2 КІНЕМАТИКА

Кінематикою називають розділ теоретичної механіки, в якому вивчаються закони руху матеріальної точки й абсолютно твердого тіла з геометричної точки зору, без аналізу причин, що зумовлюють цей рух, тобто без урахування сил.

Слово ”кінематика“ походить від грецького ”кінема“, що означає рух.

У кінематиці рух тіла або точки розглядають відносно вибраної системи відліку.

Системою відліку називають систему координат, яка зв’язана з твердим тілом, відносно якого визначається положення інших тіл в різні моменти часу.

Система відліку може бути як рухомою, так і умовно нерухомою в більшості технічних задач за умовно нерухому приймають систему координат незмінно зв’язану з Землею. Проте при вивченні руху деяких механічних систем ця система відліку може виявитися не досить точною. Так при досліді з маятником Фуко, де помітно позначається обертання Землі, нерухому систему координат слід зв’язати з Сонцем. В інших випадках, наприклад, при вивченні руху тіл сонячної системи, обирають систему координат з початком в центрі сонячної системи і осями, які напрямлені до трьох так званих нерухомих зірок.

По відношенню до різних систем відліку тіло може робити різні рухи або перебувати в стані спокою, тобто не змінювати свого положення протягом часу відносно обраної системи обліку. Наприклад, якщо тіло перебуває у спокої по відношенню до Землі, воно вже не буде перебувати в спокої по відношенню до Сонця. У цьому розумінні спокій і рух тіло відносні і залежать від обраної системи відліку.

При русі тіла всі його точки в загальному випадку здійснюють різні рухи. Наприклад, при коченні колеса по прямолінійній рейці його центр здійснює прямолінійний рух, а точки обода рухаються по циклоїді. Тому кінематику поділяють на кінематику точки (вивчається рух окремих точок) і кінематику тіла.

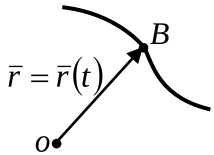
У кінематиці розглядають дві ***основні задачі***:

- установлення математичних методів задавання та опису руху точки (тіла) відносно вибраної системи відліку;
- визначення кінематичних характеристик заданого руху – траєкторій окремих точок, їх швидкості та прискорення.

2.1 Кінематика точки

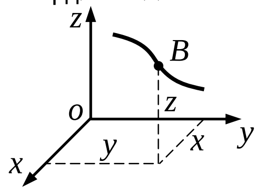
СПОСОБИ ЗАДАННЯ РУХУ ТОЧКИ

Векторний спосіб



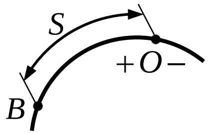
$\bar{r} = \bar{r}(t)$

Координатний спосіб



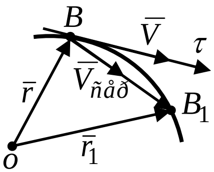
$x = f_1(t);\ y = f_2(t);\ z = f_3(t)$

Натуральний спосіб

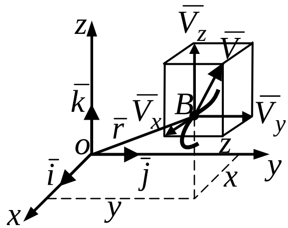


$S = f(t)$

ШВИДКІСТЬ РУХУ ТОЧКИ

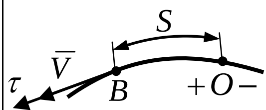


$$\bar{V} = \dot{\bar{r}} = \frac{d\bar{r}}{dt}$$



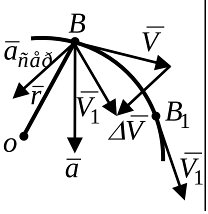
$$V_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt};\ V_y = \dot{y} = \frac{dy}{dt}$$

$$V_z = \dot{z} = \frac{dz}{dt};\ V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

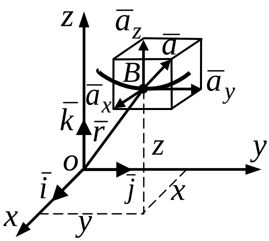


$$V = \frac{dS}{dt} = \dot{S}$$

ПРИСКОРЕННЯ ТОЧКИ



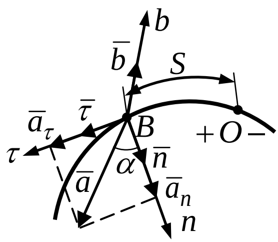
$$\bar{a} = \ddot{\bar{r}} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$$



$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k};$$

$$a_x = \ddot{x};\ a_y = \ddot{y};\ a_z = \ddot{z};$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$



$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n;\ a_\tau = \dot{V} = \frac{dV}{dt} = \ddot{S};$$

$$\bar{a} = \bar{\tau}a_\tau + \bar{n}a_n;\ a_n = \frac{V^2}{\rho};$$

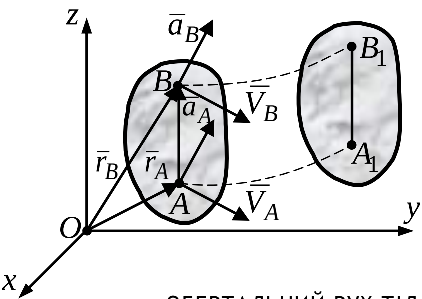
$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

2.2 Кінематика твердого тіла

ПОСТУПАЛЬНИЙ РУХ ТІЛА

1. Поступальним рухом тіла називається такий його рух, при якому будь-яка пряма, проведена в тілі, залишається паралельною своєму початковому положенню під час всього руху.

Закон руху, швидкості і прискорення точок тіла

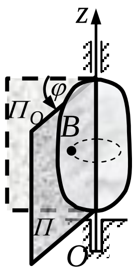


$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \overline{AB}\,; \qquad \overline{AB} = const\,;$$

$$\bar{V}_A = \bar{V}_B\,; \qquad \bar{a}_A = \bar{a}_B$$

Теорема. При поступальному русі твердого тіла траєкторія, швидкості і прискорення всіх точок тіла однакові.

ОБЕРТАЛЬНИЙ РУХ ТІЛА НАВКОЛО НЕРУХОМОЇ ОСІ

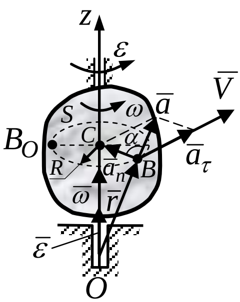


1. ***Обертальним рухом*** твердого тіла навколо нерухомої осі називають такий його рух, при якому існує пряма, незмінно зв'язана з тілом, яка залишається нерухомою на протязі всього руху тіла.
2. Рівняння обертального руху, кутова швидкість і кутове прискорення тіла

$$\varphi = f(t); \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}\,; \quad \varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$$

3. Вектор і модуль швидкості точки тіла в обертальному русі

$$\bar{V} = \bar{\omega} \times \bar{r}\,; \qquad V = \omega R$$



4. Прискорення точки тіла в обертальному русі

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n\,; \qquad \bar{a} = \bar{\tau} a_\tau + \bar{n} a_n$$

4. 1 Тангенціальне і нормальне прискорення точки

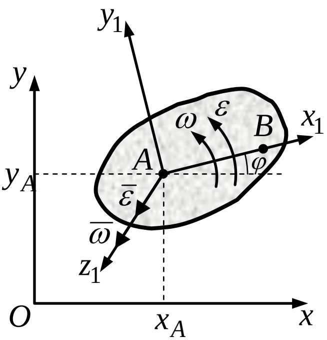
$$\bar{a}_\tau = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}\,; \;\; a_\tau = \varepsilon R\,; \;\; \bar{a}_n = \bar{\omega} \times \bar{V}\,; \;\; a_n = \omega^2 R$$

4. 2 Модуль і напрям прискорення точки

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\,; \qquad tg\,\alpha = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}$$

2.3 Плоскопаралельний рух твердого тіла

ВИЗНАЧЕННЯ ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНОГО РУХУ

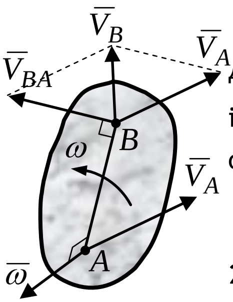


1. ***Плоскопаралельним*** (***плоским***) називають такий рух твердого тіла, при якому всі точки тіла рухаються в площинах, паралельних одній (основній) нерухомій площині.

Рівняння (закон) плоского руху тіла:

$$x_A = f_1(t);\; y_A = f_2(t);\; \varphi = f_3(t)$$

ШВИДКІСТЬ ТОЧОК ТВЕРДОГО ТІЛА ПРИ ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНОМУ РУСІ



1. ***Теорема про швидкості точок плоскої фігури***

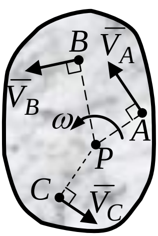
Швидкість $\overline{V}_B$ будь-якої точки B плоскої фігури дорівнює геометричній сумі швидкості $\overline{V}_A$ полюса A і швидкості $\overline{V}_{BA}$, яку точка B отримує внаслідок обертання фігури навколо полюса A

$$\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{BA};\; \left[\overline{V}_{BA} = \overline{\omega} \times \overline{AB}\,;\; \overline{V}_{BA} \perp AB\right]$$

2. ***Теорема про проекції точок плоскої фігури***

Проекції швидкостей точок плоскої фігури на вісь, яка проходить через ці точки, однакові

$$np_{AB}\overline{V}_A = np_{AB}\overline{V}_B$$



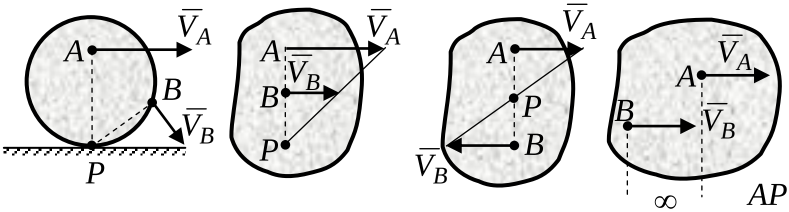
3. ***Визначення швидкості точки за допомогою миттєвого центра швидкостей (МЦШ)***

МЦШ – точка P при плоскому русі, швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю, тобто $V_P=0$.

Швидкість будь-якої точки плоскої фігури є обертальною швидкістю цієї точки навколо МЦШ

$$\overline{V}_B = \overline{\omega} \times \overline{PB}\,;\; V_B = \omega \cdot PB\,;\; V_A = \omega \cdot PA$$

Окремі випадки визначення МЦШ

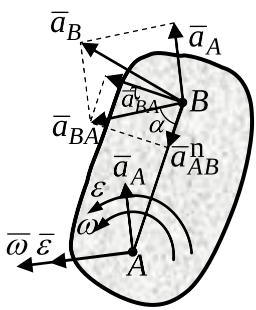


$V_A = V_B$

$\omega = 0$

$AP = BP = \infty$

ПРИСКОРЕННЯ ТОЧКИ ПРИ ПЛОСКОМУ РУСІ



1. *Теорема про прискорення точок плоскої фігури*

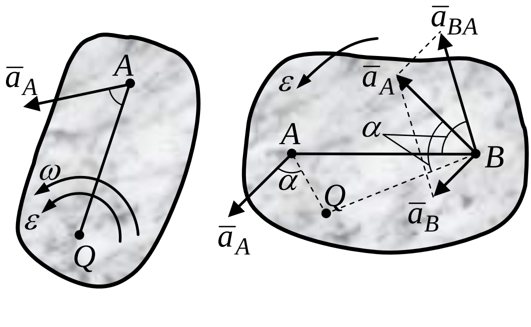
Прискорення будь-якої точки B плоскої фігури дорівнює векторній сумі прискорення полюса A і прискорення $\overline{a}_{BA}$, якого набуває точка B при обертанні фігури навколо полюса A

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA} \text{ або } \overline{a}_B = \overline{a}^n_A + \overline{a}^\tau_A + \overline{a}^n_{AB} + \overline{a}^\tau_{BA};$$

$$a^\tau_{BA} = \varepsilon \cdot AB; \; a^n_{BA} = \omega^2 \cdot AB$$

2. *Визначення прискорення за допомогою МЦП*

Миттєвий центр прискорення (МЦП) – це точка Q, прискорення якої в даний момент часу дорівнює нулю, тобто $\overline{a}_Q = 0$.



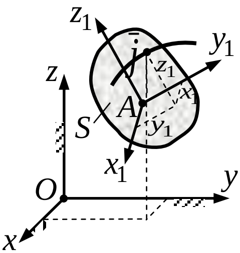
Якщо відомо $\overline{a}_A$, ω і ε, то МЦП знаходиться на промені, проведеному з точки A під кутом $\alpha = arctg\dfrac{|\varepsilon|}{\omega^2}$, який відкладено від вектора $\overline{a}_A$ в напрямку ε на відстані

$$AQ = a_A \Big/ \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4};$$

$$a_B = BQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

2.4 Складний рух точки

1. ***Складний рух точки*** — це рух точки відносно декількох систем відліку, одна з яких вважається умовно нерухомою.



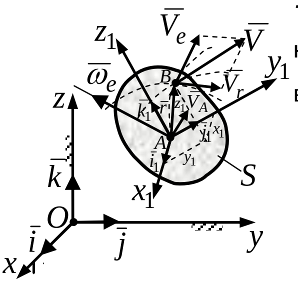
2. ***Відносний рух точки*** B — це її рух відносно рухомої системи відліку $Ax_1y_1z_1$. Рівняння відносного руху точки

$$x_1 = x_1(t);\ y_1 = y_1(t);\ z_1 = z_1(t)$$

3. ***Переносний рух точки*** B — це рух точки разом з тілом відносно нерухомої системи відліку $Oxyz$.
4. ***Абсолютний рух точки*** B — це рух точки відносно нерухомої системи відліку $Oxyz$. Рівняння абсолютного руху точки

$$x = x(t);\ y = y(t);\ z = z(t)$$

ШВИДКІСТЬ І ПРИСКОРЕННЯ ТОЧКИ У СКЛАДНОМУ РУСІ

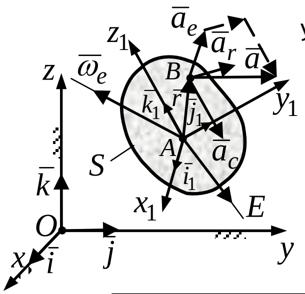


Теорема. Абсолютна швидкість $\overline{V}$ точки B у складному русі дорівнює векторній сумі переносної $\overline{V}_e$ і відносної $\overline{V}_r$ швидкостей

$$\overline{V} = \overline{V}_r + \overline{V}_e$$

Модуль абсолютної швидкості

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_e^2 + 2V_r \cdot V_e \cos\left(\overline{V}_r \,\widehat{,}\, \overline{V}_e\right)}$$



Теорема Коріоліса. Абсолютна швидкість $\overline{a}$ точки B у складному русі дорівнює векторній сумі переносного $\overline{a}_e$, відносного $\overline{a}_r$ і коріолісового $\overline{a}_c$ прискорень

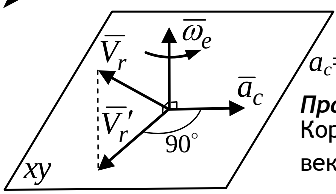
$$\overline{a} = \overline{a}_e + \overline{a}_r + \overline{a}_c \quad \text{або} \quad \overline{a} = \overline{a}_e^n + \overline{a}_e^\tau + \overline{a}_r^n + \overline{a}_r^\tau + \overline{a}_c$$

Модуль абсолютного прискорення

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Вектор і модуль прискорення Коріоліса

$$\overline{a}_c = 2\left(\overline{\omega}_e \times \overline{V}_r\right);\ a_c = 2V_r\omega_e \sin\left(\overline{\omega}_e \,\widehat{,}\, \overline{V}_r\right)$$



a_c=0; при *а)* ω_e=0; *б)* $\overline{V}_r \parallel \overline{\omega}_e$; *в)* V_r=0

Правило Жуковського. Для визначення напрямку Коріолісового прискорення необхідно спроектувати вектор відносної швидкості $\overline{V}_r$ на площину xy перпендикулярну до осі переносного обертання (до вектора $\overline{\omega}_e$), і повернути цю проекцію $\overline{V}_r'$ у площині xy на кут $90°$ у бік переносного обертання.

2.5 Завдання К.1. Дослідження руху точки

- За заданими рівняннями руху точки M установити вид її траєкторії, побудувати траєкторію і вказати положення точки на траєкторії для часу t_i, с (t=1, 2, 3).
- Визначити швидкість, тангенціальне, нормальне та повне прискорення точки, радіус кривизни траєкторії, а також закон руху точки.
- Побудувати ці вектори на траєкторії для точки в заданий момент часу.
- Побудувати графіки швидкості, нормального, тангенціального і повного прискорень та графік руху точки.

Необхідні для розрахунку величини наведено в таблицях 2.1 і 2.2.

Таблиця 2.1

Варіант	Рівняння руху точки		Час, с		
	$x = f(t)$, м	$y = f(t)$, м	t_1	t_2	t_3
1	$2\cos\omega t$ [1]	$4\cos^2(\omega t/2)$	$\pi/6$	0	$\pi/2$
2	$2t$	$2-(1-2t)^2$	0	1	0.5
3	$6\sin(\pi t/4)+2$	$3-3\cos(\pi t/4)$	0	2	4
4	$-2t^2+3$	$-5t$	0	0.5	1
5	$4\cos^2(\pi t/3)+2$	$4\sin^2(\pi t/3)$	1	0	0.5
6	$1+6\sin(\pi t/6)$	$4\cos(\pi t/6)-2$	0	3	6
7	$3-2\cos(\pi t/4)$	$2\sin(\pi t/4)-1$	0	4	2
8	$3t$	$6t-5t^2$	1	2	3
9	$20\cos(3\pi t/2)$	$20\sin(3\pi t/2)$	0	1	0.5
10	$-\cos(\pi t^2/3)+3$	$\sin(\pi t^2/3)-1$	1	0	0.5

[1] ω=1 *рад/с*

Продовження таблиці 2.1

Варіант	Рівняння руху точки		Час, с		
	$x = f(t)$, м	$y = f(t)$, м	t_1	t_2	t_3
11	$4t + 4$	$-4/(t+1)$	1	2	0
12	$5-2cos(\pi t/3)$	$3sin(\pi t/3)-2$	1.5	3	4.5
13	$10cos(3t)$	$3+3t$	0	$\pi/3$	$\pi/6$
14	$4cos(2\pi t)$	$-4sin(\pi t)$	0	1	0.5
15	$3(1+t^2)$	$3/(1+t^2)$	1	0	0.5
16	$5sin(\pi t^2/4)+3$	$2-5cos(\pi t^2/4)$	1	$\sqrt{2}$	2
17	$t+2$	$2cos(2t)$	0	π	$\pi/2$
18	$12cos(3t)$	$-2sin(6t)$	0	$\pi/4$	$\pi/2$
19	$3-8sin(\pi t/6)$	$-6cos(\pi t/6)$	0	3	1.5
20	$2-3t-6t^2$	$3-3t/2-3t^2$	0	1	2
21	$cos^3 t$	$cost$	0	$\pi/4$	$\pi/6$
22	$5e^{2t}$	$5e^{-2t}$	0	0.5	0.3
23	$3t$	$4t^2-1$	0	0.5	1
24	$cos(\pi t^2)$	$2sin(\pi t^2)-1$	0	1	2
25	$2cos(\pi t^2)$	$cos(2\pi t^2)$	0	1	$\sqrt{3}/2$
26	$3\text{-}t^2$	t^2+1	1	2	3
27	$2cos\ (6t)$	$12sin\ (3t)$	0	$\pi/4$	$\pi/6$
28	$5ch\ (2t)$	$5sh\ (2t)$	0	0.5	1
29	$1+3cos(\pi t^2/3)$	$3sin(\pi t^2/3)+3$	0	1	$\sqrt{3}$
30	$20cos^2(\pi t)$	$20sin(\pi t)-10$	1/4	1/3	1

Таблиця 2.2

Варіант	Рівняння руху точки		Час, с		
	$x = f_1(t)$, м	$y = f_2(t)$, м	t_1	t_2	t_3
1	$2cos^2(\pi t/3)$	$-2sin^2(\pi t/3)-4$	0	1	0.5
2	$2t^2+4$	$-2t$	0	1	1.5
3	$cos(\pi t^2/3)-2$	$sin(\pi t^2/3)+3$	0	1	2
4	$6cos(3t)$	$-2sin(6t)$	$\pi/4$	0	$\pi/6$
5	$t+3$	$(t+3)^3$	0	0.3	0.5
6	$2sin(\pi t/3)$	$-3cos(\pi t/3)+4$	0.5	1	3
7	$3t^2+2$	$-4t$	0	0.5	1
8	$½(e^{4t}+e^{-4t})$	$½(e^{4t}+e^{-4t})$	0	1/4	0.5
9	$5cos^2(\pi t/4)$	$2sin(\pi t/4)$	1	2	3
10	$3cos(\pi t^2)-1$	$1+3sin(\pi t^2)$	0	$\sqrt{0.5}$	1
11	$5sin(\pi t^2/6)-2$	$3+5cos(\pi t^2/6)$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$
12	$3/(t+2)$	$3t+6$	1	0.5	2
13	$3cos(\pi t/6)-2$	$10sin(\pi t/6)$	0	1	1.5
14	$4t$	$(2t+5)^{-1}$	0	0.5	1
15	$5-4cos(\pi t/3)$	$-4+sin(\pi t/3)$	0	1	0.5
16	$5-4cos^2(\pi t/3)$	$-4+3sin^2(\pi t/3)$	0	0.5	1
17	$2t$	$4e^{-2t}$	0	0.5	1
18	$8cos(\pi t/6)-3$	$16sin^2(\pi t/6)$	1	2	3

Продовження таблиці 2.2

Варіант	Рівняння руху точки		Час, с		
	$x = f_1(t)$, м	$y = f_2(t)$, м	t_1	t_2	t_3
19	$-4t^2+1$	$-3t$	0	0.5	1
20	$6cos(\pi t/4)-4$	$-9sin(\pi t/4)+4$	1	2	3
21	$-2t-2$	$-2/(t+1)$	0	1	2
22	$4cos(\pi t/3)$	$-3sin(\pi t/3)$	0	1	2
23	$3t$	$4t^2-1$	0	0.5	1
24	$1/2sin\ (2t)$	$cos^2\ (t)$	0	$\pi/4$	$\pi/2$
25	$3/2\ (e^t+e^{-t})$	$3/2\ (e^t-e^{-t})$	0	1	2
26	$4t$	$16t^2-1$	1/4	0.5	1
27	$7sin^2(\pi t/6)-5$	$7cos^2(\pi t/6)$	0	0.5	1
28	$-5t^2-4$	$3t$	0	1	0.5
29	$-10cos(\pi t/3)$	$3sin(\pi t/3)$	1	0.5	1.5
30	$5t$	$-7t^2+3$	0	1	0.5

2.6 Приклад виконання завдання К.1

За заданими рівняннями руху точки M установити:

- вид її траєкторії, побудувати траєкторію і вказати положення точки на траєкторії для заданого моменту часу;
- визначити швидкість, тангенціальне, нормальне та повне прискорення точки, радіус кривизни траєкторії, а також закон руху точки.
- побудувати вектори $\overline{V}$, $\overline{a}$, $\overline{a}^{\tau}$, $\overline{a}^{n}$ для точки M на траєкторії в заданий момент часу;
- побудувати графіки $V(t),\ a(t),\ a^{\tau}(t),\ a^{n}(t)$ та $S(t)$.

Задано: $t = 1.0$ с; $\omega = 1$ *рад*/с;

$$x = -2\cos(\omega t) + 3 \text{ м}; \qquad y = t \text{ м}; \tag{2.1}$$

Розв'язання.

Виключаючи з рівнянь (2.1) час t, отримаємо рівняння траєкторії в координатній формі $x = f(y)$

$$x = -2\cos(y) + 3\,. \tag{2.2}$$

Рівняння (2.2) вказує на те, що траєкторія рухомої точки має вигляд косинусоїди (рис. 2.1).

Координати рухомої точки M для $t = 1.0$ с

$$x = -2\cos(1.0) + 3 = -2 \cdot 0.54 + 3 = 1.92 \text{ м}; \quad y = 1.0 \text{ м}.$$

За цими координатами наносимо на рис. 2.1 точку M.

Вектор швидкості точки

$$\bar{V} = V_x \bar{i} + V_y \bar{j}. \tag{2.3}$$

Вектор прискорення точки

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j}\,. \tag{2.4}$$

У рівняннях (2.3), (2.4) $\bar{i}$, $\bar{j}$ – орти координатних осей x та y; V_x, V_y, a_x, a_y – проекції швидкостей і прискорень точки на ці осі.

Для розглядуваного прикладу маємо

$$V_x = \dot{x} = \frac{d}{dt}\left[-2\cos(t) + 3\right] = 2\sin(t); \quad V_y = \dot{y} = \frac{d}{dt}[t] = 1\,;$$

$$a_x = \ddot{x} = \dot{V}_x = \frac{d}{dt}\left[2\sin(t)\right] = 2\cos(t); \quad a_y = \ddot{y} = \dot{V}_y = \frac{d}{dt}[1] = 0.$$

Модуль швидкості

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{4\sin^2(t) + 1} = \varphi_1(t). \tag{2.5}$$

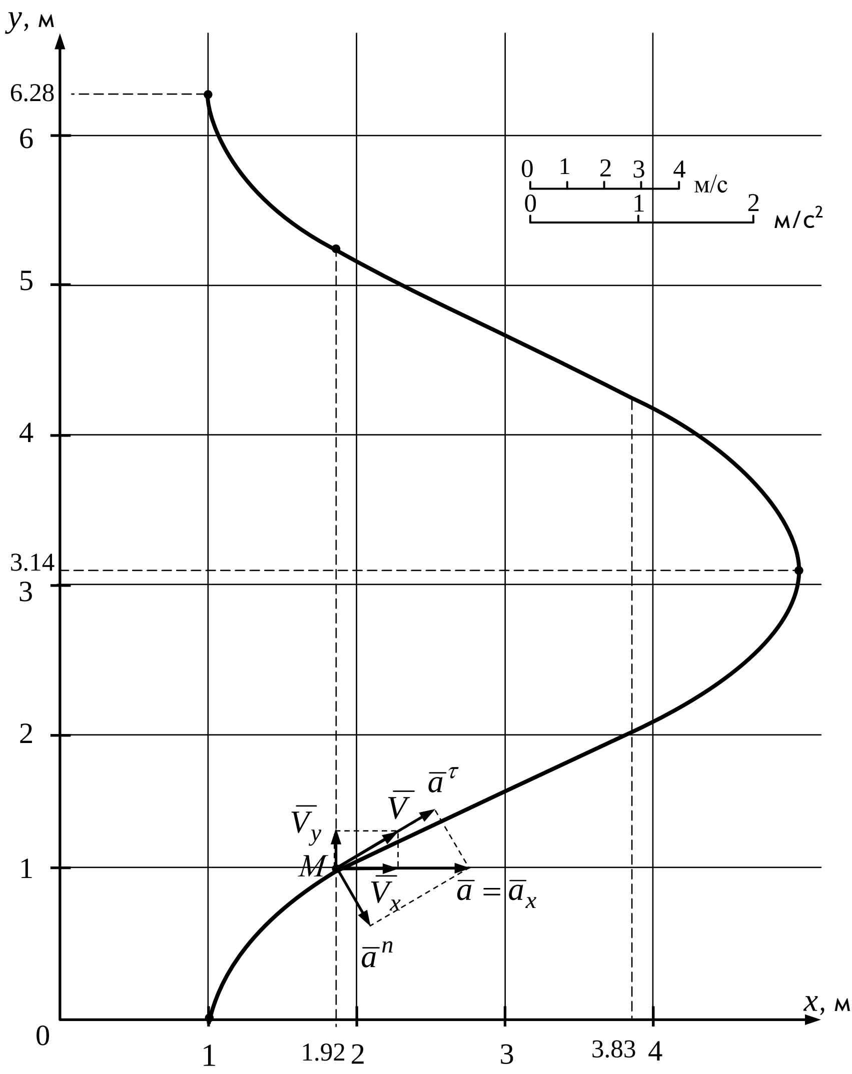


Рисунок 2.1 – Траєкторія руху точки M

Модуль прискорення

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{4\cos^2(t)} = 2\cos(t) = \varphi_2(t). \tag{2.6}$$

Модулі тангенційного та нормального прискорень точки

$$a^{\tau}=\frac{dV}{dt}=\frac{V_x a_x+V_y a_y}{v}=\frac{d}{dt}\left[\sqrt{4\sin^2(t)+1}\right]=$$
$$=4\frac{\sin(t)\cdot\cos(t)}{\sqrt{4\sin^2(t)+1}}=\varphi_3(t), \tag{2.7}$$

$$a_n=\sqrt{(a)^2-\left(a^{\tau}\right)^2}=2\sqrt{\cos^2(t)-4\left(\frac{\sin(t)\cdot\cos(t)}{4\sin^2(t)+1}\right)^2}=\varphi_4(t). \tag{2.8}$$

Радіус кривизни траєкторії

$$\rho=\frac{V^2}{a_n}=\frac{4\,sin^2(t)+1}{2\sqrt{cos^2(t)-4\left(\frac{sin(t)\cdot cos(t)}{4\,sin^2(t)+1}\right)^2}}.$$

Аналітичний вираз закону руху точки по траєкторії визначається за формулою

$$S=\int_0^t Vdt=\int_0^t\sqrt{4\sin^2(t)+1}\,dt=\varphi_5(t). \tag{2.9}$$

В даному випадку це еліптичний інтеграл II-го роду, його треба розв'язати за допомогою ЕОМ.

Для даного прикладу закон руху можливо представити у вигляді ряду

$$S=t+\frac{2}{3}t^3-\frac{8}{15}t^5+\cdots=\varphi_6(t). \tag{2.10}$$

Для побудови графіка $S(t)$ достатньо в (2.10) залишити три члени ряду.

Побудова графіків. Графіки зміни швидкості, тангенціального, нормального і повного прискорень, а також графік руху точки по траєкторії будуються за формулами (2.5), (2.6), (2.7), (2.8) та (2.9) або (2.10). Для даного прикладу ці графіки наведені на рис. 2.2…2.4.

Результати обчислень всіх величин наведено в таблиці 2.3.

Таблиця 2.3

Час	Координати, м		Швидкості, м/с			Прискорення, м/с^2					Радіус кривизни
t_i, с	x	y	V_x	V_y	V	a_x	a_y	a	a^τ	a^n	ρ, м
1.0	1.92	1.00	1.68	1.00	1.95	1.08	0.00	1.08	0.93	0.55	6.98

За даними табл. 2.3 на рис.2.1 побудовані вектори $\overline{V}$, $\bar{a}$, $\bar{a}^\tau$, $\bar{a}^n$.

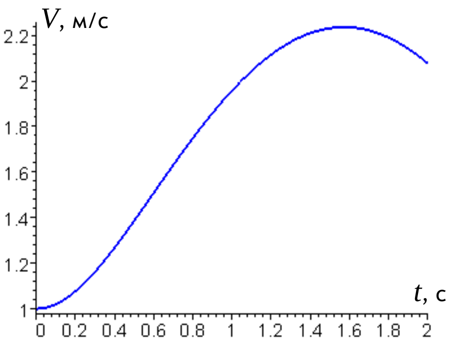
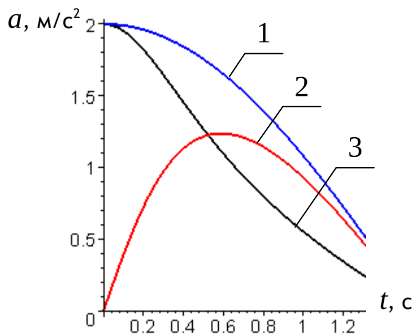


Рисунок 2.2 – Модуль швидкості точки



1 – модуль повного прискорення;
2 – модуль тангенційного прискорення;
3 – нормальне прискорення.

Рисунок 2.3 – Прискорення точки

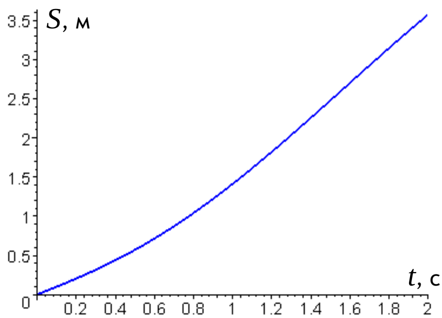


Рисунок 2.4 – Графік руху

2.7 Завдання К.2. Дослідження поступального й обертального рухів твердого тіла

Механізми складаються (рис. 2.5) із поступально рухомого тіла 1 та із ступінчастих коліс 2 і 3, з'єднаних пасовими або зубчастими передачами.

Радіуси коліс і закон поступального руху першого тіла $z_1(t)$ та обертального руху колеса 3 $\varphi_3(t)$ наведено в таблиці 2.4.

Додатний напрямок $\varphi_3(t)$ прийняти таким, як показано на схемах механізмів (рис. 2.5).

2.7.1 К.2.1 *Визначення закону поступального руху тіла*

При заданому законі обертального руху тіла 3 $\varphi_3(t)$ для моментів часу t_i (i=1, 2) визначити:

- швидкість, нормальне, тангенціальне і повне прискорення точки M;
- закон поступального руху тіла 1;
- швидкість і прискорення тіла 1;
- кутові швидкість і прискорення тіл 2, 3;
- показати на рисунку вектори швидкостей та прискорень тіла 1 і точки M, а також вектори кутових швидкостей і прискорень тіл 2, 3.

2.7.2 К.2.2 *Визначення закону обертального руху тіла*

При заданому закону поступального руху першого тіла $z_1(t)$ для моментів часу t_i (i=1, 2) визначити:

- швидкість, нормальне, тангенціальне і повне прискорення точки M;
- закон обертального руху тіла 3;
- швидкість і прискорення тіла 1;
- кутові швидкість і прискорення тіл 2, 3;
- показати на рисунку вектори швидкостей та прискорень тіла 1 і точки M, а також вектори кутових швидкостей і прискорень тіл 2, 3.

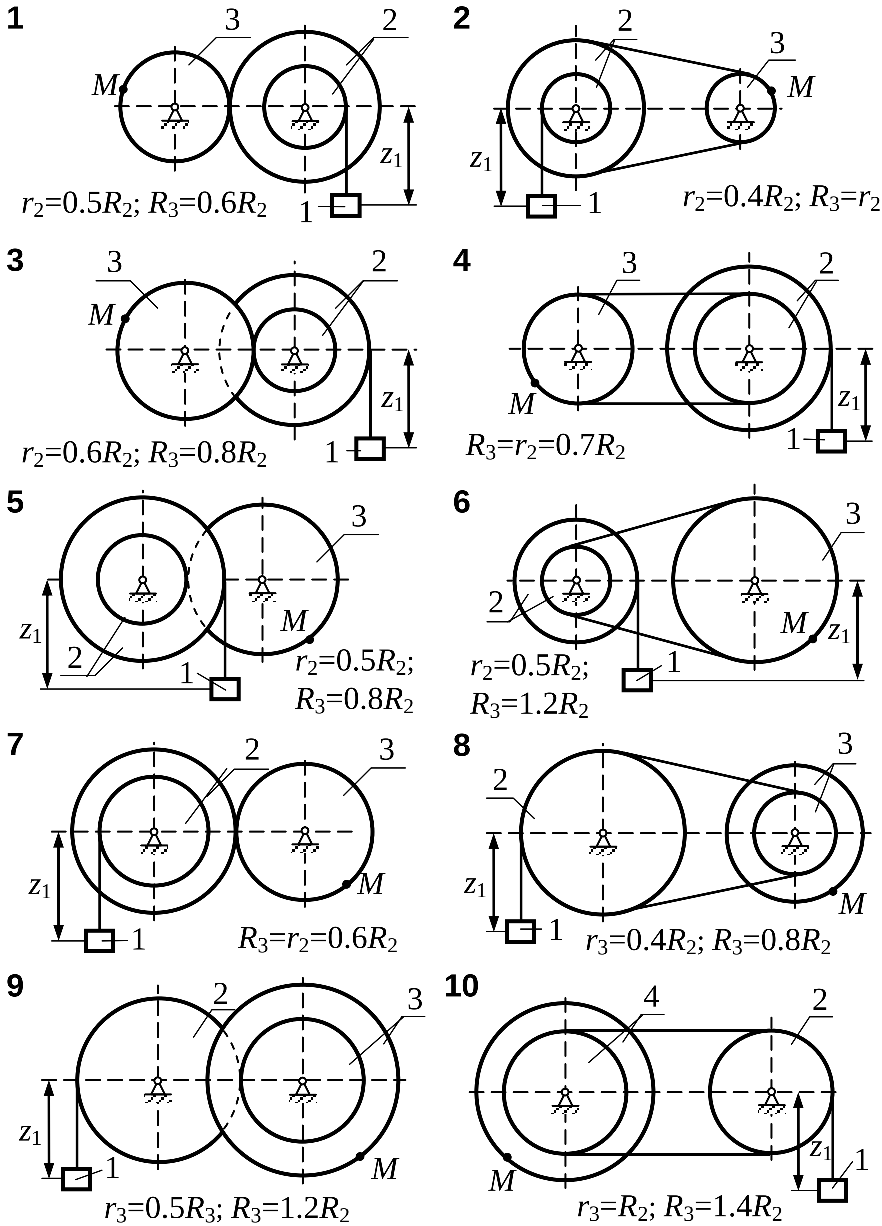
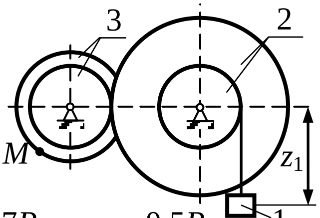

1
3
2
M
z_1
1
r_2=0.5R_2; R_3=0.6R_2
2
2
3
M
z_1
1
r_2=0.4R_2; R_3=r_2
3
3
2
M
z_1
1
r_2=0.6R_2; R_3=0.8R_2
4
3
2
M
z_1
1
R_3=r_2=0.7R_2
5
3
M
z_1
2
1
r_2=0.5R_2;
R_3=0.8R_2
6
3
2
M
z_1
1
r_2=0.5R_2;
R_3=1.2R_2
7
2
3
z_1
M
1
R_3=r_2=0.6R_2
8
3
2
z_1
1
M
r_3=0.4R_2; R_3=0.8R_2
9
2
3
z_1
1
M
r_3=0.5R_3; R_3=1.2R_2
10
4
2
z_1
1
M
r_3=R_2; R_3=1.4R_2

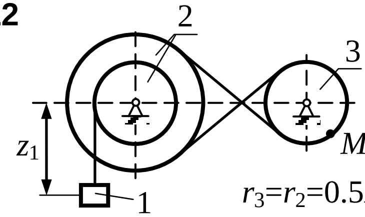
Рисунок 2.5

11



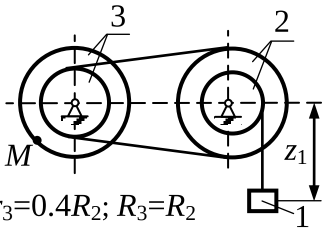
R_3=0.7R_2; r_2=r_3=0.5R_2

12



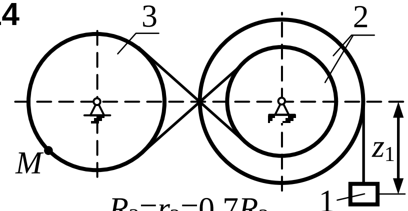
r_3=r_2=0.5R_2

13



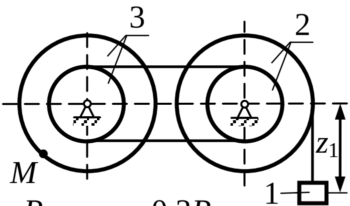
r_2=r_3=0.4R_2; R_3=R_2

14



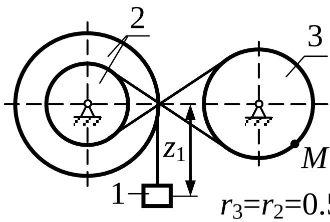
R_3=r_2=0.7R_2

15



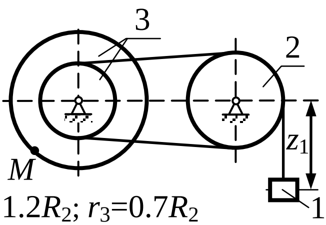
R_3=R_2; r_2=r_3=0.3R_2

16



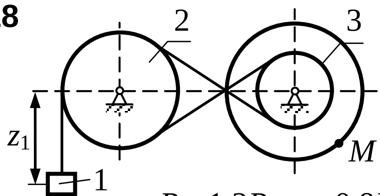
r_3=r_2=0.5R_2

17



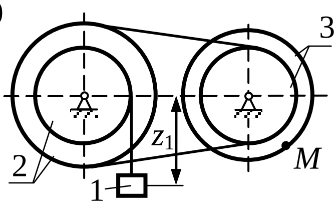
R_3=1.2R_2; r_3=0.7R_2

18



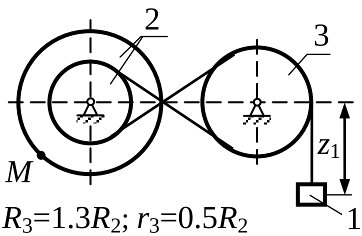
R_3=1.2R_2; r_3=0.8R_2

19



r_2=r_3=0.6R_2; R_3=0.8R_2

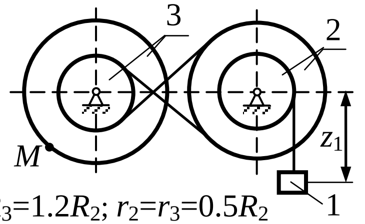
20



R_3=1.3R_2; r_3=0.5R_2

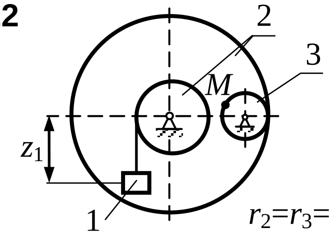
Продовження рисунка 2.5

21



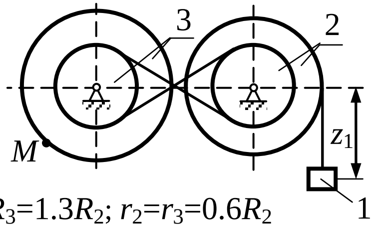
$R_3=1.2R_2$; $r_2=r_3=0.5R_2$

22



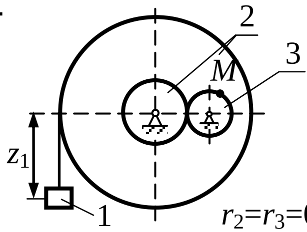
$r_2=r_3=0.3R_2$

23



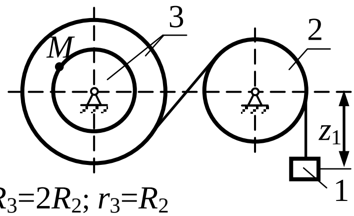
$R_3=1.3R_2$; $r_2=r_3=0.6R_2$

24



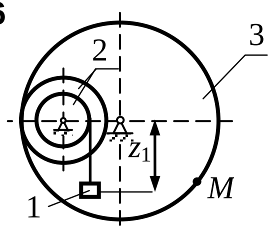
$r_2=r_3=0.3R_2$

25



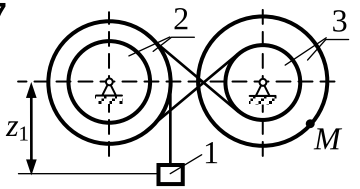
$R_3=2R_2$; $r_3=R_2$

26



$r_2=2.5R_2$;
$r_3=0.3R_2$

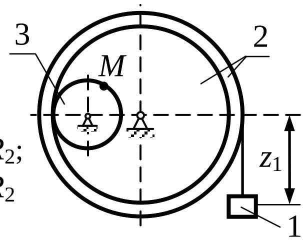
27



$R_3=R_2$; $r_2=r_3=0.6R_2$

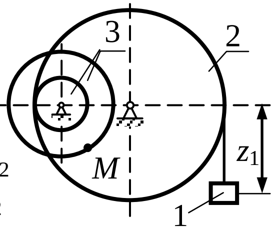
28

$r_2=0.8R_2$;
$r_3=0.3R_2$



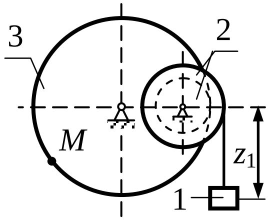
29

$R_3=0.6R_2$
$r_3=0.2R_2$



30

$R_3=2R_2$;
$r_2=0.3R_2$



Продовження рисунка 2.5

Таблиця 2.4

Варіант	$\varphi_3(t)$, *рад* (до К.2.1)	$z_1(t)$, м (до К.2.2)	R_2, м	Час, *с*	
				t_1	t_2
1	$10t-0.1t^2$	$2t-0.02\pi t^2$	0.20	2	1
2	$0.2t^3+t$	$0.02t^3+0.1t$	0.10	2	1
3	$0.75t+1.5t^3$	$0.075t+0.15t^3$	0.10	2	1
4	$5t – 3t^2$	$t – 0.3t^2$	0.20	1	0.5
5	$0.25t^2 – 2t$	$0.025t^2 – 0.2t$	0.10	2	1
6	$4t^2+2t$	$1.2t^2+0.6t$	0.30	0.25	0.5
7	$4t – 0.5t^2$	$1.2t – 0.15t^2$	0.30	1	3
8	$3t+2t^2$	$1.2t+0.8t^2$	0.40	0.25	0.3
9	$\pi\, cos(\pi t/3)$	$0.45 cos(\pi t/3)$	0.15	1	3
10	$1+2sin(2t)$	$0.3sin(2t)$	0.15	$\pi/6$	$\pi/4$
11	$t – 0.2t^2$	$0.1t – 0.02t^2$	0.1	2	1
12	$1.4t – t^2$	$0.28t – 0.2t^2$	0.2	0.4	0.6
13	$4t – 6t^2$	$0.8t – 1.2t^2$	0.2	1	0.5
14	$3t – 1.5t^2$	$0.3t – 0.15t^2$	0.1	2	3
15	$8t^2 – 4.5t$	$0.8t^2 – 0.9t$	0.2	1	4
16	$1+sin(3t)$	$0.1sin(3t)$	0.1	$\pi/6$	$\pi/9$
17	$4cos\, t$	$0.8cos\, t$	0.2	$\pi/4$	$\pi/6$
18	$2sin^2(t)+t$	$0.6sin(2t)+4$	0.3	$\pi/2$	$\pi/6$
19	$2cos(2t)+1$	$0.8sin(2t)+1$	0.4	$\pi/8$	$\pi/6$

Продовження таблиці 2.4

Варіант	$\varphi_3(t)$, *рад* (до К.2.1)	$z_1(t)$, м (до К.2.2)	R_2, м	Час, *с*	
				t_1	t_2
20	$1.5sin(2t)$	$0.75sin(2t)+5$	0.5	$\pi/12$	$\pi/6$
21	$2t^2+3t$	$0.28t^2+0.42t$	0.14	0.5	0.25
22	$3t^2–4t$	$0.9t^2–1.2t$	0.30	1	2
23	$0.5\pi t^2$	$0.1\pi t^2+2$	0.20	1	2
24	$0.5e^{2t}+1$	$0.25e^{2t}+5$	0.10	0.5	1
25	$2\pi t-1.2\pi t^2$	$0.36\pi t-0.22\pi t^2$	0.18	0.3	1.2
26	$2cos(\pi t/6)+1$	$0.8cos(\pi t/6)+5$	0.40	1	2
27	$5t^2+3t$	$0.6t^2+0.36t$	0.12	0.25	0.5
28	$4e^{3t}+2$	$0.96e^{3t}+6$	0.24	1/3	0
29	$4\pi\, cos(\pi t/6)+1$	$0.56\pi\, cos(\pi t/6)$	0.14	2	3
30	$5(t–0.25t^2)$	$t–0.05t^2$	0.2	1	2

2.8 Приклад виконання завдання К.2.1

Задано: $\varphi_3(t)=4\,sin\dfrac{\pi}{2}t$ *рад*; $R_2=R_3=0.1$ м;

$r_2=0.5R_2=0.05$ м.

Визначити:

- для заданого моменту часу t=0.5 с:
  - кутові швидкості і прискорення коліс 2 і 3;
  - швидкості та прискорення тіла 1 і точки M;
  - показати на рисунку вектори $\overline{\omega}_3$, $\bar{\varepsilon}_3$, $\overline{\omega}_2$, $\bar{\varepsilon}_2$, $\bar{a}_M^n$, $\bar{a}_M^\tau$, $\bar{a}_M$, $\overline{V}_M$, $\overline{V}_1$, $\bar{a}_1$;
- закон поступального руху тіла 1 $z_1(t)$.

***Розв'язання*.**

За вихідними даними *викреслюємо задану схему механізму* (рис. 2.6).

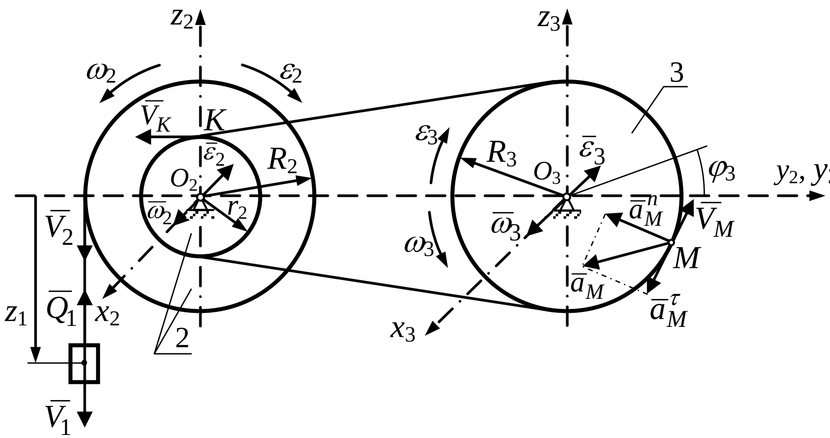


Рисунок 2.6

Кутові швидкість та прискорення колеса 3

$$\omega_3 = \frac{d\varphi_3}{dt} = \dot{\varphi}_3 = 2\pi\cos\frac{\pi}{2}t\,;$$

$$\varepsilon_3 = \dot{\omega}_3 = -\pi^2\sin\frac{\pi}{2}t.$$

При t=0.5 с

$$\omega_3 = 2\pi\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 0.5\right) = 1.414\pi \text{ рад/с};$$

$$\varepsilon_3 = -\pi^2\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot 0.5\right) = -0.707\pi^2 \text{ рад/с}^2.$$

Швидкість та прискорення точки M

$$V_M = \omega_3\cdot R_3 = 1.414\pi\cdot 0.1 = 0.1414\pi \text{ м/с};$$

$$a_M^\tau = \varepsilon_3 \cdot R_3 = -0.707\pi^2 \cdot 0.1 = -0.0707\pi^2 \text{ м/с}^2;$$

$$a_M^n = \omega_3^2 \cdot\ R_3 = (1.414\pi)^2 \cdot 0.1 = 0.2\pi^2 \text{ м/с}^2;$$

$$a_M = \sqrt{\left(a_M^n\right)^2 + \left(a_M^\tau\right)^2} = R_3\sqrt{\omega_3^4 + \varepsilon_3^2} =$$

$$= 0.1\sqrt{(1.414\pi)^4 + \left(-0.707\pi^2\right)^2} = 0.212\pi^2 \text{ м/с}^2.$$

Через те, що швидкості на ободах коліс 2 і 3 і на пасовій передачі однакові, то $V_K = V_M$, $V_K = \omega_2 r_2$ і $V_K = \omega_3 R_3$. Звідси *кутова швидкість колеса* 2

$$\omega_2 = \frac{R_3}{r_2}\omega_3 = \frac{0.1}{0.05}2\pi\cos\frac{\pi}{2}t = 4\pi\cos\frac{\pi}{2}t\,.$$

Кутове прискорення тіла 2

$$\varepsilon_2 = \dot{\omega}_2 = -2\pi^2\sin\frac{\pi}{2}t\,.$$

При t=0.5 с

$$\omega_2 = 4\pi\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 0.5\right) = 2.828\pi \text{ } \textit{рад}/\text{с};$$

$$\varepsilon_2 = -2\pi^2\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot 0.5\right) = -1.414\pi^2 \text{ } \textit{рад}/\text{с}^2.$$

Швидкість на зовнішньому ободі колеса 2 дорівнює швидкості *тіла* 1

$$V_1 = V_2 = \omega_2 \cdot R_2 = 4\pi\cos\frac{\pi}{2}t \cdot 0.1 = 0.4\pi\cos\frac{\pi}{2}t\,.$$

Прискорення тіла 1

$$a_1 = a_2^\tau = \dot{V}_1 = \varepsilon_2 \cdot R_2\,; \qquad a_1 = -0.2\pi^2\sin\frac{\pi}{2}t\,.$$

При t=0.5 с

$$V_1 = 0.4\pi\, cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 0.5\right) = 0.2828\pi \text{ м/с;}$$

$$a_1 = -0.2\pi^2\, sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot 0.5\right) = -0.1414\pi^2 \text{ м/с}^2.$$

Закон поступального руху тіла 1

Через те, що $V_1 = \dfrac{dz_1}{dt}$, то $dz_1 = V_1 dt$ і

$$z_1 = \int_0^t V_1 dt = \int_0^t \left(0.4\pi\, cos\frac{\pi}{2}t\right)\cdot dt = 0.8\, sin\frac{\pi}{2}t \text{ м.}$$

Вектори швидкостей та прискорень тіла 1 і точки M, а також вектори кутових швидкостей і прискорень тіл 2 і 3 наведено на рис. 2.6.

Вектори кутових швидкостей $\overline{\omega}_2$ і $\overline{\omega}_3$ лежать на осях обертання (відповідно на осях x_2 і x_3) і направлені в ту сторону, звідки обертання тіла бачимо як таке, що відбувається проти ходу годинникової стрілки (правило гвинта).

Вектори кутових прискорень $\overline{\varepsilon}_2$ і $\overline{\varepsilon}_3$ співпадають з напрямками векторів кутових швидкостей $\overline{\omega}_2$ і $\overline{\omega}_3$ при обертаннях з прискоренням, тобто якщо знаки ω і ε співпадають.

2.9 Приклад виконання завдання К.2.2

Задано: $z_1 = 0.2t^2 + 2t$ м; $R_2 = R_3 = 0.1$ м; $r_2 = 0.5R_2 = 0.05$ м.

- *Визначити* для заданого моменту часу t=0.5 с:
  - швидкість і прискорення тіла 1;
  - кутові швидкість і прискорення тіл 2 і 3;
  - швидкість і прискорення точки *M*;
  - закон обертального руху колеса 3.
- *Показати* на рисунку вектори швидкостей та прискорень тіла 1 і точки M, а також вектори кутових швидкостей і прискорень тіл 2 і 3.

Розв'язання.

За вихідними даними викреслюємо задану схему механізму (рис. 2.7).

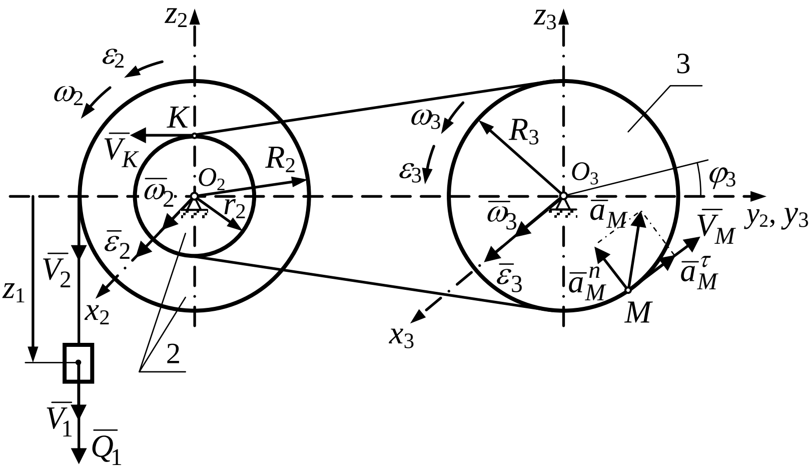


Рисунок 2.7

Швидкість та прискорення тіла 1

$$V_1 = \frac{dz_1}{dt} = \dot{z}_1 = 0.4t + 2 \text{ м/с}; \qquad a_1 = \frac{dV_1}{dt} = \dot{V}_1 = \ddot{z}_1 = 0.4 \text{ м/с}^2.$$

При t=0.5 с

$$V_1 = 0.4 \cdot 0.5 + 2 = 2.2 \text{ м/с}; \quad a_1 = 0.4 \text{ м/с}^2.$$

Через те, що швидкості точок на зовнішньому ободі колеса 2 і тіла 1 однакові, то $V_2 = V_1 = \omega_2 R_2$. Звідси *кутові швидкість і прискорення колеса* 2

$$\omega_2 = \frac{V_1}{R_2} = \frac{0.4t + 2}{0.1} = 4t + 20 \textit{ рад/с} \quad \text{і} \quad \varepsilon_2 = \dot{\omega}_2 = 4 \textit{ рад/с}^2.$$

При t=0.5 с

$$\omega_2 = 22 \textit{ рад/с}; \qquad \varepsilon_2 = 4 \textit{ рад/с}^2.$$

Через те, що швидкість на паску постійна, то $V_K = V_M$, $V_K = \omega_2 r_2$ і $V_M = \omega_3 R_3$. Звідси *кутові швидкість і прискорення колеса* 3

$$\omega_3 = \frac{\omega_2 r_2}{R_3} = \frac{(4t+20)\cdot 0.05}{0.1} = 2t+10 \text{ рад/с};$$

$$\varepsilon_3 = \dot{\omega}_3 = 2 \text{ рад/с}^2.$$

При t=0.5 с

$$\omega_3 = 2\cdot 0.5 + 10 = 11 \text{ рад/с}; \qquad \varepsilon = 2 \text{ рад/с}^2.$$

Швидкість, нормальне, тангенціальне і повне прискорення точки M визначаються за формулами

$$V_M = \omega_3 \cdot R_3 = 11\cdot 0.1 = 1.1 \text{ м/с}; \; a_M^n = \omega_3^2 \cdot R_3 = 11^2 \cdot 0.1 = 12.1 \text{ м/с}^2;$$

$$a_M^\tau = \varepsilon_3 \cdot R_3 = 2\cdot 0.1 = 0.2 \text{ м/с}^2;$$

$$a_M = \sqrt{\left(a_M^n\right)^2 + \left(a_M^\tau\right)^2} = R\sqrt{\omega_3^4 + \varepsilon_3^2} = 0.1\cdot\sqrt{11^4 + 2^2} = 12.101 \text{ м/с}^2.$$

Закон обертального руху колеса 3

Через те, що $\omega_3 = \dfrac{d\varphi_3}{dt}$, то $d\varphi_3 = \omega_3 dt$, а

$$\varphi_3 = \int_0^t \omega_3 dt = \int_0^t (2t+10)dt = t^2 + 10t \text{ рад}.$$

Вектори швидкостей та прискорення тіла 1 і точки M, а також вектори кутових швидкостей і прискорень тіл 2 І 3 наведено на рис. 2.7.

2.10 Завдання К.3. Визначення швидкостей і прискорень точок твердого тіла, що виконує плоский рух

Для заданого положення механізму визначити швидкості та прискорення точок A, B, C.

Кривошип OA радіуса r обертається навколо точки O з кутовим прискоренням ε, маючи в даний момент кутову швидкість ω.

Числові дані для розрахунку наведені в таблиці 2.5, схеми механізмів – на рисунку 2.8 (т.С – середина ланки АВ).

Таблиця 2.5

Схема	$OA=r$	$AB=l$	ω	ε	α	β	γ
	м		*рад*/с	*рад*/с^2	*град* ($^\circ$)		
1	0.20	0.30	1		30	45	–
2	0.24	0.36	2		45	60	–
3	0.30	0.40	3		60	60	–
4	0.36	0.48	4		30	30	–
5	0.40	0.50	5		45	15	–
6	0.48	0.56	6		60	15	–
7	0.50	0.60	7		30	30	–
8	0.56	0.64	8		45	45	–
9	0.60	0.70	9		60	30	–
10	0.64	0.72	10		30	45	–
11	0.25	0.50	1	2	30	15	30
12	0.30	0.60	2	3	60	45	30
13	0.35	0.70	3	2	30	60	–
14	0.40	0.60	1	3	15	30	–
15	0.20	0.45	2	3	30	45	30
16	0.25	0.60	1	2	30	60	30
17	0.30	0.65	2	1	60	30	–
18	0.35	0.60	3	1	30	45	–
19	0.30	0.80	1	2	15	60	–
20	0.20	0.50	2	1	30	30	–
21	0.30	0.60	3	1	30	45	30
22	0.10	0.70	2	3	60	45	–
23	0.15	0.45	1	4	30	60	30
24	0.20	0.60	2	1	30	45	–
25	0.30	0.50	1	2	–	30	–
26	0.35	0.80	1	3	30	30	–
27	0.40	0.80	1	2	30	15	–
28	0.10	0.40	2	4	15	60	–
29	0.15	0.70	3	4	30	60	–
30	0.20	0.60	4	1	60	30	–

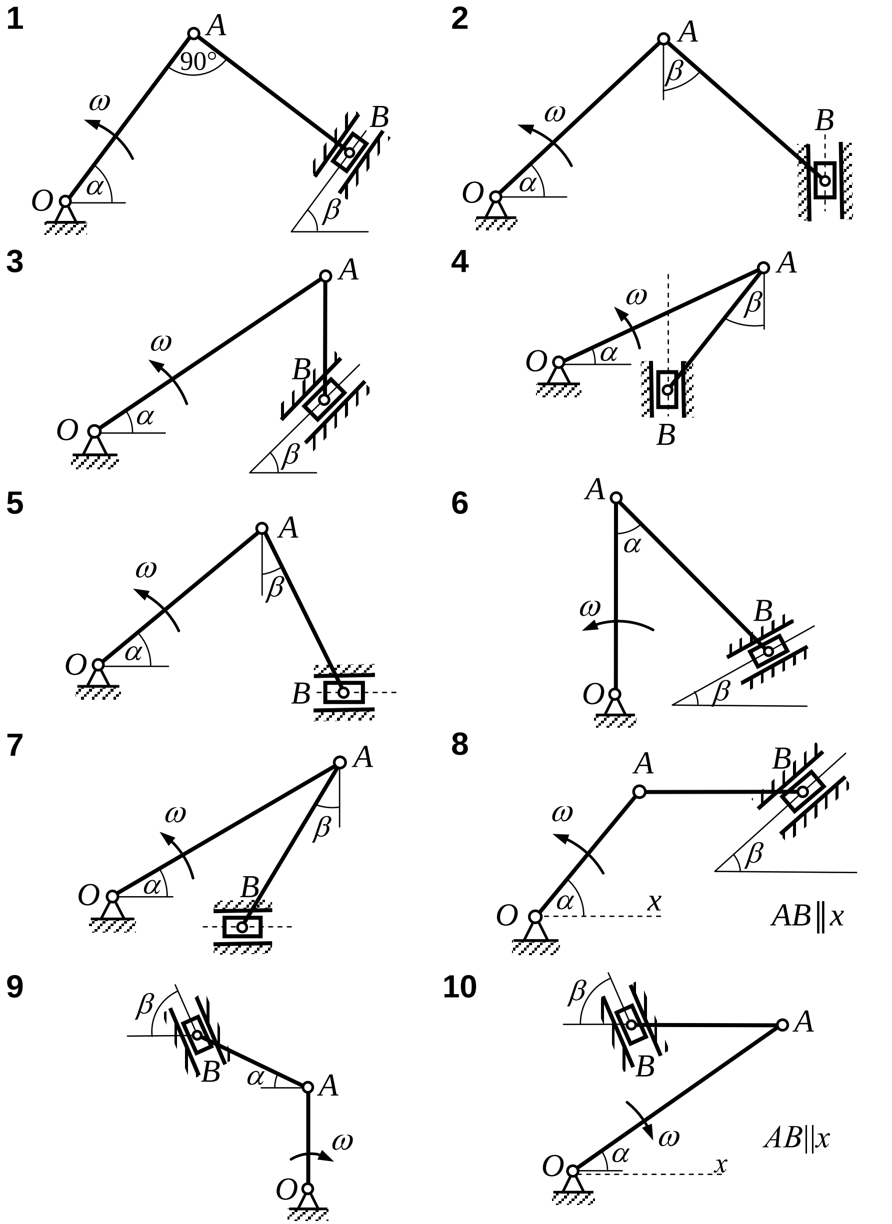
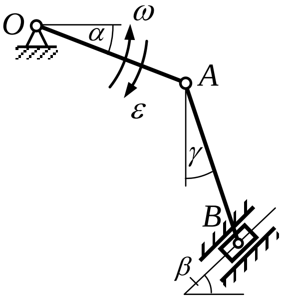
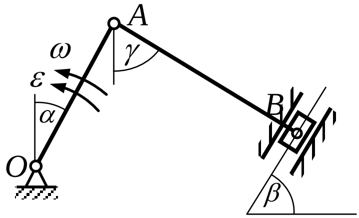

1
A
90°
ω
B
O
α
β
2
A
β
ω
B
O
α
3
A
ω
B
O
α
β
4
A
ω
β
O
α
B
5
A
ω
β
O
α
B
6
A
α
ω
B
O
β
7
A
ω
β
B
O
α
8
A
B
ω
β
O
α
x
AB∥x
9
β
B
α
A
ω
O
10
β
A
B
ω
AB||x
O
α
x

Рисунок 2.8

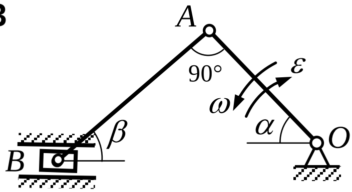
11



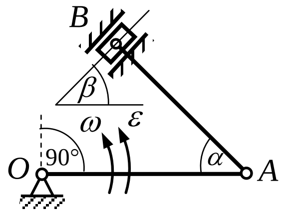
12



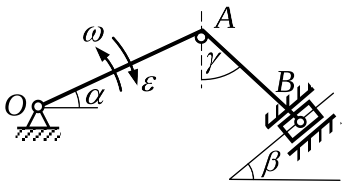
13



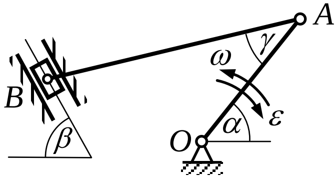
14



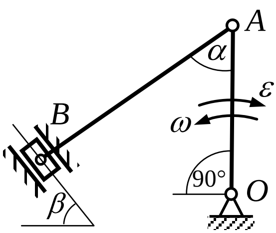
15



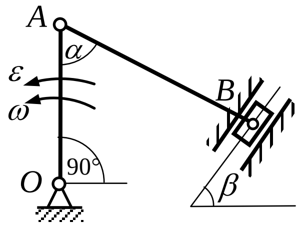
16



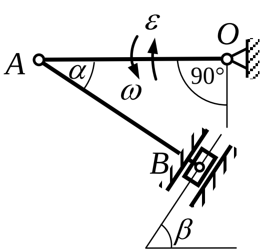
17



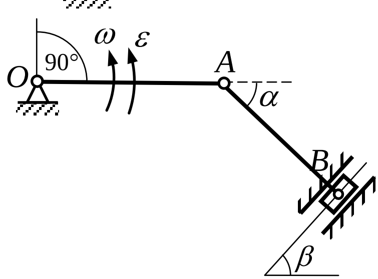
18



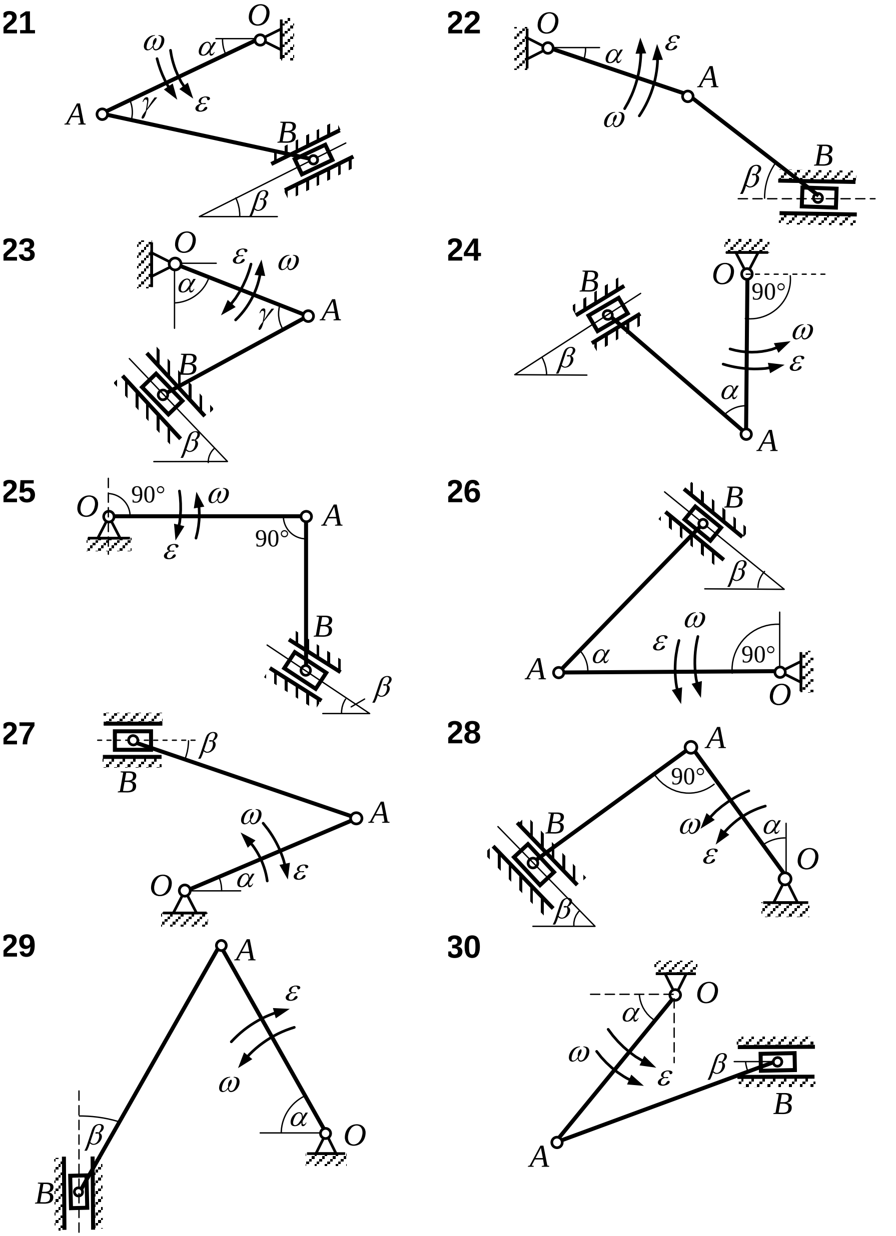
19



20



Продовження рисунка 2.8



Продовження рисунка 2.8

2.11 *Приклад* виконання завдання К.3

Для заданого на рис. 2.9 положення механізму визначити:

– швидкість точок A, B, C та кутову швидкість ланки AB за допомогою миттєвого центра швидкостей;

– швидкість точки B за допомогою теореми про проекції швидкостей двох точок;

– прискорення точок A, B, C та кутове прискорення ланки AB, якщо кривошип OA радіуса r=0.2 м, обертається з кутовим прискоренням ε_{OA}=3 *рад*/с^2, маючи кутову швидкість ω_{OA}=1 *рад*/с, AB=l=0.3 м, α=30°, β=45°, AC=CB.

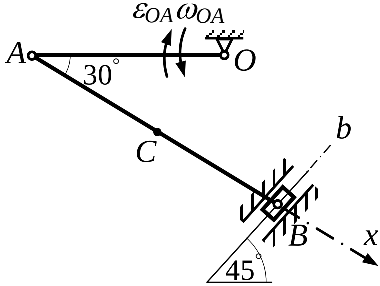


Рисунок 2.9

Розв'язання.

Визначення швидкостей точок A, B, C і кутової швидкості ланки AB механізму за допомогою миттєвого центра швидкостей.

Кривошип OA обертається в площині навколо точки O (рис. 2.9), швидкість точки A

$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 0.2 \text{ м/с.}$$

Вектор $\overline{V}_A$ перпендикулярний до кривошипа OA і спрямований в бік його обертання (рис. 2.10).

Швидкості точок B і C підрахуємо за використанням властивості миттєвого центра швидкостей.

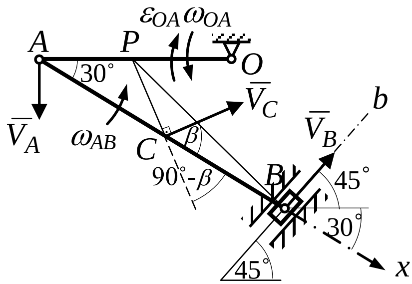


Рисунок 2.10

Миттєвий центр швидкостей ланки AB знаходиться в точці P, яка визначається перетином двох перпендикулярів до векторів швидкостей $\overline{V}_A$ і $\overline{V}_B$ (вектор $\overline{V}_B$ спрямований вздовж напрямної Bb, рис. 2.10).

Тому, з урахуванням властивості миттєвого центра швидкостей, маємо

$$\frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} \rightarrow V_B = \frac{V_A \cdot BP}{AP}; \quad \frac{V_A}{AP} = \frac{V_A \cdot V_C}{CP} \rightarrow v_C = \frac{V_A \cdot CP}{AP},$$

де, згідно з теоремою синусів, $\dfrac{AP}{sin15^\circ} = \dfrac{AB}{sin135^\circ} = \dfrac{BP}{sin30^\circ}$,

звідки $AP = \dfrac{AB \cdot sin15^\circ}{sin45^\circ} = 0.11$ м; $BP = \dfrac{AB \cdot sin30^\circ}{sin45^\circ} = 0.21$ м.

З теореми косинусів (рис. 2.10)

$$CP = \sqrt{AC^2 + AP^2 - 2AC \cdot AP\,cos\,30^\circ} = 0.0776 \cong 0.08 \text{ м.}$$

Тоді $V_B = \dfrac{0.2 \cdot 0.21}{0.11} = 0.4$ м/с; $V_C = \dfrac{0.2 \cdot 0.08}{0.11} = 0.14$ м/с.

Аналогічно можна обчислити кутову швидкість ланки AB, якщо використати властивість миттєвого центра швидкостей

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP} = \frac{0.2}{0.11} = 1.82 \text{ } \textit{рад}/\text{с}.$$

Вектори швидкостей точок A, B, C та направлення кутової швидкості показано на рис. 2.10.

Швидкості точок B і C ланки механізму можна знайти за формулами

$$V_B = \omega_{AB} \cdot BP = 1.82 \cdot 0.21 = 0.4 \text{ м/с};$$

$$V_C = \omega_{AB} \cdot CP = 1.82 \cdot 0.08 = 0.14 \text{ м/с}.$$

Визначення швидкостей точок B і C за допомогою теореми про проекції швидкостей на пряму AB

$$Пр\left(\overline{V}_C\right)_{AB} = Пр\left(\overline{V}_A\right)_{AB}.$$

Тому $V_B\,cos\,75^\circ = V_A\,cos\,60^\circ$ і $V_C\,cos\,\beta = V_A\,cos\,60^\circ$.

За теоремою синусів (рис. 2.10)

$$\frac{PC}{sin30^\circ} = \frac{AP}{sin\left(90^\circ - \beta\right)}; \quad sin(90 - \beta) = cos\,\beta.$$

Тому $cos\,\beta = \dfrac{AP \cdot sin30^\circ}{PC} = \dfrac{0.11 \cdot 0.5}{0.08} = 0.707$; $\beta = 45^\circ$.

Тоді $V_B = \dfrac{v_A \cos 60^\circ}{\cos 75^\circ} = 0.4$ м/с; $V_C = \dfrac{v_A \cos 60^\circ}{\cos \beta} = 0.14$ м/с.

Числові значення модулів цих швидкостей наведено в табл. 2.6.

Таблиця 2.6

Точки та ланки	Швидкість, м/с			Кутові		Прискорення, м/с^2
	задана	за допомогою миттєвих центрів швидкостей	за теоремою проекцій	швидкість, *рад*/с	прискорення, *рад*/с^2	
A	0.20					0.63
B		0.4	0.4			0.43
C		0.14	0.14			0.85
AB				1.82	7.96	–

Визначення прискорень точок A, B, C та кутового прискорення ланки AB.

Кривошип OA обертається рівнозмінно, а тому $\bar{a}_A = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau$, причому нормальне і тангенціальне прискорення точки A відповідно становлять

$$a_A^n = \omega^2 \cdot OA = 1^2 \cdot 0.2 = 0.2 \text{ м/с}^2; \quad a_A^\tau = \varepsilon \cdot OA = 3 \cdot 0.2 = 0.6 \text{ м/с}^2.$$

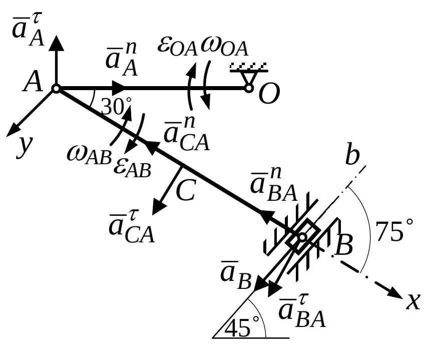


Рисунок 2.11

Отже

$$a_A = \sqrt{\left(a_A^n\right)^2 + \left(a_A^\tau\right)^2} = 0.63 \text{ м/с}^2.$$

Вектори $\bar{a}_A^n$ і $\bar{a}_A^\tau$ наведено на рис. 2.11.

Для визначення прискорення $\bar{a}_B$ і ε_{AB} використаємо теорему про прискорення точки B плоскої фігури $\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}$ або

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau. \quad (2.11)$$

Напрямок прискорення $\overline{a}_B$ відомий (вдовж Bb), а модуль $\left|\overline{a}_B\right|$ - невідомий.

Нормальне і тангенціальне прискорення точки B при обертальному русі ланки AB навколо полюса A визначаються

$$a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 1.82^2 \cdot 0.3 = 1 \text{ м/с}^2; \quad a_{BA}^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot AB .$$

Спроектувавши рівняння (2.11) на осі декартової системи координат A_x і A_y, отримаємо

$$-a_B \cos 75^\circ = a_A^n \cdot \sin 30^\circ - a_A^\tau \sin 60^\circ - a_{BA}^n$$

та
$$a_B \cos 15^\circ = -a_A^n \cdot \sin 30^\circ - a_A^\tau \sin 60^\circ + a_{BA}^\tau .$$

Звідки $$a_B = \frac{-a_A^n \cdot \sin 30^\circ + a_A^\tau \sin 60^\circ + a_{BA}^n}{\cos 75} = 4.3 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{BA}^\tau = a_B \cos 15^\circ + a_A^n \sin 30^\circ + a_A^\tau \sin 60^\circ = 4.78 \text{ м/с}^2.$$

Тоді $$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{BA}^\tau}{AB} = 7.96 \ \text{рад/с}^2.$$

Прискорення точки C

$$\overline{a}_C = \overline{a}_A + \overline{a}_{CA} = \overline{a}_A^n + \overline{a}_A^\tau + \overline{a}_{CA}^n + \overline{a}_{CA}^\tau ,$$

де $a_{CA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AC = 0.5$ м/с^2; $\quad a_{CA}^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot AC = 1.2$ м/с^2.

За модулем $\left|\overline{a}_C\right| = \sqrt{a_{Cx}^2 + a_{Cy}^2}$,

де $$a_{Cx} = a_A^n \cos 30^\circ - a_A^\tau \sin 60^\circ - a_{CA}^n = -0.62 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{Cy} = -a_A^n \sin 30^\circ - a_A^\tau \cos 30^\circ + a_{CA}^\tau = 0.6 \text{ м/с}^2;$$

$$a_C = \sqrt{a_{Cx}^2 + a_{Cy}^2} = 0.85 \text{ м/с}^2.$$

Вектори прискорень $\overline{a}_{CA}^n$, $\overline{a}_{CA}^\tau$ та $\overline{a}_A^n$, $\overline{a}_A^\tau$ наведено на рис. 2.11. Результати обчислення всіх величин наведено в табл. 2.6.

2.12 Завдання К.4. Кінематичний аналіз багатоланкового механізму

Кривошип O_1A обертається зі сталою кутовою швидкістю ω_{O_1A}. Для заданого положення механізму визначити:

– швидкості точок A, B, C, D, E і кутові швидкості всіх його ланок за допомогою плану швидкостей;

– швидкості зазначених точок механізму та кутові швидкості всіх його ланок за допомогою миттєвих центрів швидкостей;

– прискорення точок A, B, C, D, E і кутові прискорення всіх його ланок аналітично;

– прискорення зазначених точок та кутові прискорення всіх його ланок за допомогою плану прискорень;

Схеми механізмів показані на рисунку 2.12, а необхідні для розрахунків величини наведені в таблиці 2.7.

Таблиця 2.7

Варіант	ω, *рад*/с	l_{OA}	l_{AB}	l_{BC}	l_{CD}	R	l_{BO_1}	α	β	γ	Інші розміри
		м						*град* (°)			м
1	5	0.4	1.4	0.7	0.7	–	–	30	90	45	–
2	2	0.9	0.9	1.8	1.35	–	1.8	30	90	60	–
3	4	0.4	0.6	0.8	0.8	–	1.0	30	45	75	–
4	2	0.45	0.9	0.9	0.9	–	–	30	45	90	l_{O_1D}=1.2
5	6	0.9	0.9	0.4	0.9	–	0.2	30	45	30	–
6	4	0.5	1.5	0.5	1.5	–	1.0	30	45	–	–
7	2	0.2	0.8	1.00	–	–	–	30	90	20	l_{O_1C}=0.8
8	3	0.2	1.3	1.6	0.9	–	–	30	135	240	–
9	4	0.2	1.0	1.0	–	–	–	150	75	200	l_{O_1C}=0.6
10	3	0.2	1.0	0.5	0.8	–	–	120	60	120	l_{O_1B}=1.0

Продовження таблиці 2.7

Варіант	ω, рад/с	l_{OA}	l_{AB}	l_{BC}	l_{CD}	R	l_{BO_1}	α	β	γ	Інші розміри
		м						град (°)			м
11	2	0.2	1.0	–	1.0	0.5	–	60	30	45	–
12	4	0.2	1.3	–	–	0.3	–	120	60	150	l_{AC}=0.8
13	5	0.2	1.0	–	–	0.3	–	45	150	30	l_{AC}=1.2
14	2	0.2	1.0	1.4	–	0.4	–	60	30	240	–
15	3	0.2	1.2	1.2	0.7	0.5	–	60	150	90	l_{O_1D}=0.6
16	2	0.2	1.2	0.6	–	0.4	–	120	110	30	l_{CE}=1.3
17	4	0.2	1.0	–	1.0	0.5	–	45	30	60	–
18	5	0.2	1.0	1.0	–	0.5	–	150	75	30	–
19	2	0.2	1.0	–	0.8	0.5	–	90	45	120	l_{BE}=1.4
20	6	0.2	1.0	1.0	–	0.5	–	30	120	–	–
21	3	0.2	1.0	0.5	–	–	–	45	130	30	l_{CE}=1.0 l_{BD}=0.9
22	4	0.2	1.0	–	0.8	–	–	120	30	300	l_{BD}=0.9
23	5	0.2	1.0	0.5	0.9	–	–	45	30	60	–
24	3	0.2	1.2	0.6	1.0	–	–	60	30	110	–
25	6	0.3	0.6	0.6	0.9	–	–	30	15	–	–
26	4	0.35	0.7	0.7	0.7	–	0.7	30	45	60	–
27	5	0.8	1.6	–	2.4	–	3.2	60	30	–	–
28	2	0.7	1.4	0.7	12.5	–	2.8	30	–	–	–
29	3	0.6	1.2	–	1.8	–	1.2	30	60	–	–
30	2	0.2	1.6	–	1.0	–	–	30	45	–	l_{BD}=1.0

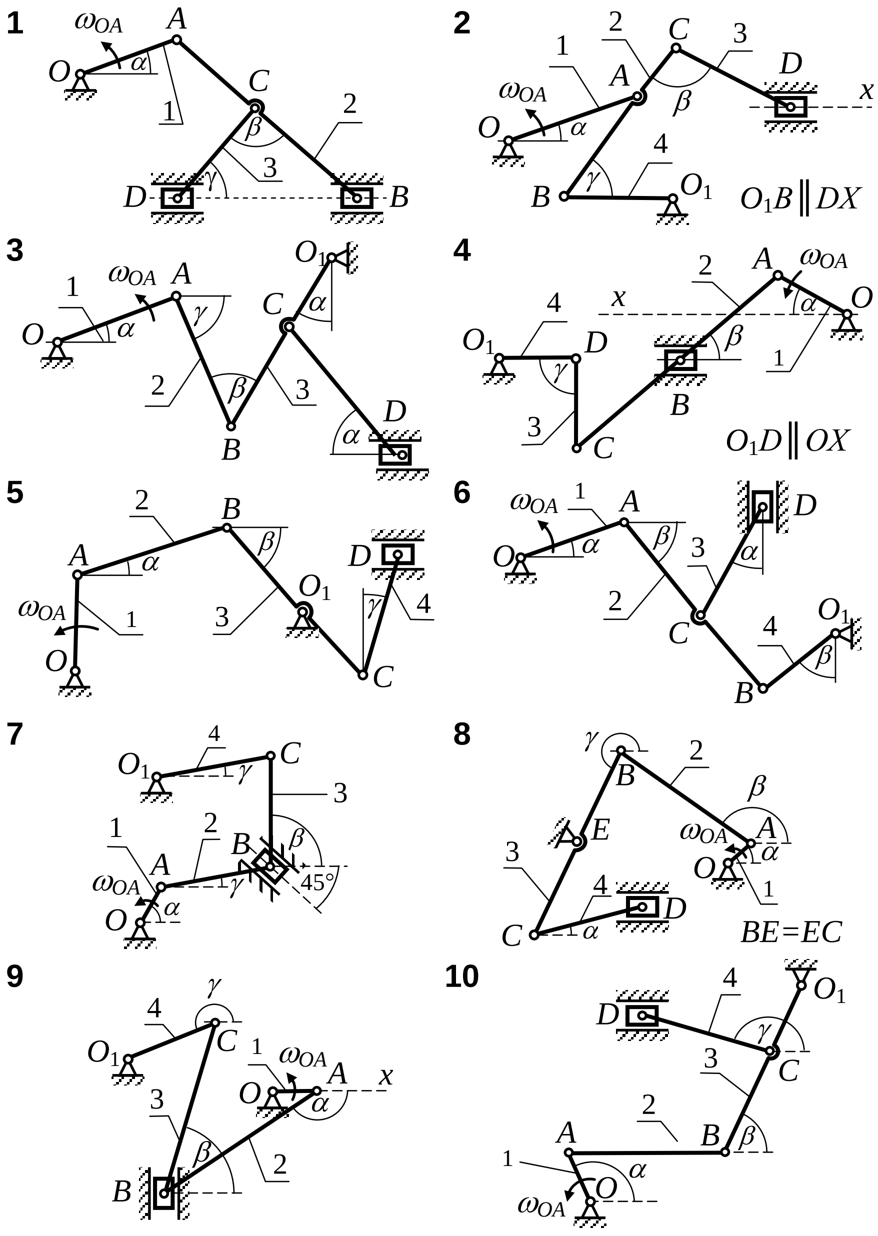
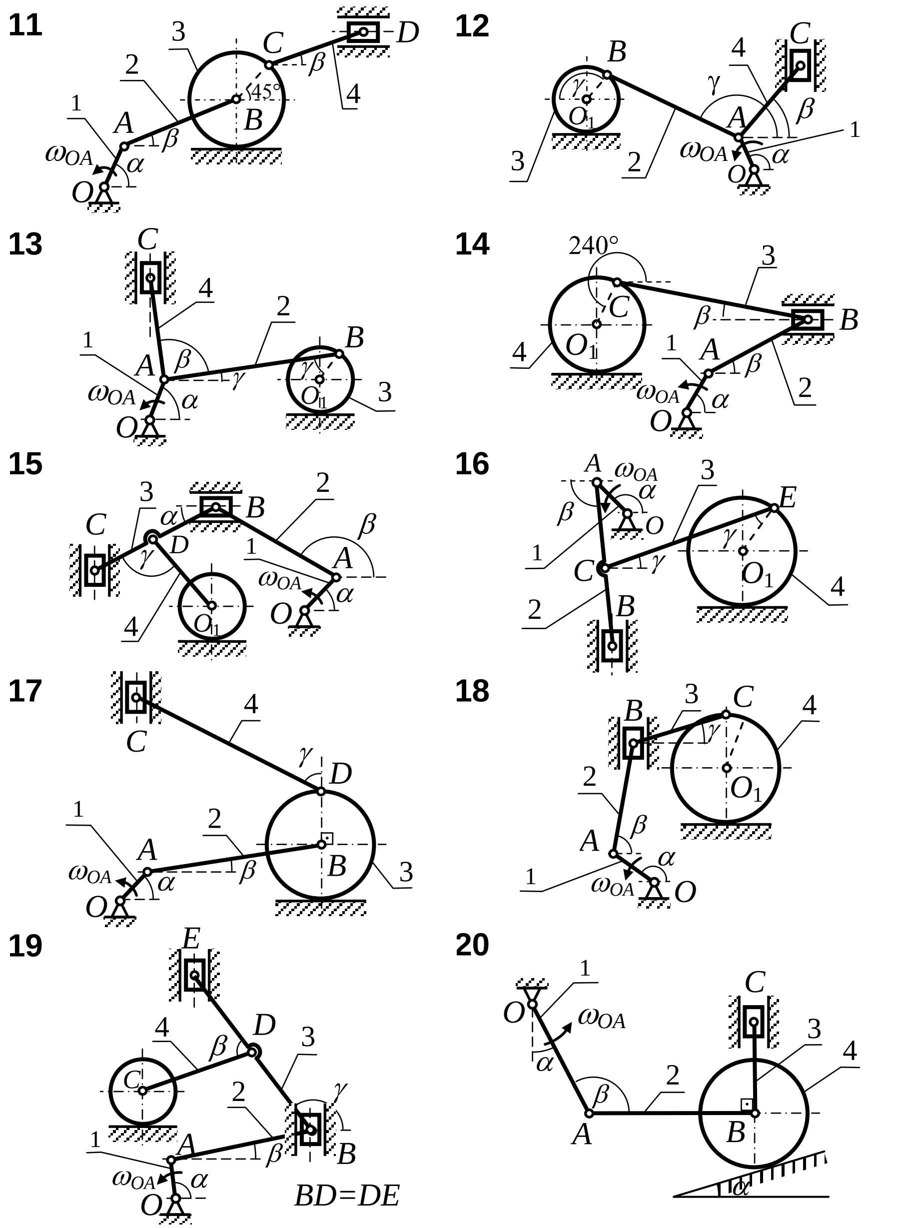
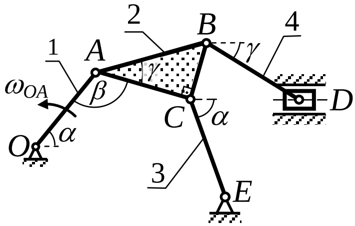


Рисунок 2.12

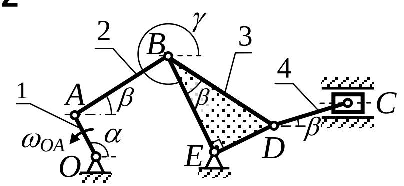


Продовження рисунка 2.12

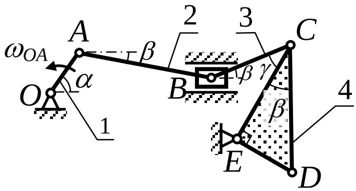
21



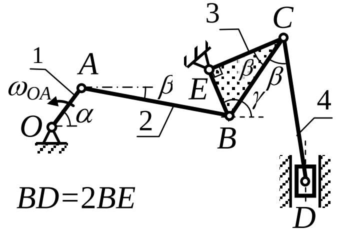
22



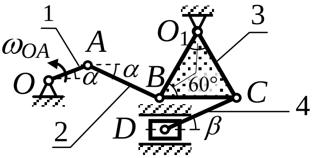
23



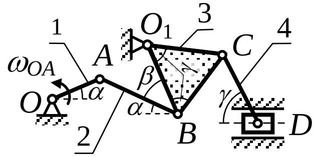
24



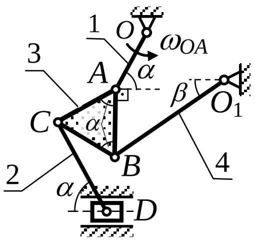
25



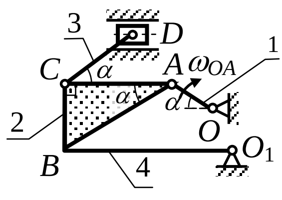
26



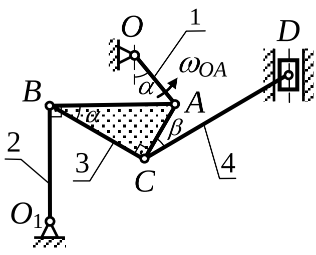
27



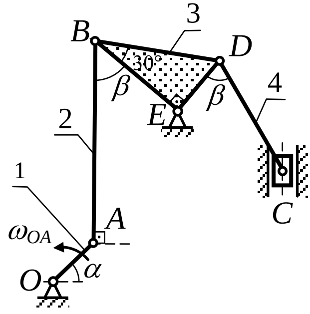
28



29



30



Продовження рисунка 2.12

2.13 Приклад виконання завдання К.4

Для заданого на рис. 2.13 положення механізму визначити графічно і аналітично швидкості та прискорення точок A, B, C, D, E, а також кутові швидкості та прискорення його відповідних ланок.

Числові значення необхідних для розрахунку величин наведено в табл. 2.8, де всі лінійні розміри механізму задано в метрах.

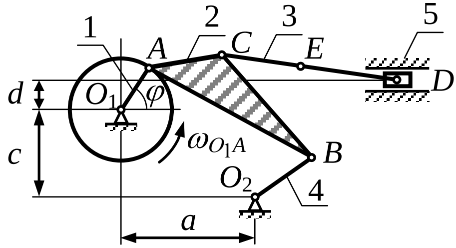


Рисунок 2.13 – Схема механізму

Таблиця 2.8

φ, °	ω_{O_1A}, рад/с	l_a	l_d	l_c	l_{O_1A}	l_{AB}	l_{AC}	l_{CD}	l_{CB}	l_{CE}	l_{O_2B}
60	3	0.40	0.15	0.25	0.20	0.60	0.20	0.70	0.50	0.30	0.25

Розв'язання.

Побудова плану положення механізму (рис. 2.14).

Довжину ланки O_1A приймаємо рівною 20 мм і визначаємо масштаб креслення

$$\mu_l = \frac{l_{O_1A}}{O_1A} = \frac{0.20}{20} = 0.01 \text{ м/мм.}$$

Визначимо довжини інших ланок механізму

$$AB = \frac{l_{AB}}{\mu_l} = \frac{0.6}{0.01} = 60 \text{ мм}; \qquad AC = \frac{l_{AC}}{\mu_l} = \frac{0.2}{0.01} = 20 \text{ мм};$$

$$CB = \frac{l_{CB}}{\mu_l} = \frac{0.5}{0.01} = 50 \text{ мм}; \qquad CD = \frac{l_{CD}}{\mu_l} = \frac{0.7}{0.01} = 70 \text{ мм};$$

$$CE = \frac{l_{CE}}{\mu_l} = \frac{0.3}{0.01} = 30 \text{ мм}; \qquad a = \frac{l_a}{\mu_l} = \frac{0.4}{0.01} = 40 \text{ мм};$$

$$c = \frac{l_c}{\mu_l} = \frac{0.25}{0.01} = 25 \text{ мм}; \quad d = \frac{l_d}{\mu_l} = \frac{0.15}{0.01} = 15 \text{ мм}.$$

За отриманими розмірами будуємо *план механізму* (рис. 2.14), починаючи із точки O_1.

План швидкостей механізму (рис. 2.15).

Швидкість точки A кривошипа O_1A

$$V_A = \omega_{O_1A} \cdot l_{O_1A} = 3 \cdot 0.2 = 0.6 \text{ м/с}.$$

Вектор $\overline{V}_A$ перпендикулярний до кривошипа O_1A і спрямований в бік його обертання (рис. 2.14).

Довжину вектора $\overline{V}_A$ назначаємо рівною Oa=60 мм, тому масштабом плана швидкостей буде

$$\mu_V = \frac{V_A}{Oa} = \frac{0.6}{60} = 0.01 \frac{\text{м}}{\text{с} \cdot \text{мм}}.$$

План швидкостей продовжуємо будувати з ланок AB і O_2B через те, що вони безпосередньо приєднані до ведучої ланки O_1A. План будуємо за векторними рівняннями

$$\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{AB} \qquad \left(\overline{V}_{AB} \perp AB;\ V_{AB} = \omega_{AB} \cdot l_{AB}\right); \qquad (2.12)$$

$$\overline{V}_B = \overline{V}_{O_2} + \overline{V}_{O_2B} \qquad \left(\overline{V}_{O_2B} \perp O_2B;\ V_{O_2B} = \omega_{O_2B} \cdot l_{O_2B}\right), \qquad (2.13)$$

де $\overline{V}_B$ – швидкість точки B спрямована перпендикулярно до O_2B;

$\overline{V}_{AB}$ – швидкість точки B в обертанні ланки AB відносно точки A, за модулем невідома і спрямована перпендикулярно AB;

$\overline{V}_{O_2B}$ – швидкість точки B в обертальному русі ланки O_2B відносно точки O_2 за модулем не відома і спрямована перпендикулярно O_2B;

$\overline{V}_{O_2}$ – швидкість точки O_2 дорівнює нулю.

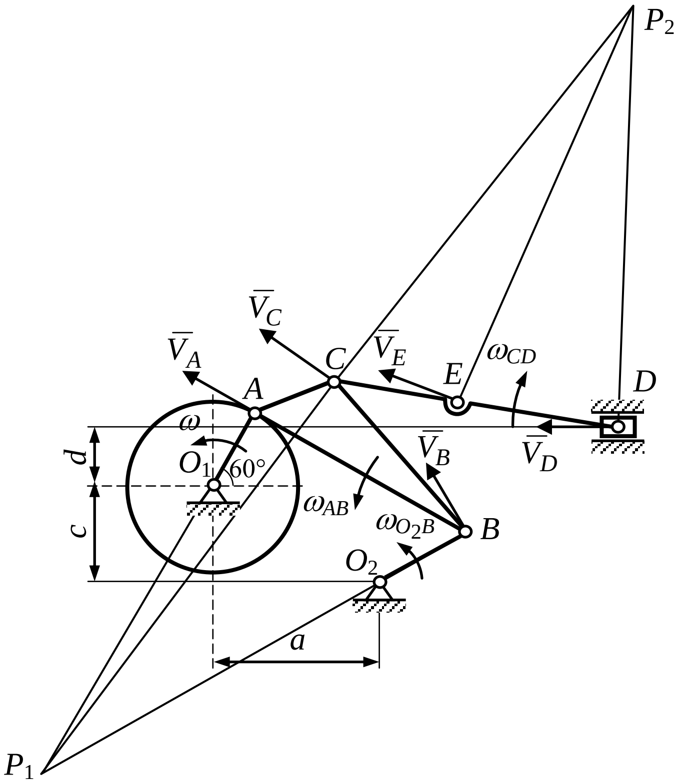


Рисунок 2.14 – План механізму з миттєвими центрами швидкостей, $\mu_l = 0.01\ \frac{\text{м}}{\text{мм}}$

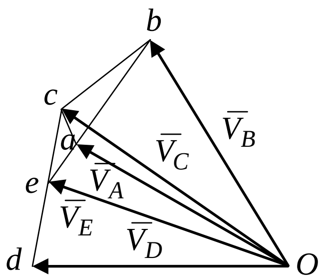


Рисунок 2.15 – План швидкостей, $\mu_V = 0.01\ \frac{\text{м}}{\text{с} \cdot \text{мм}}$

Будуємо рішення векторного рівняння (2.12). Від полюса O плана швидкостей (рис. 2.15) відкладаємо відрізок Oa, який дорівнює в вибраному масштабі швидкості $\overline{V}_A$, і через кінець його (точка a) проводимо напрям вектора швидкості $\overline{V}_{AB}$.

Переходимо до побудови рішення векторного рівняння (2.13). Швидкість $\overline{V}_{O_2} = 0$, тому точку O_2 поєднуємо з полюсом O і через точку O плана проводимо напрям швидкості $\overline{V}_{O_2B}$ до перетину з напрямом швидкості $\overline{V}_{AB}$ в точці b. Відрізок Ob відображає швидкість точки B.

Модуль швидкості точки B

$$V_B = Ob \cdot \mu_V = 67 \cdot 0.01 = 0.67 \text{ м/с.}$$

Обертальна швидкість точки B навколо точки A

$$V_{AB} = ab \cdot \mu_V = 32 \cdot 0.01 = 0.32 \text{ м/с,}$$

звідки кутова швидкість ланки AB (і трикутника ABC)

$$\omega_{AB} = \omega_{ABC} = \frac{V_{AB}}{l_{AB}} = \frac{ab \cdot \mu_V}{l_{AB}} = \frac{0.32}{0.6} = 0.533 \textit{ рад}/\text{с.}$$

Аналогічно діємо при визначенні швидкості точки C, будуючи рішення векторних рівнянь

$$\overline{V}_c = \overline{V}_A + \overline{V}_{AC} \ \left(\overline{V}_{AC} \perp AC\right); \qquad \overline{V}_c = \overline{V}_B + \overline{V}_{BC} \ \left(\overline{V}_{BC} \perp BC\right).$$

Виходячи з плану швидкостей (див. рис. 2.15), маємо

$$V_c = Oc \cdot \mu_V = 66 \cdot 0.01 = 0.66 \text{ м/с.}$$

Для визначення швидкості точки D будуємо рішення векторного рівняння

$$\overline{V}_D = \overline{V}_C + \overline{V}_{CD} \qquad \left(\overline{V}_{CD} \perp CD,\ V_{CD} = \omega_{CD} \cdot l_{CD}\right).$$

Модуль швидкості точки D

$$V_D = Od \cdot \mu_V = 62 \cdot 0.01 = 0.62 \text{ м/с},$$

а кутова швидкість ланки CD

$$\omega_{CD} = \frac{V_{CD}}{l_{CD}} = \frac{cd \cdot \mu_V}{l_{CD}} = \frac{0.39}{0.7} = 0.577 \text{ рад/с}.$$

Визначимо швидкість точки E, яка належить ланці CD. На плані швидкостей точка e знаходиться на відрізку cd. Причому відрізки ce і de знаходяться в такій самій пропорції, які на схемі механізму, тобто у співвідношенні $\frac{30}{40} = \frac{3}{4}$. Швидкість цієї точки на плані зображається відрізком Oe, а модуль швидкості

$$V_E = Oe \cdot \mu_V = 60 \cdot 0.01 = 0.6 \text{ м/с}.$$

Визначення швидкостей точок A, B, C, D, E та кутових швидкостей ланок механізму за допомогою миттєвих центрів швидкостей.

Ланки механізму O_1A, O_2B обертаються навколо нерухомих центрів O_1, O_2. Миттєвий центр ланки AB (ΔABC) знаходиться в точці P_1, яка визначається перетином двох ліній, проведених перпендикулярно до векторів швидкостей $\overline{V}_A$ і $\overline{V}_B$ (рис. 2.14).

Вектори швидкостей $\overline{V}_A$ і $\overline{V}_B$ перпендикулярні ланкам O_1B і O_2B. Вектор швидкості $\overline{V}_C$ перпендикулярний лінії P_1C, а вектор $\overline{v}_D$ спрямовуємо по траєкторії руху т. D.

Миттєвий центр швидкостей ланки CD знаходиться в точці P_2 на перетині перпендикулярів, проведених в точках C і D до векторів швидкостей $\overline{V}_C$ і $\overline{V}_D$ (рис. 2.14).

Враховуючи масштаб μ_l, з рис. 2.14 визначимо відстані від точок до миттєвих центрів швидкостей. Для чого вимірюємо ці відстані в мм і помножуємо на масштабний коефіцієнт μ_l

$$AP_1 = 108 \cdot 0.01 = 1.08 \text{ м}; \qquad BP_1 = 122 \cdot 0.01 = 1.22 \text{ м};$$

$$CP_1 = 114 \cdot 0.01 = 1.14 \text{ м}; \qquad CP_2 = 120 \cdot 0.01 = 1.20 \text{ м};$$

$$EP_2 = 110 \cdot 0.01 = 1.10 \text{ м}; \qquad DP_2 = 118 \cdot 0.01 = 1.18 \text{ м};$$

Кутова швидкість ланки AB (ΔABC)

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP_1} = \frac{0.6}{1.08} = 0.555 \text{ с}^{-1}.$$

Швидкості точок C і B

$$V_C = \omega_{AB} \cdot CP_1 = 0.555 \cdot 1.14 = 0.64 \text{ м/с}.$$

$$V_B = \omega_{AB} \cdot BP_1 = 0.555 \cdot 1.22 = 0.68 \text{ м/с}.$$

Кутова швидкість ланок CD і O_2B та *швидкості точок* E і D

$$\omega_{CD} = \frac{V_C}{CP_2} = \frac{0.64}{1.20} = 0.533 \text{ рад/с}; \quad \omega_{O_2B} = \frac{V_B}{l_{O_2B}} = \frac{0.68}{0.25} = 2.72 \text{ рад/с};$$

$$V_E = \omega_{CD} \cdot EP_2 = 0.533 \cdot 1.10 = 0.59 \text{ м/с};$$

$$V_D = \omega_{CD} \cdot DP_2 = 0.533 \cdot 1.18 = 0.63 \text{ м/с}.$$

Вектори швидкостей усіх точок механізму і кутові швидкості ланок показані на рис. 2.14.

Числові значення швидкостей точок і кутових швидкостей ланок зведено в табл. 2.9.

Визначення прискорень точок A, B, C, D, E і *кутових пришвидшень ланок механізму за допомогою плану прискорень.*

Для визначення прискорень $\bar{a}_A$, $\bar{a}_B$, ε_{AB} (рис. 2.16) використаємо теорему про прискорення точки B плоскої фігури

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_{AB}^n + \bar{a}_{AB}^\tau.$$

Таблиця 2.9 – Зведення отриманих результатів

Точки та ланки механізму	Швидкість, м/с		Кутова швидкість, *рад*/с		Прискорення, м/с^2		Кутове прискорення, *рад*/с^2	
	за допомогою МЦШ	за планом швидкостей	за допомогою МЦШ	за планом швидкостей	аналітично	за планом прискорень	аналітично	за планом прискорень
A	0.60	0.60	–	–	1.8	1.80	–	–
B	0.68	0.67	–	–	1.94	1.94	–	–
C	0.64	0.66	–	–	1.87	1.88	–	–
D	0.63	0.62	–	–	0.88	0.92	–	–
E	0.59	0.60	–	–	1.33	1.20	–	–
$ABC(AB)$	–	–	0.555	0.533	–	–	0.21	0.2
CD	–	–	0.554	0.577	–	–	2.1	2.220
O_2B	–	–	2.720	2.680	–	–	2.9	2.800

Через те, що напрямок і модуль прискорення $\bar{a}_B$ невідомі, а з іншого боку

$$\bar{a}_B = \bar{a}_B^n + \bar{a}_B^\tau,$$

то
$$\bar{a}_B^n + \bar{a}_B^\tau = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_{AB}^n + \bar{a}_{AB}^\tau, \qquad (2.14)$$

де $a_B^n = V_B^2 \big/ O_2B = 0.67^2 \big/ 0.25 = 1.80$ м/с^2; $a_B^\tau = \varepsilon_{O_2B} \cdot O_2B$ м/с^2 - відповідно нормальне і тангенціальне прискорення точки B;

$a_A^n = \omega_{O_1A}^2 \cdot O_1A = 3^2 \cdot 0.20 = 1.80$ м/с^2; $a_A^\tau = \varepsilon_{O_1A} \cdot O_1A = 0$ м/с^2 $\left(\varepsilon_{O_1A} = \dot{\omega}_{O_1A} = 0\right)$ - відповідно нормальне і тангенціальне прискорення точки A;

$a_{AB}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 0.533^2 \cdot 0.60 = 0.17$ м/с^2 - нормальне прискорення точки B при обертальному русі трикутника ABC навколо полюса A і спрямоване вздовж BA;

$a^{\tau}_{AB} = \varepsilon_{AB} \cdot AB$ – тангенціальне прискорення точки B, спрямоване перпендикулярно до AB (ε_{AB} - невідомо).

Приступаємо до побудови плана прискорень (рис. 2.17). Будуємо рішення векторного рівняння (2.14). Від полюса π плана прискорень відкладаємо відрізок πn_1=□ πa, який відображає прискорення $\bar{a}^{n}_{A}$. Довжина вектора πa=90 мм, тому масштабний коефіцієнт плана прискорень буде

$$\mu_a = \frac{a^n_A}{\pi a} = \frac{1.8}{90} = 0.02 \ \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}}.$$

Далі від точки a плана відкладаємо відрізок an_2, який відображає $\bar{a}^{n}_{AB}$ і дорівнює $an_2 = \dfrac{a^n_{AB}}{\mu_a} = \dfrac{0.17}{0.02} = 8.5$ мм.

Тоді через точку n_2 проводимо напрям тангенціального прискорення $\bar{a}^{\tau}_{AB}$ - лінію, перпендикулярну AB.

Переходимо до побудови лівої частини рівняння (2.14).

Від полюса π відкладаємо відрізок πn_3, який зображає прискорення $\bar{a}^{n}_{B}$, довжина якого дорівнює

$$\pi n_3 = \frac{a^n_B}{\mu_a} = \frac{1.8}{0.02} = 90 \ \text{мм}.$$

Далі через точку n_3 плана проводимо напрям прискорення $\bar{a}^{\tau}_{B}$ до перетину з лінією дії прискорення $\bar{a}^{\tau}_{AB}$.

Точка перетину b є кінцем вектора $\bar{a}_B$ прискорення точки B, яке треба знайти.

З плану прискорень маємо

$$a^{\tau}_{B} = n_3 b \cdot \mu_a = 35 \cdot 0.02 = 0.7 \ \text{м/с}^2;$$

$$a^{\tau}_{AB} = n_2 b \cdot \mu_a = 6 \cdot 0.02 = 0.12 \ \text{м/с}^2;$$

$$a_B = \pi b \cdot \mu_a = 97 \cdot 0.02 = 1.94 \ \text{м/с}^2.$$

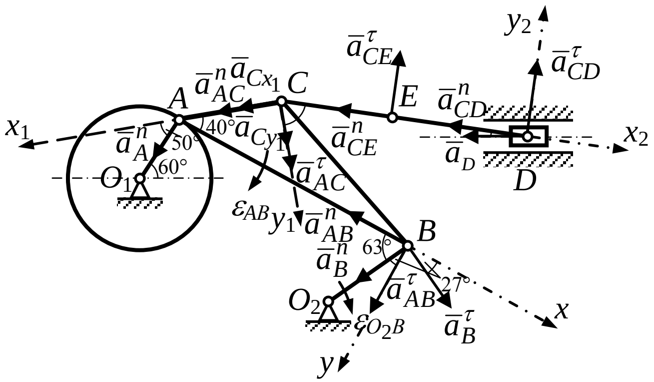


Рисунок 2.16 – Напрям векторів прискорень

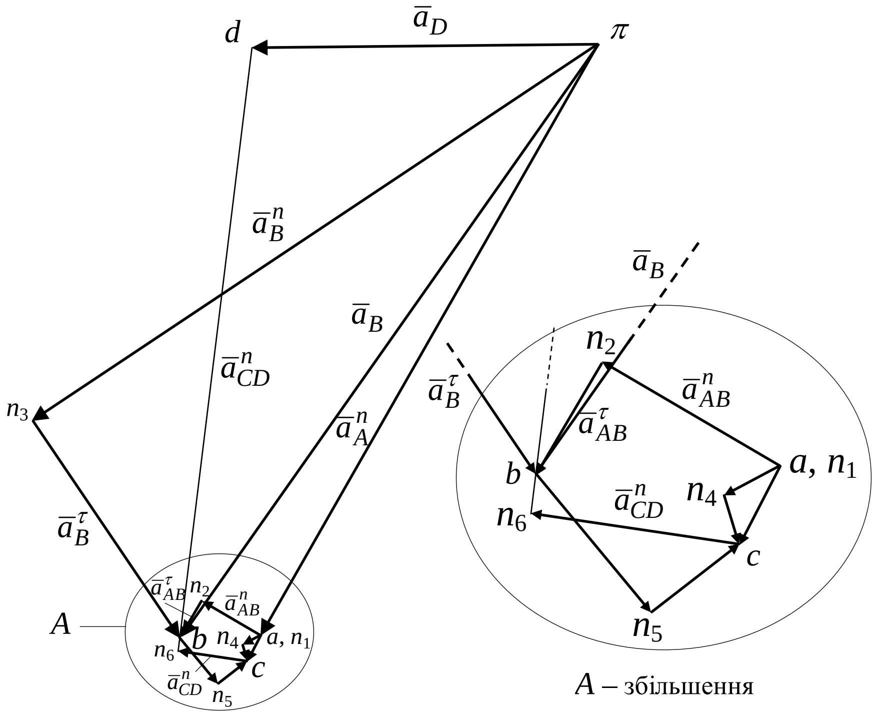


Рисунок 2.17 – План прискорень, $\mu_a = 0.01 \ \dfrac{м/с^2}{мм}$

Звідси

$$\varepsilon_{O_2B}=\frac{a_B^{\tau}}{O_2B}=\frac{0.7}{0.25}=2.8\ \textit{рад/}\text{с}^2;\quad \varepsilon_{AB}=\frac{a_{AB}^{\tau}}{AB}=\frac{0.12}{0.6}=0.2\ \textit{рад/}\text{с}^2.$$

Аналогічно визначаємо прискорення точки C

$$\overline{a}_C=\overline{a}_A^n+\overline{a}_{AC}^n+\overline{a}_{AC}^{\tau}=\overline{a}_B+\overline{a}_{BC}^n+\overline{a}_{BC}^{\tau}, \qquad (2.15)$$

де $$a_{AC}^n=\omega_{AB}^2\cdot AC=0.533^2\cdot 0.2=0.057\ \text{м/с}^2;$$

$$a_{BC}^n=\omega_{AB}^2\cdot BC=0.533^2\cdot 0.5=0.142\ \text{м/с}^2.$$

Від точки a плана відкладаємо відрізок an_4, який зображає прискорення $\overline{a}_{AC}^n$, довжина якого дорівнює

$$an_4=\frac{a_{AC}^n}{\mu_a}=\frac{0.057}{0.02}=2.85\ \text{мм},$$

і через його кінець n_4 проводимо пряму, перпендикулярну до AC.

Аналогічно від кінця вектора $\overline{a}_B$ (точка b плана) проводимо відрізок bn_5, відображаючий прискорення $\overline{a}_{BC}^n$, довжина якого

$$bn_5=\frac{a_{BC}^n}{\mu_a}=\frac{0.142}{0.02}=7.1\ \text{мм},$$

а через його кінець n_5 проводимо пряму, перпендикулярну BC.

Точка перетину прямих, проведених перпендикулярно до прямих AC та BC, визначає кінець вектора $\overline{a}_C$.

За модулем $a_C=\pi c\cdot\mu_a=94\cdot 0.02=1.88$ м/с^2.

Далі будуємо план прискорень для точки *D*, враховуючи, що

$$\overline{a}_D=\overline{a}_C+\overline{a}_{CD}^n+a_{CD}^{\tau}, \qquad (2.16)$$

де $$a_{CD}^{n} = \omega_{CD}^{2} \cdot CD = 0.577^{2} \cdot 0.7 = 0.233 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{CD}^{\tau} = \varepsilon_{CD} \cdot CD .$$

Будуємо розв'язок векторного рівняння (2.16). Від кінця вектора $\bar{a}_c$ (точка *c* плана) проводимо відрізок cn_6, зображаючий прискорення $\bar{a}_{CD}^{n}$, довжина якого

$$cn_6 = \frac{a_{CD}^{n}}{\mu_a} = \frac{0.233}{0.02} = 11.6 \text{ мм},$$

а через його кінець n_6 проводимо пряму, перпендикулярну до CD. Одночасно через точку π прповодимо пряму, паралельну до напряму прискорення $\bar{a}_D$

Перетин двох прямих, а саме, прямої, перпендикулярної до CD, і прямої, паралельної вектору $\bar{a}_D$, визначає на плані прискорення точки D, тобто

$$a_D = \pi d \cdot \mu_a = 46 \cdot 0.02 = 0.92 \text{ м/с}^2,$$

а також $$a_{CD}^{\tau} = n_6 d \cdot \mu_a = 80 \cdot 0.02 = 1.60 \text{ м/с}^2;$$

$$\varepsilon_{CD} = \frac{a_{CD}^{\tau}}{CD} = \frac{1.60}{0.70} = 2.28 \; рад/\text{с}^2.$$

Визначення прискорень точок A, B, C, D, E аналітично.

Прискорення точки B визначається за допомогою формули (2.14).

Спроектувавши рівняння (2.14) на осі координат x і y (див. рис. 2.14), отримаємо:

на x $$-a_B^n \cdot cos\,63^\circ + a_B^\tau cos\,27^\circ = -a_{AB}^n;$$

$$a_B^\tau = \frac{a_B^n cos\,63^\circ - a_{AB}^n}{cos\,27^\circ} = \frac{1.8 \cdot 0.454 - 0.17}{0.891} = 0.726 \text{ м/с}^2;$$

$$\varepsilon_{O_2B} = \frac{a_B^\tau}{O_2B} = \frac{0.726}{0.25} = 2.9 \; рад/\text{с}^2;$$

на y $$a_B^n \, sin 63^\circ + a_B^\tau \, sin 27^\circ = a_A^n + a_{AB}^\tau;$$

$$a_{AB}^\tau = a_B^n \, sin 63^\circ + a_B^a \, sin 27^\circ - a_A^n =$$

$$= 1.8 \cdot 0.891 + 0.726 \cdot 0.454 - 1.8 = 0.13 \text{ м/с}^2;$$

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{AB}^\tau}{AB} = \frac{0.13}{0.6} = 0.21 \text{ } \textit{рад}\text{/с}^2.$$

Прискорення точки B

$$a_B = \sqrt{\left(a_B^n\right)^2 + \left(a_B^\tau\right)^2} = \sqrt{1.8^2 + 0.726^2} = \sqrt{3.767} = 1.94 \text{ м/с}^2.$$

Прискорення точки C (за полюс прийнята точка A)

$$\bar{a}_C = \bar{a}_A^n + \bar{a}_{AC}^n + \bar{a}_{AC}^\tau, \tag{2.17}$$

де $$a_{AC}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AC = 0.533^2 \cdot 0.2 = 0.057 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{AC}^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot AC = 0.21 \cdot 0.2 = 0.042 \text{ м/с}^2.$$

Спроектувавши рівняння (2.17) на осі x_1 і y_1, отримаємо:

на x_1 $$\grave{a}_{C_{x_1}} = a_A^n \, cos 50^\circ + a_{AC}^n = 1.8 \cdot 0.643 + 0.057 =$$

$$= 1.157 + 0.057 = 1.214 \text{ ì/ñ}^2;$$

на y_1 $$\grave{a}_{\tilde{N}_{y_1}} = a_A^n \, sin 50^\circ + a_{AC}^\tau = 1.8 \cdot 0.766 + 0.042 =$$

$$= 1.379 + 0.042 = 1.42 \text{ ì/ñ}^2;$$

$$a_C = \sqrt{a_{C_{x_1}}^2 + a_{C_{y_1}}^2} = \sqrt{1.214^2 + 1.42^2} = \sqrt{3.49} = 1.87 \text{ м/с}^2.$$

Прискорення точки D (полюс - точка C)

$$\bar{a}_D = \bar{a}_{C_{x_1}} + \bar{a}_{C_{y_1}} + \bar{a}_{CD}^n + \bar{a}_{CD}^\tau, \tag{2.18}$$

де $$a_{CD}^{n}=\omega_{CD}^{2}\cdot CD=0.577^{2}\cdot 0.7=0.233\ \text{м/с}^2;$$

$$a_{CD}^{\tau}=\varepsilon_{CD}\cdot CD.$$

Для визначення $\overline{a}_D$ і ε_{CD} спроектуємо (2.18) на осі x_2 і y_2 (рис. 2.16):

на вісь x_2 $$-a_D\cos 20^\circ=-a_{C_x}\cos 22^\circ+a_{C_y}\cos 68^\circ-a_{CD}^{n};$$

$$a_D=\frac{a_{C_{x_1}}\cdot\cos 22^\circ-a_{C_{y_1}}\cos 68^\circ+a_{CD}^{n}}{\cos 20^\circ}=$$

$$=\frac{1.214\cdot 0.927-1.42\cdot 0.374+0.233}{0.9396}=0.882\ \text{м/с}^2;$$

на вісь y_2 $$-a_D\sin 20^\circ=-a_{C_{x_1}}\sin 22^\circ-a_{C_{y_1}}\sin 68^\circ+a_{CD}^{\tau};$$

$$a_{CD}^{\tau}=-a_D\sin 20^\circ+a_{\tilde{N}_{x_1}}\sin 22^\circ+a_{\tilde{N}_{y_1}}\sin 68^\circ=$$

$$=-0.88\cdot 0.342+1.214\cdot 0.375+1.42\cdot 0.927=1.47\ \text{м/с}^2;$$

$$\varepsilon_{CB}=\frac{a_{CD}^{\tau}}{CD}=\frac{1.47}{0.7}=2.1\ \text{рад/с}^2.$$

Прискорення точки E (полюс - точка C)

$$\vec{a}_E=\overline{a}_{Cx_1}+\overline{a}_{C_{y_1}}+\overline{a}_{CE}^{n}+\overline{a}_{CE}^{\tau},\qquad(2.19)$$

де $$a_{CE}^{n}=\omega_{CD}^{2}\cdot CE=0.577^{2}\cdot 0.3=0.0998=0.1\ \text{м/с}^2;$$

$$a_{CE}^{\tau}=\varepsilon_{CD}\cdot CE=2.1\cdot 0.3=0.63\ \text{м/с}^2.$$

Для визначення $\overline{a}_E$ спроектуємо (2.19) на осі x_2 і y_2

$$a_{E_{x_2}}=-a_{C_{x_1}}\cos 22^\circ+a_{C_{y_1}}\cos 68^\circ-a_{CE}^{n}=$$

$$=-1.214\cdot 0.927+1.42\cdot 0.374-0.1=-0.694\ \text{м/с}^2;$$

$$a_{E_{y_2}} = -a_{C_{x_1}} \sin 22^\circ - a_{C_{y_1}} \sin 68^\circ + a_{CE}^{\tau} =$$

$$= -1.214 \cdot 0.375 - 1.42 \cdot 0.927 + 0.63 = -1.14 \text{ м/с}^2;$$

$$a_E = \sqrt{\left(a_{E_{x_2}}\right)^2 + \left(a_{E_{y_2}}\right)^2} = \sqrt{(0.694)^2 + (1.14)^2} = 1.33 \text{ м/с}^2.$$

Отримані результати обчислень зводимо у табл. 2.9.

2.14 Завдання К.5. Визначення абсолютних швидкості та прискорення точки

Точка M рухається відносно тіла D. За даними рівняннями відносного руху цієї точки $S_r(t)$ та переносного руху тіла $\varphi_e(t)$ для моментів часу t_i с (i=1, 2, 3) визначити абсолютні швидкість і прискорення зазначеної точки.

Схеми механізмів показано на рис. 2.18, а необхідні для розрахунку величини наведено в табл. 2.10.

На рисунках точка M показана в положенні, при якому $S = AM \succ 0$ (при $S \prec 0$ точка M знаходиться по другу сторону від точки A.

Таблиця 2.10

Варіант	$S_r(t) = AM$	$\varphi_e(t)$	R	a	t_1	t_2	t_3
	м	рад	м		с		
1	$0.4\pi \cos(\pi t/6)$	$-2t^2+t$	0.4	0.3	0	1	2
2	$0.2 \sin(\pi t)$	$4t^2-t$	–	0.2	0	1/2	1/6
3	$2.0 \sin(\pi t/3)+1$	$-2t^2+3t$	–	2.2	0	1	0.5
4	$0.3 \cos(\pi t/4)$	$4t^2-2t$	0.4	0.2	0	1	2
5	$4t^2$	$0.5t^2$	–	4.0	0	1	0.5
6	$1.5\pi \sin(\pi t)$	$-3t^2+2t$	3.0	2.0	0	0.5	1/6
7	$1.5\pi \cos(2\pi t)$	$2t-t^2$	3.0	1.0	0	1/8	1/6

Продовження таблиці 2.10

Варіант	$S_r(t) = AM$	$\varphi_e(t)$	R	a	t_1	t_2	t_3
	м	рад	м		с		
8	$4.5\pi\sin(\pi t/3)$	$4t^2–3t$	9.0	3.0	0	3/2	1/2
9	$5.0\pi\sin(2\pi t)$	$–3t^2–3t$	10.0	5.0	0	1/12	1/6
10	$2.4\pi\cos(\pi t/4)$	$–t^2+5t$	2.4	1.2	2	4/3	1.6
11	$0.9\pi\sin(\pi t/4)$	$2t^3–t$	1.8	3.6	0	2	1
12	$2\sin(\pi t)$	$0.4t^2+2t$	–	3.0	0	0.5	1.5
13	$2.0t^2$	$2t+0.5t^2$	–	2.0	0	1.0	0.5
14	$2.0\pi\sin(\pi t/6)$	$0.6t^2$	2.0	2.0	0	1.0	3.0
15	$4.0\pi\cos(\pi t/6)$	$3t–0.5t^2$	8.0	–	3.0	0.0	2.0
16	$2.0\pi\cos(\pi t)$	$4.0t^2$	4.0	2.0	0.5	–	1.0
17	t^2+2t	$0.5t^2+1$	6.0	–	0	1.0	0.5
18	t^2+t	$t^3–2.5t$	–	6.0	0	1.0	0.5
19	$2.0\sin(\pi t/3)$	$2t–t^2$	–	3.0	0	0.5	1.0
20	$2.0\pi\sin(\pi t/6)$	$4t–0.2t^2$	4.0	–	0	1.0	3.0
21	$4.5\pi\sin(\pi t/3)$	$4t^2–2t$	9.0	5.0	0	3/2	0.5
22	$2t+2t^2$	$4t^2–t$	5.0	–	0	1.0	0.5
23	$2.5\sin(\pi t)$	$t–2t^2$	–	5.0	0	1.0	3/2
24	$2.0\pi\cos(\pi t/6)$	$4t–2t^2$	2.0	2.0	3.0	2.0	0.0
25	$2.0\pi\sin(\pi t)$	$0.4t^2+t$	4.0	2.0	0	0.5	0.25
26	$4.0\pi\cos(\pi t)$	$2t+0.5t^2$	4.0	–	0.5	0.0	1.5
27	$2.0\sin(\pi t/2)$	$2t^3–t$	–	1.5	0	1.0	3.0
28	$1.5\sin(\pi t/3)$	t^3+t	3.0	1.5	0	1.0	0.5
29	$1.0\sin(\pi t/4)$	$3t^2–t$	2.0	–	0	2.0	6.0
30	$0.8\cos(\pi t/6)$	$0.5t^2+t$	–	1.6	0	3.0	6.0

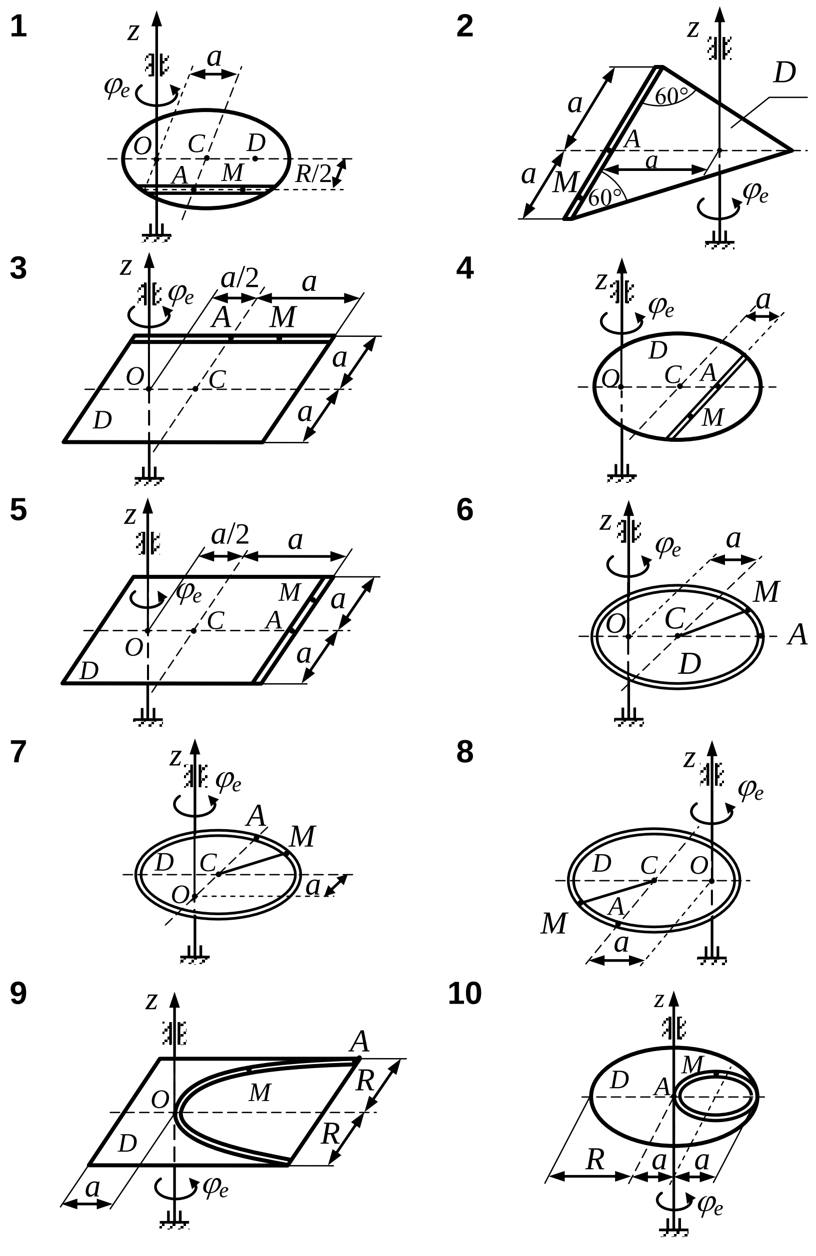
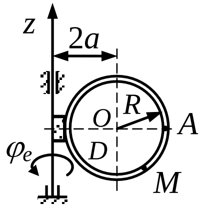
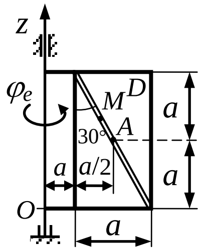


Рисунок 2.18

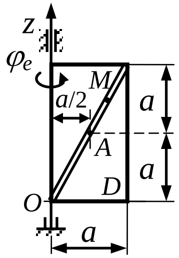
11



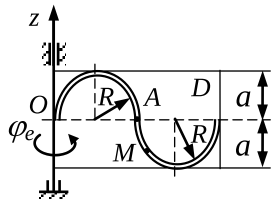
12



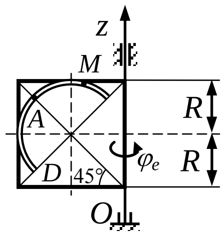
13



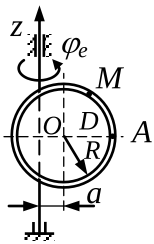
14



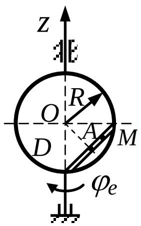
15



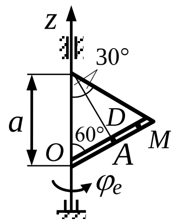
16



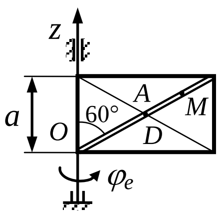
17



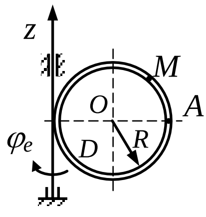
18



19

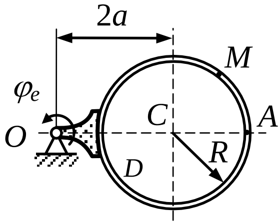


20

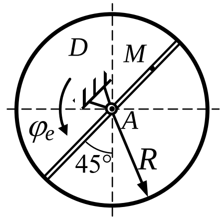


Продовження рисунка 2.18

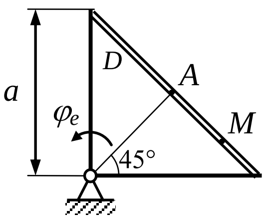
21



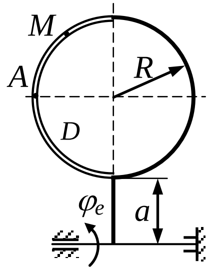
22



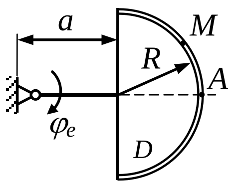
23



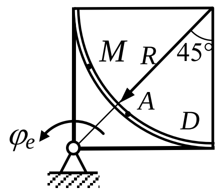
24



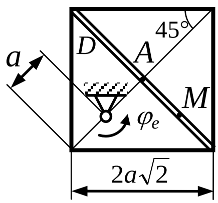
25



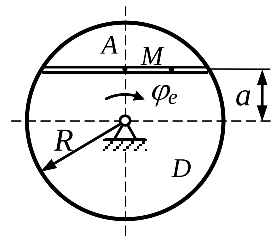
26



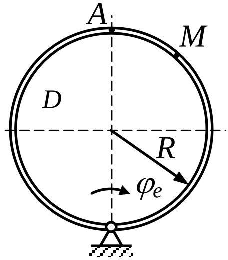
27



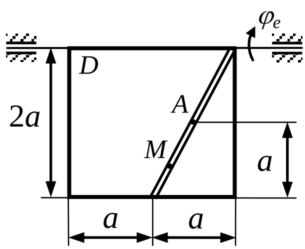
28



29



30



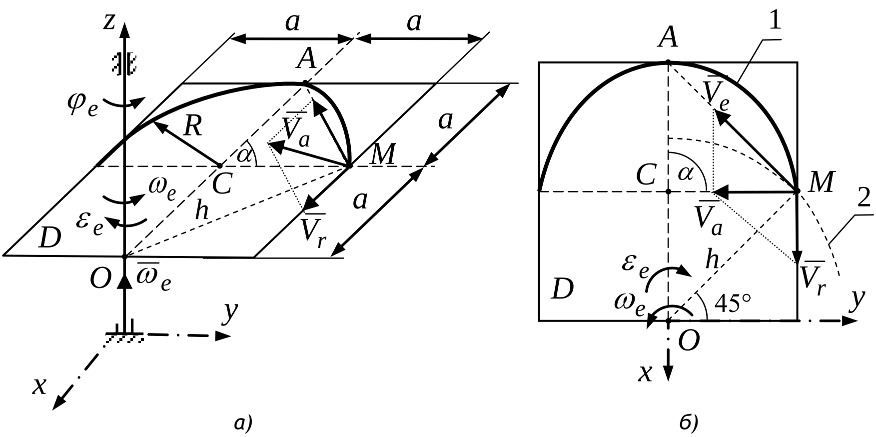
Продовження рисунка 2.18

2.15 Приклад виконання завдання К.5

Задана горизонтальна пластинка D, яка перпендикулярна до осі Oz (рис. 2.19) і обертається навколо осі Oz згідно з законом $\varphi_e = 4t - t^2$. У пластинці прорізано канавку, вздовж неї рухається точка M, рух якої описується рівнянням

$$AM = S_r(t) = 2.0\pi \sin(\pi t/6), \text{ м.}$$

Визначити абсолютні швидкість і прискорення точки M для моменту часу t_1=1.0 с, якщо a=2.0 м, R=2.0 м.



1 – відносна траєкторія точки M; 2 – переносна траєкторія точки M

Рисунок 2.19

Розв'язання.

В прикладі, що розглядається, траєкторія відносного руху точки M відома – це півколо радіусом R (рис. 2.19, *б*). Положення точки M на траєкторії у відносному русі для моменту часу t_1=1.0 с визначається дуговою координатою

$$S_r(1) = S_{1r} = 2.0\pi \sin(\pi/6) = \pi \text{ , м.}$$

Якщо ввести кут α (рис. 2.19, *а*, *б*), що визначає положення точки M, то матимемо

$$\alpha = \frac{S_{1r}}{R} = \frac{\pi}{R} = \frac{\pi}{2}\,.$$

Радіус обертання h точки M у переносному русі ($h=OM$)

$$h = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2} = 2\sqrt{2} = 2.82 \text{ м.}$$

Переносна кутова швидкість і переносне кутове прискорення тіла D

$$\omega_e = \dot{\varphi}_e = \frac{d}{dt}\left(4t - t^2\right) = 4 - 2t \ \textit{рад}/\text{с}; \ \varepsilon_e = \dot{\omega}_e = \frac{d}{dt}\left(4 - 2t\right) = -2 \ \textit{рад}/\text{с}^{-2}.$$

При t_1=1 с ω_e=2 *рад*/с; ε_e=–2 *рад*/с^2.

Вектор переносної кутової швидкості лежить на осі переносного обертання Oz і спрямований вверх (рис. 2.19, *а*).

Абсолютна швидкість точки M

$$\overline{V}_a = \overline{V}_e + \overline{V}_r\,. \tag{2.20}$$

Модуль відносної швидкості цієї точки

$$V_r = \dot{S}_r = \frac{d}{dt}\left[2\pi\, sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)\right] = \frac{\pi^2}{3} cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) \text{ м/с.} \tag{2.21}$$

При t_1=1 с $V_r = \dfrac{\pi^2}{3} cos\left(\dfrac{\pi \cdot 1}{6}\right) = 2.82$ м/с.

Спрямований вектор $\overline{V}_r$ по дотичній відносної траєкторії точки (рис. 2.19, *б*).

Модуль переносної швидкості точки M

$$V_e = \omega_e \cdot h = 2 \cdot 2.82 = 5.64 \text{ м/с.}$$

Вектор $\overline{V}_e$ перпендикулярний до OM і спрямований в бік переносного обертання (рис. 2.19, *б*).

Модуль абсолютної швидкості точки M

$$V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2 + 2 \cdot V_e \cdot V_r \cdot cos135^\circ} =$$

$$= \sqrt{2.82^2 + 5.64^2 + 2 \cdot 2.82 \cdot 5.64(-0.707)} = 4.15 \text{ м/с.}$$

Напрям вектора $\overline{V}_a$ показано на рис. 2.19, *б*.

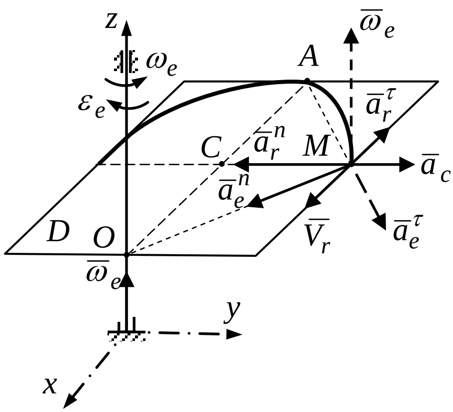
Абсолютне прискорення точки M

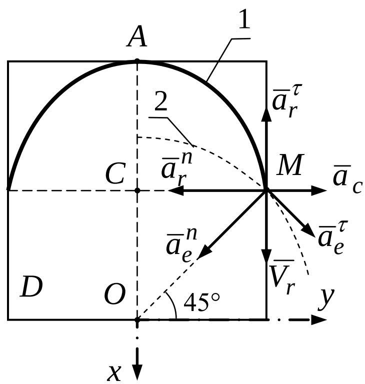
$$\overline{a}_a = \overline{a}_e^n + \overline{a}_e^\tau + \overline{a}_r^n + \overline{a}_r^\tau + \overline{a}_c\,. \tag{2.22}$$

Модулі нормального і тангенціального прискорень точки M в переносному русі

$a_e^n = \omega_e^2 \cdot h = 2^2 \cdot 2.82 = 11.28$ м/с^2; $a_e^\tau = \varepsilon_e \cdot h = 2 \cdot 2.82 = -5.64$ м/с^2.

Вектор $\overline{a}_e^n$ спрямований по нормалі до переносної траєкторії, $\overline{a}_e^\tau$ – по дотичній протилежно вектору $\overline{V}_e$ (рис. 2.20).





1 – відносна траекторія точки M; 2 – переносна траекторія точки M

Рисунок 2.20

Модулі нормального і тангенціального прискорень точки M в відносному русі

$$a_r^n = \frac{(V_r)^2}{R} = \frac{(2.82)^2}{2} = 3.98 \text{ м/с}^2;$$

$$a_r^\tau = \dot{V}_r = \ddot{S}_r = \frac{d}{dt}\left[\frac{\pi^2}{3} cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)\right] = -\frac{\pi^3}{18} sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) \text{ м/с}^2.$$

При t_1=1 с $\quad a_r^\tau = -\dfrac{\pi^3}{18} sin\left(\dfrac{\pi \cdot 1}{6}\right) = -0.86$ м/с^2.

Коріолісове прискорення точки M визначається за формулою

$$\overline{a}_c = 2\left(\overline{\omega}_e \times \overline{V}_r\right)$$

або за модулем $\quad a_c = 2\omega_e V_r \, sin\left(\overline{\omega}_e \,\widehat{,}\, \overline{V}_r\right) = 2 \cdot 2 \cdot 2.82 \cdot sin\left(\overline{\omega}_e \,\widehat{,}\, \overline{V}_r\right)$.

При t_1=1 с $\quad a_c = 2 \cdot 2 \cdot 2.82 \cdot sin 90^\circ = 11.28$ м/с^2.

Кут між векторами $\overline{\omega}_e$ і $\overline{V}_r$ дорівнює 90° (рис. 2.20, *а*).

Вектор Коріолісового прискорення $\overline{a}_c$ перпендикулярний площині, в якій лежать вектори $\overline{\omega}_e$ і $\overline{V}_r$ і спрямований в той бік, звідки суміщення вектора $\overline{\omega}_e$ з вектором $\overline{V}_r$ за найменшим кутом проходить проти ходу годинникової стрілки (рис. 2.20, *а*).

На рис. 2.20, *а*, *б* зображено напрямки складових векторів абсолютного прискорення.

До визначення модуля абсолютного прискорення точки M спроектуємо рівність (2.21) на осі координат x, y, z

$$a_x = a_e^n \, sin 45^\circ + a_e^\tau \, sin 45^\circ - a_r^\tau \,;$$

$$a_y = -a_e^n \, cos 45^\circ + a_e^\tau \, cos 45^\circ - a_r^n + a_c \,; \qquad a_z = 0 \,.$$

При t_1=1 с $\qquad a_z = 0\,;$

$$a_x = 11.28 \cdot 0.707 + 5.64 \cdot 0.707 - 0.86 = 11.96 - 0.86 = 11.1 \text{ м/с}^2;$$

$$a_y = -11.28 \cdot 0.707 + 5.64 \cdot 0.707 - 3.98 + 11.28 =$$

$$= -3.08 - 3.98 + 11.28 = 3.32 \text{ ì/ñ}^2.$$

Модуль абсолютного прискорення точки M

$$a_a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{11.1^2 + 3.32^2} = \sqrt{134.23} = 11.59 \text{ м/с}^2.$$

Відповідь: $\quad V_a = 4.15$ м/с^2; $\quad a_a = 11.59$ м/с^2.

2.16 Завдання К.6. Визначення кутових швидкостей ланок планетарного редуктора

Визначити кутові швидкості веденого вала II і сателітів редуктора. Схеми редукторів показано на рисунку 2.21, а необхідні для розрахунків величини наведено в таблиці 2.11.

Примітка. Додатний і від'ємний знаки кутових швидкостей означають відповідно напрямок обертання проти і за годинниковою стрілкою, якщо дивитись з боку ведучого вала I (для редуктора з циліндричними колесами).

У механізмах, наведених на рис. 2.21, зубчасті колеса, осі яких співпадають з основною геометричною віссю механізму, називаються центральними. Колеса, які знаходяться у складному русі (обертання навколо власної осі і обертання з власною віссю навколо центральної осі) називаються сателітами. Важіль H, на якому закріплюється рухома вісь сателіта, називається водилом. Центральне колесо і водило є основними ланками.

Таблиця 2.11

Варіант	Радіус, м				Частота обертання, об/хв.				
	r_1	r_2	r_3	r_4	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
1	0.30	0.30	0.15	0.45	3500	500	–	–	–
2	0.20	0.30	0.20	1.20	100	–300	–	–	–
3	0.35	0.10	0.15	0.40	1200	1800	–	–	–
4	4.10	0.15	0.30	0.20	600	900	–	–	–
5	0.20	0.15	0.10	0.25	2000	500	–	–	–
6	0.10	0.10	0.12	0.54	2000	–	–	–100	–
7	0.42	0.14	0.14	–	810	–	–	–	–
8	0.40	0.10	0.20	0.30	1500	375	–	–	–
9	0.20	0.15	0.25	0.60	3000	–	–	–	300
10	0.15	0.07	0.05	0.17	700	–	–	200	–

Продовження таблиці 2.11

Варіант	Радіус, м				Частота обертання, об/хв.				
	r_1	r_2	r_3	r_4	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
11	0.20	0.15	0.50	–	1410	–	–	–	–
12	0.20	0.30	0.15	0.35	1200	–	–	–	–
13	0.80	0.15	0.35	0.30	1200	–	–	500	–
14	0.10	0.15	0.10	0.60	1500	870	–	–	–
15	0.15	0.30	0.15	0.60	2400	–	–	–400	400
16	0.20	0.25	0.70	–	3000	–	1800	–	–
17	0.15	0.20	0.25	0.20	2000	–	–	–	–
18	0.90	0.33	0.24	–	1800	1500	–	–	–
19	0.50	0.15	0.10	0.25	500	–300	–	–	–
20	0.60	0.15	0.30	–	1800	1200	–	–	–
21	0.90	0.30	0.20	0.40	570	–	–	–	–
22	0.30	0.80	0.70	0.20	975		–	–	–
23	0.10	0.15	0.40	–	330	1470	210	–	–
24	0.27	0.33	0.33	1.59	870	–	–	–	–
25	0.40	0.10	0.20	0.10	600	–	–	–	–200
26	0.25	0.25	0.15	0.35	600	–	–	300	–
27	0.15	0.12	0.39	–	900	1200	–	–	–
28	0.40	0.20	0.30	0.90	270	630	–	–	–
29	0.50	0.10	0.15	0.55	800	–200	–	–	–
30	0.22	0.49	0.24	0.47	600	900	–	–	–

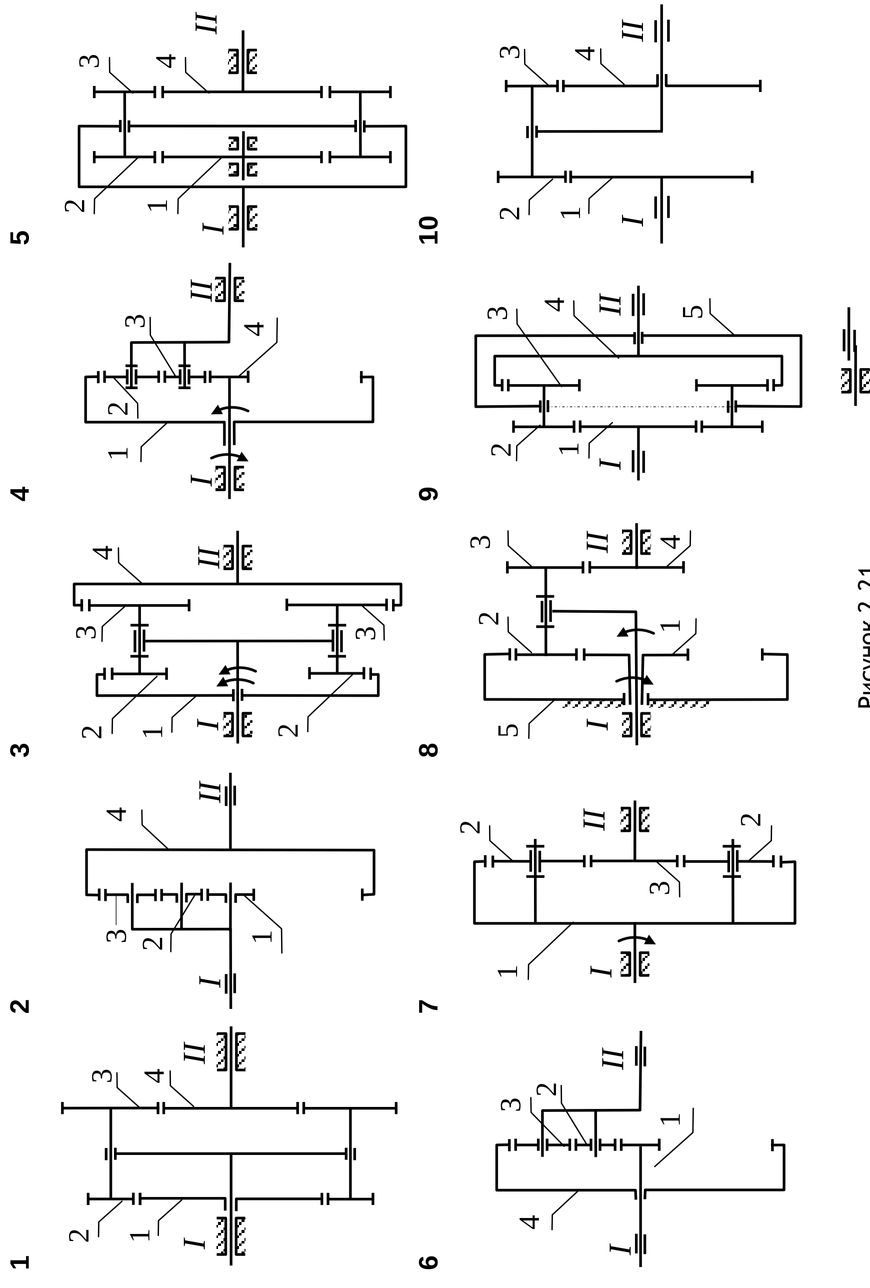
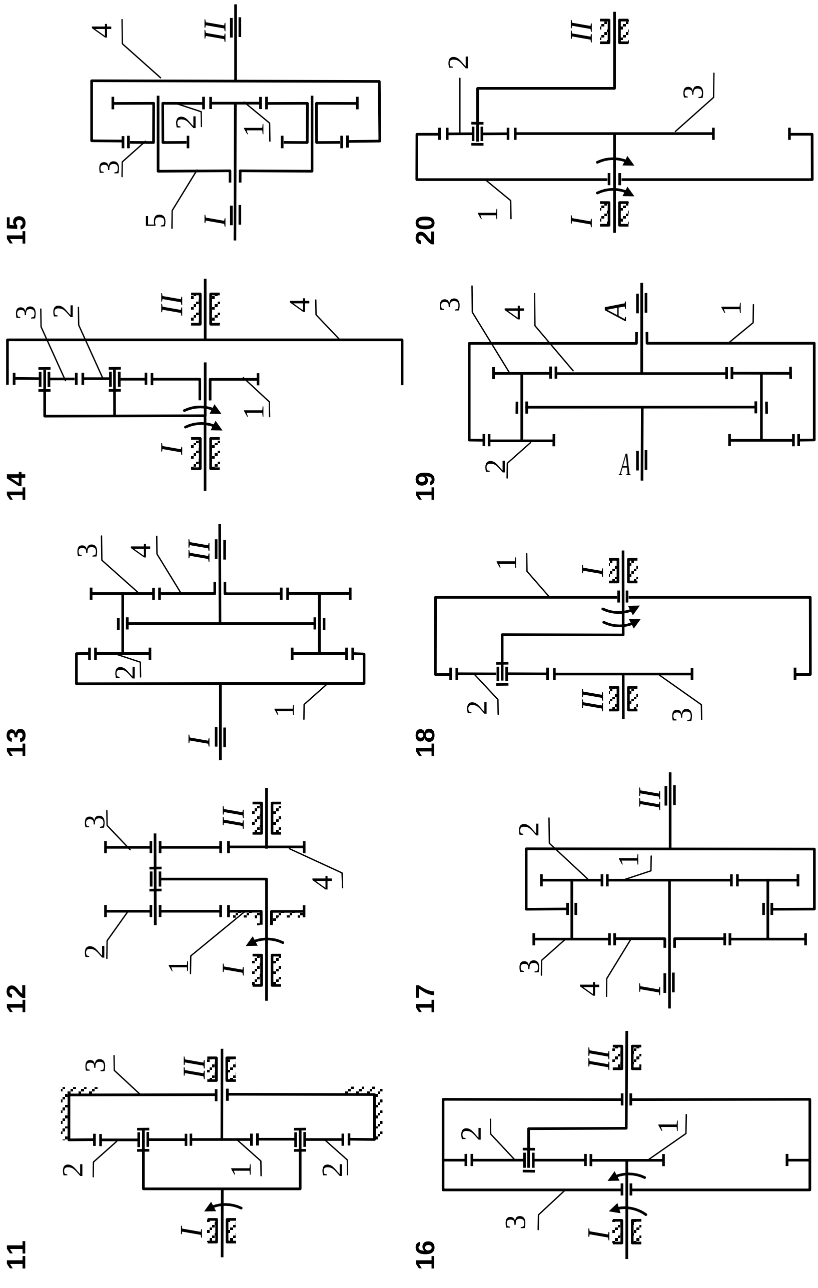
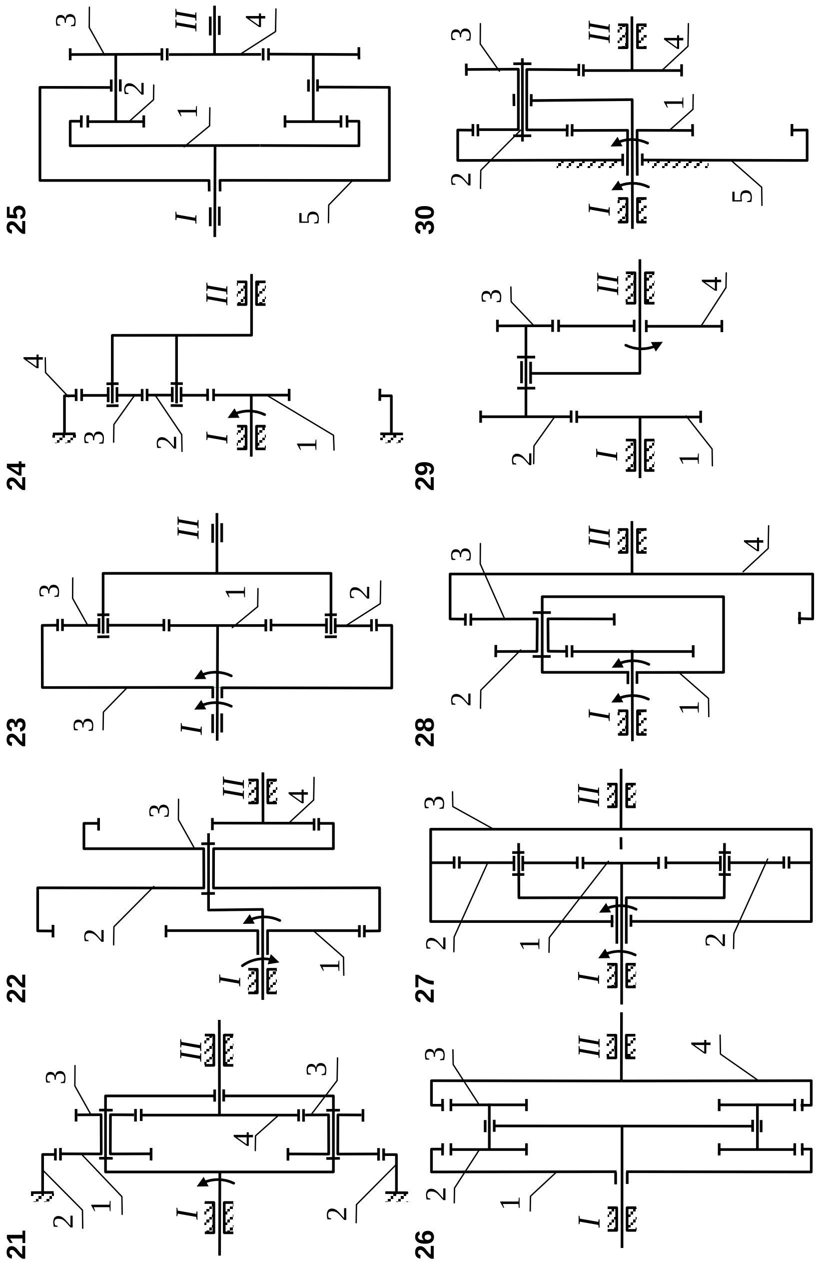


Рисунок 2.21



Продовження рисунка 2.21



Продовження рисунка 2.21

2.17 Приклад виконання завдання К.6

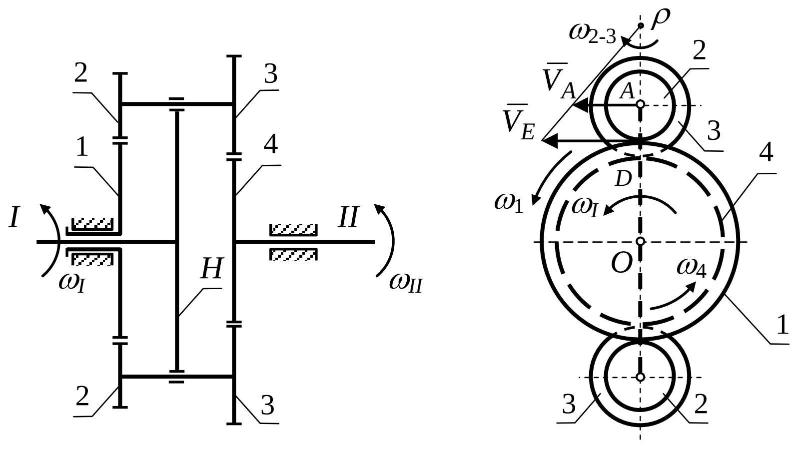
Задано. Редуктор швидкостей, зображений на рис. 2.22, *а*, використовується для передачі обертання від ведучого вала I до веденого вала II, вісь якого збігається з геометричною віссю вала I.

Редуктор має два ведучих елементи: вал I, що обертається з частотою обертання n_I=1200 *об/хв,* і центральне колесо 1, яке обертається з частотою обертання n_1=1800 *об/хв*.

Ведучі елементи приводять до руху спарені між собою шестерні 2–3 (сателіти), які вільно насаджено на кінцях водила H, заклиненого на ведучому валу I. Сателіти 2–3 знаходяться в зачепленні з зубчастими колесами 1 і 4.

Радіуси коліс R_1=0.8 м, R_2=0.2 м, R_3=0.4 м, R_4=0.6 м.

Визначити кутові швидкості веденого вала II і шестерень 2–3.



а) *б)*

Рисунок 2.22

***Розв'язання*.**

За вихідними даними викреслюємо задану схему механізму (рис. 2.22, *а*).

Визначення кутових швидкостей ω_{II} і ω_{2-3} за допомогою теорії плоского руху твердого тіла.

Швидкість точки A

$$V_A = \omega_I \cdot OA = \omega_I \cdot (R_1 + R_2) = \frac{2\pi n_I}{60}(R_1 + R_2) = 40\pi \text{ м/с.}$$

Швидкість точки E (точки контакту шестерень 1 і 2)

$$V_E = \omega_1 \cdot R_1 = \frac{2\pi n_1}{60} \cdot R_1 = 48\pi \text{ м/с.}$$

Точка P – миттєвий центр швидкостей сателітів (спарених шестерень 2-3, див. рис. 2.22, *б*).

Кутова швидкість сателітів 2-3

$$\omega_{2-3} = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_E}{AP + AE},$$

звідси $$AP = \frac{V_A \cdot AE}{V_E - V_A} = \frac{40\pi \cdot 0.2}{48\pi - 40\pi} = 1 \text{ м}$$

і $$\omega_{2-3} = \frac{V_A}{AP} = \frac{40\pi}{1} = 40\pi = 125.6 \textit{ рад}/\text{с.}$$

Швидкість точки D (точки контакту шестерень 3 та 4)

$$V_D = \omega_{2-3}(AP + AD) = \omega_{2-3}(AP + R_3) = 40\pi(1 + 0.4) = 56\pi \text{ м/с.}$$

Кутова швидкість шестерні 4 і веденого вала II

$$\omega_{II} = \omega_4 = \frac{V_D}{R_4} = \frac{56\pi}{0.6} = 293 \textit{ рад}/\text{с.}$$

Визначення кутових швидкостей ω_{II} і ω_{2-3} з допомогою способу оберненого руху (*метод Вілліса*).

Задамо всьому механізму обертальний рух навколо осі O, який дорівнює кутовій швидкості водила H, але напрямлений в протилежний бік ($-\omega_H = -\omega_I$). Тоді диференціальний механізм перетворюється в механізм з нерухомими осями $\omega_{нr} = \omega_н - \omega_н = 0$, а кутові швидкості рухомих ланок відносно водила дорівнюють

$$\omega_{1r} = \omega_1 - \omega_н; \quad \omega_{2r} = \omega_2 - \omega_н;$$

$$\omega_{3r} = \omega_3 - \omega_н; \quad \omega_{4r} = \omega_4 - \omega_н, \tag{2.23}$$

де ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 – абсолютні кутові швидкості.

Відносне обертання шестерні 2, зовнішньо зачепленої з колесом 1, спрямоване протилежно відносному обертанню колеса 1. Шестерня 3, спарена із шестернею 2, здійснює такий самий обертальний рух, як шестерня 2. Колесо 4, яке має із шестернею 3 зовнішнє зачеплення, обертається в протилежний бік шестерні 3.

Модулі кутових швидкостей цих обертань пов'язані між собою співвідношенням

$$\frac{\omega_{1r}}{\omega_{2r}} = \frac{R_2}{R_1}(-1)^k; \qquad \frac{\omega_{3r}}{\omega_{4r}} = \frac{R_4}{R_3}(-1)^k, \tag{2.24}$$

де k – число зовнішніх зачеплень в механізмі.

З врахуванням (2.23) і того, що $\omega_2 = \omega_3 = \omega_{2-3}$, із (2.24) отримаємо

$$\frac{\omega_1 - \omega_I}{\omega_2 - \omega_I} = \frac{R_2}{R_1}(-1)^1 \quad \text{і} \quad \frac{\omega_3 - \omega_I}{\omega_4 - \omega_I} = \frac{R_4}{R_3}(-1)^1$$

або

$$\omega_2 = \omega_1 - (\omega_1 - \omega_I) \cdot \frac{R_1}{R_2} = \frac{\pi}{30}\left[1200 - (1800 - 1200) \cdot \frac{0.8}{0.2}\right] =$$

$$= -40\pi = -125.6 \ \textit{рад}/\text{с};$$

$$\omega_4 = \omega_I - (\omega_3 - \omega_I) \cdot \frac{R_3}{R_4} = \frac{\pi}{30} \cdot 1200 - \left(-40\pi - \frac{\pi}{30} \cdot 1200\right) \cdot \frac{0.4}{0.6} =$$

$$= 93.33\pi = 293 \ \textit{рад}/\text{с}.$$

Якщо треба визначити тільки $\omega_{II} = \omega_4$, то в (2.24) перемноживши ліву та праву сторони рівнянь, враховуючи, що $\omega_{2r} = \omega_{3r}$, отримаємо

$$\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{R_4}{R_3} \cdot (-1)^k = \frac{\omega_{1r} \cdot \omega_{3r}}{\omega_{2r} \cdot \omega_{4r}}.$$

Звідки $$\omega_{4r} = \omega_{1r} \frac{R_1 \cdot R_3}{R_2 \cdot R_4} (-1)^k$$

або

$$\omega_4 = \omega_I + (\omega_1 - \omega_I) \cdot \frac{R_1 \cdot R_3}{R_2 \cdot R_4} (-1)^2 =$$

$$= \frac{\pi}{30} 1200 + \left(1800 \frac{\pi}{30} - 1200 \frac{\pi}{30}\right) \cdot \frac{0.8 \cdot 0.4}{0.2 \cdot 0.6} =$$

$$= 40\pi + 20\pi \frac{0.32}{0.12} = 93.33\pi = 293 \text{ рад/с.}$$

Відповідь: $\omega_{II} = \omega_4 = 293$ *рад*/с, $\omega_2 = \omega_3 = \omega_{2-3} = -125.6$ *рад*/с.

2.18 Перелік контрольних питань з кінематики

1. Кінематика (визначення). Задача кінематики.
2. Що називається законом руху точки ?
3. Закон руху точки в векторній формі.
4. Закон руху точки в координатній формі.
5. Закон руху точки в натуральній формі.
6. Взаємозв'язок між різними формами завдання руху точки.
7. Швидкість точки при векторному способі завдання руху точки.
8. Швидкість точки при координатному способі завдання руху точки.
9. Швидкість точки при натуральному способі завдання руху точки.
10. Що називається траєкторією руху точки ?
11. Рівномірний рух точки. Закон рівномірного руху точки.
12. Рівнозмінний рух точки. Закон рівнозмінного руху точки.
13. Що називається швидкістю точки в заданий момент часу ?
14. Що називається прискоренням точки в заданий момент часу ?
15. Прискорення точки при векторному способі завдання руху точки.
16. Прискорення точки при кординатному способі завдання руху точки.
17. Прискорення точки при натуральному способі завдання руху точки.
18. Нормальне і тангенціальне прискорення точки.
19. Радіус кривизни і закон руху точки по траекторії.
20. Що називається поступальним рухом тіла ? Закон поступального руху тіла.
21. Теорема про поступальний рух тіла.
22. Висновки про поступальний рух тіла.
23. Що називається обертальним рухом тіла ? Закон обертального руху тіла.
24. Кутова швидкість при обертальному русі тіла.
25. Кутове прискорення при обертальному русі тіла.
26. Зв'язок між частотою обертання і кутовою швидкістю.
27. Рівномірне обертання тіла (визначення і закон).
28. Рівнозмніне обертання тіла (визначення і закон).
29. Кутова швидкість і кутове прискорення як вектор.

30. Швидкість точок тіла в обертальному русі.
31. Прискорення точок тіла в обертальному русі.
32. Вектор швидкості точки тіла при обертальному русі (формула Ейлера).
33. Вектор тангенціального прискорення точки тіла при обертальному русі.
34. Вектор нормального прискорення точки тіла при обертальному русі.
35. Що називається передаточним числом ?
36. Що називається плоским рухом тіла ? Закон плоского руху тіла.
37. Розкладання плоского руху тіла.
38. Як змінюються складові частини плоского руху фігури при зміні полюса ?
39. Теорема про проекції швидкостей двох точок тіла.
40. Теорема про швидкість точки плоскої фігури.
41. Що називається миттєвим центром швидкостей (МЦШ) ?
42. Як знайти положення миттєвого центра швидкостей ?
43. Визначення швидкостей точок за допомогою МЦШ.
44. Окремі випадки МЦШ.
45. План швидкостей. Мета побудови плана швидкостей.
46. Визначення модуля і напрямку швидкостей точок за допомогою плана швидкостей.
47. Визначення модуля і напрямку кутових швидкостей ланок механізму за допомогою плана швидкостей.
48. Теорема про прискорення точок плоскої фігури.
49. Що називається миттєвим центром прискорень (МЦП) ?
50. Визначення положення МЦП.
51. Визначення прискорень точок плоскої фігури за допомогою МЦП.
52. План прискорень. Мета побудови плана прискорень.
53. Визначення модуля і напряку прискорень точок плоскої фігури.
54. Визначення модуля і напряму кутових прискорень ланок механізму за допомогою плана прискорень.
55. Параментри складного руху точки.

56. Теорема про визначення швидкостей в складному русі точки.
57. Складання прискорень при поступальному переносному русі точки.
58. Теорема Коріоліса.
59. Формули Пуасона. (Похідна від одиничних векторів рухомої системи координат).
60. Прискорення Коріоліса (вектор і модуль).
61. Напрям вектора прискорення Коріоліса (за правилом векторного добутку двох векторів).
62. Напрям вектора прискорення Коріоліса (за правилом Жуковського).
63. Коли прискорення Коріоліса дорівнює нулю ?
64. Сферичний рух твердого тіла. Визначення. Кути Ейлера. Закон сферичного руху тіла.
65. Швидкість точок тіла при сферичному русі.
66. Прискорення точок тіла при сферичному русі.
67. Додавання поступальних рухів твердого тіла.
68. Додавання обертальних рухів твердого тіла навколо осей, що перетинаються.
69. Додавання двох обертальних рухів тіла навколо паралельних осей (обертання в один бік).
70. Додавання двох обертальних рухів тіла навколо паралельних осей (обертання в протилежні боки).
71. Додавання двох обертальних рухів тіла навколо паралельних осей (пара обертань).
72. Розрахунок планетарних і диференціальних механізмів. Формула Вілліса.
73. Види зубчастих передач.