

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний університет «Запорізька політехніка»

**ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ ДО РОЗРАХУНКОВИХ
РОБІТ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ.
РОЗДІЛИ «ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ», «ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ
РІВНІННЯ ТА СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ»
для студентів технічних спеціальностей
денної форми навчання**

2023

Індивідуальні завдання до розрахункових робіт з вищої математики. Розділи «Елементи теорії поля», «Диференціальні рівняння та системи диференціальних рівнянь» для студентів технічних спеціальностей денної форми навчання / Укл.: Засовенко А.В., Килимник І.М. – Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2023. –72 с.

Укладачі: Засовенко А.В., к.т.н., доцент,
Килимник І.М., к.т.н., доцент.

Рецензент: Онуфрієнко В.М., д.ф.-м.наук., професор

Відповідальний за випуск: Килимник І.М., к.т.н., доцент

Затверджено на засіданні кафедри
«Математика» НУ «Запорізька
політехніка»
Протокол № 3 від 25.10.2023 р..

Рекомендовано НМК Машинобудівного
факультету НУ «Запорізька
політехніка»
Протокол № 3 від 26.10.2023 р.

ЗМІСТ

	Стор.
1. Теорія поля	
1.1 Аудиторні завдання	4
1.2 Індивідуальні завдання	5
2. Диференціальні рівняння та системи Диференціальних рівнянь	
2.1 Диференціальні рівняння 1-го порядку	19
2.1.1 Аудиторні завдання	19
2.1.2 Індивідуальні завдання	24
2.2 Диференціальні рівняння вищих порядків та системи диференціальних рівнянь	40
2.2.1 Аудиторні завдання	40
2.2.2 Індивідуальні завдання	45
3. Довідковий матеріал «Таблиця невизначених інтегралів»	70
Література	72

1. ТЕОРІЯ ПОЛЯ

1.1 Аудиторні завдання.

1.1.1 Скалярне поле визначене функцією $f = f(x; y; z) = \frac{4y^2 + z}{x^2}$.

Знайти його градієнт та побудувати поверхню рівня $f = 1$.

Відповідь: $\left(\frac{-2(4y^2 + z)}{x^3}; \frac{8y}{x^2}; \frac{1}{x^2} \right)$, гіперболічний параболоїд.

1.1.2 Знайти одиничний вектор нормалі до поверхні
а) $xy^2 + x^2yz - 2xz^3 = 0$ в точці $M_0(1;1;1)$, б) $z = x^2 + 2y^2$ в точці $M_0(1;1;?)$.

Відповідь: а) $\vec{n}^0 = \left(\frac{1}{\sqrt{35}}; \frac{3}{\sqrt{35}}; \frac{-5}{\sqrt{35}} \right)$,

б) $\vec{n}^0 = \left(\frac{2}{\sqrt{21}}; \frac{4}{\sqrt{21}}; \frac{-1}{\sqrt{21}} \right)$.

1.1.3 Знайти значення похідної функції $u = \ln \sqrt{y^2 + 4z^2}$ в точці $M_1(-1;0;1)$ за напрямом вектору $\overline{M_1M_2}$ і $\overrightarrow{\text{grad}} u(M_1)$, якщо $M_2(1;1;3)$.

Відповідь: $\frac{2}{3}; (0;0;1)$.

1.1.4 Для векторного поля $\vec{F}(M) = (z - y)\vec{i} + y^2z^2\vec{j} + x^3\vec{k}$ та точки $M_0(1;2;-1)$ знайти: $\text{rot}\vec{F}(M_0)$, $|\text{rot}\vec{F}(M_0)|$, $\text{div}\vec{F}(M_0)$.

Відповідь: $(8; -2; 1), \sqrt{69}, 4$.

1.1.5 Обчислити потік векторного поля $\vec{a}(M) = x\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}$ через зовнішню поверхню піраміди створену площиною $P: 2x + 4y + z = 2$

та координатними площинами: 1) за означенням, 2) за допомогою формули Остроградського-Гауса.

Відповідь: 1.

1.1.6 За допомогою формули Остроградського-Гаусса знайти потік векторного поля $\vec{a} = (y+z)\vec{i} - (x+y)\vec{j} + yz\vec{k}$ через замкнуту поверхню $S: (x-2)^2 + (z+1)^2 = 9, y=1, y=3$.

Відповідь: 18π .

1.1.7 За допомогою формули Остроградського-Гаусса знайти потік векторного поля $\vec{a} = (y+xz)\vec{i} - (x+y)\vec{j} + (y+z)\vec{k}$ через зовнішню поверхню тіла, обмеженого $S: z = \sqrt{9-x^2-y^2}, z=0$.

Відповідь: $10,125\pi$

1.1.8 Застосувавши формулу Стокса знайти циркуляцію векторного поля $\vec{F} = (y-z)\vec{i} - (x+z)\vec{j} + y\vec{k}$ по замкнутому контуру трикутника, який утворюється в наслідок перетинів координатних площин з площиною $P: 2x-2y+z=1$ (нормаль до трикутника спрямована від початку координат).

Відповідь: 0,5.

1.1.8 Довести, що поле $\vec{a} = 2xy\vec{i} + x^2\vec{j} + 2z\vec{k}$ є потенціальним та знайти його потенціал.

Відповідь: $x^2y + z^2 + C$.

1.2 Індивідуальні завдання

1.2.1 Скалярне поле визначене функцією $f = f(x; y; z)$. Знайти його градієнт та побудувати поверхню рівня $f = 1$.

Варіант	$f = f(x; y; z)$	Варіант	$f = f(x; y; z)$
1	$f = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	2	$f = \sqrt{4 + x^2 + y^2 - z}$

Варіант	$f = f(x; y; z)$	Варіант	$f = f(x; y; z)$
3	$f = \frac{4x^2 + (y-1)^2}{z^2}$	4	$f = \frac{y-z^2}{x^2}$
5	$f = \frac{3y^2 + x}{z^2}$	6	$f = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
7	$f = \frac{2x + 2z}{x^2 + y^2}$	8	$f = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$
9	$f = \frac{2x + z^2}{x^2 + y^2}$	10	$f = x^2 - 2y^2 + z^2$
11	$f = \sqrt{5 + x^2 + y^2 - z^2}$	12	$f = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
13	$f = \arcsin \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	14	$f = \frac{2z-1}{x^2 + y^2}$
15	$f = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2$	16	$f = \frac{12z}{x^2 + y^2}$
17	$f = \frac{x}{x^2 + y^2}$	18	$f = \frac{x^2 + y^2}{z}$
19	$f = \ln(x^2 + 4y^2)$	20	$f = \frac{x^2}{y^2 + z^2}$
21	$f = \frac{2y}{x^2 + z^2}$	22	$f = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} - z^2$
23	$f = \frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2}$	24	$f = \frac{2x}{y^2 + z^2}$
25	$f = \sqrt{x^2 + 4y^2 - z^2}$	26	$f = \frac{2y}{y^2 + z^2}$
27	$f = \frac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}}$	28	$f = \ln \sqrt{x^2 + 4y^2 - z^2}$

Варіант	$f = f(x; y; z)$	Варіант	$f = f(x; y; z)$
29	$f = \sqrt{x^2 - y^2 - z^2}$	30	$f = \ln(x^2 + 4y^2 - z^2)$

1.2.2 Знайти одиничний вектор нормалі до поверхні $F(x; y; z) = C$ в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Варіант	$F(x; y; z) = C$	$M_0(x_0, y_0, z_0)$
1	$x^3 y^2 - y^3 z + xz^2 = 0$	$M_0(0; 1; 1)$
2	$x^2 y + y^2 z + z^2 x = 5$	$M_0(1; -1; 2)$
3	$5x + y^2 - z^3 = 11$	$M_0(2; -3; 2)$
4	$xy^2 + x^3 yz - xz^3 = 54$	$M_0(2; 0; 3)$
5	$x^2 z^3 - y^3 z^2 + 5z = -30$	$M_0(1; 2; 3)$
6	$x^2 y + y^2 z - xz^2 = 5$	$M_0(2; -1; 1)$
7	$x^2 y + y^3 z^2 + 2z^3 = 0$	$M_0(1; 1; -1)$
8	$x^2 y^2 + x^3 z^2 + y^2 z^3 = 0$	$M_0(0; 0; 1)$
9	$xy^2 - x^3 y + yz^3 = 0$	$M_0(1; 1; 0)$
10	$8x^3 - 2xy^2 + 4z^3 = 100$	$M_0(-1; 0; 3)$
11	$x^2 z^3 + y^3 z - z^2 = 0$	$M_0(1; 0; 1)$
12	$8x^3 - xy^2 - 4z^3 = 0$	$M_0(1; 2; 1)$
13	$xy^2 + x^3 yz - xz^3 = 0$	$M_0(0; 1; -1)$
14	$x^2 y - 2y + z^2 x = 0$	$M_0(2; -1; -3)$
15	$xy^2 + x^2 yz - xy^3 = 0$	$M_0(1; 0; 1)$
16	$x^2 z^3 - y^3 z^2 + z^3 = 0$	$M_0(0; 1; 1)$
17	$xy^2 z - xy + z^2 = -1$	$M_0(1; 1; 0)$
18	$x^2 y + y^2 z + z^2 x = 1$	$M_0(1; 0; 1)$
19	$x^2 z + y^3 x - y^2 = 0$	$M_0(-1; 1; 2)$

Варіант	$F(x; y; z) = C$	$M_0(x_0, y_0, z_0)$
20	$x^3 + y^2 - xz^3 = 1$	$M_0(-1; 1; 1)$
21	$5x^2yz - xy^2z^2 = 6$	$M_0(1; 2; 1)$
22	$xy^2 + xyz - x^2y = 0$	$M_0(0; 1; 1)$
23	$x^2y + z^2 - y^3z^3 = 1$	$M_0(2; 2; 1)$
24	$xy^2z - xyz + z^2 = 0$	$M_0(1; 1; 0)$
25	$xy^2 + x^2yz - 2xy = 0$	$M_0(0; 1; 1)$
26	$xy^2z - xy + y^3z^2 = 0$	$M_0(1; 0; 1)$
27	$xy + x^2yz - xy^2 = 0$	$M_0(0; 1; 1)$
28	$3x^2 - 2xy^2 + 4xz^3 = 0$	$M_0(0; 1; 1)$
29	$e^x y + y^2 z - z^2 = 5$	$M_0(0; 2; 1)$
30	$3xy^2 - xyz + z^2 = -11$	$M_0(-3; -1; 1)$

1.2.3 Знайти значення похідної функції $u = u(x; y; z)$ в точці M_1 за напрямом вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$ і $\overrightarrow{\text{grad}} u(M_1)$.

Варіант	$u = u(x; y; z)$	$M_1(x_1; y_1; z_1)$	$M_2(x_2; y_2; z_2)$
1	$u = x^2y + y^2z + z^2x$	$M_1(1; 1; 1)$	$M_2(3; 2; 3)$
2	$u = 5xy^3z^2$	$M_1(-1; 1; 2)$	$M_2(2; 5; 2)$
3	$u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$	$M_1(0; 1; 1)$	$M_2(2; 0; 3)$
4	$u = e^{x^2 + y^2 + z^2}$	$M_1(1; 1; 1)$	$M_2(0; 3; 3)$
5	$u = \ln(xy + yz + xz)$	$M_1(1; 1; 1)$	$M_2(2; -1; 3)$
6	$u = \sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}$	$M_1(1; 1; 1)$	$M_2(-1; 0; 3)$
7	$u = x^2y - 2 + z^2x$	$M_1(1; 1; -1)$	$M_2(2; -1; -3)$
8	$u = e^x y + xe^y - z^2$	$M_1(0; 0; 1)$	$M_2(1; 2; 3)$
9	$u = 3xy^2 - xyz + z^2$	$M_1(1; 1; 0)$	$M_2(3; -1; 1)$

Вариант	$u = u(x; y; z)$	$M_1(x_1; y_1; z_1)$	$M_2(x_2; y_2; z_2)$
10	$u = 5x^2yz - xy^2z^2$	$M_1(1;1;1)$	$M_2(3;2;3)$
11	$u = \frac{x}{y^2 + z^2}$	$M_1(1;0;1)$	$M_2(2;-2;3)$
12	$u = y^2z - 2xyz$	$M_1(1;2;1)$	$M_2(3;3;3)$
13	$u = (x + y)^2 + z^2$	$M_1(0;1;-1)$	$M_2(-1;3;1)$
14	$u = \ln(1 + y + x^2 + z^2)$	$M_1(1;1;1)$	$M_2(1;4;5)$
15	$u = x^2 + 2y^2 + 4z^2$	$M_1(1;0;1)$	$M_2(3;1;-1)$
16	$u = \ln(x^3 + y^3 + z)$	$M_1(0;1;1)$	$M_2(2;0;3)$
17	$u = 3x - 2y + e^z$	$M_1(1;1;0)$	$M_2(3;-1;1)$
18	$u = x^y - 3xyz$	$M_1(1;0;1)$	$M_2(3;1;-1)$
19	$u = 3x^2yz^2$	$M_1(-1;1;2)$	$M_2(1;3;3)$
20	$u = e^{xy+z^2}$	$M_1(-1;1;1)$	$M_2(0;3;3)$
21	$u = x^{yz}$	$M_1(1;2;1)$	$M_2(3;1;-1)$
22	$u = (x^2 + y^2 + z^2)^2$	$M_1(0;1;1)$	$M_2(2;0;3)$
23	$u = (x - z)^y$	$M_1(2;2;1)$	$M_2(3;0;-1)$
24	$u = xy^2 + y^2z + z^2$	$M_1(1;1;0)$	$M_2(3;-1;1)$
25	$u = \ln(x^2 + y^2 + z)$	$M_1(0;1;1)$	$M_2(2;0;3)$
26	$u = \frac{1}{x + y^2 + z^2}$	$M_1(1;0;1)$	$M_2(2;-2;3)$
27	$u = \frac{x}{y} + \frac{y}{z}$	$M_1(0;1;1)$	$M_2(2;2;3)$
28	$u = x^3 + xy^2 - 6xyz$	$M_1(0;1;1)$	$M_2(-3;1;5)$
29	$u = \frac{x}{y} - \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$	$M_1(1;1;1)$	$M_2(3;3;-1)$
30	$u = e^{x-yz}$	$M_1(1;1;1)$	$M_2(1;4;5)$

1.2.4 Знайти $\overrightarrow{rot} \vec{F}(M_0)$, $\left| \overrightarrow{rot} \vec{F}(M_0) \right|$, $div \vec{F}(M_0)$ для векторного поля $\vec{F}(M) = P(x; y; z)\vec{i} + Q(x; y; z)\vec{j} + R(x; y; z)\vec{k}$.

Варіант	$\vec{F}(M) = P(x; y; z)\vec{i} + Q(x; y; z)\vec{j} + R(x; y; z)\vec{k}$	$M_0(x_0, y_0, z_0)$
1	$\vec{F}(M) = x^2 \vec{i} - xy^2 \vec{j} + z^2 \vec{k}$	$M_0(0; 1; -2)$
2	$\vec{F}(M) = xy \vec{i} + (yz + xz)\vec{j} + xz \vec{k}$	$M_0(2; 0; 3)$
3	$\vec{F}(M) = xy^2 \vec{i} + yz^2 \vec{j} - x^2 \vec{k}$	$M_0(1; -2; 0)$
4	$\vec{F}(M) = xz \vec{i} + z \vec{j} + yz \vec{k}$	$M_0(3; 0; 1)$
5	$\vec{F}(M) = yz \vec{i} - z^2 \vec{j} + xyz \vec{k}$	$M_0(2; 1; -1)$
6	$\vec{F}(M) = xy \vec{i} + xyz \vec{j} - x \vec{k}$	$M_0(-1; 0; 3)$
7	$\vec{F}(M) = y^2 \vec{i} - xy \vec{j} + z^2 \vec{k}$	$M_0(-2; 1; 1)$
8	$\vec{F}(M) = xz \vec{i} - xyz \vec{j} + x^2 z \vec{k}$	$M_0(0; 1; 1)$
9	$\vec{F}(M) = xy \vec{i} - y^2 z \vec{j} - xz \vec{k}$	$M_0(0; -2; 1)$
10	$\vec{F}(M) = xz \vec{i} - y^2 \vec{j} - zy \vec{k}$	$M_0(0; 1; 2)$
11	$\vec{F}(M) = y^2 \vec{i} - xy^2 \vec{j} + z^3 \vec{k}$	$M_0(-1; 2; 1)$
12	$\vec{F}(M) = xy \vec{i} - xy^2 \vec{j} + z^2 \vec{k}$	$M_0(1; -1; 1)$
13	$\vec{F}(M) = (x + y)\vec{i} + yz \vec{j} + xz \vec{k}$	$M_0(2; 1; 0)$
14	$\vec{F}(M) = xyz \vec{i} - (y + z)\vec{j} + xz \vec{k}$	$M_0(4; 0; 1)$
15	$\vec{F}(M) = x \vec{i} - y^2 z \vec{j} + x^2 z \vec{k}$	$M_0(-3; 0; 2)$
16	$\vec{F}(M) = (x + y^2)\vec{i} + yz \vec{j} - x^2 \vec{k}$	$M_0(1; 0; 4)$
17	$\vec{F}(M) = xz \vec{i} - y \vec{j} + yz \vec{k}$	$M_0(0; -1; 4)$
18	$\vec{F}(M) = xyz \vec{i} - x \vec{j} + yz \vec{k}$	$M_0(1; 2; -1)$
19	$\vec{F}(M) = (z - y)\vec{i} + y^2 z^2 \vec{j} + x^3 \vec{k}$	$M_0(4; 1; -3)$
20	$\vec{F}(M) = (x - y)\vec{i} + yz \vec{j} - y \vec{k}$	$M_0(-4; 1; 0)$

Варіант	$\vec{F}(M) = P(x; y; z)\bar{i} + Q(x; y; z)\bar{j} + R(x; y; z)\bar{k}$	$M_0(x_0, y_0, z_0)$
21	$\vec{F}(M) = (y - z)\bar{i} - z^2\bar{j} + xyz\bar{k}$	$M_0(3; 0; 1)$
22	$\vec{F}(M) = yz\bar{i} - z^2\bar{j} + (x + y)\bar{k}$	$M_0(1; 3; 0)$
23	$\vec{F}(M) = z^2\bar{i} - xyz\bar{j} + z^2\bar{k}$	$M_0(1; -2; 1)$
24	$\vec{F}(M) = xz\bar{i} + (x - z)\bar{j} + (y - x)\bar{k}$	$M_0(-1; 0; 1)$
25	$\vec{F}(M) = xz\bar{i} + (x - y)\bar{j} + x^2z\bar{k}$	$M_0(1; 1; -2)$
26	$\vec{F}(M) = (x - z)\bar{i} + xy\bar{j} + y^2z\bar{k}$	$M_0(2; 2; 1)$
27	$\vec{F}(M) = (x - z)\bar{i} + xyz\bar{j} + x^2\bar{k}$	$M_0(-2; 2; 1)$
28	$\vec{F}(M) = (y - z)\bar{i} + y^2\bar{j} - z^3\bar{k}$	$M_0(-1; 2; 1)$
29	$\vec{F}(M) = (x - y)\bar{i} - x^2\bar{j} + xz\bar{k}$	$M_0(0; 2; -2)$
30	$\vec{F}(M) = (x - z)\bar{i} - z^2\bar{j} + xyz\bar{k}$	$M_0(1; -1; 0)$

1.2.5 Обчислити потік векторного поля $\vec{a}(M)$ через зовнішню поверхню піраміди створену площиною P та координатними площинами: 1) за означенням; 2) за допомогою формули Остроградського-Гауса.

Варіант	$\vec{a}(M) = P(x; y; z)\bar{i} + Q(x; y; z)\bar{j} + R(x; y; z)\bar{k}$	P
1	$\vec{a} = 3x\bar{i} - (2x + z)\bar{j} + z\bar{k}$	$x + 2y - z = 4$
2	$\vec{a} = 2x\bar{i} - y\bar{j} + 4z\bar{k}$	$x + 2y + z = 2$
3	$\vec{a} = y\bar{i} - (2x + z)\bar{j} + 3z\bar{k}$	$x + y - z = 3$
4	$\vec{a} = 2x\bar{i} - y\bar{j} + (x + z)\bar{k}$	$x - 3y + z = 3$
5	$\vec{a} = 2x\bar{i} - y\bar{j} + z\bar{k}$	$x - 3y + 3z = 6$
6	$\vec{a} = 2x\bar{i} + y\bar{j} - 2z\bar{k}$	$2x + 4y + z = 4$
7	$\vec{a} = x\bar{i} - 3y\bar{j} + z\bar{k}$	$x - 2y + 2z = 4$
8	$\vec{a} = (2x - z)\bar{i} - y\bar{j} + z\bar{k}$	$2x - y + 3z = 2$

Вариант	$\vec{a}(M) = P(x; y; z)\vec{i} + Q(x; y; z)\vec{j} + R(x; y; z)\vec{k}$	P
9	$\vec{a} = x\vec{i} - 2y\vec{j} + 3z\vec{k}$	$x + 4y - 2z = 8$
10	$\vec{a} = -x\vec{i} - 2y\vec{j} + z\vec{k}$	$x + 3y - 3z = 6$
11	$\vec{a} = (x + z)\vec{i} + 2y\vec{j} + z\vec{k}$	$x + y + 3z = 6$
12	$\vec{a} = -2x\vec{i} - (x - y)\vec{j} + z\vec{k}$	$x - 2y - z = 4$
13	$\vec{a} = -x\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}$	$2x - y + z = 4$
14	$\vec{a} = 2x\vec{i} - 2y\vec{j} + (x + z)\vec{k}$	$x + y + 2z = 6$
15	$\vec{a} = x\vec{i} + (x - y)\vec{j} + z\vec{k}$	$x - 2y + 2z = 4$
16	$\vec{a} = (x - y)\vec{i} - (y + z)\vec{j} + z\vec{k}$	$3x - 6y + z = 18$
17	$\vec{a} = -x\vec{i} + xy\vec{j} + z\vec{k}$	$x - y + z = 3$
18	$\vec{a} = x\vec{i} + 3y\vec{j} + (y - z)\vec{k}$	$x - 2y + 3z = 6$
19	$\vec{a} = x\vec{i} - 3y\vec{j} + z\vec{k}$	$x - 3y + 3z = 6$
20	$\vec{a} = 3x\vec{i} - 2y\vec{j} + z\vec{k}$	$x - y + 3z = 9$
21	$\vec{a} = x\vec{i} - 3y\vec{j} + 2z\vec{k}$	$2x + 3y + 3z = 6$
22	$\vec{a} = x\vec{i} - 4y\vec{j} + 5z\vec{k}$	$x - y - z = 5$
23	$\vec{a} = xy\vec{i} - y\vec{j} + (z + 5)\vec{k}$	$x - 6y - 2z = 6$
24	$\vec{a} = xz\vec{i} - z\vec{j} + (x + y)\vec{k}$	$x + 2y + z = 4$
25	$\vec{a} = (x + 2y)\vec{i} - y\vec{j} + 2z\vec{k}$	$2x + 2y + z = 4$
26	$\vec{a} = y\vec{i} - (2x + z)\vec{j} + 3z\vec{k}$	$x - y + 3z = 9$
27	$\vec{a} = 3x\vec{i} - (2x + z)\vec{j} + z\vec{k}$	$2x - y + z = 4$
28	$\vec{a} = x\vec{i} - 3y\vec{j} + z\vec{k}$	$2x + 4y + z = 4$
29	$\vec{a} = -x\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}$	$3x - 6y + z = 18$
30	$\vec{a} = 2x\vec{i} - 3y\vec{j} + z\vec{k}$	$x - 2y - z = 4$

1.2.6 За допомогою формули Остроградського-Гауса знайти потік векторного поля $\vec{a}$ через зовнішню поверхню тіла, обмеженого поверхнею S .

Варіант	$\vec{a}(M) = P(x; y; z)\vec{i} + Q(x; y; z)\vec{j} + R(x; y; z)\vec{k}$	S
1	$\vec{a} = (x - z)\vec{i} - (2x + z)\vec{j} + (x + z)\vec{k}$	$x^2 + y^2 + z^2 = 4$
2	$\vec{a} = x^2\vec{i} - (2x + y)\vec{j} + (x - z)\vec{k}$	$y^2 + z^2 = 4,$ $x = 1, x = 3$
3	$\vec{a} = x\vec{i} - y\vec{j} + xyz\vec{k}$	$x = -1, x = 2, y = 0,$ $y = 1, z = 1, z = 2$
4	$\vec{a} = 3x\vec{i} + (y^2 + z)\vec{j} + (x - z)\vec{k}$	$x^2 + z^2 = 1,$ $y = 0, y = 2$
5	$\vec{a} = (3x - 1)\vec{i} + (2x - y + z)\vec{j} + z\vec{k}$	$x^2 + y^2 + z^2 = 9$
6	$\vec{a} = (x + z)\vec{i} - (x - z)\vec{j} + (x + 2y + z)\vec{k}$	$x^2 + y^2 + z^2 = 1$
7	$\vec{a} = 5x\vec{i} - (x - z)\vec{j} + (2y + z)\vec{k}$	$x^2 + y^2 + z = 6,$ $z = 0, x^2 + y^2 \leq 4$
8	$\vec{a} = x^2\vec{i} - z\vec{j} + (x + y)\vec{k}$	$(y + 2)^2 + z^2 = 4,$ $x = 0, x = 2$
9	$\vec{a} = x^2y\vec{i} - z\vec{j}$	$x = 0, x = 2, y = 0,$ $y = 1, z = -1, z = 2$
10	$\vec{a} = (x + 2y)\vec{i} - y\vec{j} + 2z\vec{k}$	$x^2 + y^2 + z^2 = 1$
11	$\vec{a} = xy\vec{i} - 2y\vec{j} + 2z\vec{k}$	$x^2 + z^2 = 1,$ $y = -2, y = 0$
12	$\vec{a} = (3x - y + 2z)\vec{i} - z\vec{j} + (x + z)\vec{k}$	$x^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 1$
13	$\vec{a} = (x^2 - z^2)\vec{i} - y\vec{j} - z\vec{k}$	$y^2 + z^2 = 3,$ $x = -1, x = 2$
14	$\vec{a} = (3x - 1)\vec{i} + (y - z)\vec{j} + z\vec{k}$	$x^2 + y^2 + z^2 = 4$

Вариант	$\vec{a}(M) = P(x; y; z)\vec{i} + Q(x; y; z)\vec{j} + R(x; y; z)\vec{k}$	S
15	$\vec{a} = xy\vec{i} - yz\vec{j} + xy\vec{k}$	$x^2 + y^2 = 4, z = 0,$ $y + z = 2$
16	$\vec{a} = 2yz\vec{i} + (2x - y)\vec{j} + (x + 3z)\vec{k}$	$(x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 4$
17	$\vec{a} = y\vec{i} - yz\vec{j} + x^2y\vec{k}$	$x^2 + y^2 = 3,$ $z = 1, z = 4$
18	$\vec{a} = y\vec{i} - xy\vec{j} + x\vec{k}$	$x = -1, x = 2, y = 1,$ $y = 3, z = 0, z = 2$
19	$\vec{a} = xy\vec{i} - y\vec{j} + (y + 2z)\vec{k}$	$x^2 + z^2 = 6,$ $y = -1, y = 3$
20	$\vec{a} = (x + y)\vec{i} + 3y\vec{j} + (y - z)\vec{k}$	$x^2 + (y + 1)^2 + (z + 5)^2 = 9$
21	$\vec{a} = xy\vec{i} - y\vec{j} + (z + 5)\vec{k}$	$x^2 + z^2 = 5,$ $y = -1, y = 3$
22	$\vec{a} = x\vec{i} - y\vec{j} + yz^2\vec{k}$	$x = -1, x = 1, y = 0,$ $y = 1, z = 0, z = 1$
23	$\vec{a} = 3x\vec{i} - y\vec{j} - z\vec{k}$	$y^2 + z^2 = 4,$ $x = -1, x = 2$
24	$\vec{a} = (x - z)\vec{i} + 5z^2\vec{j} + (x + y)\vec{k}$	$(x - 1)^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 4$
25	$\vec{a} = xz\vec{i} - z\vec{j} + (x + y)\vec{k}$	$(x - 2)^2 + y^2 = 2,$ $z = 1, z = 4$
26	$\vec{a} = xyz\vec{i} - xy\vec{k}$	$x = -2, x = 1, y = -1,$ $y = 0, z = 1, z = 3$
27	$\vec{a} = x\vec{i} - y\vec{j} + yz^2\vec{k}$	$x = 0, x = 1, y = 0,$ $y = 1, z = 1, z = 3$
28	$\vec{a} = 2yz\vec{i} - 3y\vec{j} + (x + z)\vec{k}$	$(x - 2)^2 + (y - 5)^2 + z^2 = 9$
29	$\vec{a} = 2x^2\vec{i} - xy\vec{j} + (x + y)\vec{k}$	$y^2 + (z + 1)^2 = 4,$ $x = -1, x = 3$

Варіант	$\vec{a}(M) = P(x; y; z)\vec{i} + Q(x; y; z)\vec{j} + R(x; y; z)\vec{k}$	S
30	$\vec{a} = y^2 z \vec{j} + x \vec{k}$	$x = -2, x = 0, y = 0,$ $y = 1, z = 0, z = 2$

1.2.7 Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{F}$ по замкнутому контуру трикутника, який утворюється внаслідок перетинів координатних площин з площиною P (нормаль до трикутника спрямована від початку координат): 1) за означенням; 2) застосуванням формули Стокса.

Варіант	$\vec{F}(M) = P(x; y; z)\vec{i} + Q(x; y; z)\vec{j} + R(x; y; z)\vec{k}$	P
1	$\vec{F} = 3x\vec{i} + (x + y)\vec{j} + (x - z)\vec{k}$	$-2x + 2y + z = 1$
2	$\vec{F} = (3x - 2)\vec{i} + (y - x - z)\vec{j} + 4z\vec{k}$	$2x + 2y - z = -1$
3	$\vec{F} = (2x + 1)\vec{i} + (x + z)\vec{j} + (y + z)\vec{k}$	$2x - y + 2z = 2$
4	$\vec{F} = (x + z)\vec{i} + (z - x)\vec{j} + (2 + 2y + z)\vec{k}$	$-2x + y + 2z = -2$
5	$\vec{F} = (x + 2z)\vec{i} + (y + 2z)\vec{j} + (x - 2y)\vec{k}$	$2x + y - 2z = 3$
6	$\vec{F} = (x + z)\vec{i} + 2y\vec{j} + (x + y - z)\vec{k}$	$x - 2y + 2z = -3$
7	$\vec{F} = (3x - y)\vec{i} + (2x + z)\vec{j} + (2z - x)\vec{k}$	$-x + 2y + 2z = 4$
8	$\vec{F} = (2y + z)\vec{i} + (x - y)\vec{j} - 2z\vec{k}$	$x + 2y - 2z = -4$
9	$\vec{F} = (x + y)\vec{i} + (3y + 1)\vec{j} + (y - z)\vec{k}$	$x + 2y - 2z = 1$
10	$\vec{F} = (x + y - z)\vec{i} + (-2y + 1)\vec{j} + (x + 2z)\vec{k}$	$-2x + 2y + z = -1$
11	$\vec{F} = (y - z)\vec{i} + (2x + y)\vec{j} + (z + 1)\vec{k}$	$2x + 2y - z = 2$
12	$\vec{F} = x\vec{i} + (y - 2z)\vec{j} + (2x - y + 2z)\vec{k}$	$2x - y + 2z = -2$
13	$\vec{F} = (x + 2z)\vec{i} + (y - 3z)\vec{j} + z\vec{k}$	$-2x + y + 2z = 3$
14	$\vec{F} = 4x\vec{i} + (x - y - z)\vec{j} + (3y + z)\vec{k}$	$2x + y - 2z = -3$
15	$\vec{F} = (2z - x)\vec{i} + (x + 2y)\vec{j} + 3z\vec{k}$	$x - 2y + 2z = 4$
16	$\vec{F} = 4z\vec{i} + (x - y - z)\vec{j} + (3y + z)\vec{k}$	$-x + 2y + 2z = -4$

Варіант	$\vec{F}(M) = P(x; y; z)\bar{i} + Q(x; y; z)\bar{j} + R(x; y; z)\bar{k}$	P
17	$\vec{F} = (x + y)\bar{i} + (y + z)\bar{j} + (2x + 2z)\bar{k}$	$x + 2y - 2z = 1$
18	$\vec{F} = (x + y + z)\bar{i} + 2z\bar{j} + (y - 6z)\bar{k}$	$x + 2y - 2z = -1$
19	$\vec{F} = (2x - z)\bar{i} + (y - x)\bar{j} + (x + 2z)\bar{k}$	$-2x + 2y + z = 2$
20	$\vec{F} = (2y - z)\bar{i} + (x + y)\bar{j} + x\bar{k}$	$2x + 2y - z = -2$
21	$\vec{F} = (2z - x)\bar{i} + (x - 2y)\bar{j} + (3x + z)\bar{k}$	$2x - y + 2z = 3$
22	$\vec{F} = (x + z)\bar{i} + (x + 3y)\bar{j} + y\bar{k}$	$-2x + y + 2z = -3$
23	$\vec{F} = (x + z)\bar{i} + 2z\bar{j} + (2x - y)\bar{k}$	$2x + y - 2z = 4$
24	$\vec{F} = (3x + 3y)\bar{i} + (x + z)\bar{j} + 2y\bar{k}$	$x - 2y + 2z = -4$
25	$\vec{F} = (y + z)\bar{i} + (2x - z)\bar{j} + (y + 3z)\bar{k}$	$-x + 2y + 2z = 1$
26	$\vec{F} = (y + z)\bar{i} + (x + 6y)\bar{j} + y\bar{k}$	$x + 2y - 2z = -1$
27	$\vec{F} = (2y - z)\bar{i} + (x + 3y)\bar{j} + y\bar{k}$	$x + 2y - 2z = 2$
28	$\vec{F} = (y + z)\bar{i} + x\bar{j} + (y - 2z)\bar{k}$	$-2x + 2y + z = -2$
29	$\vec{F} = (x + z)\bar{i} + 3z\bar{j} + (2x - y)\bar{k}$	$2x + 2y - z = 3$
30	$\vec{F} = 2z\bar{i} + (x + y)\bar{j} + (y - 3z)\bar{k}$	$2x - y + 2z = -3$

1.2.8 Довести, що поле $\vec{a}$ є потенціальним та знайти його потенціал.

Варіант	$\vec{a}(M) = (P(x; y; z); Q(x; y; z); R(x; y; z))$
1	$\vec{a} = (2xy; x^2 + 2yz; y^2)$
2	$\vec{a} = (y^2 z^3; 2xyz^3; 3xy^2 z^2)$
3	$\vec{a} = \left(\frac{1}{1 + x + y + z^2}; \frac{1}{1 + x + y + z^2}; \frac{2z}{1 + x + y + z^2} \right)$
4	$\vec{a} = (e^y; (x + z)e^y; e^y)$

Варіант	$\vec{a}(M) = (P(x; y; z); Q(x; y; z); R(x; y; z))$
5	$\vec{a} = (ye^{xy}; xe^{xy}; 3z^2)$
6	$\vec{a} = \left(\frac{1}{y}; \frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}; -\frac{y}{z^2} \right)$
7	$\vec{a} = \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}; z^2; 2yz \right)$
8	$\vec{a} = (yx^{y-1}; x^y \ln x + 2z; y^2)$
9	$\vec{a} = \left(\frac{2x}{1+x^2}; z; y \right)$
10	$\vec{a} = \left(\frac{1}{1+x^2}; z^2; 2yz \right)$
11	$\vec{a} = (2y^3; 6xy^2 + 2yz; y^2)$
12	$\vec{a} = (10xyz^2; 5x^2z^2; 10x^2yz)$
13	$\vec{a} = \left(\frac{1}{1+x+y}; \frac{1}{1+x+y}; 2z \right)$
14	$\vec{a} = (ye^x; e^x + ze^y; e^y)$
15	$\vec{a} = (yze^{xyz} + 2x; xze^{xyz}; xye^{xyz})$
16	$\vec{a} = \left(\frac{1}{z}; \frac{1}{z}; -\frac{x+y}{z^2} \right)$
17	$\vec{a} = \left(2xz; \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}; x^2 \right)$

Варіант	$\vec{a}(M) = (P(x; y; z); Q(x; y; z); R(x; y; z))$
18	$\vec{a} = (4x; z^y \ln z; yz^{y-1})$
19	$\vec{a} = \left(yz; \frac{2y}{1+y^2} + xz; xy \right)$
20	$\vec{a} = \left(2xz; \frac{1}{1+y^2}; x^2 \right)$
21	$\vec{a} = (y^2(z+1); 2xy(z+1); xy^2)$
22	$\vec{a} = (yz^4; xz^4; 4xyz^3)$
23	$\vec{a} = \left(\frac{1}{1+x}; z^2; 2yz \right)$
24	$\vec{a} = (e^y + e^z; xe^y; xe^z)$
25	$\vec{a} = (ye^{xy} + z; xe^{xy}; x)$
26	$\vec{a} = \left(\frac{y}{z}; \frac{x}{z}; -\frac{xy}{z^2} \right)$
27	$\vec{a} = \left(y; x; \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \right)$
28	$\vec{a} = (zx^{z-1}; 2y; x^z \ln x)$
29	$\vec{a} = \left(yz; xz; \frac{1}{1+z^2} + xy \right)$
30	$\vec{a} = \left(y^2; 2xy; \frac{2z}{1+z^2} \right)$

2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТА СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

2.1 Диференціальні рівняння 1-го порядку

2.1.1 Аудиторні завдання

1. Довести, що надані функції задовольняють відповідним диференціальним рівнянням.

1) $y = x(\ln x^2 + C)$, $xy' - y = 2x$.

2) $y^2 - x^2 - 2y = 0$, $y'(x^2 + y^2) - 2xy = 0$.

3) $y = \frac{(x+1)^4}{2} + (x+1)^2$, $y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$.

2. Розв'язати диференціальні рівняння першого порядку (ДР-1) з відокремлюваними змінними:

№	ДР-1 відокремлюваними змінними	Відповідь:
1	$(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$.	$1 + y^2 = C(1 - x^2)$.
2	$y' = y^2 \cos x$.	$y = \frac{1}{C - \sin x}$.
3	$xy' = \frac{y}{\ln x}$, $y(e) = 1$.	$y = \ln x$.

4	$y'tgx - y = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$	$y = 2 \sin x - 1.$
5	$(1 + x^2)y' + y\sqrt{1 + x^2} = xy$	$y = \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x + \sqrt{1 + x^2}}.$
6	$y' + \sin \frac{x+y}{2} = \sin \frac{x-y}{2}, \quad y(0) = \pi.$	$y = 4 \operatorname{arctg} e^{-2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$

3. Розв'язати однорідні ДР-1:

№	Однорідні ДР-1	Відповідь:
1	$(x^2 - y^2)dy - 2yxdx = 0.$	$x^2 + y^2 = Cy.$
2	$(y^4 - 2x^3y)dx + (x^4 - 2xy^3)dy = 0.$	$x^3 + y^3 = Cxy.$
3	$2x^2y' - 4xy - y^2 = 0, \quad y(1) = 1.$	$2x^2 + xy - 3y = 0.$
4	$xy' - y + x \operatorname{tg}\left(\frac{y}{x}\right) = 0.$	$y = \frac{4x}{\ln x + C}.$

5	$(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0, y(0) = 1.$	$y^2 - x^2 = y^3.$
6	$(xy' - y)\arctg\left(\frac{y}{x}\right) = x.$	$y \arctg\left(\frac{y}{x}\right) = x \ln\left(C\sqrt{y^2 + x^2}\right).$

4. Розв'язати лінійні ДР-1.

№	Лінійні ДР-1	Відповідь:
1	$y' + y = x + 2.$	$y = Ce^{-x} + x + 1.$
2	$(x + y)y' = 1, y(-1) = 0.$	$y = -(x + 1).$
3	$y' - y \operatorname{tg} x = \frac{2x}{\cos x}.$	$y = \frac{x^2 + C}{\cos x}.$
4	$y' \cos x + y \sin x = 1, y(0) = 1.$	$y = \cos x + \sin x.$
5	$(1 - x^2)y' - y = (1 - x)(1 + x)^2.$	$y = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2} + C \right).$
6	$y' = 3x^2y + x^5 + x^2, y(0) = 1.$	$y = \frac{5}{3}e^{x^3} - \frac{1}{3}(x^3 + 2)$

5. Розв'язати ДР-1 Бернуллі:

№	ДР-1 Бернуллі	Відповідь:
1	$x^2(x-1)y' - y^2 - x(x-2)y = 0.$	$y = \frac{x^2}{1 + C(x-1)}.$
2	$yy' + y^2 + 4x(x+1) = 0.$	$y^2 + 4x^2 = Ce^{-2x}.$
3	$xy' - 4y = x^2\sqrt{y}, y(1) = 1.$	$y = x^4(\ln\sqrt{x} + 1)^2.$
4	$y' - y \operatorname{tg} x + y^2 \cos x = 0.$	$y = \frac{1}{(x+C)\cos x}.$
5	$xy' + y = y^2 \ln x, y(1) = 1.$	$y(\ln x + 1) = 1.$
6	$y' + \frac{y}{x+1} + y^2 = 0.$	$y = \frac{1}{(x+1)(C + \ln x+1)}.$

6. Розв'язати ДР-1 у повних диференціалах:

№	ДР-1 у повних диференціалах	Відповідь:
1	$2xydx + x^2dy = 0.$	$x^2y = C.$

2	$x^3 dx + (y dx + x dy - y dy) = 0.$	$\frac{x}{4} + xy - \frac{y^2}{2} = C.$
3	$(y^3 - 2xy)dx + (3xy^2 - x^2)dy = 0.$	$y^3 x - x^2 y = C.$
4	$x(x + 2y)dx + (x^2 - y^2)dy = 0.$	$x^3 + 3x^2 y - y^3 = C.$
5	$(2xy + 2y^2 - 9x^2)dx + (x^2 + 4xy)dy = 0.$	$x^2 y + 2xy^2 - 3x^3 = C.$
6	$(x^2 - 4xy - 2y^2)dx +$ $+ (y^2 - 4xy - 2x^2)dy = 0.$	$(x + y)(x^2 - 7xy + y^2) = C.$

7. Розв'язати задачі.

1) Знайти криву, яка проходить через точку $M(1; 2)$. Кожна дотична до цієї кривої перетинає пряму $y=1$ в точці з абсцисою, що дорівнює подвоєній абсцисі точки дотику.

$$\text{Відповідь: } y = 1 + \frac{1}{x}.$$

2) Записати рівняння кривої, яка проходить через точку $M(2; 0)$. Кутовий коефіцієнт дотичної в будь-якій точці кривої дорівнює абсцисі цієї точки, зменшеній у 3 рази.

$$\text{Відповідь: } y = \frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{3}.$$

3) Знайти криву, яка проходить через точку, за умови, що кутовий коефіцієнт дотичної у довільній її точці дорівнює ординаті цієї точки,

що зменшена на дві одиниці.

Відповідь: $y = e^x + 2$.

4) Знайти криву, яка проходить через точку $M(1;1)$ за умови, що відстань від початку координат до будь-якої її дотичної дорівнює абсцисі точки дотику.

Відповідь: $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

5) Знайти криву, яка проходить через точку $M(1;3)$ і для якої відрізок дотичної між точкою дотику та віссю Ox ділиться навпіл у точці перетину з віссю Oy .

Відповідь: $y^2 = 9x$.

6) Знайти криву, яка проходить через точку $M(0;1)$ і має властивість, що у кожній її точці тангенс кута дотичної до цієї кривої дорівнює подвоєному добутку координат точки дотику.

Відповідь: $y = e^{x^2}$.

2.1.2 Індивідуальні завдання.

2.1.2.1. Розв'язати диференціальні рівняння першого порядку (ДР-1) з відокремлюваними змінними

Варіант	ДР-1	
1	а)	$e^y(1+x^2)dy - 2x(1+e^y)dx = 0$
	б)	$y' \ln y = x^2 y, y(0) = e$
2	а)	$2xy^2 dx - ydy = yx^2 dy - 6xdx$
	б)	$x^3 y' + y = 7, y(1) = 6$
3	а)	$ye^{2x} dx + (1+e^{2x})dy = 0$
	б)	$(2xy + y)y' = 3 - y^2, y(0) = 2$

Варіант	ДР-1	
4	а)	$3e^x \operatorname{tg} y dx + (1 - e^x) \frac{dy}{\cos^2 y} = 0$
	б)	$xy' + y = y^2, \quad y(1) = 0,5$
5	а)	$(x^2 y - x^2) dy = (xy^2 + y^2) dx$
	б)	$(1 - e^x) \sin y y' = e^x \cos^3 y, \quad y(1) = \frac{\pi}{4}$
6	а)	$y^2 e^x dx - (e^x + 2) dy = 0$
	б)	$xy' \ln y - y = 0, \quad y(1) = e^2$
7	а)	$x \cos 2y dx - x^2 \sin 2y dy = 0$
	б)	$y \sin x dx + (\cos x - 1) dy = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
8	а)	$6x dx - 2x^2 y dy = 6y dy - 3xy^2 dx$
	б)	$y' = (2y - 3) \operatorname{tg} x, \quad y(2\pi) = 6$
9	а)	$xy^2 dx - y dy = yx^2 dy - x dx$
	б)	$y' = 2^{x-y}, \quad y(1) = 1$
10	а)	$(e^x + 5) dy - y^2 e^x dx = 0$
	б)	$y' = xy + e^x y, \quad y(0) = 3$
11	а)	$y(2 + e^x) dy = e^x dx$
	б)	$y' \cos x = y \sin x, \quad y(\pi) = 3$
12	а)	$3x^2(1 + \ln y) dy = dx$
	б)	$\cos^2 x(1 + \operatorname{tg} x) y' = y, \quad y(0) = 3$
13	а)	$x\sqrt{x^2 + 1} dy - \sqrt{y} dx = 0$
	б)	$y' \operatorname{ctg} x + y = 2, \quad y(\pi) = 0$

Варіант	ДР-1	
14	а)	$(1 - x^2)dy - (2xy^2 + xy)dx = 0$
	б)	$xy' = \frac{x-1}{y}e^{2x} + y', \quad y(1) = e$
15	а)	$2x^2ydy = (3 + y^2)dx$
	б)	$y' + e^x = yy', \quad y(0) = 2$
16	а)	$\sqrt{y^2 + 1}dx = xydy$
	б)	$y' - \frac{4xy}{x^2 - 1} = 0, \quad y(\sqrt{2}) = 1$
17	а)	$y^2dy + \operatorname{ctg} x dx = y^3 \operatorname{ctg} x dx$
	б)	$(y' + 1)e^{2y} = 4, \quad y(1) = 0$
18	а)	$y \sin x dy + \cos x dx = \operatorname{ctg} x dx$
	б)	$xy' - y^2 = y, \quad y(2) = 1$
19	а)	$xdy = x^2e^{-y}dx + 2dy$
	б)	$y' = 2\sqrt{y} \ln x, \quad y(e) = 1$
20	а)	$dy - 3xdy - \sqrt{y}dx = 0$
	б)	$(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0, \quad y(0) = 1$
21	а)	$2xdy + ydx + xy(ydy + dx) = 0$
	б)	$(1 + x^2)y' + xy = 0, \quad y(\sqrt{2}) = 2$
22	а)	$(\sqrt{xy} - \sqrt{x})dy = ydx$
	б)	$(x + 1)y' - x = 0, \quad y(-2) = 0$
23	а)	$y^2dx = 2ydx - dy$
	б)	$3y' - x^2y' + x = 0, \quad y(2) = 0$

Варіант	ДР-1	
24	а)	$x\sqrt{3+y^2}dx + y\sqrt{2+x^2}dy = 0$
	б)	$(2x^2y - 3y)y' = 6x - 2xy, \quad y(1) = 0$
25	а)	$y(1+e^x)dy = e^x dx$
	б)	$y' \cos x = y \ln y, \quad y(0) = e$
26	а)	$\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$
	б)	$y' = 2^{x+y}, \quad y(0) = 0$
27	а)	$\sqrt{1-x^2}dy + \sqrt{1-y^2}dx = 0$
	б)	$y' \operatorname{tg} x - y = 2, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$
28	а)	$\sin y \cos x dy = \cos y \sin x dx$
	б)	$(1+x^2)xyy' = 1+y^2, \quad y(1) = 1$
29	а)	$\operatorname{tg} x \sin^2 y dx + \cos^2 x \operatorname{ctg} y dy = 0$
	б)	$(1+x^2)y^3 dx - (y^2-1)x^3 dy = 0, \quad y(1) = -1$
30	а)	$x \ln x dy = y dx$
	б)	$2(1+e^x)yy' = e^x, \quad y(0) = 0$

2.1.2.2. Розв'язати однорідні ДР-1

Варіант	ДР-1	
1	а)	$(xy + 2x^2)y' = y^2 + 4xy$
	б)	$x(\ln x - \ln y)dy - ydx = 0, \quad y(e) = 1$
2	а)	$x(x + 2y)dy + (x^2 - y^2)dx = 0$
	б)	$ydx + 2(\sqrt{xy} - x)dy = 0, \quad y(1) = 1$

Варіант	ДР-1	
3	a)	$\left(x - y \cos \frac{y}{x}\right) dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0$
	б)	$xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y + x, \quad y(1)=1$
4	a)	$xy' = x \sin \frac{y}{x} + y$
	б)	$xdy = \left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right) dx, \quad y(1)=0$
5	a)	$xdy = \left(y + \sqrt{y^2 - 4x^2}\right) dx$
	б)	$y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}, \quad y(e)=1$
6	a)	$xy' = 2\sqrt{3x^2 + y^2} + y$
	б)	$xydy - y^2 dx = (x + y)^2 dx, \quad y(1)=1$
7	a)	$xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$
	б)	$(y^2 - 2xy) dx + x^2 dy = 0, \quad y(1)=2$
8	a)	$xy' - y = (x + y) \ln \frac{x + y}{x}$
	б)	$2x^3 y' = y(2x^2 - y^2), \quad y(1)=1$
9	a)	$(x^2 + xy)y' = x\sqrt{x^2 - y^2} + xy + y^2$
	б)	$xy'(\ln y - \ln x) = y, \quad y(e)=1$
10	a)	$xy' = y \cos \ln \frac{y}{x}$
	б)	$2y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 8, \quad y(1)=1$

Варіант	ДР-1	
11	a)	$xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y$
	б)	$(xy' - y)\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = x, \quad y(1) = 0$
12	a)	$xy' = \sqrt{2x^2 + y^2} + y$
	б)	$y' = e^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}, \quad y(1) = 0$
13	a)	$(2x - y)y' = x + 2y$
	б)	$xy' = y\left(1 + \ln \frac{y}{x}\right), \quad y(1) = \frac{1}{\sqrt{e}}$
14	a)	$3x^2 y' = y^2 + 10xy + 10x^2$
	б)	$y^2 + x^2 y' = xy y', \quad y(1) = e$
15	a)	$(3x^2 - 2xy)y' = x^2 + 3xy - y^2$
	б)	$xy' = y \sin \ln \frac{y}{x}, \quad y(e) = 1$
16	a)	$xy' \sin \frac{y}{x} + x = y \sin \frac{y}{x}$
	б)	$y' = 4 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2, \quad y(1) = 2$
17	a)	$(xy' - y)\operatorname{ctg} \frac{y}{x} = x$
	б)	$(3x^2 + 6xy + y^2)dx = xy dy, \quad y(1) = 0$
18	a)	$xy'(2y^2 + 4x^2) = 3y^3 + 8x^2 y$
	б)	$3x \sin \frac{3y}{x} dy + \left(x - 3y \sin \frac{3y}{x}\right) dx = 0, \quad y(1) = 1$
19	a)	$(2x^2 + xy)dx - (x^2 + 2y^2)dy = 0$
	б)	$(x^2 + xy)y' = x\sqrt{x^2 - y^2} + xy + y^2, \quad y(1) = 1$

Варіант	ДР-1	
20	а)	$x^2 y' = y^2 + 6xy + 6x^2$
	б)	$xy' - y = xe^{\frac{y}{x}}, \quad y(1) = 0$
21	а)	$2xy'(x^2 + y^2) = y(y^2 + 2x^2)$
	б)	$xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2}; \quad y(1) = 0$
22	а)	$y'x = 2y \ln \frac{2y}{x}$
	б)	$xy' = y + x \sin \frac{2y}{x}, \quad y(1) = \frac{\pi}{4}$
23	а)	$xy' - y = \frac{x}{\arctg \frac{2y}{x}}$
	б)	$xy' \sin \frac{3y}{x} + x = y \sin \frac{3y}{x}, \quad y(1) = \frac{\pi}{6}$
24	а)	$xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$
	б)	$x^3 y' = y(y^2 + x^2), \quad y(1) = 1$
25	а)	$\frac{xy' - y}{x + y} = \ln \frac{x + y}{x}$
	б)	$xy' = y + x \cos \frac{y}{x}, \quad y(1) = \pi$
26	а)	$x^2 y' = x^2 + xy + y^2$
	б)	$y^2 + x^2 y' = xy y', \quad y(1) = 1$
27	а)	$(xy' - y) \arctg \frac{y}{x} = x$
	б)	$(x^2 - y^2)y' = 2xy, \quad y(0) = 1$
28	а)	$ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$
	б)	$y - xy' = y \ln \frac{x}{y}, \quad y(1) = e$

Варіант	ДР-1	
29	а)	$x^2 y' = xy + y^2 e^{-\frac{x}{y}}$
	б)	$y = x \left(y' - \sqrt[3]{e^y} \right), y(1) = 0$
30	а)	$\left(x - y \cos \frac{y}{x} \right) dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0$
	б)	$y' x^2 = xy + y^2 e^{-x/y}, y(1) = 1$

2.1.2.3. Розв'язати лінійні ДР-1.

Варіант	ДР-1	
1	а)	$y' + y = 3x$
	б)	$y' - 3y = e^{-2x}, y(0) = 0$
2	а)	$y' + y = \ln(e^x + 1)$
	б)	$y' - \frac{1}{x} y = x^2, y(1) = 0,5$
3	а)	$y' - \frac{x}{x^2 + 1} y = (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$
	б)	$y' + \frac{1}{x} y = e^{x^2}, y(1) = \frac{e}{2}$
4	а)	$y' - y \operatorname{tg} x = \sin^2 x$
	б)	$y' + \frac{1}{x} y = \frac{1}{x^2 + 1}, y(1) = \ln \sqrt{2}$
5	а)	$y' + \frac{y}{\cos^2 x} = \frac{1}{1 - \sin^2 x}$
	б)	$y' + \frac{1}{x} y = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, y(1) = 2$

Варіант	ДР-1	
6	а)	$y' + \frac{y}{x+1} = \sin 2x$
	б)	$y' - \frac{1}{x}y = \ln x, \quad y(1) = 5$
7	а)	$y' + \frac{y}{3+x} = \ln 5x$
	б)	$y' - \frac{1}{x}y = x \sin x, \quad y(\pi) = 0$
8	а)	$y' + \frac{y}{x-1} = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$
	б)	$y' - \frac{1}{x}y = x^3 + 2, \quad y(1) = \frac{1}{3}$
9	а)	$y' + \frac{y}{x} = \operatorname{arctg} x$
	б)	$y' - \frac{1}{x}y = x \operatorname{tg} x, \quad y(\pi) = \pi$
10	а)	$y' - y \operatorname{tg} x = \sin 2x$
	б)	$y' - \frac{1}{x}y = 2x^2 \sqrt{x^2 + 5}, \quad y(2) = 36$
11	а)	$y' + y \operatorname{tg} x = \cos^3 x$
	б)	$y' - \frac{1}{x}y = e^{x^3} x^3, \quad y(1) = \frac{e}{3}$
12	а)	$y' + y \operatorname{ctg} x = 3 \sin^4 x$
	б)	$y' - \frac{1}{x}y = x^2 e^x, \quad y(1) = 2$
13	а)	$y' + y \operatorname{ctg} x = 2 \sin 3x$
	б)	$y' - \frac{1}{x}y = x \ln x, \quad y(1) = 2$

Варіант	ДР-1	
14	a)	$y' + \operatorname{ctg} x \cdot y = \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}$
	б)	$y' + \frac{1}{x} y = e^x, \quad y(1) = 2$
15	a)	$y' + \operatorname{tg} x \cdot y = \frac{1}{4} \cos x \sin 2x$
	б)	$y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3, \quad y(0) = 0$
16	a)	$y' - \operatorname{ctg} x \cdot y = \sin^3 x$
	б)	$y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1, \quad y(1) = 0$
17	a)	$y' - \operatorname{ctg} x \cdot y = \frac{\cos^2 x}{\sin x}$
	б)	$y' + y \cos x = \sin x \cdot \cos x, \quad y(0) = 3$
18	a)	$y' + \frac{4xy}{x^2+1} = \frac{1}{x^2+1}, \quad y(0) = 1$
	б)	$y' x \ln x - y = x^2 \ln^3 x$
19	a)	$y' x \ln x + y = x^3$
	б)	$y' + \frac{y}{x+1} + x^2 = 0, \quad y(0) = 2$
20	a)	$x(x^2+1)y' + y = x(1+x^2)^2$
	б)	$y' - \frac{1}{x} y = \frac{x}{x-3}, \quad y(4) = 2$
21	a)	$y' \cos x - y \sin x = \cos 5x$
	б)	$y' - \frac{1}{x} y = x \sin^3 x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

Варіант	ДР-1	
22	а)	$y' = 3x^2 y + x^5 + x^2$
	б)	$y' - \frac{1}{x} y = x \frac{\sin^3 x}{\cos x}, \quad y(\pi) = \frac{\pi}{2}$
23	а)	$y' = y \operatorname{tg} x + \sec x$
	б)	$y' + 2xy = x e^{-x^2}, \quad y(0) = 1$
24	а)	$y' \sin x + y \cos x = \operatorname{tg}^2 x$
	б)	$y' - \frac{1}{x} y = x \sin^2 x \cos^2 x, \quad y(\pi) = \frac{\pi}{2}$
25	а)	$y' \sin x + y \cos x = \sin^2 2x$
	б)	$y' - \frac{1}{x} y = \frac{x}{(x-2)^2}, \quad y(1) = 0$
26	а)	$y' \cos x + y \sin x = \cos^4 x$
	б)	$y' - \frac{1}{x} y = x \frac{\sin x}{\cos^3 x}, \quad y(\pi) = \frac{\pi}{2}$
27	а)	$y' = e^{-\sin x} - y \cos x$
	б)	$y dx - (3x + 1 + \ln y) dy = 0, \quad x(1) = 1$
28	а)	$y' - y \operatorname{tg} x = \frac{2x}{\cos x}$
	б)	$y dx = (y^3 - x) dy, \quad y(1) = 1$
29	а)	$(x \cos y + \sin 2y) dy = dx$
	б)	$x(y' - y) = (1 + x^2) e^x, \quad y(1) = \frac{e}{2}$
30	а)	$(1 + x^2) y' - 2xy = (1 + x^2)^2$
	б)	$2y dx - (y^2 - 6x) dy = 0, \quad x(1) = 0$

2.1.2.4. Розв'язати ДР-1 Бернуллі.

Варіант	ДР-1	
1	а)	$y' + \frac{y}{x+1} = -\frac{1}{2}(x+1)^3 y^3$
	б)	$2(y' + xy) = (x-1)e^x y^2, \quad y(0) = 2$
2	а)	$4xy' - y = -\frac{1}{y^3}$
	б)	$2(xy' + y) = y^2 \ln x, \quad y(1) = 2$
3	а)	$yy' - 4x - y^2 = 0$
	б)	$y' - xy + y^3 e^{-x^2} = 0, \quad y(0) = \frac{1}{2}$
4	а)	$(y \ln x - 2)y dx = x dy$
	б)	$y' + xy = x^3 y^3, \quad y(0) = 1$
5	а)	$(1-x^2)y' - xy - 2xy^2 = 0$
	б)	$y - y' = y^2(1 - \sin x), \quad y(0) = 1$
6	а)	$y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$
	б)	$y' - 2y - y^3 = 0, \quad y(0) = 1$
7	а)	$y' - 8x\sqrt{y} = \frac{4xy}{x^2 - 1}$
	б)	$yy' + \frac{1}{2}y^2 = \sin x, \quad y(0) = 1$
8	а)	$y' + \frac{y}{x} = -xy^2$
	б)	$y' + 4x^3 y = 4(x^3 + 1)e^{-4x} y^2, \quad y(0) = 1$

Варіант	ДР-1	
9	a)	$y' + 4xy = 2xe^{-x^2} \sqrt{y}$
	б)	$y' - y \operatorname{tg} x = -\frac{2}{3} y^4 \sin x, \quad y(0)=1$
10	a)	$y' + 4x^3 y = 4y^2 e^{4x} (1 - x^3)$
	б)	$y' = y \operatorname{ctg} x + \frac{y^3}{\sin x}, \quad y(0)=1$
11	a)	$xy' + 2y + x^5 y^3 e^x = 0$
	б)	$2xy' - 3y = -(5x^2 + 3)y^3, \quad y(1)=1$
12	a)	$yy' - 4x - y^2 = 0$
	б)	$x dy = (x^5 y^2 - 2y) dx, \quad y(1)=1$
13	a)	$y' + 2y = y^2 e^x$
	б)	$(y' + y^2)(x+1) = -y, \quad y(0)=1$
14	a)	$3xy' - 2y = \frac{x^3}{y^2}$
	б)	$2 \sin xy' - y \cos x = y^3 (x \cos x - \sin x), \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$
15	a)	$xy' + y = 2y^2 \ln x$
	б)	$xy' + y = \frac{1}{2} xy^2, \quad y(1)=2$
16	a)	$3y' + 2xy = 2xy^{-2} e^{-2x^2}$
	б)	$3(xy' + y) = y^2 \ln x, \quad y(1)=3$
17	a)	$3xy' + 5y = (4x - 5)y^4$
	б)	$y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 4 \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{1+x^2}} \operatorname{arctg} x, \quad y(0)=1$

Варіант	ДР-1	
18	а)	$y' + \frac{2y}{x} = 3x^2 y^{\frac{4}{3}}$
	б)	$(y' + xy)e^{-x} = (x-1)y^2, \quad y(0)=1$
19	а)	$xy^2 y' = x^2 + y^3$
	б)	$xy' + y = y^2 \ln 3x, \quad y(1)=1$
20	а)	$3dy = (1-3y^2)y \cdot \sin x dx$
	б)	$y' + 2xy = 2x^3 y^3, \quad y(0)=1$
21	а)	$4xy' + 3y = -e^x x^4 y^5$
	б)	$\frac{2y' + y \cos x}{1 + \sin x} = y^{-1} \cos x, \quad y(0)=1$
22	а)	$8xy' - 12y = -(5x^2 + 3)y^3$
	б)	$y' + \frac{3x^2 y}{x^3 + 1} = y^2 (x^3 + 1) \sin x, \quad y(0)=1$
23	а)	$\frac{2xy' - 3y}{y^3} = -20x^2 - 12$
	б)	$y' + y = e^{\frac{x}{2}} \sqrt{y}, \quad y(0) = \frac{9}{4}$
24	а)	$2y' + 3y \cos x = (8 + 12 \cos x)e^{2x} y^{-1}$
	б)	$y'(x-1) - 1 = y^2, \quad y(2)=1$
25	а)	$y' = x\sqrt{y} + \frac{xy}{x^2 - 1}$
	б)	$xy' + y = -y^2 x(\ln x + 2) \ln x, \quad y(1)=1$
26	а)	$yy' + y^2 + 4x(x+1) = 0$
	б)	$y' + 2xy = 2x^3 y^3, \quad y(0)=1$

Варіант	ДР-1	
27	а)	$xy' + y = y^2 \ln x$
	б)	$xy' - 4y - x^2 \sqrt{y} = 0, y(1) = 1$
28	а)	$y' - y \operatorname{tg} x + y^2 \cos x = 0$
	б)	$x^2 y^2 y' + xy^3 = 1, y(1) = 1$
29	а)	$y' x^3 \sin y + 2y = xy'$
	б)	$3y^2 y' - y^3 = x + 1, y(0) = -1$
30	а)	$xy' = 3y - 7x^4 y^2$
	б)	$x dx = \left(\frac{x^2}{y} - y^3 \right) dy, y(0) = 1$

2.1.2.5. Розв'язати ДР-1 у повних диференціалах.

Варіант	ДР-1
1	$\frac{2x dx}{y^3} + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0$
2	$(y^3 - 2xy) dx + (3xy^2 - x^2) dy = 0$
3	$x(x + 2y) dx + (x^2 - y^2) dy = 0$
4	$(x^2 + 2xy + 4) dx + (x^2 + y^2 - 4) dy = 0$
5	$(2xy + 2y^2 - 9x^2) dx + (x^2 + 4xy) dy = 0$
6	$(x^2 - 4xy - 2y^2) dx + (y^2 - 4xy - 2x^2) dy = 0$
7	$(3x^2 y^2 + 7) dx + 2x^3 y dy = 0$
8	$(e^y + ye^x + 3) dx = (2 - xe^y - e^x) dy$
9	$(2xy + y^2) dx + (2xy + x^2) dy = 0$
10	$(2x + ye^{xy}) dx + (1 + xe^{xy}) dy = 0$

Варіант	ДР-1
11	$\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + xdy + ydx = 0$
12	$\frac{2x(1 - e^y)dx}{(1 + x^2)^2} + \frac{e^y dy}{1 + x^2} = 0$
13	$\left(x - \frac{y}{x^2 - y^2}\right)dx + \left(y + \frac{x}{x^2 - y^2}\right)dy = 0$
14	$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$
15	$(2xy + 3y^2)dx + (x^2 + 6xy - 3y^2)dy = 0$
16	$\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{xdy - ydx}{x^2} = 0$
17	$(3y^2 + 2xy + 2x)dx + (6xy + x^2 + 3)dy = 0$
18	$2x(1 + \sqrt{x^2 - y})dx - \sqrt{x^2 - y} dy = 0$
19	$\left(1 - \frac{\sin^2 y}{x^2}\right)dx + \frac{\sin 2y}{x} dy = 0$
20	$\frac{ydx}{x^2 + y^2} - \left(\frac{x}{x^2 + y^2} + 1\right)dy = 0$
21	$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)dx + \left(2y + \frac{1}{y} + \frac{x}{y^2}\right)dy = 0$
22	$(3x^2 - \operatorname{tg} y)dx - \frac{x}{\cos^2 y} dy = 0$
23	$(3xy^2 - x^2)dx + (3x^2y - 6y^2 - 1)dy = 0$
24	$\left(2xy - \frac{1}{x^2}\right)dx + \left(x^2 - \frac{2}{y^3}\right)dy = 0$
25	$(3y^3 + 10xy)dx + (9xy^2 + 5x^2)dy = 0$

Варіант	ДР-1
26	$(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2xydy = 0$
27	$(x^3 - 3xy^2 + 2)dx - (3x^2y - y^2)dy = 0$
28	$(x^2 + y^2) \cdot (xdx + ydy) = xdy - ydx$
29	$x^3dx = ydy - ydx - xdy$
30	$(12x + 5y - 9)dx + (5x + 2y - 4)dy = 0$

2.1.2.6. Розв'язати задачі.

1. Крива проходить через точку $M(0; b)$, де b – номер варіанта студента. Записати рівняння кривої, якщо кутовий коефіцієнт дотичної в будь-якій точці кривої дорівнює абсцисі цієї точки, збільшеній у k разів. Для варіантів з 1 по 5 $k = 1,5$, для варіантів з 6 по 10 $k = 1,75$, для варіантів з 11 по 15 $k = 2$, для варіантів з 16 по 20 $k = 2,2$, для варіантів з 21 по 25 $k = 2,5$, для варіантів з 26 по 30 $k = 3$.

2. Крива проходить через точку $N(b; 0)$, де b – номер варіанта студента. Записати рівняння кривої, якщо відомо, що відрізок, відсічений дотичною до кривої від осі ординат, дорівнює півсумі координат точки дотику.

2.2 Диференціальні рівняння вищих порядків та системи диференціальних рівнянь

2.2.1 Аудиторні завдання

1. Розв'язати диференціальні рівняння, які припускають зниження порядку.

1) $y''' = \sin 2x$.

Відповідь: $y = \frac{1}{8} \cos 2x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$.

$$2) \ y'' = \frac{1}{\cos^2 x}, \ y(0)=1, \ y'(0)=\frac{3}{5}.$$

$$\text{Відповідь: } y = -\ln|\cos x| + \frac{3}{5}x + 1.$$

$$3) \ xy''' + y'' + x = 0.$$

$$\text{Відповідь: } y = -\frac{x^3}{12} + C_1 x \ln|x| - x(C_1 - C_2) + C_3.$$

$$4) \ (1+x^2)y'' + 2xy' = 12x^3.$$

$$\text{Відповідь: } y = x^3 - 3x + \arctg(C_1 + 1) + C_2.$$

$$5) \ xy'' + y' = \ln x + 1, \ y(1) = -1, \ y'(1) = 0.$$

$$\text{Відповідь: } y = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} - \frac{3}{4}.$$

$$6) \ xy'' - y' = x \sin \frac{y'}{x}, \ y(1) = \frac{\pi}{2}, \ y'(1) = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Відповідь: } y = (x^2 + 1) \arctg x - x + 1.$$

$$7) \ yy'' - 2y'^2 = 0.$$

$$\text{Відповідь: } -\frac{1}{y} = C_1 x + C_2.$$

$$8) \ (1+x^2)y'' + 2xy' = 12x^3.$$

$$\text{Відповідь: } y = x^3 - 3x + \arctg(C_1 + 1) + C_2.$$

$$9) \ y''y^3 + 1 = 0, \ y(1) = y'(1) = -1.$$

$$\text{Відповідь: } \begin{cases} 2x - 1 = y^2 \\ y^2 = 3 - 2x \end{cases}.$$

$$10) y'' = \frac{\sin 2y}{1 + \cos^2 y} (y')^2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Відповідь: } x = \frac{3}{2}y + \frac{1}{4}\sin 2y.$$

2. Розв'язати лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами (ЛОДР-2 і ЛОДР-4).

$$1) 100y'' + 49y = 0.$$

$$\text{Відповідь: } y = C_1 \cos 0,7x + C_2 \sin 0,7x.$$

$$2) 5y'' + 8y' = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3,2.$$

$$\text{Відповідь: } y = C_1 + C_2 e^{-1,6x} - \text{загальний розв'язок,}$$

$$y_{\text{част}} = 4 - 2e^{-1,6x} - \text{частинний розв'язок.}$$

$$3) 2y'' - 7y' + 3y = 0.$$

$$\text{Відповідь: } y = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^{3x}.$$

$$4) y'' + 10y' + 74y = 0.$$

$$\text{Відповідь: } y = e^{-5x} (C_1 \cos 7x + C_2 \sin 7x).$$

$$5) y^{IV} - 24y''' + 144y'' = 0.$$

$$\text{Відповідь: } y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{12x} + C_4 e^{12x} \cdot x.$$

3. Розв'язати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами (ЛНДР-2):

$$1) 2y'' - y' = 2xe^{0,5x}.$$

$$\text{Відповідь: } y = C_1 + C_2 e^{0,5x} + (x^2 - 4x)e^{0,5x}.$$

$$2) y'' + 2y' + 26y = 101 \sin 5x.$$

$$\text{Відповідь: } y = e^{-x} (C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x) + \sin 5x - 10 \cos 5x.$$

$$3) 4y'' - 4y' + y = x^2, \quad y(0) = 24, \quad y'(0) = 9.$$

Відповідь:

$$y = C_1 e^{0,5x} + C_2 x e^{0,5x} + x^2 + 8x + 24 - \text{загальний розв'язок},$$

$$y_{\text{част}} = x e^{0,5x} + x^2 + 8x + 24 - \text{частинний розв'язок}.$$

4. Знайти частинний розв'язок $\overline{y}$ ЛНДР-2 у загальному вигляді:

$$1) y'' + 25y = x e^{5x} + 2x^2 \cos 5x + 3.$$

Відповідь:

$$\overline{y} = (Ax + B)e^{5x} + (Cx^3 + Dx^2 + Ex)\cos 5x + (Fx^3 + Kx^2 + Lx)\sin 5x + M$$

$$2) y'' + 3y' - 4y = 6x e^{-4x} + x^2 \sin 2x.$$

Відповідь:

$$\overline{y} = (Ax^2 + Bx)e^{-4x} + (Cx^2 + Dx + E)\cos 2x + (Kx^2 + Lx + P)\sin 2x.$$

5. Розв'язати лінійне неоднорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами (ЛНДР-2) методом варіації довільних сталих (метод Лагранжа).

$$1) y'' - 2y' + 5y = e^x \operatorname{tg} 2x.$$

Відповідь:

$$y = \left(\frac{1}{4} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right| + \frac{1}{4} \sin 2x + C_1 \right) e^x \cos 2x + \left(C_2 - \frac{1}{4} \cos 2x \right) e^x \sin 2x.$$

$$2) \ y'' + 3y' = \frac{9e^{3x}}{1 + e^{3x}}, \quad y(0) = \ln 4, \quad y'(0) = 3(1 - \ln 2).$$

$$\text{Відповідь: } y = (1 + e^{-3x}) \cdot \ln(1 + e^{3x}).$$

4. Розв'язати системи диференціальних рівнянь:

№	Системи ДР	Відповідь:
1	$\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$	$\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{5t}, \\ y = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t}. \end{cases}$
2	$\begin{cases} x' + x + 5y = 0, \\ y' - x - y = 0. \end{cases}$	$\begin{cases} x = (2C_2 - C_1) \cos 2t - (2C_1 + C_2) \sin 2t, \\ y = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t. \end{cases}$
3	$\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 4y - x. \end{cases}$	$\begin{cases} x = (C_1 + C_2 t) e^{3t}, \\ y = (C_1 + C_2 + C_2 t) e^{3t}. \end{cases}$
4	$\begin{cases} x' = y + 2e^t, \\ y' = x + t^2. \end{cases}$	$\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + t e^t - t^2 - 2, \\ y = C_1 e^t - C_2 e^{-t} + (t - 1) e^t - 2t. \end{cases}$
5	$\begin{cases} x' = y - 5 \cos t, \\ y' = 2x + y. \end{cases}$	$\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} - 2 \sin t - \cos t, \\ y = 2C_1 e^{2t} - C_2 e^{-t} + \sin t + 3 \cos t. \end{cases}$
6	$\begin{cases} x' = 2y - 2t - 1, \\ y' = x + y. \end{cases}$	$\begin{cases} x = C_1 e^{2t} - 2C_2 e^{-t} - t + 1, \\ y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} + t. \end{cases}$
7	$\begin{cases} x' = 2x - 4y + 4e^{-2t}, \\ y' = 2x - 2y. \end{cases}$	$\begin{cases} x = C_1 (\cos 2t - \sin 2t) + C_2 (\cos 2t + \sin 2t), \\ y = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t + e^{-2t}. \end{cases}$

2.2.2 Індивідуальні завдання

2.2.2.1. Розв'язати диференціальні рівняння другого порядку, які припускають зниження порядку.

Варіант	ДР-2	
1	а)	$xy'' = 2$
	б)	$2xy'y'' = y'^2 - 1$
	в)	$yy'' - y'^2 + y'^3 = 0$
	г)	$(1+x^2)y'' + 2xy' = 2x^3, y(0)=0, y'(0)=1$
	д)	$y'' + 32 \sin y \cdot \cos^3 y = 0, y(0)=0, y'(0)=4$
2	а)	$y'' = \sin^2 x \cos x$
	б)	$y'' \operatorname{ctg} 3x = -6y'$
	в)	$y'^2 + yy'' = 0$
	г)	$y'' - \frac{2xy'}{1-x^2} + \frac{2}{1-x^2} = 0, y(0)=1, y'(0)=1$
	д)	$y'' - 3e^{6y} = 0, y(0)=0, y'(0)=1$
3	а)	$y'' = \ln 2x$
	б)	$y'' = 2(y' - 1) \operatorname{ctg} x$
	в)	$y''(2y+3) - 2y'^2 = 0$
	г)	$y'' - \frac{y'}{x} = x, y(1)=2, y'(1)=0$
	д)	$-3y'' = y^{-\frac{5}{3}}, y(0)=1, y'(0)=1$
4	а)	$y'' = \frac{2}{x}$

Варіант	ДР-2	
	б)	$xy'' + y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$
	в)	$(y')^2 - yy'' = 0$
	г)	$xy'' - y' = x^2 e^x, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 0$
	д)	$y^4 - y^3 y'' = 1, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$
5	а)	$y'' = \frac{\ln x}{x}$
	б)	$y'' - 2y' \operatorname{ctg} 2x = 2 \operatorname{ctg} 2x$
	в)	$yy'' + y'^2 - y'^3 = 0$
	г)	$y'' + \frac{y'}{x} = x, \quad y(1) = y'(1) = 1$
	д)	$y'' = 2e^{4y}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
6	а)	$y'' = \frac{3}{2} \sin 2x \cdot \cos x$
	б)	$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2 = 0$
	в)	$4y^3 y'' = y^4 - 1$
	г)	$xy'' \ln x = y', \quad y(e) = y'(e) = 1$
	д)	$3y'y'' = e^y, \quad y(-3) = 0, \quad y'(-3) = 1$
7	а)	$y'' = xe^x$
	б)	$y'' - \frac{2x}{x^2 + 1} y' = 0$
	в)	$yy'' - (y')^2 = 2$
	г)	$y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x, \quad y'(0) = 0, \quad y(0) = -1$
	д)	$y'' = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \quad y(0) = y'(0) = 0$

Варіант	ДР-2	
8	а)	$y'' = x \ln x$
	б)	$x^2 y'' = (y')^2$
	в)	$y'' = \frac{1}{(y')^2}$
	г)	$y'' - y' \operatorname{ctg} x = \sin 2x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$
	д)	$yy'' + (y')^2 = 2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$
9	а)	$y'' \sin 2x = \sin 4x$
	б)	$x^3 y'' + x^2 y' = \sqrt{x}$
	в)	$y'' = \sqrt{1 + y'^2}$
	г)	$x^3 y'' + x^2 y' = 1, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 1$
	д)	$yy'' - 4 = -y'^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = \sqrt{3}$
10	а)	$y'' = \sin 2x + e^{-x}$
	б)	$(1 + \sin x)y'' = y' \cos x$
	в)	$y'' + \frac{(y')^2}{y} - \frac{(y')^3 \ln y}{y} = 0$
	г)	$(1 + x^2)y'' + 2xy' + 2 = 0, \quad y(0) = y'(0) = 1$
	д)	$y'' = 32y^3, \quad y(4) = 1, \quad y'(4) = 4$
11	а)	$y'' = \frac{1}{x} + 5^x$
	б)	$y'' \operatorname{tg} 5x = 5y'$
	в)	$(y'')^2 = y'$
	г)	$xy'' + y' - 3x^2 = 0, \quad y(1) = y'(1) = 1$
	д)	$yy'' - 2yy' \ln y = (y')^2, \quad y(0) = y'(0) = 1$

Варіант	ДР-2	
12	а)	$y'' = \cos 2x - 4$
	б)	$x^4 y'' + x^3 y' = 1$
	в)	$y'(1 + y'^2) = 2y''$
	г)	$xy'' \ln x = y' + 1, \quad y(e) = -e, \quad y'(e) = 0$
	д)	$y'' + (y')^2 = 2e^{-y} \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$
13	а)	$y'' = \frac{1}{x} + 1$
	б)	$y'' + 2xy'^2 = 0$
	в)	$y \cdot y'' = y'(y' - 1)$
	г)	$xy'' + y' + x = 0, \quad y(1) = \frac{1}{2}, \quad y'(1) = 0$
	д)	$y'' = 50 \sin^3 y \cdot \cos y, \quad y(1) = \frac{\pi}{2}, \quad y'(1) = 5$
14	а)	$y'' = 4^x + \frac{1}{e^x}$
	б)	$y'' = -\frac{x}{y'}$
	в)	$2yy'' = (y')^2$
	г)	$xy'' - y' = x^2, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 0$
	д)	$y'' = 18 \sin^3 y \cos y, \quad y(1) = \frac{\pi}{2}, \quad y'(1) = 3$
15	а)	$y'' = \sin x + 1$
	б)	$(1 + \cos 2x)y'' = -2y' \cdot \sin 2x$
	в)	$y'' + \frac{2}{1-y} y'^2 = 0$

Варіант	ДР-2	
	г)	$(1+x^2)y'' + 2xy' + 2x = 0, y'(0) = y(0) = 1$
	д)	$y'' = 128y^3, y(0) = 1, y'(0) = 8$
16	а)	$y'' = \frac{1}{\cos^2 x}$
	б)	$xy'' + y' = 0$
	в)	$y'' + 2yy'^3 = 0$
	г)	$y''(1+\ln x) + \frac{1}{x}y' = 1 + \ln x, y(1) = \frac{1}{2}, y'(1) = 1$
	д)	$y'' + 8\sin y \cos^3 y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 2$
17	а)	$y'' = 2^x - 4x$
	б)	$y'' = 2(y' - 1)\operatorname{tg} x$
	в)	$y''y^2 = (y')^3$
	г)	$y'' + \frac{y'}{x} - \frac{1}{x^3} = 0, y(1) = y'(1) = 1$
	д)	$4y^3y'' = 16y^4 - 1, y(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}, y'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$
18	а)	$y'' = \ln x + 1$
	б)	$xy'' + y' = x + 1$
	в)	$yy'' + y = (y')^2$
	г)	$y'' \operatorname{tg} x = y' + 1, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0, y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$
	д)	$y''y^3 + 64 = 0, y(0) = 4, y'(0) = 2$
19	а)	$y'' = 10^{-x} + xe^x$
	б)	$y'' \operatorname{tg} x = 2y'$

Варіант	ДР-2	
	в)	$yy'' + (y')^2 - (y')^3 \ln y = 0$
	г)	$xy'' = y'(\ln y' - \ln x), \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1$
	д)	$y'' = -\frac{1}{2y^3}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
20	а)	$xy'' = x^4 + 1$
	б)	$y'' \operatorname{ctg} 2x = -2y'$
	в)	$y'' - 2y'^2 = 0$
	г)	$y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}, \quad y(2) = 0, \quad y'(2) = 4$
	д)	$y'' - \frac{\sin 2y}{1 + \cos^2 y} (y')^2 = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = \frac{1}{2}$
21	а)	$y'' = \frac{2}{x^3} + 1$
	б)	$xy'' + y' = 1$
	в)	$y'' = y'(1 + y'^2)$
	г)	$y'' \operatorname{tg} x - y' + \frac{1}{\sin x} = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
	д)	$y'' \operatorname{tg} y = 2y'^2, \quad y(1) = \frac{\pi}{2}, \quad y'(1) = 2$
22	а)	$y'' = 2 \cos^2 x$
	б)	$xy'' + y' = \sqrt{x}$
	в)	$yy'' = y^2 y' + y'^2$
	г)	$y'' x \ln x - y' = 2, \quad y(e) = y'(e) = 0$
	д)	$y'' + 50 \sin y \cdot \cos^3 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 5$

Варіант	ДР-2	
23	а)	$y'' = \frac{e^{-x} + e^x}{2}$
	б)	$y'' - y' \cos x = -y'' \sin x$
	в)	$2y'^2 = (y-1)y''$
	г)	$y'' + \frac{y'}{x} - x^2 = 0, \quad y(1) = y'(1) = 1$
	д)	$y''y^3 + 25 = 0, \quad y(2) = -5, \quad y'(2) = -1$
24	а)	$y'' = 2 \sin^2 2x$
	б)	$y''(e^x + 1) + y' = 0$
	в)	$y(1 - \ln y)y'' + (1 + \ln y)y'^2 = 0$
	г)	$x^2 y'' + xy' = 1, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1$
	д)	$2y''y - 3y^3 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$
25	а)	$y'' = \frac{1}{1+x^2}$
	б)	$y'^2 = 1 + 2xy' \cdot y''$
	в)	$y'^2 \operatorname{ctg} y = y'' \cos y$
	г)	$y''(1-x^2) - xy' = 2, \quad y(0) = y'(0) = 0$
	д)	$y'' + 2 \sin y \cos^3 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
26	а)	$y'' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	б)	$y''x \ln 3x - y' + 3 = 0$
	в)	$y'' \operatorname{tg} y = 2y'^2$
	г)	$x^3 y'' + x^2 y' = 1, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = -1$
	д)	$y'' = 98y^3, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 7$

Варіант	ДР-2	
27	а)	$y'' = \sqrt{x} - \sin 2x$
	б)	$xy'' + y' = 2x \ln x + x$
	в)	$2yy'' = 1 + y'^2$
	г)	$xy'' + y'(\ln x - \ln y' - 1) = 0, y(1) = 3, y'(1) = e$
	д)	$y^3 y'' = 4(y^4 - 1), y(0) = y'(0) = \sqrt{2}$
28	а)	$y'' = 2 \sin x \cos^2 x$
	б)	$x(y'' + 1) + y' = 0$
	в)	$y''(y^2 + 1) = 2y'^2 \cdot y$
	г)	$y'' + 2 \operatorname{tg} x y' = \cos^3 x, y(0) = -\frac{1}{3}, y'(0) = 2$
	д)	$y'' y^3 + 4 = 0, y(0) = -1, y'(0) = -2$
29	а)	$y'' = \frac{x}{e^{2x}}$
	б)	$xy'' + y' = e^x x$
	в)	$y'' + 2y(y')^3 = 0$
	г)	$x^2 y'' - 2xy' + 3 = 0, y(1) = 0, y'(1) = 4$
	д)	$y'' = 2 \sin^3 y \cos y, y(1) = \frac{\pi}{2}, y'(1) = 1$
30	а)	$y'' = x - \ln x$
	б)	$y'' x \ln x = 2y'$
	в)	$(y - 1)y'' = 2y'^2$
	г)	$y''(x^2 + 1) = 2xy', y(0) = 2, y'(0) = 3$
	д)	$y^3 y'' = y^4 - 16, y(0) = 2\sqrt{2}, y'(0) = \sqrt{2}$

2.2.2.2. Розв'язати лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами (ЛОДР-2 і ЛОДР-4).

Варіант	ДР	
1	а)	$y'' + 4y = 0$
	б)	$y'' + 5y' = 0, \quad y(0) = 3, y'(0) = 10$
	в)	$2y'' + 5y' + 2y = 0$
	г)	$y'' + 4y' + 29y = 0$
	д)	$y^{IV} - 2y''' + y'' = 0$
2	а)	$y'' + 36y = 0$
	б)	$y'' - 2y' = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 2$
	в)	$y'' - 5y' + 6y = 0$
	г)	$y'' - 6y' + 25y = 0$
	д)	$y^{IV} + 4y''' + 4y'' = 0$
3	а)	$49y'' + 4y = 0$
	б)	$y'' + 3y' = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = 3$
	в)	$10y'' - 3y' + 10y = 0$
	г)	$y'' + 8y' + 25y = 0$
	д)	$4y^{IV} - 4y''' + y'' = 0$
4	а)	$25y'' + 4y = 0$
	б)	$y'' - 10y' = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = 10$
	в)	$y'' + 7y' + 6y = 0$
	г)	$y'' - 4y' + 20y = 0$
	д)	$9y^{IV} - 6y''' + y'' = 0$

Варіант	ДР	
5	а)	$y'' + 6y = 0$
	б)	$y'' + 2y' = 0, \quad y(0) = 3, y'(0) = -4$
	в)	$4y'' + 17y' + 4y = 0$
	г)	$y'' + 6y' + 13y = 0$
	д)	$y^{IV} + 10y''' + 25y'' = 0$
6	а)	$y'' + 5y = 0$
	б)	$y'' + 4y' = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = -4$
	в)	$y'' - 2y' - 3y = 0$
	г)	$y'' - 12y' + 40y = 0$
	д)	$25y^{IV} - 10y''' + y'' = 0$
7	а)	$y'' + 7y = 0$
	б)	$y'' - 3y' = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = 3$
	в)	$y'' + 8y' + 12y = 0$
	г)	$y'' + 4y' + 13y = 0$
	д)	$9y^{IV} + 12y''' + 4y'' = 0$
8	а)	$y'' + 8y = 0$
	б)	$y'' - 5y' = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = -5$
	в)	$y'' + y' - 6y = 0$
	г)	$y'' - 6y' + 34y = 0$
	д)	$4y^{IV} - 20y''' + 25y'' = 0$
9	а)	$y'' + 9y = 0$
	б)	$y'' - 4y' = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = -4$

Варіант	ДР	
	в)	$y'' - 4y' - 5y = 0$
	г)	$y'' + 10y' + 29y = 0$
	д)	$y^{IV} + 12y''' + 36y'' = 0$
10	а)	$9y'' + 4y = 0$
	б)	$y'' + 9y' = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 9$
	в)	$y'' - 7y' + 12y = 0$
	г)	$y'' - 8y' + 41y = 0$
	д)	$y^{IV} - 14y''' + 49y'' = 0$
11	а)	$4y'' + 9y = 0$
	б)	$y'' - 6y' = 0, \quad y(0) = 3, y'(0) = 12$
	в)	$y'' + 8y' + 7y = 0$
	г)	$y'' + 12y' + 45y = 0$
	д)	$y^{IV} + 6y''' + 9y'' = 0$
12	а)	$4y'' + 25y = 0$
	б)	$y'' + 7y' = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = -7$
	в)	$y'' - 6y' + 8y = 0$
	г)	$y'' - 10y' + 34y = 0$
	д)	$16y^{IV} - 8y''' + y'' = 0$
13	а)	$y'' + 16y = 0$
	б)	$2y'' - 5y' = 0, \quad y(0) = -1, y'(0) = 5$
	в)	$y'' + y' - 12y = 0$
	г)	$y'' - 4y' + 40y = 0$

Варіант	ДР	
	д)	$9y^{IV} + 24y''' + 16y'' = 0$
14	а)	$9y'' + 16y = 0$
	б)	$y'' + 6y' = 0, \quad y(0) = 3, y'(0) = -6$
	в)	$y'' - 7y' + 10y = 0$
	г)	$y'' - 2y' + 10y = 0$
	д)	$y^{IV} - 16y''' + 64y'' = 0$
15	а)	$y'' + 49y = 0$
	б)	$y'' - 7y' = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 14$
	в)	$y'' + 3y' - 10y = 0$
	г)	$y'' + 2y' + 26y = 0$
	д)	$y^{IV} + 18y''' + 81y'' = 0$
16	а)	$y'' + 10y = 0$
	б)	$y'' - 8y' = 0, \quad y(0) = -2, y'(0) = 8$
	в)	$2y'' - 5y' + 2y = 0$
	г)	$y'' - 4y' + 29y = 0$
	д)	$y^{IV} + 2y''' + y'' = 0$
17	а)	$y'' + 64y = 0$
	б)	$2y'' - 3y' = 0, \quad y(0) = -2, y'(0) = 3$
	в)	$y'' + 5y' + 6y = 0$
	г)	$y'' + 6y' + 25y = 0$
	д)	$y^{IV} - 4y''' + 4y'' = 0$
18	а)	$9y'' + 25y = 0$

Варіант	ДР	
	б)	$2y'' + 7y' = 0, \quad y(0) = -1, y'(0) = 7$
	в)	$10y'' + 3y' + 10y = 0$
	г)	$y'' - 8y' + 25y = 0$
	д)	$4y^{IV} + 4y''' + y'' = 0$
19	а)	$y'' + 81y = 0$
	б)	$y'' + 10y' = 0, \quad y(0) = 3, y'(0) = -10$
	в)	$y'' - 7y' + 6y = 0$
	г)	$y'' + 4y' + 20y = 0$
	д)	$9y^{IV} + 6y''' + y'' = 0$
20	а)	$y'' + 100y = 0$
	б)	$y'' - 16y' = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = -16$
	в)	$4y'' - 17y' + 4y = 0$
	г)	$y'' - 6y' + 13y = 0$
	д)	$y^{IV} - 10y''' + 25y'' = 0$
21	а)	$4y'' + 49y = 0$
	б)	$2y'' - 7y' = 0, \quad y(0) = -2, y'(0) = 7$
	в)	$y'' + 2y' - 3y = 0$
	г)	$y'' + 12y' + 40y = 0$
	д)	$25y^{IV} + 10y''' + y'' = 0$
22	а)	$y'' + 3y = 0$
	б)	$2y'' + 9y' = 0, \quad y(0) = -3, y'(0) = -9$
	в)	$y'' - 8y' + 12y = 0$

Варіант	ДР	
	г)	$y'' - 4y' + 13y = 0$
	д)	$9y^{IV} - 12y''' + 4y'' = 0$
23	а)	$y'' + 2y = 0$
	б)	$y'' - 11y' = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 11$
	в)	$y'' - y' - 6y = 0$
	г)	$y'' + 6y' + 34y = 0$
	д)	$4y^{IV} + 20y''' + 25y'' = 0$
24	а)	$y'' + 121y = 0$
	б)	$2y'' + 5y' = 0, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 5$
	в)	$y'' + 4y' - 5y = 0$
	г)	$y'' - 10y' + 29y = 0$
	д)	$y^{IV} - 12y''' + 36y'' = 0$
25	а)	$16y'' + 25y = 0$
	б)	$y'' - 25y' = 0, \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = 25$
	в)	$y'' + 7y' + 12y = 0$
	г)	$y'' + 8y' + 41y = 0$
	д)	$y^{IV} + 14y''' + 49y'' = 0$
26	а)	$16y'' + 9y = 0$
	б)	$2y'' - 11y' = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 11$
	в)	$y'' - 8y' + 7y = 0$
	г)	$y'' - 12y' + 45y = 0$
	д)	$y^{IV} - 6y''' + 9y'' = 0$

Варіант	ДР	
27	а)	$9y'' + 49y = 0$
	б)	$y'' + 25y' = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 25$
	в)	$y'' + 6y' + 8y = 0$
	г)	$y'' + 10y' + 34y = 0$
	д)	$16y^{IV} + 8y''' + y'' = 0$
28	а)	$y'' + 144y = 0$
	б)	$y'' + 11y' = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = -22$
	в)	$y'' - y' - 12y = 0$
	г)	$y'' + 4y' + 40y = 0$
	д)	$9y^{IV} - 24y''' + 16y'' = 0$
29	а)	$25y'' + 49y = 0$
	б)	$2y'' - 9y' = 0, \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = 9$
	в)	$y'' + 7y' + 10y = 0$
	г)	$y'' + 2y' + 50y = 0$
	д)	$y^{IV} + 16y''' + 64y'' = 0$
30	а)	$16y'' + 81y = 0$
	б)	$y'' + 16y' = 0, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = -16$
	в)	$y'' - 3y' - 10y = 0$
	г)	$y'' - 2y' + 17y = 0$
	д)	$y^{IV} - 18y''' + 81y'' = 0$

2.2.2.3. Розв'язати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами (ЛНДР-2).

Варіант	ДР-2	
1	а)	$y'' + 3y' = -18xe^{-3x}$
	б)	$y'' - 4y' + 5y = 10 \cos 2x + 15 \sin 2x$
	в)	$y'' + 8y' + 16y = 16x^2 + 10, y(0)=1, y'(0)=0$
2	а)	$y'' - 2y' = 8xe^{2x}$
	б)	$y'' + 6y' + 13y = 8 \cos 3x - 36 \sin 3x$
	в)	$y'' - 4y' + 4y = 8x^2, y(0)=3, y'(0)=2$
3	а)	$y'' + 5y' = -50xe^{-5x}$
	б)	$y'' - 2y' + 5y = 34 \sin 2x$
	в)	$y'' + 6y' + 9y = 18x^2 - 3x - 5, y(0)=1, y'(0)=0$
4	а)	$y'' - 4y' = 16xe^{4x}$
	б)	$y'' + 4y' + 13y = 4 \cos 3x + 28 \sin 3x$
	в)	$y'' - 2y' + y = x^2 + x, y(0)=8, y'(0)=0$
5	а)	$y'' + 6y' = -72xe^{-6x}$
	б)	$y'' - 6y' + 13y = 75 \cos 2x$
	в)	$y'' - 8y' + 16y = 32x^2 - 12, y(0)=0, y'(0)=3$
6	а)	$y'' - 3y' = 36xe^{3x}$
	б)	$y'' + 2y' + 17y = 6 \cos 4x + 17 \sin 4x$
	в)	$y'' + 4y' + 4y = 8x^2 + 16x, y(0)=-1, y'(0)=1$
7	а)	$y'' + 2y' = 4xe^{-2x}$
	б)	$y'' + 4y' + 5y = 130 \cos 2x$

Варіант	ДР-2	
	В)	$y'' + 2y' + y = 2x^2 - 12, y(0) = 0, y'(0) = -9$
8	а)	$y'' - 5y' = 100xe^{5x}$
	б)	$y'' - 8y' + 25y = 16 \cos 3x + 24 \sin 3x$
	В)	$y'' - 6y' + 9y = 81x^2, y(0) = 6, y'(0) = 13$
9	а)	$y'' + 7y' = 98xe^{-7x}$
	б)	$y'' + 10y' + 29y = 200 \cos 2x$
	В)	$y'' + 10y' + 25y = 75x^2 + 10x + 11, y(0) = 1, y'(0) = -1$
10	а)	$y'' + 4y' = 8xe^{-4x}$
	б)	$y'' - 6y' + 13y = 170 \sin 3x$
	В)	$y'' - 2y' + y = 4x^2 - 13x, y(0) = -2, y'(0) = 4$
11	а)	$y'' - 8y' = -64xe^{8x}$
	б)	$y'' - 2y' + 5y = 6 \cos 2x + 7 \sin 2x$
	В)	$y'' + 8y' + 16y = 64x^2 + 8, y(0) = 2, y'(0) = -3$
12	а)	$y'' + 3y' = 54xe^{-3x}$
	б)	$y'' - 4y' + 20y = -16 \cos 4x + 4 \sin 4x$
	В)	$4y'' + 4y' + y = 3x^2 + 20x, y(0) = -8, y'(0) = -3$
13	а)	$y'' - 4y' = -32xe^{4x}$
	б)	$y'' + 6y' + 18y = 90 \sin 3x$
	В)	$9y'' - 6y' + y = x^2 - 125, y(0) = 1, y'(0) = 13$
14	а)	$y'' - 2y' = 10xe^{2x}$
	б)	$y'' + 8y' + 20y = 48 \cos 2x + 16 \sin 2x$
	В)	$y'' - 10y' + 25y = 625x^2 - 150, y(0) = 0, y'(0) = 21$

Варіант	ДР-2	
15	а)	$y'' - 6y' = 36xe^{6x}$
	б)	$y'' + 2y' + 10y = 74 \cos 3x$
	в)	$9y'' + 6y' + y = 2x^2 + 24x, y(0) = -36, y'(0) = 1$
16	а)	$y'' - 3y' = 18xe^{3x}$
	б)	$y'' - 4y' + 5y = -17 \cos 2x - 6 \sin 2x$
	в)	$y'' + 8y' + 16y = 32x^2 + 4, y(0) = 1, y'(0) = 0$
17	а)	$y'' + 2y' = -8xe^{-2x}$
	б)	$y'' + 6y' + 13y = 36 \cos 3x + 8 \sin 3x$
	в)	$y'' - 4y' + 4y = 4x^2 + 2, y(0) = 2, y'(0) = 0$
18	а)	$y'' - 5y' = 50xe^{5x}$
	б)	$y'' - 2y' + 5y = 34 \cos 2x$
	в)	$y'' + 6y' + 9y = 27x^2, y(0) = 2, y'(0) = -2$
19	а)	$y'' + 4y' = -16xe^{-4x}$
	б)	$y'' + 4y' + 13y = 20 \cos 3x + 20 \sin 3x$
	в)	$y'' - 2y' + y = 2x^2 - 10, y(0) = 2, y'(0) = 4$
20	а)	$y'' - 6y' = 72xe^{6x}$
	б)	$y'' - 6y' + 13y = 75 \sin 2x$
	в)	$y'' - 8y' + 16y = 16x^2 - 6, y(0) = 0, y'(0) = 2$
21	а)	$y'' + 3y' = -36xe^{-3x}$
	б)	$y'' + 2y' + 17y = -2 \cos 4x + 16 \sin 4x$
	в)	$y'' + 4y' + 4y = 12x^2 - 14, y(0) = 1, y'(0) = -5$
22	а)	$y'' - 2y' = -4xe^{2x}$

Варіант	ДР-2	
	б)	$y'' + 4y' + 5y = 130 \sin 2x$
	в)	$y'' + 2y' + y = 2x^2 + 3x, y(0) = 6, y'(0) = -6$
23	а)	$y'' + 5y' = -100xe^{-5x}$
	б)	$y'' - 8y' + 25y = -48 \cos 3x + 32 \sin 3x$
	в)	$y'' - 6y' + 9y = 27x^2 - 9, y(0) = 1, y'(0) = 5$
24	а)	$y'' - 7y' = -98xe^{7x}$
	б)	$y'' + 10y' + 29y = 200 \sin 2x$
	в)	$y'' + 10y' + 25y = 125x^2 - 5, y(0) = 1, y'(0) = -3$
25	а)	$y'' - 4y' = -8xe^{4x}$
	б)	$y'' - 6y' + 13y = -170 \cos 3x$
	в)	$y'' - 2y' + y = 3x^2 - 11x, y(0) = -4, y'(0) = 2$
26	а)	$y'' + 8y' = 64xe^{-8x}$
	б)	$y'' - 2y' + 5y = 9 \cos 2x + 2 \sin 2x$
	в)	$y'' + 8y' + 16y = 48x^2 - 2, y(0) = 1, y'(0) = -2$
27	а)	$y'' - 3y' = -54xe^{3x}$
	б)	$y'' - 4y' + 20y = 20 \cos 4x + 12 \sin 4x$
	в)	$4y'' + 4y' + y = 2x^2 - 48, y(0) = 0, y'(0) = -15$
28	а)	$y'' + 4y' = 32xe^{-4x}$
	б)	$y'' + 6y' + 18y = 90 \cos 3x$
	в)	$9y'' - 6y' + y = x^2 - 12x, y(0) = -18, y'(0) = 1$
29	а)	$y'' + 2y' = -10xe^{-2x}$
	б)	$y'' + 8y' + 20y = 16 \cos 2x - 48 \sin 2x$

Варіант	ДР-2	
	в)	$y'' - 10y' + 25y = 500x^2 + 75x, y(0) = 6, y'(0) = 20$
30	а)	$y'' + 6y' = -36xe^{-6x}$
	б)	$y'' + 2y' + 10y = 74 \sin 3x$
	в)	$9y'' + 6y' + y = 3x^2 + 43x, y(0) = -12, y'(0) = 8$

2.2.2.4. Знайти частинний розв'язок $\bar{y}$ ЛНДР-2 у загальному вигляді.

Варіант	ДР-2
1	$y'' - 4y' = 8(e^{4x} + e^{-4x}) + x \sin 4x$
2	$y'' + 2y' = e^{2x} + e^{-2x} + 2x \cos 2x$
3	$y'' - 5y' = 25(e^{5x} + e^{-x}) + x^2$
4	$y'' + 4y = e^{2x} + 5 \sin 2x + 4$
5	$y'' - y = e^{2x} + e^x(x^2 + x) + 3 \cos x$
6	$y'' - y' = e^x + x^2 + 5 \sin x$
7	$y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x} - 4 \sin 2x + 5$
8	$y'' - y = 2e^x + \cos x + 2x$
9	$y'' + 16y = 16 \cos 4x - 16e^{4x} + 5x$
10	$y'' + 36y = 24 \sin 6x + 36e^{6x} + 2x^2$
11	$y'' + y' = e^x + e^{-x} + 5 \cos x$
12	$y'' + 4y = 3 + 2 \sin 2x + e^{4x}$
13	$y'' + 4y = 2e^{2x} + x \cos 2x + 3$
14	$y'' + 9y = 18 \sin 3x + 18e^{3x} + x^2$
15	$y'' - y' = 2x - 1 - 3e^x + 5 \cos x$

Варіант	ДР-2
16	$y'' + 5y' - 6y = (x^2 + 1)e^x + xe^{2x} - \sin 6x$
17	$y'' + 16y = 16 \cos 4x - 16e^{4x} + 2x$
18	$y'' + y = 2 \sin x + 2e^x + 3x^2$
19	$y'' - 8y' = 8 \cos 8x - 4e^{8x} + 5x$
20	$y'' + 4y = -8 \sin 2x + 4e^{2x} - 2x^2$
21	$y'' + 2y' + y = 3 \sin 2x + 2e^{-x} - 4x$
22	$y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x} - 2 \cos 2x + 0,5x$
23	$y'' - 3y' = e^{3x} + x^2 + 3 \cos 3x$
24	$y'' + 6y' + 9y = 9xe^{-3x} + 1 + 9 \sin x$
25	$y'' + 49y = x^3 + 4x + 3 \sin 7x + e^{7x}$
26	$y'' - y' - 2y = (2x - 1)e^{-x} + 3x \cos 2x + 2x$
27	$y'' - 7y' + 12y = xe^{3x} + 2e^{4x} + 3x \sin 4x$
28	$y'' - 4y' = 4x + e^{4x} + \sin 2x$
29	$y'' + 3y' + 2y = (3x - 7)e^{-x} + \cos x - 3 \sin 2x$
30	$y'' - y' - 6y = 2xe^{3x} + 9 \cos x - \sin 2x$

2.2.2.5. Розв'язати лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами методом варіації довільних сталих (метод Лагранжа)

Варіант	ДР-2	Варіант	ДР-2
1	$y'' + y = \frac{1}{\sqrt{\sin^5 x \cos x}}$	2	$y'' - 2y' + 2y = \frac{e^x}{\sin x}$
3	$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}$	4	$y'' - y' = \frac{1}{e^{-x} + 1}$

Варіант	ДР-2	Варіант	ДР-2
5	$y'' + 9y = \frac{1}{\sin 3x}$	6	$y'' + y = \operatorname{tg}^2 x$
7	$y'' - y' = e^{2x} \cos e^x$	8	$y'' + 9y = \frac{1}{\cos 3x}$
9	$y'' + 2y' + y = 3e^{-x} \sqrt{x+1}$	10	$y'' + y = \frac{1}{\sin^2 x}$
11	$y'' + 2y' + 2y = \frac{1}{e^x \sin x}$	12	$y'' + 16y = \frac{16}{\cos 4x}$
13	$y'' + y = \frac{1}{\sin^3 x}$	14	$y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$
15	$y'' + y = \frac{1}{\sin x}$	16	$y'' - y' = \frac{1}{e^x + 1}$
17	$y'' + 2y' + y = 3e^{-x} \sqrt{x+1}$	18	$y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$
19	$y'' - y' = e^{2x} \sin e^x$	20	$y'' + y = \operatorname{tg} x$
21	$y'' - 10y' + 25y = \frac{e^{5x}}{\sqrt{x^2 - 4}}$	22	$y'' - y = \frac{e^x}{e^x + 1}$
23	$y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x^2 - 1}$	24	$y'' + y = \frac{1}{\cos x}$
25	$y'' + 2y' + y = e^{-x} \sqrt{2x+1}$	26	$y'' - y = \frac{2e^x}{e^x - 1}$
27	$y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x^2}}$	28	$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$
29	$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$	30	$y'' + 4y = \operatorname{tg} 2x$

2.2.2.6. Розв'язати системи диференціальних рівнянь.

Варіант	Системи ДР			
1	а)	$\begin{cases} x' = -x - 5y \\ y' = -7x - 3y \end{cases}$	б)	$\begin{cases} y' = -5y + 2z + 40e^x \\ z' = y - 6z + 9e^{-x} \end{cases}$
2	а)	$\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = x - y \end{cases}$	б)	$\begin{cases} x' = 3x - 2y + t \\ y' = 3x - 4y \end{cases}$
3	а)	$\begin{cases} x' = -5x - 8y \\ y' = -3x - 3y \end{cases}$	б)	$\begin{cases} y' = 4y - z - 5x + 1 \\ z' = y + 2z + x - 1 \end{cases}$
4	а)	$\begin{cases} x' = 4x - y \\ y' = x + 2y \end{cases}$	б)	$\begin{cases} x' = 5x - 3y + te^{2t} \\ y' = 3x - y + e^{3t} \end{cases}$
5	а)	$\begin{cases} x' = -7x + 5y \\ y' = 4x - 8y \end{cases}$	б)	$\begin{cases} y' = 5y + 4z + e^x \\ z' = 4y + 5z + 1 \end{cases}$
6	а)	$\begin{cases} x' = 6x - y \\ y' = 3x + 2y \end{cases}$	б)	$\begin{cases} x' = 5x - 3y + 2e^{3t} \\ y' = x + y + 5e^{-t} \end{cases}$
7	а)	$\begin{cases} x' = 4x + 6y \\ y' = 4x + 2y \end{cases}$	б)	$\begin{cases} y' = 2y - z + 2e^x \\ z' = 3y - 2z + 4e^x \end{cases}$
8	а)	$\begin{cases} x' = -y - 2z \\ y' = 3y + 4z \end{cases}$	б)	$\begin{cases} y' = \sin x - 2y - z \\ z' = \cos x + 4y + 2z \end{cases}$
9	а)	$\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = x + 3y \end{cases}$	б)	$\begin{cases} x' = -3x - 4y + 2t \\ y' = x + y + t \end{cases}$
10	а)	$\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = 8x + y \end{cases}$	б)	$\begin{cases} x' = x - y + 4 \cos 2t \\ y' = -4x - 2y + 8 \cos 2t + 5 \sin 2t \end{cases}$
11	а)	$\begin{cases} y' = 2y - 3x \\ x' = 3y + 2x \end{cases}$	б)	$\begin{cases} x' - x - y + \cos t = 0 \\ y' - 3x + y = \sin t + \cos t \end{cases}$
12	а)	$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = -6x - 3y \end{cases}$	б)	$\begin{cases} x' = y - \cos t \\ y' = -x + \sin t \end{cases}$

Варіант	Системи ДР			
13	а)	$\begin{cases} x' = 4x + 5y \\ y' = -4x - 4y \end{cases}$	б)	$\begin{cases} x' = y + e^t \\ y' = x - e^t \end{cases}$
14	а)	$\begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = -3x + 2y \end{cases}$	б)	$\begin{cases} y' = -2y + z - e^{2x} \\ z' = -3y + 2z + 6e^{2x} \end{cases}$
15	а)	$\begin{cases} x' = x + y \\ y' + 5x + 3y = 0 \end{cases}$	б)	$\begin{cases} y' = -y - 2z + 2e^{-x} \\ z' = 3y + 4z + e^{-x} \end{cases}$
16	а)	$\begin{cases} x' + 4x + 6y = 0 \\ y' + 4x + 2y = 0 \end{cases}$	б)	$\begin{cases} y' = -2y - 4z + 1 + 4x \\ z' + y - z = \frac{3}{2}x^2 \end{cases}$
17	а)	$\begin{cases} x' - y = 0 \\ y' - 2x - y = 0 \end{cases}$	б)	$\begin{cases} x' = 4x - 3y + \sin t \\ y' = 2x - y - 2\cos t \end{cases}$
18	а)	$\begin{cases} y' = 4y - z \\ z' = y + 2z \end{cases}$	б)	$\begin{cases} x' = 2x + 4y + \cos t \\ y' = -x - 2y + \sin t \end{cases}$
19	а)	$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -8x - 5y \end{cases}$	б)	$\begin{cases} y' = 2y + z - 4 \\ z' = y + 2z + 3x - 6 \end{cases}$
20	а)	$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = -4x + y \end{cases}$	б)	$\begin{cases} y' = 2y - z - \sin x \\ z' = 3y - 2z - \cos x \end{cases}$
21	а)	$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 4x + 3y \end{cases}$	б)	$\begin{cases} x' = 5x + 4y + 2e^{-t} \\ y' = 4x + 5y - 4 \end{cases}$
22	а)	$\begin{cases} x' = -5x - 4y \\ y' = -2x - 3y \end{cases}$	б)	$\begin{cases} x' = x + y - \cos t \\ y' = -2x - y + \sin t + \cos t \end{cases}$
23	а)	$\begin{cases} x' = x - 5y \\ y' = -x - 3y \end{cases}$	б)	$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = x - 5\sin t \end{cases}$
24	а)	$\begin{cases} x' = 2x - 9y \\ y' = x + 8y \end{cases}$	б)	$\begin{cases} x' = -3x + 2y + 1 + t \\ y' = 2x - 3y - 3 \end{cases}$

Варіант	Системи ДР			
25	а)	$\begin{cases} y' = y + z \\ z' = -10y - z \end{cases}$	б)	$\begin{cases} y' = 2y + 4z + \cos x \\ z' = -y - 2z + \sin x \end{cases}$
26	а)	$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 4x - 3y \end{cases}$	б)	$\begin{cases} x' = -y + t^2 \\ y' = x + e^t \end{cases}$
27	а)	$\begin{cases} x' = -x - 2y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$	б)	$\begin{cases} y' + 3y + 4z = 2x \\ z' - y - z = x \end{cases}$
28	а)	$\begin{cases} x' = x - z \\ z' = 6z \end{cases}$	б)	$\begin{cases} y' + 2y + 4z = e^x \\ z' - y - 3z = -x \end{cases}$
29	а)	$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$	б)	$\begin{cases} x' - x + y = 0 \\ y' = x + y + e^t \end{cases}$
30	а)	$\begin{cases} x' = y \\ y' = 2x + y \end{cases}$	б)	$\begin{cases} x' = x + y - t^2 + t - 2 \\ y' = -2x + 4y + 2t^2 - 4t + 7 \end{cases}$

3 ДОВІДКОВИЙ МАТЕРІАЛ «ТАБЛИЦЯ НЕВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ»

$$\int f(u) du = F(u) + C$$

1	$\int 0 du = C$	2	$\int du = u + C$
3	$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$	3a	$\int \sqrt{u} du = \frac{2}{3} \cdot u^{\frac{3}{2}} + C$
4	$\int \frac{du}{u^n} = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{u^{n-1}} + C$	4a	$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$
4б	$\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$	5	$\int \frac{du}{u} = \ln u + C$
6	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$	6a	$\int e^u du = e^u + C$
7	$\int \cos u du = \sin u + C$	8	$\int \sin u du = -\cos u + C$
9	$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$	10	$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$
11	$\int \frac{du}{\cos u} = \ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C =$ $= \ln \left \frac{1}{\cos u} + \operatorname{tg} u \right + C$	12	$\int \frac{du}{\sin u} = \ln \left \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right + C =$ $= \ln \left \frac{1}{\sin u} - \operatorname{ctg} u \right + C$
13	$\int \operatorname{tg} u du = -\ln \cos u + C$	14	$\int \operatorname{ctg} u du = \ln \sin u + C$
15	$\int \operatorname{ch} u du = \operatorname{sh} u + C$	16	$\int \operatorname{sh} u du = \operatorname{ch} u + C$
17	$\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C$	18	$\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C$

19	$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C =$ $= -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{u}{a} + C$	19a	$\int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arctg} u + C$
20	$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{u-a}{u+a} \right + C$	21	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right + C$
22	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arc} \sin \frac{u}{a} + C =$ $= -\operatorname{arc} \cos \frac{u}{a} + C$	23	$\int \sqrt{a^2 - u^2} du = u \cdot \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{2} +$ $+ \frac{a^2}{2} \operatorname{arc} \sin \frac{u}{a} + C$
24	$\int \sqrt{u^2 \pm a^2} du = u \cdot \frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{2} \pm$ $\pm \frac{a^2}{2} \ln \left u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right + C$	25	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + C$
		26	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + C$

ЛІТЕРАТУРА

1. Бізюк В. В. Елементи теорії поля : навч. посібник / В. В. Бізюк ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2020. – 76 с.
2. Диференціальні рівняння : Навчальний посібник / І. М. Килимник, Д. С. Яримбаш. – Запоріжжя : ЗНТУ, 2018. – 102 с.
3. Домбровський В. А. Вища математика : Підручник / В. А. Домбровський, І. М. Крижанівський, Р. С. Мацьків, Ф. М. Мигович, В. М. Неміш, Б. С. Окрепкий, Г. П. Хома, М. Я. Шелестовська; за редакцією Шинкарика М. І. – Тернопіль : Видавництво Карп'юка, 2003 – 480 с. - ISBN 966-7946-15-0.
4. Дубовик В. П. Вища математика : Навч. посібн. – У трьох частинах. Ч.3. – 2-ге вид. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – Харків : Веста, 2008. – 232 с. – ISBN 978-966-08-3059-2.
5. Збірник задач з вищої математики / В. В. Бабенко, А. Г. Зіневич, С. М. Кічура, Б. М. Тріщ, Ж. Я. Цаповська. – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2005. – 256 с.
6. Клепко В. Ю., Голець В. Л. Вища математика в прикладах і задачах : Навчальний посібник. – К.: Центр учбової літератури, 2009. – 594 с.
7. Овчинников П. П. Вища математика : підручник. У 2 ч. Ч. 2 / П. П. Овчинников. – К.: Техніка, 2004. – 792 с. – ISBN 966-575-153-0.
8. Рубан А. І. Теорія поля : підручник / А. І. Рубан, Ю. Г. Гогоці, О. Г. Гусак. – Суми : Сумський державний університет, 2023. – 279 с. – ISBN 978-966-657-936-5.
9. Рябушко А. П. Индивидуальные задания по высшей математике. Учебное пособие в 4 частях. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля, Ч. 3. Ряды / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть – Минск : Вышэйшая школа, 2013. – 368 с.
10. Самойленко А. М. Диференціальні рівняння в задачах : Навч. посібник / А. М. Самойленко, С. А. Кривошея, М. О. Перестюк. – Київ : Либідь, 2003. – 504 с. – ISBN 966-06-0292-8.