

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний університет «Запорізька політехніка»

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

для студентів економічних спеціальностей усіх форм навчання
з дисципліни

«ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ»

Частина 2

«Вибрані задачі математичного програмування»

2020

Конспект лекцій для студентів економічних спеціальностей усіх форм навчання з дисципліни «Оптимізаційні методи та моделі». Частина 2. «Вибрані задачі математичного програмування» / Укл. О. Л. Мізерна. Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2020. 37 с.

Укладач:

Мізерна О. Л., старший викладач

Рецензент:

Нечипоренко Н.О., доцент, к.т.н.

Відповідальний
за випуск:

Мізерна О. Л., старший викладач

Затверджено
на засіданні кафедри
прикладної математики
НУ «Запорізька політехніка»
Протокол № 2 від 27.08.2020 р.

Рекомендовано
до видання НМК факультету
економіки та управління
НУ «Запорізька політехніка»
Протокол № 27 від 27.08.2020р.

ЗМІСТ

Вступ	4
1 Цілочислове програмування	5
1.1 Постановка задачі	5
1.2 Задача комівояжера	6
1.3 Алгоритм методу	7
2 Нелінійне програмування	13
2.1 Математична модель задачі нелінійного програмування і її геометрична інтерпретація	13
2.2 Метод множників Лагранжа	15
3 Динамічне програмування	18
3.1 Загальна постановка задачі	18
3.2 Принцип оптимальності та структура рівняння Белмана	20
3.3 Задача про розподіл інвестицій	23
4 Багатокритеріальні задачі в економіці	31
4.1 Метод згортання критеріїв	31
4.2 2.Метод послідовних поступок	35
Перелік літератури	37

ВСТУП

Важливим завданням сучасності є керування економічними системами, оптимізація їх структури, траєкторії розвитку й функціонування з метою досягнення максимальної економічної ефективності. До етапів вивчення економічних систем відносять: з'ясування мети функціонування й розвитку, побудову економіко-математичної моделі та відшукування оптимального розв'язку, розробку плану практичної реалізації здобутих результатів дослідження та забезпечення реалізації цього плану.

Метою викладання дисципліни «Оптимізаційні методи і моделі» є формування у студентів системи знань з методології та інструментарію побудови і використання різних типів економіко-математичних моделей для прийняття оптимальних рішень в умовах ринкової економіки. У результаті вивчення навчальної дисципліни студенти повинні знати основні математичні моделі, засновані на теоретичних закономірностях; основні методи побудови математичних моделей економічних процесів; вміти економічно інтерпретувати та аналізувати отримані результати.

Дисципліна «Оптимізаційні методи та моделі» входить до комплексу дисциплін для спеціальностей: 071 «Облік і оподаткування», 072 «Фінанси, банківська справа та страхування», 075 «Маркетинг», 076 «Підприємництво, торгівля та біржова діяльність», а також є складовою дисципліни «Вища та прикладна математика» для спеціальностей 073 «Менеджмент», 281 «Публічне управління та адміністрування».

1 ЦІЛОЧИСЛОВЕ ПРОГРАМУВАННЯ

1.1 Постановка задачі

Значна частина економічних задач лінійного програмування за своїм змістом повинна мати розв'язок у цілих числах, тобто цілочисловий. До них відносяться задачі, в яких змінні означають кількість одиниць неподільної продукції (число станків при завантаженні обладнання, число суден при розподілі за лініями, число турбін в енергосистемі та ін.)

Задача лінійного цілочислового програмування формулюється наступним чином: знайти такий розв'язок (план) $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, при якому цільова функція

$$F(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

приймає максимальне або мінімальне значення за обмежень

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, & i = \overline{1, m}; \\ x_j \geq 0, & j = \overline{1, n}; \\ x_j - \text{цілі числа.} \end{cases}$$

Умова цілочисловості у загальному випадку суттєво ускладнює розв'язання задачі.

Для розв'язання задач лінійного цілочислового програмування використовують низку методів. Найпростіший з них — звичайний метод лінійного програмування. При цьому розв'язок округлюють до цілих чисел. Цей метод виправданий у тому випадку, коли окрема одиниця сукупності є малою частиною об'єму всієї сукупності. В іншому випадку округлення може привести до розв'язку, далекого від оптимального. Тоді доцільно використовувати спеціальні методи, які поділено на дві основні групи: методи відтинання (наприклад, метод Гоморі) та комбінаторні методи (наприклад, метод «віток і меж»).

1.2 Задача комівояжера

Одним з прикладів задачі цілочислового програмування є задача комівояжера. Комівояжер повинен об'їхати по найкоротшому шляху N міст (починаючи з пункту 1), побувати у кожному з них лише один раз і повернутись у початок шляху – пункт 1. З цією задачею пов'язана велика кількість інших задач. Одна група задач є варіантами задачі комівояжера: комівояжер повинен обрати шлях, який забезпечує: найменшу витрату палива або часу; найменшу вартість проїзду. Друга група задач має інше практичне застосування: перевезення пошти або продуктів споживання у місті; з'єднання окремих пунктів лініями електропостачання, газопостачання, водопостачання (лінії з'єднують у вигляді кола); обробка N деталей на одному верстаті, якщо відомий час або вартість переналагодження верстата для різних деталей.

Розглянемо задачу у класичній постановці. Розв'язання полягає у мінімізації цільової функції:

$$F(x) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{ij} x_{ij},$$

де c_{ij} – відстань між містами i та j ; $i = \overline{1, N}$ – номери міст, з яких від'їжджають; $j = \overline{1, N}$ – номери міст, в які в'їжджають. Змінні x_{ij} можуть приймати тільки два значення:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо переїзд між містами } i \text{ та } j \text{ увійде до маршруту;} \\ 0, & \text{у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Зазвичай, дані для розрахунку наводять у таблиці:

	1	2	3	...	N
1	–	c_{12}	c_{13}	...	c_{1N}
2	c_{21}	–	c_{23}	...	c_{2N}
...	...	...	...	...	...
N	c_{N1}	c_{N2}	c_{N3}	...	–

Часто таблиця є симетричною, тобто $c_{ij} = c_{ji}$. Несиметричність указує на наявність кількох шляхів між містами i та j . Клітинки, в яких

$i = j$, є забороненими. Задача комівояжера може бути розв'язана різними методами. Розглянемо **метод**, заснований на **редукції рядків та колонок**. Розрахунок буде складатися з $N - 2$ етапів. У межах кожного етапу алгоритм розрахунку однаковий.

1.3 Алгоритм методу

1. *Підготовчий етап*. Обрати довільний маршрут і отримати відповідне значення цільової функції F_b . Це значення буде оцінкою можливої верхньої межі цільової функції. Оптимальне значення цільової функції має бути не більшим цього значення: $F_{opt} \leq F_b$.

2. *Редукція рядків*. У таблиці у кожному рядку знайти найменше значення A_i і відняти його з усіх елементів відповідного рядка. Значення A_i записати у додатковий стовпчик.

3. *Редукція стовпців*. У таблиці у кожному стовпці знайти найменше значення B_j і відняти його з усіх елементів відповідного стовпця. Значення B_j записати у додатковий рядок.

4. Розрахувати найнижчу можливу межу цільової функції:

$$F_{\min} = \sum_{i=1}^N A_i + \sum_{j=1}^N B_j.$$

Оптимальне значення цільової функції буде розташоване у межах:

$$F_{\min} \leq F_{opt} \leq F_b.$$

5. *Визначення одного з кроків оптимального шляху*. Якщо у кожному рядку і кожному стовпці таблиці є тільки по одному нулю і з відповідних клітинок можна скласти замкнений маршрут, то оптимальний шлях знайдено і $F_{opt} = F_{\min}$. В іншому випадку потрібно розрахувати штрафи, тобто додаткові витрати, які виникнуть, якщо не обрати у оптимальний маршрут відповідну нульову клітинку:

а) штраф рядка a_i – це найменше значення у рядку після першого нуля. Якщо нулів більше одного, то $a_i = 0$. Значення a_i заносять у додатковий стовпчик таблиці;

б) штраф стовпця b_j – це найменше значення у стовпці після першого нуля. Якщо нулів більше одного, то $b_j = 0$. Значення b_j заносять у додатковий рядок таблиці.

6. Для кожної нульової клітинки таблиці розрахувати функцію вторинного штрафу $\Phi_{ij} = a_i + b_j$ і внести у додаткову таблицю.

7. Найбільше значення функції Φ_{ij} визначить ту клітинку, яку потрібно внести до оптимального маршруту.

8. У таблиці викреслити той рядок і той стовпець, в яких розташована вибрана клітинка. Таким чином, буде отримана нова, менша за розміром, таблиця. У новій таблиці потрібно заборонити одну клітинку так, щоб у кожному рядку і стовпці було по одній забороненій клітинці.

9. Повторювати пункти 2–8, поки це можливо. У пункті 4 кожне наступне значення $F_{\min}$ визначається, як сума попереднього $F_{\min}$ і відповідних A_i і B_j .

10. Вибрані клітинки розташувати, починаючи з міста 1, у вигляді неперервного маршруту. Знайти F_{opt} .

11. *Перевірка оптимальності.* У початковій таблиці заборонити ту клітинку, яку вибирали першою у маршрут. Розрахувати A_i і B_j . Знайти

$$F'_{\min} = \sum_{i=1}^N A_i + \sum_{j=1}^N B_j.$$

Якщо перше обчислене у задачі $F_{\min} < F'_{\min}$, то отриманий маршрут є дійсно оптимальним.

Приклад. Знайти оптимальний маршрут серед 4 міст, відстані між якими задано у таблиці:

N	1	2	3	4
1	—	35	18	11
2	20	—	27	4
3	3	8	—	60
4	50	10	12	—

Розв'язання. Оберемо довільний маршрут: (1,2)–(2,3)–(3,4)–(4,1). Знайдемо верхню межу цільової функції:

$$F_b = 35 + 27 + 60 + 50 = 172,$$

тобто шукане оптимальне значення цільової функції має бути не більшим 172 ($F_{opt} \leq 172$).

Етап 1. Виконаємо редукцію рядків. Для цього у кожному рядку таблиці знайдемо найменше значення A_i :

N	1	2	3	4	A_i
1	–	35	18	11	11
2	20	–	27	4	4
3	3	8	–	60	3
4	50	10	12	–	10

і відніmemo його з усіх елементів відповідного рядка:

N	1	2	3	4
1	–	24	7	0
2	16	–	23	0
3	0	5	–	57
4	40	0	2	–

Виконаємо редукцію стовпців. Для цього у кожному стовпці таблиці знайдемо найменше значення B_j :

N	1	2	3	4
1	–	24	7	0
2	16	–	23	0
3	0	5	–	57
4	40	0	2	–
B_j	0	0	2	0

і відніmemo його з усіх елементів відповідного стовпця:

N	1	2	3	4
1	–	24	5	0
2	16	–	21	0
3	0	5	–	57
4	40	0	0	–

Знайдемо найнижчу можливу межу цільової функції:

$$F_{\min 1} = 11 + 4 + 3 + 10 + 2 = 30.$$

Тобто шукане оптимальне значення цільової функції має лежати у межах: $30 \leq F_{opt} \leq 172$.

Визначимо штрафи:

N	1	2	3	4	a_i
1	–	24	5	0	5
2	16	–	21	0	16
3	0	5	–	57	5
4	40	0	0	–	0
b_j	16	5	5	0	

Для кожної нульової клітинки розрахуємо функцію вторинного штрафу Φ_{ij} і внесемо у додаткову таблицю:

Нульові клітинки (i, j)	(1,4)	(2,4)	(3,1)	(4,2)	(4,3)
Функція вторинного штрафу Φ_{ij}	$5+0=5$	$16+0=16$	$5+16=21$	$0+5=5$	$0+5=5$

Найбільше значення $\Phi_{ij} = 21$, тобто у оптимальний маршрут потрібно внести клітинку (3,1).

У таблиці викреслимо рядок, що відповідає місту 3, і стовпець, що відповідає місту 1:

N	2	3	4
1	24	5	0
2	–	21	0
4	0	0	–

Крім того, заборонимо клітинку (1,3), тому що у кожному рядку і стовпці повинно бути по одній забороненій клітинці:

N	2	3	4
1	24	–	0
2	–	21	0
4	0	0	–

Отримали нову таблицю і переходимо до наступного етапу, повторюємо пункти 2–8 алгоритму для отриманої таблиці.

Етап 2. Виконаємо редукцію рядків і стовпців:

N	2	3	4	A_i
1	24	—	0	0
2	—	21	0	0
4	0	0	—	0
B_j	0	0	0	

Так як усі A_i та B_j дорівнюють нулю, то таблиця не зміниться і нижня межа цільової функції також не зміниться:

$$F_{\min 2} = F_{\min 1} + \sum_{i=1}^4 A_i + \sum_{j=1}^4 B_j = 30 + 0 + 0 = 30,$$

$$30 \leq F_{opt} \leq 172.$$

Знайдемо штрафи:

N	2	3	4	a_i
1	24	—	0	24
2	—	21	0	21
4	0	0	—	0
b_j	24	21	0	

Для нульових клітинок розрахуємо функцію вторинного штрафу Φ_{ij} :

Нульові клітинки (i, j)	(1,4)	(2,4)	(4,2)	(4,3)
Функція вторинного штрафу Φ_{ij}	24	21	24	21

Найбільше значення $\Phi_{ij} = 24$. Обираємо будь-яку клітинку, що відповідає цьому значенню, наприклад, (1,4).

У таблиці викреслюємо рядок, що відповідає місту 1, і стовпець, що відповідає місту 4. Отримали наступну таблицю (заборонили клітинку (4,3)):

N	2	3
2	—	21
4	0	—

На цьому розрахунок припиняється, очевидно, що клітинки (2,3) і (4,2) повинні бути включеними в оптимальний маршрут.

Вибрані клітинки розташуємо у вигляді неперервного маршруту, починаючи з міста 1: (1,4)–(4,2)–(2,3)–(3,1). Знайдемо відповідне значення функції:

$$F_{opt} = 11 + 10 + 27 + 3 = 51,$$

$$30 \leq 51 \leq 172.$$

Зробимо перевірку оптимальності. У початковій таблиці заборонимо клітинку, яка була вибрана у оптимальний маршрут першою, тобто клітинку (3,1):

N	1	2	3	4
1	–	35	18	11
2	20	–	27	4
3	–	8	–	60
4	50	10	12	–

Знайдемо A_i :

N	1	2	3	4	A_i
1	–	35	18	11	11
2	20	–	27	4	4
3	–	8	–	60	8
4	50	10	12	–	10

Після редукції рядків знайдемо B_j :

N	1	2	3	4
1	–	24	7	0
2	16	–	23	0
3	–	0	–	52
4	40	0	2	–
B_j	16	0	2	0

Обчислимо значення функції:

$$F'_{\min} = 11 + 4 + 8 + 10 + 16 + 2 = 51,$$

так як $F_{\min 1} < F'_{\min}$, отриманий розв'язок дійсно є оптимальним.

2 НЕЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

2.1 Математична модель задачі нелінійного програмування і її геометрична інтерпретація

Нелінійне програмування розглядає математичну модель, у якій використовуються нелінійні залежності або у цільовій функції F , або у системі обмежень.

У житті частіше зустрічаються нелінійні залежності, ніж лінійні. Типовими областями використання нелінійного програмування є планування промислового виробництва, управління ресурсами, контроль якості продукції, планування обслуговування та ремонту. Наприклад, задача нелінійна, якщо ефективність виробництва змінюється непропорційно масштабу використання ресурсів через розподілення витрат виробництва на змінні та умовно-постійні, через вплив різних зовнішніх та внутрішніх факторів.

Універсального методу розв'язання нелінійних екстремальних задач не існує, тому що вони надзвичайно різноманітні. Система нерівностей дає множину рішень, яка у загальному випадку не є опуклою, або кількість екстремальних точок нескінченна. Крім того, точка екстремуму може знаходитись у вершині багатокутника допустимих розв'язків, на ребрі або всередині області. У зв'язку з цим методи нелінійного програмування (точні та наближені) розроблені під спеціальні класи задач. При використанні точних методів виникають труднощі обчислювального характеру, а при використанні наближених методів виникає проблема локальних і глобальних оптимумів.

Математична модель задачі нелінійного програмування має вигляд:

$$F = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max (\min)$$

при обмеженнях

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \{ \leq, =, \geq \} \bar{b}_i; \quad i = \overline{1, m},$$

де $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ і (або) $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – нелінійні функції.

Розглянемо приклад розв'язання задачі графічним методом.

Приклад.

$$F = 2(x-5)^2 + (y-7)^2 \rightarrow \max(\min) \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} x + 2y \leq 12; \\ x + y \leq 9; \\ x \geq 0; y \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Побудуємо область допустимих розв'язків (рисунок 2.1).

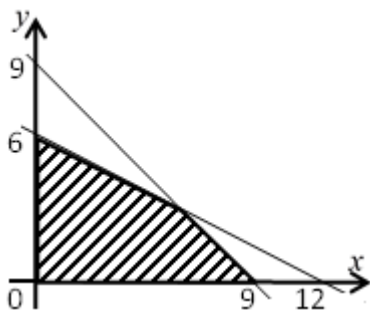


Рисунок 2.1

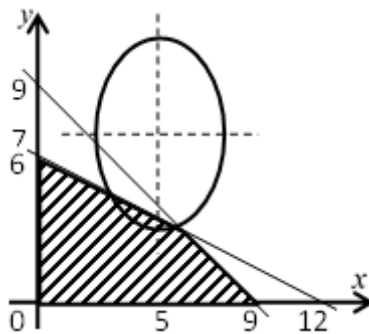


Рисунок 2.2

Вираз (2.1) задає множину цільових функцій. Візьмемо одну з цих функцій і перетворимо її до канонічної форми, щоб визначити тип кривої:

$$\frac{(x-5)^2}{\frac{F}{2}} + \frac{(y-7)^2}{F} = 1.$$

Отримали рівняння еліпса з центром у точці $(5; 7)$ і півосями

$a = \sqrt{\frac{F}{2}}$; $b = \sqrt{F}$. Нехай $F = 16$, тоді $a \approx 2,8$; $b = 4$. На тому ж графіку побудуємо отриману криву (рисунок 2.2).

Збільшуючи та зменшуючи значення F , будемо отримувати множину еліпсів, які відповідають цільовій функції для різних значень x і y . За графіком бачимо, що найбільше значення цільової функції досягнute у точці $(0; 0)$ (рисунок 2.3):

$$F_{\max} = (0-5)^2 + (0-7)^2 = 99,$$

а найменше – у точці A , в якій еліпс дотикається області допустимих значень (рисунок 2.4).

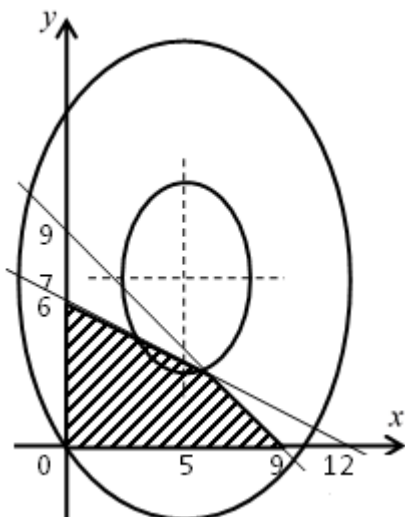


Рисунок 2.3

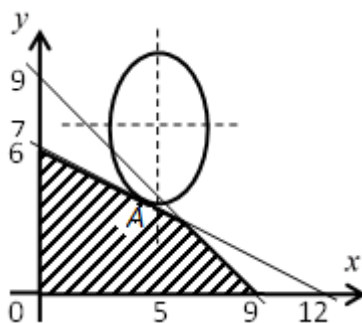


Рисунок 2.4

Координати точки A можна знайти за допомогою перетворень рівнянь еліпса і прямої. Отримаємо: $A\left(\frac{38}{9}; \frac{35}{9}\right)$,

$$F_{\min} = \left(\frac{38}{9} - 5\right)^2 + \left(\frac{35}{9} - 7\right)^2 \approx 11.$$

2.2 Метод множників Лагранжа

Для розв'язування задач нелінійного програмування доводиться застосовувати багато методів і обчислювальних алгоритмів, які ґрунтуються, здебільшого, на теорії диференціального числення, і

вибір їх залежить від конкретної постановки задачі та форми економіко-математичної моделі.

Розглянемо задачу нелінійного програмування у вигляді:

$$F = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max (\min) \quad (2.2)$$

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_i, \quad i = \overline{1, m}. \quad (2.3)$$

Обмеження задачі задано рівняннями, тому для її розв'язання можна скористатися класичним методом відшукування умовного екстремуму функції багатьох змінних. При цьому припускають, що функції (2.2) і (2.3) неперервні разом зі своїми першими частинними похідними.

Для розв'язання задачі складають функцію:

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = \\ = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i [b_i - g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)], \end{aligned}$$

яку називають **функцією Лагранжа**, де λ_i – **множники Лагранжа**.

Знаходять частинні похідні функції L за всіма змінними і прирівнюють їх до нуля, отримують систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_j} = 0 & (j = \overline{1, n}), \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0 & (i = \overline{1, m}). \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, знаходять $X^* = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ і $\lambda_* = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ – стаціонарні точки. Оскільки їх визначено з необхідної умови екстремуму, то в них можливий максимум або мінімум. Іноді стаціонарна точка є точкою перегину (сідлова точка). Для визначення достатніх умов екстремуму та діагностування його типу існує спеціальний алгоритм, який було розглянуто у курсі математичного аналізу.

Приклад. Попит на продукцію, що виготовляється на двох видах обладнання, становить 120 одиниць. Собівартість виробництва одиниці

продукції на обладнанні першої групи задано у вигляді виразу:
 $3x_1 + 4x_1^2$ тис. грн; на обладнанні другої групи: $5x_2^2$ тис. грн.

Знайти оптимальний план виробництва продукції на кожній групі обладнання, який за умови задоволення попиту потребує найменших витрат, пов'язаних із собівартістю продукції.

Розв'язання. Математична модель задачі:

$$F = 3x_1 + 4x_1^2 + 5x_2^2 \rightarrow \min$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 120, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Складемо функцію Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = 3x_1 + 4x_1^2 + 5x_2^2 + \lambda(120 - x_1 - x_2).$$

Прирівнявши до нуля частинні похідні цієї функції за невідомими параметрами x_1 , x_2 і λ , дістанемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 3 + 8x_1 - \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 10x_2 - \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 120 - x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, знайдемо:

$$\begin{cases} x_1 = 66,5 \\ x_2 = 53,5 \\ \lambda = 535 \end{cases}$$

Отже, на першій групі обладнання необхідно випускати 66,5, а на другій 53,5 одиниць продукції. При цьому мінімальні витрати становитимуть:

$$F_{\min} = 3 \cdot 66,5 + 4 \cdot 66,5^2 + 5 \cdot 53,5^2 = 32199,75 \text{ тис.грн.}$$

3 ДИНАМІЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Динамічне програмування є математичним методом розв'язання задач певної структури – задач пошуку оптимального розв'язку за умов, що досліджувана система або процес істотно залежить від часу і його перебігом можна керувати. Прикладами задач даного типу є:

- розподіл капіталовкладень між можливими напрямками їх використання;
- управління запасами;
- календарне планування виробництва при коливанні попиту на продукцію;
- закупівля запасних частин для забезпечення неперервної експлуатації обладнання;
- планування профілактичного ремонту обладнання економічно значимих підприємств (ТЕЦ, АЕС та ін.);
- вибір методів проведення реклами;
- планування вилучення основних фондів з експлуатації.

Особливістю всіх задач, які можна розв'язати методом динамічного програмування (ДП) є те, що *на кожному етапі можна керувати станом досліджуваної системи та оцінювати якість цього управління.*

3.1 Загальна постановка задачі

Потрібно дослідити деяку **керовану систему**, тобто систему, станом і розвитком якої можна управляти. В економічних процесах управління означає перерозподіл коштів, заміну обладнання, визначення обсягів поставок сировини на певний період і т. ін. Прийнято, що процес управління можна реалізувати дискретно за N кроків (етапів). Виділення етапів управління може бути як природнім (рік, квартал, місяць тощо), так і спеціальним. Отже, метод ДП – це знаходження оптимального управління поетапно, на кожному кроці визначаючи розв'язок відносно лише цього етапу.

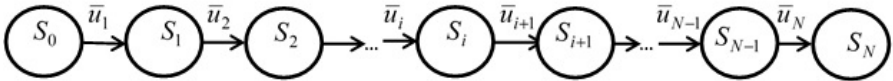
Нехай N_i – це деякий поточний етап. Стан S_i досліджуваної економічної системи S на цьому етапі характеризується набором

параметрів стану $(s_1, s_2, \dots, s_l)$, для дослідження яких і побудована відповідна математична модель. На кожному з досліджуваних етапів система може бути в одному з деяких станів. Перехід від одного стану до наступного відбувається під дією різних факторів, найважливішими з яких є **параметри управління** $\bar{u}_i = (u_1, u_2, \dots, u_p)$. Тобто, стан системи на i -му етапі залежить від попереднього стану S_{i-1} та того набору параметрів управління $\bar{u}_i$, що був до нього застосований:

$$S_i = \varphi_i(S_{i-1}; \bar{u}_i), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.1)$$

(φ_i – це деяка функція процесу), і не залежить від попередніх станів та управління. Рівняння (3.1) називають **рівнянням стану**.

Таким чином, перехід системи з початкового стану S_0 у кінцевий стан S_N схематично виглядає, як



Будь яку послідовність управління $\bar{U} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_N)$, яка переводить систему зі стану S_0 у стан S_N називають **стратегією**.

Ефективність вибору стратегії оцінюють за вибраним критерієм певною цільовою функцією Z , яка характеризує **економічний ефект** вибраної стратегії:

$$Z = F(S_0, \bar{U}).$$

Цільова функція є адитивною стосовно кожного етапу. Тобто, якщо позначити показник ефективності i -го етапу через

$$Z_i = f_i(S_{i-1}, \bar{u}_i), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (3.2)$$

то цільова функція буде:

$$Z = \sum_{i=1}^N f_i(S_{i-1}, \bar{u}_i). \quad (3.3)$$

Отже, задачу динамічного програмування (задачу поетапної оптимізації) можна сформулювати так: визначити таку оптимальну стратегію управління $U_{opt} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_N)$, яка переводить систему

S зі стану S_0 у стан S_N і за якої цільова функція (3.3) досягає екстремального (максимального або мінімального) значення.

Особливості моделі ДП:

- задача оптимізації може бути розв’язана за N керованих кроків;
- цільова функція адитивна на кожному етапі можливого управління (дорівнює сумі значень цільової функції на кожному кроці);
- вибір управління на кожному i -му етапі залежить лише від досягнутого на попередньому етапі стану системи і не впливає на її стан за попередні кроки (відсутній зворотний зв’язок);
- стан S_i після i -го етапу управління залежить тільки від попереднього стану S_{i-1} та управління $\bar{u}_i$ (відсутність післядії);
- на кожному етапі як управління $\bar{u}_i$, так і стан S_i залежать лише від скінченної множини параметрів.

3.2 Принцип оптимальності та структура рівняння Белмана

Будемо називати **частинним процесом** процес переходу від будь-якого довільного проміжного стану в інший проміжний стан. Тоді **принцип оптимальності Р. Белмана** стверджує, що для будь-якого процесу без зворотного зв’язку оптимальне управління системою в цілому містить у собі оптимальне управління для будь-якого частинного процесу стосовно його вихідного стану.

Задачу ДП із заданими або вибраними кількістю етапів і вихідними й завершальними умовами розкладають на послідовність простих задач. Розв’язання кожної такої часткової задачі є етапом розв’язання вихідної задачі ДП.

На кожному етапі при досягненні будь-якого допустимого стану S_{i-1} системи наступне управління $\bar{u}_i$ необхідно вибирати з урахуванням усіх його наслідків для подальшого перебігу процесу, тому що цей вибір впливає на наступний стан S_i і на подальше управління $\bar{u}_{i+1}$. Ця вимога обумовлена принципом оптимальності і

стосується кожного кроку, крім останнього. На останньому, N -му, кроці за будь-якого стану S_{N-1} оптимальне управління обирають таким, щоб досягти стану S_N , враховуючи ситуацію лише на цьому останньому кроці.

Розглянемо останній, N -й, етап: S_{N-1} – один із можливих станів системи на початку цього етапу; S_N – заданий завершальний стан; ϵ множина управлінь на цьому кроці, з якої потрібно вибрати управління $\bar{u}_N$; $f_N(S_{N-1}, \bar{u}_N)$ – відповідний доданок цільової функції для N -го етапу.

Нехай $Z_N^*(S_{N-1})$ – екстремум цільової функції (3.2), тобто показник економічної ефективності N -го кроку. Припустимо, що перед початком завершального етапу система може бути в будь-якому стані S_{N-1} з множини допустимих станів, а управління на останньому кроці було оптимальним. Z_N^* називають **умовним екстремумом цільової функції на N -му кроці**, тобто

$$Z_N^*(S_{N-1}) = \text{extr } f_N(S_{N-1}, \bar{u}_N). \quad (3.4)$$

Екстремум визначають на множині всіх допустимих управлінь і станів на останньому етапі. Управління $\bar{u}_N$, за якого досягнутий екстремум (3.4), залежить від стану S_N і є **умовним оптимальним управлінням на N -му етапі**. Його позначають $\bar{u}_N^*(S_{N-1})$.

Умовно оптимальних управлінь $\bar{u}_N^*(S_{N-1})$ і умовно оптимальних екстремумів $Z_N^*(S_{N-1})$ буде стільки, скільки є можливих станів на N -му етапі.

Визначивши множину умовно оптимальних управлінь на N -му етапі, переходять до попереднього, $N-1$ -го етапу. За будь-якого стану S_{N-2} та управлінь $\bar{u}_{N-1}$ з урахуванням оптимального управління на N -му етапі, значення цільової функції може бути знайдене, як

$$Z_{N-1} = f_{N-1}(S_{N-2}, \bar{u}_{N-1}) + Z_N^*(S_{N-1}).$$

Згідно з принципом оптимальності, для будь-якого стану S_{N-2} розв'язок на $N-1$ -му етапі треба знайти так, щоб він разом з розв'язком на останньому, N -му етапі гарантував екстремум цільової функції для двох останніх кроків. Цей екстремум є умовним екстремумом цільової функції за умови оптимального управління на двох останніх етапах. Тобто

$$Z_{N-1}^*(S_{N-2}) = \text{extr} (f_{N-1}(S_{N-2}, \bar{u}_{N-1}) + Z_N^*(S_{N-1})).$$

Таким чином, починаючи від останнього етапу і крокуючи до першого, знаходять умовні екстремуми цільової функції. Спочатку для двох останніх етапів, потім для трьох останніх етапів і так далі. В результаті отримують множину умовно оптимальних управлінь і множину відповідних екстремальних значень.

У загальному випадку умовний екстремум цільової функції можна представити у наступному вигляді:

$$Z_{N-i+1}^*(S_{N-i}) = \text{extr} (f_{N-i+1}(S_{N-i}, \bar{u}_{N-i+1}) + Z_{N-i+2}^*(S_{N-i+1})), \quad (3.5)$$

де $Z_{N-i+1}^*(S_{N-i})$ – це умовне оптимальне значення цільової функції на останніх i кроках.

Рівняння (3.5) називають **рівняннями Белмана**. Вони представляють математичний запис принципу оптимальності. Рівняння Белмана дозволяють процедуру розв'язання задачі ДП привести до послідовного пошуку умовних оптимальних розв'язків на кожному етапі, виконуючи відлік від завершального стану до початкового. У результаті отримують оптимальну стратегію управління системою в цілому.

Рівняння (3.5) дають загальну схему обчислень при використанні методу ДП. Для кожної конкретної задачі вони мають свою специфіку.

3.3 Задача про розподіл інвестицій

У виробниче об'єднання входять три підприємства Π_1 , Π_2 , Π_3 . Керівництво об'єднання вирішило інвестувати у свої підприємства 5 умовних грошових одиниць (ум. гр. од.) у загальній сумі. Поведені маркетингові дослідження прогнозують величину очікуваного прибутку кожного з підприємств в залежності від обсягу інвестованих коштів. Ці дані представлено у таблиці:

Обсяг інвестицій	Очікуваний прибуток підприємств		
	Π_1	Π_2	Π_3
1	2	1	3
2	4	2	6
3	6	6	8
4	8	10	9
5	10	12	10

Потрібно знайти такий розподіл інвестицій між підприємствами, який забезпечив би максимум сумарного очікуваного прибутку.

Розв'язання. У даній задачі керованою системою є виробниче об'єднання з 3 підприємств, багатоетапним процесом – процес виділення коштів підприємствам. Етапи процесу у даній задачі – це порядок виділення інвестицій, тобто перший етап – це виділення коштів підприємству Π_1 , другий етап – виділення коштів підприємствам Π_1 і Π_2 , третій етап – виділення коштів усім трьом підприємствам. Показник економічної ефективності – це сумарний прибуток від певного розподілу інвестицій, який потрібно максимізувати. Управління – це перерозподіл коштів між підприємствами.

Етап 1. Визначимо суму прибутку від інвестування підприємства Π_1 . Нехай управління u_1 – це кошти, виділені підприємству Π_1 , тоді очікуваний прибуток підприємства – це умовно екстремальні значення цільової функції Z_1^* на цьому етапі. Умовні оптимальні управління u_1^* будуть співпадати з u_1 (таблиця 3.1).

Таблиця 3.1

u_1 , ум.гр.од.	Z_1^* , ум.гр.од.	u_1^* , ум.гр.од.
0	0	0
1	2	1
2	4	2
3	6	3
4	8	4
5	10	5

Етап 2. Визначимо суму прибутку від інвестування коштів підприємствам Π_1 і Π_2 . Нехай $u_1 + u_2$ – це сумарні кошти, виділені на два підприємства, u_2 – це кошти, виділені саме підприємству Π_2 . Складемо відповідну таблицю. Заповнюємо перший стовпчик. Його значення – це прибутки, коли підприємству Π_2 кошти не виділені ($u_2 = 0$ ум. гр. од.), а все виділено підприємству Π_1 . Отже значення у першому стовпці будуть співпадати зі значеннями Z_1^* у таблиці 3.1:

$u_1 + u_2 \backslash u_2$	0	1	2	3	4	5
1	2					
2	4					
3	6					
4	8					
5	10					

Заповнюємо другий стовпчик таблиці ($u_2 = 1$ ум.гр.од.). Для першої клітинки загальний обсяг інвестицій $u_1 + u_2 = 1$ ум.гр.од., з них для Π_2 виділено 1 ум.гр.од., а для Π_1 нічого не виділено. Сумарний прибуток беремо як відповідний прибуток Π_2 з вихідної таблиці.

Для другої клітинки загальний обсяг інвестицій $u_1 + u_2 = 2$ ум.гр.од., з них для Π_2 виділено 1 ум.гр.од. ($u_2 = 1$), отже для Π_1 виділено 1 ум.гр.од. Сумарний прибуток беремо як суму відповідних прибутків Π_1 і Π_2 з вихідної таблиці: $2+1=3$.

Для третьої клітинки загальний обсяг інвестицій $u_1 + u_2 = 3$ ум.гр.од., з них для Π_2 виділено 1 ум.гр.од. ($u_2 = 1$), а для Π_1 виділено 2 ум.гр.од. Сумарний прибуток беремо як суму відповідних прибутків Π_1 і Π_2 з вихідної таблиці: $4+1=5$.

Аналогічно заповнюємо інші клітинки стовпчика:

$u_1 + u_2 \backslash u_2$	0	1	2	3	4	5
1	2	1				
2	4	$2+1=3$				
3	6	$4+1=5$				
4	8	$6+1=7$				
5	10	$8+1=9$				

Заповнюємо третій стовпчик таблиці ($u_2 = 2$). Першу клітинку з розгляду вилучають, тому що загальний обсяг інвестицій $u_1 + u_2$ не може бути меншим за u_2 .

Для другої клітинки загальний обсяг інвестицій $u_1 + u_2 = 2$ ум.гр.од., з них для Π_2 виділено 2 ум.гр.од., а для Π_1 нічого не виділено. Сумарний прибуток беремо як відповідний прибуток Π_2 з вихідної таблиці.

Для третьої клітинки загальний обсяг інвестицій $u_1 + u_2 = 3$ ум.гр.од., з них для Π_2 виділено 2 ум.гр.од., а для Π_1 виділено 1 ум.гр.од. Сумарний прибуток беремо як суму відповідних прибутків Π_1 і Π_2 з вихідної таблиці: $2+2=4$.

Аналогічно заповнюємо інші клітинки стовпчика (таблиця 3.2).

Заповнюємо четвертий стовпчик таблиці ($u_2 = 3$ ум.гр.од.). Першу та другу клітинку з розгляду вилучають, тому що загальний обсяг інвестицій $u_1 + u_2$ не може бути меншим за u_2 .

Для третьої клітинки загальний обсяг інвестицій $u_1 + u_2 = 3$ ум.гр.од., з них для Π_2 виділено 3 ум.гр.од., а для Π_1 нічого не виділено. Сумарний прибуток беремо як відповідний прибуток Π_2 з вихідної таблиці.

Таблиця 3.2

$u_1 + u_2 \backslash u_2$	0	1	2	3	4	5
1	2	1				
2	4	$2+1=3$	2			
3	6	$4+1=5$	$2+2=4$			
4	8	$6+1=7$	$4+2=6$			
5	10	$8+1=9$	$6+2=8$			

Для четвертої клітинки загальний обсяг інвестицій $u_1 + u_2 = 4$ ум.гр.од., з них для P_2 виділено 3 ум.гр.од., а для P_1 виділено 1 ум.гр.од. Сумарний прибуток беремо як суму відповідних прибутків P_1 і P_2 з вихідної таблиці: $2+6=8$.

Аналогічно заповнюємо п'яту клітинку стовпчика:

$u_1 + u_2 \backslash u_2$	0	1	2	3	4	5
1	2	1				
2	4	$2+1=3$	2			
3	6	$4+1=5$	$2+2=4$	6		
4	8	$6+1=7$	$4+2=6$	$2+6=8$		
5	10	$8+1=9$	$6+2=8$	$4+6=10$		

Таким самим чином заповнюємо наступні стовпчики таблиці:

$u_1 + u_2 \backslash u_2$	0	1	2	3	4	5
1	2	1				
2	4	$2+1=3$	2			
3	6	$4+1=5$	$2+2=4$	6		
4	8	$6+1=7$	$4+2=6$	$2+6=8$	10	
5	10	$8+1=9$	$6+2=8$	$4+6=10$	$2+10=12$	12

Запишемо у додатковому стовпчику умовні екстремальні значення цільової функції Z_2^* (максимальне значення у відповідному рядку) і умовні оптимальні управління u_2^* (таке u_2 , при якому досягнute Z_2^*).

Таблиця 3.3

$\begin{matrix} u_2 \\ u_1 + u_2 \end{matrix}$	0	1	2	3	4	5	Z_2^*	u_2^*
1	2	1					2	0
2	4	2+1=3	2				4	0
3	6	4+1=5	2+2=4	6			6	0 3
4	8	6+1=7	4+2=6	2+6=8	10		10	4
5	10	8+1=9	6+2=8	4+6=10	2+10=12	12	12	4 5

Етап 3. Визначимо суму прибутку Z_3^* від інвестування коштів усім трьом підприємствам. Нехай $u_1 + u_2 + u_3$ – це сумарні кошти, виділені на три підприємства, u_3 – це кошти, виділені саме підприємству Π_3 (таблиця 3.4).

Заповнюємо перший стовпчик таблиці ($u_3 = 0$ ум.гр.од.). Його значення – це прибутки, коли підприємству Π_3 кошти не виділені, а все виділено підприємствам Π_1 і Π_2 , причому оптимально. Тобто значення у першому стовпці будуть співпадати зі значеннями Z_2^* у таблиці 3.3.

Таблиця 3.4

$\begin{matrix} u_3 \\ u_1 + u_2 + u_3 \end{matrix}$	0	1	2	3	4	5
1	2					
2	4					
3	6					
4	10					
5	12					

Заповнюємо другий стовпчик таблиці ($u_3 = 1$ ум.гр.од.). Для першої клітинки загальний обсяг інвестицій $u_1 + u_2 + u_3 = 1$ ум.гр.од., з них для Π_3 виділено 1 ум.гр.од., а для Π_1 і Π_2 нічого не виділено. Сумарний прибуток беремо як відповідний прибуток Π_3 з вихідної таблиці.

Для другої клітинки загальний обсяг інвестицій $u_1 + u_2 + u_3 = 2$ ум.гр.од., з них для Π_3 виділено 1 ум.гр.од. ($u_3 = 1$), і для Π_1 і Π_2 виділено 1 ум.гр.од. Сумарний прибуток беремо як суму відповідних прибутків: для Π_1 і Π_2 – це значення Z_2^* з таблиці 3 (рядок, де $u_1 + u_2 = 1$), для Π_3 – з вихідної таблиці, тобто: $2+3=5$.

Для третьої клітинки загальний обсяг інвестицій $u_1 + u_2 + u_3 = 3$ ум.гр.од., з них для Π_3 виділено 1 ум.гр.од. ($u_3 = 1$), і для Π_1 і Π_2 виділено 2 ум.гр.од. Сумарний прибуток беремо як суму відповідних прибутків: для Π_1 і Π_2 – це значення Z_2^* з таблиці 3.3 (рядок, де $u_1 + u_2 = 2$), для Π_3 – з вихідної таблиці, тобто: $4+3=7$.

Аналогічно заповнюємо інші клітинки стовпчика:

u_3 $u_1 + u_2 + u_3$	0	1	2	3	4	5
1	2	3				
2	4	$2+3=5$				
3	6	$4+3=7$				
4	10	$6+3=9$				
5	12	$10+3=13$				

Таким самим чином заповнюємо наступні стовпчики таблиці (таблиця 3.5).

Запишемо у додатковому стовпчику умовні екстремальні значення цільової функції Z_3^* (максимальне значення у відповідному

рядку) і умовні оптимальні управління u_3^* (таке u_3 , при якому досягнуте Z_3^*) (таблиця 3.6).

Таблиця 3.5

u_3 $u_1 + u_2 + u_3$	0	1	2	3	4	5
1	2	3				
2	4	2+3=5	6			
3	6	4+3=7	2+6=8	8		
4	10	6+3=9	4+6=10	2+8=10	9	
5	12	10+3=13	6+6=12	4+8=12	2+9=11	10

Таблиця 3.6

u_3 $u_1 + u_2 + u_3$	0	1	2	3	4	5	Z_3^*	u_3^*
1	2	3					3	1
2	4	2+3=5	6				6	2
3	6	4+3=7	2+6=8	8			8	2 3
4	10	6+3=9	4+6=10	2+8=10	9		10	0 2 3
5	12	10+3=13	6+6=12	4+8=12	2+9=11	10	13	1

Розглянемо одержані результати. Максимальним значенням цільової функції $Z_{\max}$ буде:

$$Z_{\max} = Z_3^* = 13.$$

Знайдемо оптимальну стратегію управління. На останньому етапі розв'язку умовно екстремальне значення цільової функції $Z_3^* = 13$ було досягнуте при умовно оптимальному управлінні $u_3^* = 1$ (див. таблицю 3.6). Тобто на останньому етапі необхідно на

підприємство Π_3 виділити 1 ум.гр.од. Відповідно, на підприємства Π_1 і Π_2 сумарно потрібно виділити 4 ум.гр.од. Дивимось таблицю 3.3. Для $u_1 + u_2 = 4$ умовне екстремальне значення функції $Z_2^* = 10$ і це досягнуто при умовно оптимальному управлінні $u_2^* = 4$. Тобто на підприємство Π_2 потрібно виділити 4 ум.гр.од.

Висновок. Максимум сумарного очікуваного прибутку $Z_{\max} = 13$ ум.гр.од. забезпечить наступний розподіл інвестицій: у підприємство Π_1 інвестувати непотрібно, у підприємство Π_2 інвестувати 4 ум.гр.од., у підприємство Π_3 інвестувати 1 ум.гр.од.

4 БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНІ ЗАДАЧІ В ЕКОНОМІЦІ

Економічну ефективність виробництва кількісно визначають багатьма показниками: зростанням продуктивності праці, прибутком, рентабельністю та ін. Максимальне значення одного з параметрів не визначає максимальну ефективність підприємства в цілому. Задачі, в яких задано декілька критеріїв (цільових функцій), називають **багатокритеріальними**, або **багатоцільовими задачами**.

Проблема розв'язання багатокритеріальних задач – неможливість відшукування розв'язку, оптимального за всіма критеріями. Тому під розв'язанням задач такого типу розуміють відшукування деякого компромісу між заданими критеріями.

Деякі методи розв'язування:

- *метод згортання* – особа, що приймає рішення (ОПР), зводить багатокритеріальну задачу до задачі з одним критерієм;
- *метод послідовних поступок* – ОПР йде до розв'язку шляхом поступового послаблення початкових вимог;
- *метод ідеальної точки* – в області допустимих значень невідомих шукають таку сукупність їх значень, яка дає набір значень критеріїв, у тому чи іншому сенсі близький до найкращого.

4.1 Метод згортання критеріїв

Нехай математична модель деякого економічного процесу задана у вигляді таблиці, в якій вказано значення частинних критеріїв $a_{i1}; a_{i2}; a_{i3}; \dots; a_{in}$, що визначають ефективність даного процесу. Метод згортання припускає утворення узагальненої функції $F_i(a_{i1}; a_{i2}; a_{i3}; \dots; a_{in})$, яка монотонно залежить від заданих критеріїв. Існує декілька методів згортання, наприклад: метод адитивної оптимізації; метод багатоцільової оптимізації.

Метод адитивної оптимізації.

Нехай

$$F_i(a_{ij}) = \sum_{j=1}^n \lambda_j a_{ij} = \lambda_1 a_{i1} + \lambda_2 a_{i2} + \dots + \lambda_n a_{in} \quad (4.1)$$

– адитивний критерій оптимальності, де λ_j – вагові коефіцієнти, які визначають у кількісній формі ступінь переваги j -го критерію порівняно з іншими критеріями. При цьому більш важливому критерію приписують більшу вагу, а загальна важливість усіх критеріїв дорівнює одиниці, тобто

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, j = \overline{1, n}.$$

Узагальнена цільова функція у вигляді (4.1) може бути використана для згортання критеріїв оптимальності, якщо:

– частинні критерії кількісно сумірні за важливістю, тобто кожному з них можна поставити у відповідність деяке число λ_j , яке чисельно характеризує його важливість у відношенні до інших критеріїв;

– частинні критерії є однорідними (мають однакову розмірність).

Якщо частинні критерії неоднорідні, то є необхідною **нормалізація критеріїв**, тобто зведення всіх критеріїв до одного безрозмірного масштабу.

Процедура нормалізації критеріїв:

1) визначення максимуму кожного локального критерію, тобто

$$a_j^+ = \max a_{ij}, i = \overline{1, m};$$

2) виділення групи критеріїв, які максимізуються при розв’язанні задачі, та групи критеріїв, які мінімізуються при розв’язанні задачі;

3) нормалізовані критерії визначають наступним чином:

$$\hat{a}_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_j^+}, j = \overline{1, l} \text{ – для критеріїв, які максимізуються,}$$

$$\hat{a}_{ij} = 1 - \frac{a_{ij}}{a_j^+}, j = \overline{l+1, n} \text{ – для критеріїв, які мінімізуються.}$$

Оптимальним буде такий розв’язок (рішення, стратегія), який забезпечує максимальне значення цільової функції:

$$F_i = \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot \widehat{a}_{ij}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Приклад. Одній з фірм потрібно вибрати оптимальну стратегію забезпечення нового виробництва обладнанням. За допомогою експериментальних спостережень були визначені значення частинних критеріїв функціонування відповідного обладнання a_{ij} (в умовних одиницях), що випускають три заводи-виробники (таблиця 4.1). На основі експертних оцінок було також визначено вагу частинних критеріїв: $\lambda_1 = 0,4$; $\lambda_2 = 0,2$; $\lambda_3 = 0,1$; $\lambda_4 = 0,3$.

Визначити оптимальну стратегію вибору обладнання з трьох можливих з урахуванням усіх локальних критеріїв.

Таблиця 4.1

Варіанти устаткування (стратегії)	Частинні критерії ефективності обладнання			
	Продуктивність a_1	Вартість a_2	Енергоємність a_3	Надійність a_4
обладнання з заводу 1	$a_{11} = 5$	$a_{12} = 7$	$a_{13} = 5$	$a_{14} = 6$
обладнання з заводу 2	$a_{21} = 3$	$a_{22} = 4$	$a_{23} = 7$	$a_{24} = 3$
обладнання з заводу 3	$a_{31} = 4$	$a_{32} = 6$	$a_{33} = 2$	$a_{34} = 4$

Розв'язання. Визначимо максимум кожного локального критерію:

$$a_1^+ = 5; \quad a_2^+ = 7; \quad a_3^+ = 7; \quad a_4^+ = 6.$$

При розв'язуванні задачі максимізуються перший (продуктивність) і четвертий (надійність) критерії, а мінімізуються другий (вартість) і третій (енергоємність) критерії.

Виходячи з принципу максимізації ефективності, нормалізуємо критерії:

$$\text{для першого критерію: } \widehat{a}_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_1^+};$$

$$\widehat{a}_{11} = \frac{a_{11}}{a_1^+} = \frac{5}{5} = 1; \quad \widehat{a}_{21} = \frac{a_{21}}{a_1^+} = \frac{3}{5} = 0,6; \quad \widehat{a}_{31} = \frac{a_{31}}{a_1^+} = \frac{4}{5} = 0,8;$$

для четвертого критерію: $\widehat{a}_{i4} = \frac{a_{i4}}{a_4^+}$:

$$\widehat{a}_{14} = \frac{a_{14}}{a_4^+} = \frac{6}{6} = 1; \quad \widehat{a}_{24} = \frac{a_{24}}{a_4^+} = \frac{3}{6} = 0,5; \quad \widehat{a}_{34} = \frac{a_{34}}{a_4^+} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3};$$

для другого критерію: $\widehat{a}_{i2} = 1 - \frac{a_{i2}}{a_2^+}$:

$$\widehat{a}_{12} = 1 - \frac{a_{12}}{a_2^+} = 1 - \frac{7}{7} = 0; \quad \widehat{a}_{22} = 1 - \frac{a_{22}}{a_2^+} = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7};$$

$$\widehat{a}_{32} = 1 - \frac{a_{32}}{a_2^+} = 1 - \frac{6}{7} = \frac{1}{7};$$

для третього критерію: $\widehat{a}_{i3} = 1 - \frac{a_{i3}}{a_3^+}$:

$$\widehat{a}_{13} = 1 - \frac{a_{13}}{a_3^+} = 1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7}; \quad \widehat{a}_{23} = 1 - \frac{a_{23}}{a_3^+} = 1 - \frac{7}{7} = 0;$$

$$\widehat{a}_{33} = 1 - \frac{a_{33}}{a_3^+} = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}.$$

Отримані дані внесемо у таблицю (таблиця 4.2).

Визначимо узагальнену цільову функцію за кожною стратегією:

$$F_1 = \lambda_1 \widehat{a}_{11} + \lambda_2 \widehat{a}_{12} + \lambda_3 \widehat{a}_{13} + \lambda_4 \widehat{a}_{14};$$

$$F_1 = 0,4 \cdot 1 + 0,2 \cdot 0 + 0,1 \cdot \frac{2}{7} + 0,3 \cdot 1 \approx 0,729;$$

$$F_2 = \lambda_1 \widehat{a}_{21} + \lambda_2 \widehat{a}_{22} + \lambda_3 \widehat{a}_{23} + \lambda_4 \widehat{a}_{24};$$

$$F_2 = 0,4 \cdot 0,6 + 0,2 \cdot \frac{3}{7} + 0,1 \cdot 0 + 0,3 \cdot 0,5 \approx 0,476;$$

$$F_3 = \lambda_1 \widehat{a}_{31} + \lambda_2 \widehat{a}_{32} + \lambda_3 \widehat{a}_{33} + \lambda_4 \widehat{a}_{34};$$

$$F_3 = 0,4 \cdot 0,8 + 0,2 \cdot \frac{1}{7} + 0,1 \cdot \frac{5}{7} + 0,3 \cdot \frac{2}{3} \approx 0,603.$$

Таблиця 4.2

Варіанти устаткування	Нормалізовані критерії ефективності обладнання			
	Продуктивність	Вартість	Енергоємність	Надійність
обладнання з заводу 1	$\hat{a}_{11} = 1$	$\hat{a}_{12} = 0$	$\hat{a}_{13} = \frac{2}{7}$	$\hat{a}_{14} = 1$
обладнання з заводу 2	$\hat{a}_{21} = 0,6$	$\hat{a}_{22} = \frac{3}{7}$	$\hat{a}_{23} = 0$	$\hat{a}_{24} = 0,5$
обладнання з заводу 3	$\hat{a}_{31} = 0,8$	$\hat{a}_{32} = \frac{1}{7}$	$\hat{a}_{33} = \frac{5}{7}$	$\hat{a}_{34} = \frac{2}{3}$
Важливість	$\lambda_1 = 0,4$	$\lambda_2 = 0,2$	$\lambda_3 = 0,1$	$\lambda_4 = 0,3$

Оптимальним є перший варіант устаткування (тобто обладнання з заводу 1), так як $F_{\max} = F_1 = 0,729$.

Розглянутий підхід часто застосовують при розв'язанні економічних задач, пов'язаних з оцінкою якості промислової продукції та оцінкою рівня технічної досконалості технічних пристроїв і систем за декількома показниками.

4.2 Метод послідовних поступок

Спочатку критерії ранжують і нумерують у порядку спадання важливості. Абсолютне значення коефіцієнтів важливості λ_j на цьому етапі не грає ніякої ролі. Оптимізують перший за важливістю критерій a_1 та визначають його екстремальне значення a_1^* . Потім призначають величину допустимого відхилення критерію від оптимального значення (поступку) Δa_1 та шукають екстремальне значення другого за важливістю критерію a_2 , за умови, що відхилення першого критерію від оптимального значення не перебільшить величини поступки. Потім призначають поступку для другого критерію, й задачу оптимізують за третім критерієм і т.д.

Таким чином, багатокритеріальну задачу оптимізації замінюють послідовністю однокритеріальних задач. Розв'язок кожної попередньої задачі використовують при розв'язуванні наступних для формування додаткових умов, які накладають обмеження на величину поступки.

ПЕРЕЛІК ЛІТЕРАТУРИ

1. Вітлінський В. В., Наконечний С. І., Терещенко Т. О. Математичне програмування: Навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. Київ: КНЕУ, 2001. 248 с.
2. Волонтир Л. О, Потапова Н. А., Ушкаленко І. М., Чіков І. А. Оптимізаційні методи та моделі в підприємницькій діяльності: Навчальний посібник. Вінниця: ВНАУ, 2020. 404 с.
3. Забуранна Л. В., Попрозман Н. В., Клименко Н. А., Попрозман О. І., Забуранний С. В. Оптимізаційні методи та моделі: Підручник. Київ, 2014. 372 с.
4. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій. Підручник. Київ: Видавничий Дім «Слово», 2006. 816 с.
5. Кутковецький В. Я. Дослідження операцій: Навчальний посібник. Миколаїв: Вид-во МДГУ ім. П. Могили, 2003. 260 с.
6. Оспішев В. І., Пруненко Д. О., Бурко Д. Л., Єрмак О. М., Санько Я. В. Дослідження операцій: Навчальний посібник. Харків: ХНАМГ, 2008. 136 с.
7. Ульяновченко О. В. Дослідження операцій в економіці: Підручник для студентів вузів. Харків: Гриф, 2002. 580 с.