$

Комплексній амплітуді $\tilde{\mathbf{E}}_m = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$, де дійсні вектори \mathbf{a} і \mathbf{b} перпендикулярні один до одного, відповідає загальний випадок *еліптичної поляризації*. Окремий випадок, коли вектор $\tilde{\mathbf{E}}_m$ може бути вибраний дійсним, називається *лінійною поляризацією*. При цьому вектор \mathbf{E} коливається, залишаючись в одній площині, яка називається площиною коливань. В перпендикулярній до неї площині, яка називається площиною поляризації, розташовується вектор \mathbf{B} .

Вектор густини потоку енергії хвилі (вектор Пойнтинга) визначається за формулою

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (4.7)$$

Його можна представити у вигляді

$$\mathbf{S} = \rho \mathbf{v}, \quad (4.8)$$

де \mathbf{v} – швидкість хвилі, ρ – *густина енергії*, яка визначається за формулою

$$\rho = \frac{\mathbf{E}\mathbf{D} + \mathbf{B}\mathbf{H}}{2}, \quad (4.9)$$

де \mathbf{D} – індукція електричного поля. *Інтенсивність* EMX

$$I = |\overline{\mathbf{S}}|, \quad (4.10)$$

означає усереднення за часом.

Вектор густини потоку імпульсу хвилі

$$\mathbf{K} = \frac{\mathbf{S}}{c}. \quad (4.11)$$

Його можна записати у вигляді

$$\mathbf{K} = \kappa \mathbf{v}, \quad (4.12)$$

де κ – *густина імпульсу* хвилі.

4.2 Приклади розв'язування задач

Приклад 4.2.1. Покажіть, що сферична монохроматична ЕМХ

$E = \tilde{E}_m e^{\frac{i(kr - \omega t)}{r}}$ є розв'язком хвильового рівняння за умови $\omega = \upsilon k$.

Розв'язок

Достатньо впевнитись, що вираз $E = e^{\frac{i(kr - \omega t)}{r}}$ задовольняє рівнянню

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \upsilon^2 \Delta E = 0$$

при згаданій умові.

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\omega^2 E; \quad \frac{\partial E}{\partial x} = \left(\frac{ikx}{r} - \frac{x}{r^2} \right) E;$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \left(\frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2} - \frac{k^2 x^2}{r^2} - \frac{3ikx^2}{r^3} + \frac{3x^2}{r^4} \right) E.$$

Аналогічно знаходимо, що

$$\frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = \left(\frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2} - \frac{k^2 y^2}{r^2} - \frac{3iky^2}{r^3} + \frac{3y^2}{r^4} \right) E,$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \left(\frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2} - \frac{k^2 z^2}{r^2} - \frac{3ikz^2}{r^3} + \frac{3z^2}{r^4} \right) E.$$

Додаючи, отримуємо $\Delta E = -k^2 E$.

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \upsilon^2 \Delta E = -\omega^2 E + \upsilon^2 k^2 E = 0,$$

якщо $\omega = \upsilon k$.

Приклад 4.2.2. Покажіть, що фазова швидкість будь-якої монохроматичної хвилі, тобто швидкість переміщення її фронту, дорівнює $v = \omega / k$.

Розв'язок

Фронт хвилі – це поверхня, всі точки якої мають однакову фазу. Розглянемо достатньо малу ділянку фронту, яку можна вважати плоскою. Тоді маємо $\varphi = \mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t = \text{const}$. При переміщенні фронту положення його точок змінюється з часом $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, але $d\varphi/dt = 0$.

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \nabla\varphi \cdot \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = -\omega + \mathbf{k} \cdot \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right).$$

За визначенням, $d\mathbf{r}/dt$ – це швидкість точок фронту і переміщення відбувається в напрямку вектора \mathbf{k} . Тому

$$d\varphi/dt = -\omega + kv = 0,$$

звідки

$$v = \omega / k.$$

Приклад 4.2.3. З рівняння $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$ отримати для монохроматичної плоскої ЕМХ співвідношення $\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega\mathbf{B}$.

Розв'язання. $\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}}_m e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$, $\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{B}}_m e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$. Оскільки $\partial E_j / \partial x_i = ik_i E_j$, то

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ik_x & ik_y & ik_z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = i(\mathbf{k} \times \mathbf{E}).$$

$\partial\mathbf{B}/\partial t = -i\omega\mathbf{B}$. Дорівнюючи, отримуємо $\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega\mathbf{B}$.

Приклад 4.2.4. Показати, що в загальному випадку комплексну амплітуду плоскої монохроматичної ЕМХ не можна пред-

ставити у вигляді $\tilde{\mathbf{E}}_m = \mathbf{E}_m e^{i\varphi_0}$, де \mathbf{E}_m і φ_0 – дійсні величини, і що коли це можна зробити, хвиля є лінійно поляризованою.

Розв'язання. Комплексна амплітуда $\tilde{\mathbf{E}}_m = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$, де \mathbf{a} і \mathbf{b} – дійсні вектори. Якщо ці вектори колінеарні, то амплітуду можна представити у формі $\tilde{\mathbf{E}}_m = \mathbf{E}_m e^{i\varphi_0}$. Хвиля набуває вигляду $\mathbf{E} = \mathbf{E}_m e^{i(\mathbf{kr} - \omega t + \varphi_0)}$. Очевидно, що при зміні обох аргументів вектор \mathbf{E} залишається в одній і тій же площині (площині коливань). Це випадок лінійної поляризації.

Якщо вектори \mathbf{a} і \mathbf{b} перпендикулярні, амплітуду не можна представити у формі $\tilde{\mathbf{E}}_m = \mathbf{E}_m e^{i\varphi_0}$. В цьому випадку маємо додавання двох взаємно перпендикулярних коливань, тобто еліптичну поляризацію.

Приклад 4.2.5. В вакуумі поширюється плоска монохроматична електромагнітна хвиля. Амплітуда напруженості магнітного поля хвилі $H_m = 0,0500$ А/м. Знайти:

- амплітуду напруженості електричного поля хвилі E_m ;
- середню за часом густину енергії хвилі $\bar{\rho}$,
- інтенсивність хвилі I .

Розв'язання. $E_m = c\mu_0 H_m = 18,8$ В/м.

$$\bar{\rho} = \frac{(\mathbf{E}\mathbf{D} + \mathbf{B}\mathbf{H})}{2} = \frac{(\varepsilon_0 E_m^2 + \mu_0 H_m^2) \cos^2(\mathbf{kr} - \omega t)}{2}$$

$$= \frac{\mu_0 H_m^2}{2} = 1,57 \cdot 10^{-9} \text{ Дж / м}^3.$$

$$I = \bar{\rho}c = 0,47 \text{ Вт/м}^2.$$

Приклад 4.2.6. В вакуумі плоска монохроматична електромагнітна хвиля падає на плоску поверхню в напрямку нормалі

\mathbf{e}_n до неї. Поверхня повністю поглинає хвилю. Амплітуда напруженості магнітного поля хвилі $H_m = 0,0500$ А/м. Знайти:

- а) середню за часом густину імпульсу хвилі $\bar{\mathbf{k}}$;
- б) тиск P на поверхню, який спричиняє хвиля.

Розв'язання. Вектор густини потоку імпульсу $\mathbf{K} = \mathbf{S}/c$. Тиск хвилі на ділянку поверхні з вектором нормалі \mathbf{e}_n дорівнює $P = \bar{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{e}_n = \bar{p} = 1,57$ нПа (див. розв'язок попередньої задачі). Записуючи $\bar{\mathbf{K}} = \bar{\mathbf{k}}c$, отримуємо

$$\bar{\mathbf{k}} = \frac{\bar{\mathbf{K}}}{c} = 5,2 \cdot 10^{-18} \mathbf{e}_n \text{ кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с}).$$

Приклад 4.2.7. Сила струму в дуже довгому соленоїді зростає рівномірно від нуля до I на протязі часу τ . Кількість витків соленоїда на одиницю довжини дорівнює n . Розглянемо поверхню Σ циліндра, коаксіального з соленоїдом і розташованого всередині нього. Довжина циліндра l , радіус r . Визначити:

- а) модуль і напрямок вектора Пойнтинга \mathbf{S} в точках поверхні Σ ;
- б) енергію W , що пройшла через поверхню Σ за час τ . Порівняти W з енергією магнітного поля, зосередженою в об'ємі V циліндра після установалення струму I .

Розв'язання. У всіх точках циліндричної частини поверхні Σ електричне поле \mathbf{E} однакове за величиною, спрямоване по дотичній до поверхні перпендикулярно до осі циліндра. Для його визначення скористуємось четвертим рівнянням Максвела в інтегральній формі

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}.$$

В якості контуру Γ обираємо коло на циліндричній частині поверхні Σ з центром на осі. Поверхня S – круг, перпендикулярний до осі. Нехай $\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \pi r^2 \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\pi r^2 \mu_0 n I}{\tau} > 0$, тоді $\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -2\pi r E$. Напрямок обходу контуру \mathbf{e}_t і напрямком нормалі \mathbf{e}_n до поверхні S пов'язані між собою за правилом гвинта $\mathbf{e}_t \times \mathbf{e}_n = \mathbf{e}_r$, вектор \mathbf{e}_r спрямований вздовж радіуса круга від центру. Тому

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = -EH(\mathbf{e}_t \times \mathbf{e}_n) = -EH \mathbf{e}_r.$$

Знаходимо модуль електричного поля: $E = \mu_0 n I r / 2\tau$. Модуль вектора Пойнтинга на боковій поверхні циліндра змінюється з часом за законом

$$S(t) = EH(t) = \frac{\mu_0 n^2 I^2 r t}{2\tau^2}.$$

За час τ в об'єм V через бокову поверхню ввійшла енергія

$$W = 2\pi r l \int_0^{\tau} S(t) dt = \left(\frac{\mu_0 n^2 I^2}{2} \right) \pi r^2 l = \left(\frac{\mu_0 H^2}{2} \right) V.$$

Величина в дужках – це густина енергії магнітного поля після встановлення струму I . Через торцеві ділянки енергія в циліндр не втікає, тому що на цих ділянках напрямки вектора Пойнтинга і вектора нормалі перпендикулярні.

4.3 Задачі для самостійного розв'язування

- 4.3.1 Перевірте, що плоска монохроматична ЕМХ $\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}}_m e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$ є розв'язком хвильового рівняння $\partial^2 \mathbf{E} / \partial t^2 - v^2 \Delta \mathbf{E} = 0$ за умови $\omega = vk$.
- 4.3.2 Запишіть рівняння фронту для хвилі $\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}}_m e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$ і покажіть, що вектор \mathbf{k} спрямований перпендикулярно до фронту.

- 4.3.3 Перевірте, що величина $v = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ у хвильовому рівнянні для ЕМХ у вакуумі має розмірність швидкості і дорівнює $3 \cdot 10^8$ м/с.
- 4.3.4 Користуючись рівняннями $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ і $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ доведіть, що для монохроматичної плоскої ЕМХ мають місце співвідношення $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0$.
- 4.3.5 У вакуумі поширюється плоска монохроматична ЕМХ. Написати вираз для хвильового вектора \mathbf{k} у випадку, якщо: а) вектор \mathbf{E} орієнтований в напрямку осі y , вектор \mathbf{H} – в напрямку осі x , частота хвилі дорівнює ω ; б) вектор \mathbf{E} орієнтований в напрямку осі x , вектор \mathbf{H} – в напрямку осі z , довжина хвилі дорівнює λ .
- 4.3.6 В однорідному ізотропному середовищі з $\epsilon = 3,00$, $\mu = 1,00$ поширюється плоска монохроматична ЕМХ. Амплітуда напруженості електричного поля хвилі $E_m = 10,0$ В/м. Знайти: а) амплітуду напруженості магнітного поля хвилі H_m ; б) фазову швидкість хвилі v .

Відповідь: $H_m = 4,6 \cdot 10^{-2}$ А/м, $v = 1,73 \cdot 10^8$ м/с.

- 4.3.7 У деякому середовищі поширюється електромагнітна хвиля частоти ω . Діелектрична проникність середовища на частоті ω дорівнює $\epsilon = 2,00$, магнітна проникність практично дорівнює одиниці. Знайти вектор Пойнтинга \mathbf{S} в тій точці, де напруженість електричного поля змінюється за законом $\mathbf{E} = 10,0 \cos(\omega t + \alpha) \mathbf{e}_z$ (В/м). Вектор \mathbf{H} коливається вздовж осі x .

Відповідь:

$$\mathbf{S} = \frac{\sqrt{\epsilon} E_m^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t + \alpha) \mathbf{e}_y = 0,38 \cos^2(\omega t + \alpha) \mathbf{e}_y \text{ Вт/м}^2.$$

- 4.3.8 Знайдіть тиск P світла на стінки електричної лампи потужністю $W = 100$ Вт. Колба лампи являє собою сферичний посуд радіусу $r = 5$ см. Стінки лампи відбивають $R = 4\%$ і пропускають $T = 6\%$ світла, що на них падає. Прийміть, що вся потужність, яку споживає лампа, йде на випромінювання.

Відповідь: $P = 1,04 \cdot 10^{-5}$ Па.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. **Вербицький Є.В.** Теорія поля: Практикум [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 171 «Електроніка» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: Є.В. Вербицький – Електронні текстові данні (1 файл: 4,49 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 156 с.
2. **Рубан А.І.** Теорія поля : підручник / А.І. Рубан, Ю.Г. Гогоці, О.Г. Гусак. – Суми: Сумський державний університет, 2023. –279 с.
3. **Полянська Т.С.** Теорія поля: навч.-метод. посіб./ Полянська Т.С., Чорна О.С. – Харків: НТУ ХПІ», 2019. – 76 с.
4. **Бізюк В.В.** Елементи теорії поля : навч. посібник / В.В. Бізюк; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О.М. Бекетова. – Харків: ХНУМГ ім. О.М. Бекетова, 2020. – 76 с.
5. **Багацька О.В.** Електродинаміка. Теорія поля : навчальний посібник / О.В. Багацька, О.Ю. Бутрим, М.М. Колчигін, О.О. Третьяков, С.М. Шульга – Х.: ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2008. – 132 с.
6. **Вербицький Є.В.** Теорія поля: Навчально-методичний посібник [Електронний ресурс]: навч. посіб. Для студ. Спеціальності 171 «Електроніка», спеціалізації «Електронні компоненти та системи» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: Є.В. Вербицький. – Електронні текстові данні (1 файл: 3,07 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017. – 262 с.
7. **Потаніна Т.В.** Вища математика: «Векторний аналіз і теорія поля». Теорія і практика: навч. посібник / Т.В. Потаніна. – Х.: НТУ «ХПІ», 2019. – 151 с.