МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Запорізький національний технічний університет

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ТА РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ ЗАВДАННЯ
з вищої математики
(розділи: кратні інтеграли, елементи теорії поля)
для студентів факультетів ФРЕТ та ФІОТ
усіх форм навчання

2014

Методичні вказівки та розрахунково-графічні завдання з вищої математики (розділи: кратні інтеграли, елементи теорії поля) для студентів факультетів ФРЕТ та ФІОТ усіх форм навчання./ Укл.: Т.І.Левицька, Г.А.Шишканова, І.А.Пожуєва. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2014. – 42 с.

Укладачі: Т.І.Левицька, доцент,к.т.н.
Г.А.Шишканова, доцент, к.ф.-м.н.
І.А.Пожуєва, доцент,к.т.н.

Експерт: Кабак В.С., Касьян М.М.

Рецензент: Мастиновський Ю.В., доцент,к.т.н.

Відповідальний
за випуск: Т.І.Левицька, доцент,к.т.н.

Затверджено
на засіданні кафедри
прикладної математики
Протокол № 4 від 16.12.13

ЗМІСТ

1. МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

1.1 Подвійний інтеграл

1. Змінити порядок інтегрування в інтегралі :

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x;y)dy$$

Розв'язання. Область інтегрування D обмежена лініями $x = -1$; $x = 1$, $y = -\sqrt{1-x^2}$; $y = 1-x^2$

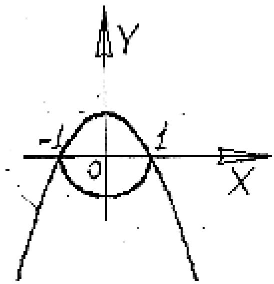

Рисунок 1.1

Змінимо порядок інтегрування, для чого задану область уявимо у вигляді двох областей: D_1-обмежену зліва і справа вітками параболи $x = \pm\sqrt{1-y}$ $(0 \le y \le 1)$, і D_2 обмежену дугами кола $x = \pm\sqrt{1-y^2}$ $(-1 \le y \le 0)$.

Тоді $$\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)dy = \int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y) + \int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$$

2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $x-4y+7=0$, $x-4y+14=0$, $2x-y=0$, $x=5$. **Зобразити фігуру.**

Розв'язання. Зобразимо фігуру (рис. 1.2). Площа фігури: $S=\iint\limits_D dxdy$. Область інтегрування розіб’ємо на дві частини D_1 та D_2. Площу шуканої фігури обчислимо, як суму площ цих областей: $S=S_1+S_2=\iint\limits_{D_1} dxdy+\iint\limits_{D_2} dxdy$. Знайдемо кожен з цих інтегралів:

$$S_1=\iint\limits_{D_1} dxdy=\int\limits_0^2 dx\int\limits_{(x+7)/4}^{2x} dy=\int\limits_0^2\left(2x-\frac{x+7}{4}\right)dx=\frac{7}{4}\frac{(x-1)^2}{2}\Bigg|_1^2=$$

$$=\frac{7}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{8} \text{ (кв. одиниць).}$$

$$S_2=\iint\limits_{D_2} dxdy=\int\limits_2^5 dx\int\limits_{(x+7)/4}^{(x+14)/4} dy=\int\limits_2^5\left(\frac{x+14}{4}-\frac{x+7}{4}\right)dx=\frac{21}{4} \text{ (кв.одиниць).}$$

Тоді, площа даної фігури:

$$S=\frac{7}{8}+\frac{21}{4}=\frac{49}{8}=6\frac{1}{8} \text{ (кв. одиниць).}$$

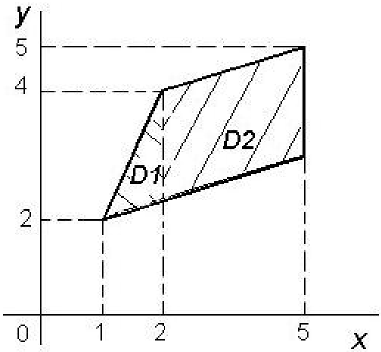

Рисунок 1.2

3. Обчислити $\iint\limits_D (x+2y)dxdy \quad D: y=x^2;\ y=4$

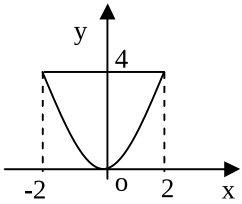

Рисунок 1.3

Розв'язання. *1-й спосіб.*

$$\iint_D (x+2y)dxdy = \int_{-2}^{2} dx \int_{x^2}^{4} (x+2y)dy = \int_{-2}^{2} (xy+y^2)\Big|_{x^2}^{4} dx =$$

$$= \int_{-2}^{2} (4x+16-x^3-x^4)dx = (2x^2+16x-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5})\Big|_{-2}^{2} = \frac{256}{5}$$

2-й спосіб (зміна порядку інтегрування).

$$\iint_D (x+2y)dxdy = \int_0^4 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} (x+2y)dx = \int_0^4 (\frac{x^2}{2}+2yx)\Big|_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dy =$$

$$= \int_0^4 (\frac{y}{2}+2y\sqrt{y}-\frac{y}{2}+2y\sqrt{y})dy = 4\int_0^4 y^{\frac{3}{2}}dy = \frac{8}{5}y^{\frac{5}{2}}\Big|_0^4 = \frac{256}{5}$$

4. Обчислити

$$\iint_D \ln(4+x^2+y^2)dxdy \quad D: x^2+y^2=4;\ y=x;\ y=0;\ (x\ge 0)$$

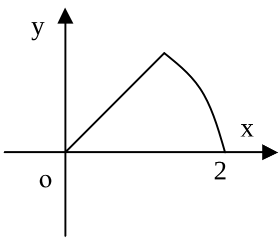

Рисунок 1.4

Обчислення подвійного інтеграла краще провести у полярній системі координат. Перехід від декартових до полярних координат здійснюється за формулами $x = \rho\cos\varphi$; $y = \rho\sin\varphi$. Рівняння кола $x^2 + y^2 = 4$ у полярній системі координат буде мати вигляд $\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = 4$ або $\rho = 2$.

Тоді $\iint\limits_D \ln(4 + x^2 + y^2)dxdy =$

$$= \iint\limits_D \ln(4 + \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi)\rho d\varphi d\rho =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^2 \ln(4 + \rho^2)\rho d\rho = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^2 \ln(4 + \rho^2)d(4 + \rho^2) =$$

$$= \frac{\pi}{8}(4 + \rho^2)(\ln(4 + \rho^2) - 1)\Big|_0^2 = \pi(2\ln 2 - \frac{1}{2}).$$

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ x^2 + z^2 = a^2 \end{cases}$

Розв'язання. Розглянемо восьму частину заданого тіла:

V= $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$

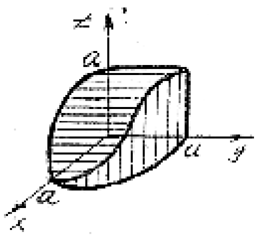

Рисунок 1.5

$$\frac{1}{8}\mathbf{V}=\iint\limits_{D}\sqrt{a^2-x^2}\,dxdy=\int\limits_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx\int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}}dy=$$

$$\int\limits_0^a(a^2-x^2)dx=\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a=\frac{2}{3}a^3.\quad \mathrm{V}=\frac{16}{3}a^3 \text{ (куб.од.)}$$

1.2 Криволінійний інтеграл

1. Обчислити криволінійний інтеграл.

$I=\int\limits_{(A)}^{(B)}xydx+(y-x)dy$ - вздовж ліній $y=x^2$ та $x=y^2$ між точками A(0,0) та B(1,1)

Розв`язання :

$$\int\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_a^b(P(x,y(x))+Q(x,y(x))y'(x))dx$$

Нижня та верхня межа інтеграла подані початковою та кінцевою точками. У першому випадку за параметр беремо x.dy=2xdx

$$I=\int\limits_0^1\left[x\cdot x^2+(x^2-x)*2x\right]dx=\int\limits_0^1(3x^2-2x^2)dx=3\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^1-2\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1=\frac{1}{12}$$

У другому випадку за параметр беремо y. Тоді dx= 2ydy

$$I=\int\limits_0^1\left[(y^2*y)2y+(y-y^2)\right]dy=\int\limits_0^1(2y^4+y-y^2)dy=2\frac{y^5}{5}\Bigg|_0^1+\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^1-$$

$$-\frac{y^3}{3}\Bigg|_0^1=\frac{2}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{17}{30}$$

Маємо різні результати, тому що інтегрування проводилося за різними кривими.

2. Обчислити $\int\limits_{l}(7x-2y)dl$ **де** ***l*****: відрізок прямої від точки** $A(1,2)$ **до точки** $B(3,5)$**.**

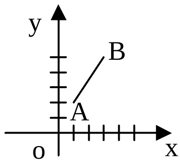

Рисунок 1.6

Розв'язання

Знайдемо рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки.

$$\frac{y-y_A}{y_B-y_A}=\frac{x-x_A}{x_B-x_A};$$

$\dfrac{y-2}{5-2}=\dfrac{x-1}{3-1}$. Звідкіля маємо $y=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}$; $y'=\dfrac{3}{2}$;

$$dl=\sqrt{1+y'^2}dx=\sqrt{1+\frac{9}{4}}dx=\frac{\sqrt{13}}{2}dx.$$

$$\int\limits_{l}(7x-2y)dl=\int\limits_{1}^{3}(7x-3x-1)\frac{\sqrt{13}}{2}dx=$$

$$=\frac{\sqrt{13}}{2}\int\limits_{1}^{3}(4x-1)dx=\frac{\sqrt{13}}{2}(2x^2-x)\Big|_1^3=7\sqrt{13}.$$

3. Обчислити $\int\limits_{l}(3x+2y)dx+xydy$ **;** $l: y=x^2+1$ **;від** $x_1=0$ **до** $x_2=-2$

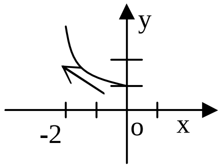

Рисунок 1.7

Розв’язання.

З рівняння лінії l знаходимо $dy = d(x^2+1) = 2xdx$.

Таким чином

$$\int_l (3x+2y)dx + xydy = \int_0^{-2}(3x+2(x^2+1)+x(x^2+1)2x)dx =$$

$$= \int_0^{-2}(3x+4x^2+2x^4+2)dx = \left.\left(3\frac{x^2}{2}+4\frac{x^3}{3}+2\frac{x^5}{5}+2x\right)\right|_0^{-2} =$$

$$= 6 - \frac{32}{3} - \frac{64}{5} - 4 = -\frac{322}{15}.$$

4. Відновити функцію $u = u(x,y)$ по її повному диференціалу

$du = (2xy^3+4)dx + (3x^2y^2+3)dy$.

Розв’язання. Перевіримо, що це повний диференціал. Для цього повинна виконуватись умова $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, P та Q вирази при dx та dy в диференціалі $du = Pdx + Qdy$.

Таким чином $P = 2xy^3+4$; $Q = 3x^2y^2+3$;

$\frac{\partial P}{\partial y} = 6xy^2$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = 6xy^2$ тобто умова повного диференціала виконується.

Відновити функцію $u = u(x, y)$ можна за допомогою криволінійних інтегралів $u(x, y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, y)dy + C$

або $u(x, y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy + C$, де x_0 та y_0 довільні, але доцільно вибирати їх такими, щоб інтегрування спрощувалося. Для розглядуваного випадку зручно покласти $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Тоді

$$u(x, y) = \int\limits_0^x 4dx + \int\limits_0^y (3x^2 y^2 + 3)dy + C =$$

$$= 4x\Big|_0^x + (x^2 y^3 + 3y)\Big|_0^y + C = 4x + x^2 y^3 + 3y + C$$

1.3 Теорія поля

1. Знайти похідну функції u(x,y,z)= $\dfrac{\sqrt{x}}{z} - \dfrac{\sqrt{y}}{x}$ **+2xyz у напрямі вектора** $\overrightarrow{M_1M_2}$ **в т.** M_1 **та** $\overrightarrow{grad}$ **u (**M_1**), якщо** M_1 **(1,1,-1),** M_2 **(-2, -1,1).**

Розв‘язання.

1. Знайдемо вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ **=(-3, -2,2),** його напрямні косинуси: $\cos\alpha = \dfrac{-3}{\sqrt{17}}$, $\cos\beta = \dfrac{-2}{\sqrt{17}}$, $\cos\varphi = \dfrac{2}{\sqrt{17}}$.

$$\frac{\partial u(M_1)}{\partial M_1M_2} = \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{M_1} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{M_1} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{M_1} \cos\gamma$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2z\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{y}}{x^2} + 2yz, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{M_1} = -\frac{3}{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{2x\sqrt{y}} + 2xz, \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{M_1} = -\frac{5}{2}, \ \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\sqrt{x}}{z^2} + 2xy, \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{M_1} = 1$$

$$\frac{\partial u(M_1)}{\partial \overrightarrow{M_1M_2}} = -\frac{3}{2}\left(-\frac{3}{\sqrt{17}}\right) - \frac{5}{2}\left(-\frac{2}{\sqrt{17}}\right) + 1\cdot\frac{2}{\sqrt{17}} = \frac{23}{2\sqrt{17}} = \frac{23\sqrt{17}}{34}$$

2. За означенням

$$\overrightarrow{grad}\ \text{u}\,(M_1) = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_1}\bar{i} + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_1}\bar{j} + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_1}\bar{k}$$

$$\overrightarrow{grad}\ \text{u}\,(M_1) = -\frac{3}{2}\bar{i} - \frac{5}{2}\bar{j} + \bar{k}$$

2. Для даного векторного поля $\bar{a} = (3xz + y^2)\bar{i} + (4yx + z)\bar{j} + (x^2 y + 4z)\bar{k}$ **знайти в точці** $M_0(2,-2,1)$ $div\bar{a}, rot\bar{a}$ **.**

Розв’язання. Вирази для $rot\bar{a}$ та $div\bar{a}$ мають такий вигляд

$$rot\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \bar{i}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) - \bar{j}\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + \bar{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

$div\bar{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ де P, Q, R - складові вектора $\bar{a} = P\,\bar{i} + Q\,\bar{j} + R\,\bar{k}$, тобто $P = 3xz + y^2$, $Q = 4yx + z$, $R = x^2 y + 4z$.

Таким чином $rot\bar{a} = \bar{i}(x^2 - 1) - \bar{j}(2xy - 3x) + \bar{k}(4y - 2y) =$
$= \bar{i}(x^2 - 1) + \bar{j}(3x - 2xy) + \bar{k}\,2y$, $rot\bar{a}(M_0) = 3\bar{i} + 14\bar{j} - 4\bar{k}$,
$div\bar{a} = 3z + 4x + 4$, $div\bar{a}(M_0) = 3 + 8 + 4 = 15$

3. Обчислити течію векторного поля $\bar{a}(M) = (x + z)\bar{i} + (2y - x)\bar{j} + z\bar{k}$ через зовнішню поверхню піраміди, створену площиною $x - 2y + 2z = 4$ та координатними площинами, двома способами: а) за означенням течії; б) за допомогою формули Остроградського-Гаусса.

Розв‘язання.

а) Обчислимо течію за допомогою поверхневого інтеграла

П$=\iint\limits_S \overline{a}\cdot\overline{n^\circ}dS,$ де S - зовнішня поверхня піраміди АВСО.

Обчислимо течію через кожну грань піраміди:

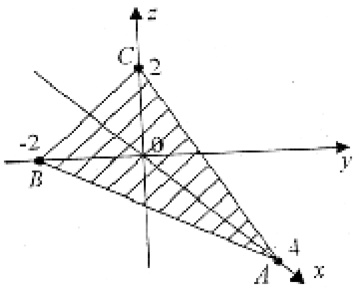

Рисунок 1.8

а) ΔAOC y=0, $\overline{n}^\circ = j$, dS=d$x$dz.

$$\Pi_1 = -\iint\limits_{\Delta AOC} xdS = -\iint\limits_{\Delta AOC} xdxdz = -\int_0^4 xdx\int_0^{2-\frac{x}{2}} dz =$$

$$= -\int_0^4 x\left(2-\frac{x}{2}\right)dx = -\left(x^2-\frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^4 = -\frac{16}{3}$$

б) ΔAOB z=0, $\overline{n}^\circ = -k$, dS=dxdy. $\Pi_2 = \iint\limits_{\Delta AOB} 0\cdot dxdy = 0$

в) ΔBOC x=0, $\overline{n^\circ} = -\overline{i}$, d$S$=d$y$dz.

$$\Pi_3 = -\iint\limits_{\Delta BOC} zdzdy = -\int_0^2 zdz\int_{z-2}^0 dy = -\int_0^2 z(-z+2)dz =$$

$$= -\left(-\frac{z^3}{3}+z^2\right)\Bigg|_0^2 = -\frac{4}{3}$$

г) ΔABC належить площині x-2y+2z-4=0, нормаль до цієї грані $\overline{n} = \dfrac{\overline{i}-2\overline{j}+2\overline{k}}{\sqrt{1+4+4}} = \dfrac{\overline{i}-2\overline{j}+2\overline{k}}{3}$.

$$dS=\sqrt{1+z_x'^{\,2}+z_y'^{\,2}}\;dxdy\,,\quad z=-\frac{1}{2}x+y+2\,,\;\; z_x'=-\frac{1}{2},\;\; z_y'=1.$$

Тоді $dS=\sqrt{1+\frac{1}{4}+1}dxdy=\frac{3}{2}dxdy$

$$\Pi_4=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\iint_{\Delta ABC}((x+z)-2(2y-x)+2z)dxdy=$$

$$=\frac{1}{2}\iint_{\Delta ABC}(3x-4y+3z)dxdy=$$

$$=\frac{1}{2}\iint_{\Delta ABC}\left(3x-4y-\frac{3}{2}x+3y+6\right)dxdy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}dy\int_{0}^{2y+4}\left(\frac{3}{2}x-y+6\right)dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}dy\left(\frac{3}{4}x^2+(6-y)x\right)\Bigg|_{0}^{2y+4}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}(y^2+20y+36)dy=\frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3}+10y^2+36\right)\Bigg|_{-2}^{0}=\frac{52}{3}$$

Течія крізь повну поверхню піраміди:

$$\Pi=\Pi_1+\Pi_2+\Pi_3+\Pi_4=\frac{32}{3}$$

б) За формулою Остроградського-Гаусса:

$$\Pi=\iiint_V \mathrm{div}\,\bar{a}\,\mathrm{dxdydz}=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz\,.$$

Частинні похідні:

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial(x+z)}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{\partial(2y-x)}{\partial y}=2\,,\quad \frac{\partial R}{\partial z}=\frac{\partial z}{\partial z}=1$$

Інтеграл $\iiint_V \mathrm{dxdydz}$ дорівнює об'єму прямокутної піраміди ABCO,

тому $\Pi=\iiint_V(1+2+1)dxdydz=4\iiint_V dxdydz=4\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot4\cdot2\cdot2=\frac{32}{3}$

4. Обчислити циркуляцію векторного поля

$$\bar{a} = (2x+z)\bar{i} + (3x+2y)\bar{j} + (2z+3y)\bar{k}$$

по контуру трикутника, який утворюється внаслідок перетину площини $2x+y+2z=2$ з координатними площинами при додатньому напряму обходу відносно нормального вектора $\bar{n}=(m,n,p)$ $(p>0)$ до площини. Обчислення зробити двома способами :

а) за означенням

б) за допомогою формули Стокса

Розв'язання.

а) За означенням циркуляції $\quad C = \oint\limits_{l} \bar{a}\,d\bar{r} = \oint\limits_{l} Pdx + Qdy + Rdz$

Для заданого векторного поля

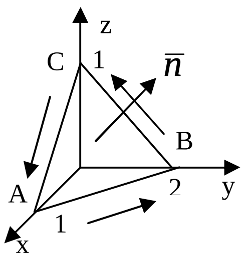

Рисунок 1.9

$$C = \oint\limits_{l} (2x+z)dx + (3x+2y)dy + (2z+3y)dz$$

На відрізку AB : $z=0$; $dz=0$; $2x+y=2$ або $y=-2x+2$; $dy=-2dx$

$$C_1 = \oint\limits_{AB} (2x+z)dx + (3x+2y)dy + (3y+2z)dz =$$

$$= \oint\limits_{AB} 2xdx + (3x+2y)dy = \int\limits_{1}^{0} (2x + (3x + 2(-2x+2))\cdot(-2))dx =$$

$$= \int\limits_{1}^{0} (4x-8)dx = (2x^2-8x)\Big|_{1}^{0} = -2+8 = 6.$$

На відрізку BC: $x=0$, $dx=0$, $y+2z=2$ або $y=2-2z$, $dy=-2dz$.

$$C_2 = \oint_{BC}(2x+z)dx+(3x+2y)dy+(3y+2z)dz =$$

$$= \oint_{BC} 2ydy+(3y+2z)dz = \int_0^1 (2(2-2z)(-2)+(2z+3(2-2z))dz =$$

$$== \int_0^1 (4z-2)dz = (2z^2-2z)\Big|_0^1 = 2-2=0.$$

На відрізку $:CA$ $y=0$, $dy=0$, $2x+2z=2$ або $z=1-x$, $dz=-dx$.

$$C_3 = \oint_{CA}(2x+z)dx+(3x+2y)dy+(3y+2z)dz =$$

$$= \oint_{CA}(2x+z)dx+2zdz = \int_0^1 ((2x+1-x)+2(1-x)(-1))dx =$$

$$== \int_0^1 (3x-1)dx = (3\frac{x^2}{2}-x)\Big|_0^1 = \frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}.$$

Таким чином $C = C_1+C_2+C_3 = 6+0+\frac{1}{2} = 6\frac{1}{2}$.

б) Обчислення циркуляції за допомогою формули Стокса.

$$C = \oint_l \bar{a}d\bar{r} = \iint_S rot\bar{a}\cdot\bar{n}_0 ds = \iint_{D_{xy}} \frac{rot\bar{a}\cdot\bar{n}_0}{|\cos\gamma|}\Bigg|_{z=z(x,y)} dxdy$$

де S - трикутник ABC, D_{xy} - проекція цього трикутника на координатну площину XOY, $\bar{n}_0$ - нормальний одиничний вектор до поверхні S, $\cos\gamma$ - це третя складова вектора $\bar{n}_0$,

$$rot\bar{a}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2x+z & 3x+2y & 2z+3y\end{vmatrix}=3\bar{i}+\bar{j}+3\bar{k}\,,\ \bar{n}_0=\frac{\bar{n}}{|\bar{n}|}\,,$$

$\bar{n}=\left(\pm\varphi'_x,\pm\varphi'_y,\pm\varphi'_z\right)$, $\varphi(x,y,z)=0$ - рівняння поверхні, знак(+) або (–) вибирається з умови. Для цього прикладу рівняння поверхні має вигляд $2x+y+2z=2$, тобто $\varphi(x,y,z)=2x+y+2z-2$.

Таким чином , враховуючи напрямленість нормального вектора маємо $\bar{n}=(2{,}1{,}2)$, $\bar{n}_0=\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$, $\cos\gamma=\dfrac{2}{3}$. Враховуючи попередню формулу обчислимо циркуляцію

$$C=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{3\cdot\frac{2}{3}+1\cdot\dfrac{1}{3}+3\cdot\dfrac{2}{3}}{\dfrac{2}{3}}dxdy=\frac{13}{2}S_{D_{xy}}=\frac{13}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2=\frac{13}{2}=6\frac{1}{2}$$

2. РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ ЗАВДАННЯ

2.1 Завдання 1

Змінити порядок інтегрування, зобразити область інтегрування.

1. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}dx\int\limits_{x}^{4x^3}dy$

2. $\int\limits_{0}^{4}dy\int\limits_{-\sqrt{1+\frac{y^2}{2}}}^{5-\sqrt{25-y^2}}f(x,y)dx$

3. $\int\limits_{2}^{4}dx\int\limits_{12-2x}^{12-x}2dy$

4. $\int\limits_{0}^{2}dy\int\limits_{-\sqrt{3-y}}^{1+y^2}f(x,y)dx$

5. $\int\limits_{-3}^{3}dx\int\limits_{-1}^{x^2+2}f(x,y)dy$

6. $\int\limits_{1}^{2}dy\int\limits_{\frac{1}{y^2}}^{y}dx$

7. $$\int_0^1 dx \int_{3\sqrt{x}}^{6\sqrt{x}} 3dy$$

8. $$\int_3^4 dy \int_{12y^2}^{4y^3} \frac{4}{27} dx$$

9. $$\int_{-1}^{3} dx \int_{x^2}^{2x+3} f(x,y)dy$$

10. $$\int_0^6 dy \int_{-\sqrt{9-(y-3)^2}}^{6-y} f(x,y)dx$$

11. $$\int_{-3}^{3} dy \int_{y^2-5}^{\sqrt{25-y^2}} f(x,y)dx$$

12. $$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{16-y^2}}^{y^2+1} f(x,y)dx$$

13. $$\int_0^4 dx \int_{x^2}^{16} f(x,y)dy$$

14. $$\int_{-1}^{4} dx \int_{-3x}^{4-x^2} f(x,y)dy$$

15. $$\int_2^3 dx \int_{6x}^{3x^2} \frac{3}{4} dy$$

16. $$\int_2^4 dy \int_{12-2y}^{-y+12} 2dx$$

17. $$\int_0^3 dy \int_{-\sqrt{25-y^2}}^{2-\sqrt{9-y^2}} f(x,y)dx$$

18. $$\int_0^4 dy \int_{-\sqrt{1+\frac{y^2}{2}}}^{5-\sqrt{25-y^2}} f(x,y)dx$$

19. $$\int_0^3 dx \int_{x-3}^{3-\sqrt{9-x^2}} f(x,y)dy$$

20. $$\int_0^2 dy \int_{-\sqrt{3-y}}^{1+y^2} f(x,y)dx$$

21. $$\int_{-3}^{3} dx \int_{-1}^{x^2+2} f(x,y)dy$$

22. $$\int_0^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{3-y^2}}^{\frac{y^2}{2}} f(x,y)dx$$

23. $$\int_0^2 dy \int_{y^2}^{y^2+4} f(x,y)dx$$

24. $$\int_0^3 dx \int_{\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)dy$$

25. $$\int_2^3 dx \int_{6x}^{3x^2} \frac{3}{4} dy$$

26. $$\int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x^2}}^{x} dy$$

27. $\int\limits_{1/2}^{3/2} dx \int\limits_{5x^3}^{9x^3} \frac{9}{5} dy$

28. $\int\limits_{0}^{3} dy \int\limits_{\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{25-y^2}} f(x,y)dy$

29. $\int\limits_{-1}^{3} dx \int\limits_{x^2}^{2x+3} f(x,y)dy$

30. $\int\limits_{0}^{6} dy \int\limits_{-\sqrt{9-(y-3)^2}}^{6-y} f(x,y)dx$

2.2 Завдання 2

Обчислити площу фігури, обмеженої лініями. Зобразити фігуру.

1. $x = \frac{1}{2}; x = \frac{3}{2}; y = 9x^3; y = 5x^3.$

2. $x = \frac{1}{2}; x = \frac{5}{8}; y = 3x; x + y = 12.$

3. $x = 0; y = 8 - 2x; y = 6\sqrt{x}.$

4. $x = 2; yx^2 = 1; y = x.$

5. $x = 4;\ y = 4x^3;\ 9y = 108x^2$

6. $x = 1;\ y = 3\sqrt{x};\ y = 6\sqrt{x}.$

7. $2x = 1; 2x = 3; y = 9x^3; y = 5x^3.$

8. $y = 1; x = 3\sqrt{y}; x = 6\sqrt{y}.$

9. $2x = 3; y = 4x; 2x + y = 6.$

10. $x = \cos y; x = \sin y; y = 0$

11. $y = 0; 2y + x = 8; x = 6\sqrt{y}.$

12. $9y = 3; x = 3y^2; x = 6y.$

13. $y = 3x^2; x = 3; y = 6x.$

14. $x + y = 2; x^2 + y^2 = 4$

15. $x=1/2;\ x=3/2, y=x, y=4x^3$

16. $x=3y^2, y=-2, 18y+3x=27.$

17. $y = 2; x = -2; x - y = 0; x^2 + y^2 = 1$

18. $y^2 = x; x + y = 2$

19. $x^2 + y^2 = 2x; x^2 + y^2 = 4x$

20. $y = x; y = -x; x = 4; x^2 + y^2 = 4$

21. $x^2 + y^2 = 2y; x^2 + y^2 = 9$

22. $x^2 + y^2 = 16; x^2 + y^2 = -3y$

23. $y = 1; y = -2; x = 2y^2; 18y + 3x = 27.$

24. $x^2 + y^2 = 1; x = 2; y = 0; x + y = 0$

25. $x^2 + y^2 = 2y; x^2 + y^2 = 4y$

26. $x^2 + y^2 = 2x; x^2 + y^2 = 9$

27. $y = 0; x = 1; x = 3; x = 1/y$

28. $y^2 = x + 2; x = 2$

29. $x = 0; y = 0; x = 2; y = e^x$

30. $x^2 + y^2 = 4; x + y \geq 2$

2.3 Завдання 3

Обчислити подвійні інтеграли.

1a) $\iint\limits_D (x+2y)dxdy$ $\quad D: x=1; x=2; y=x; y=\frac{1}{2}x$.

2a) $\iint\limits_D (5-2y)dxdy$ $\quad D: y=x^2; y=4; x=0$.

3a) $\iint\limits_D e^{x+y}dxdy$ $\quad D: y=x; x=0; y=1$.

4a) $\iint\limits_D (x-4y)dxdy$ $\quad D: y=2-x^2; y=x^2$.

5a) $\iint\limits_D \cos(x+y)dxdy$ $\quad D: y=x; y=0; x=\frac{\pi}{2}$.

6a) $\iint\limits_D (\sqrt{x}+\sqrt{y})dxdy$ $\quad D: y=x; y=2x; x=1$.

7a) $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$ $\quad D: y=x; x+y=2; y=0$.

8a) $\iint\limits_D \sqrt{x}ydxdy$ $\quad D: x=0; y=0; x+y=1$.

9a) $\iint\limits_D (x+y)dxdy$ $\quad D: y=x^2; y=\sqrt{x}$.

10a) $\iint\limits_D (3-y)dxdy$ $\quad D: x^2=2y; y=2$.

11a) $\iint\limits_D e^{\frac{y}{x}}dxdy$ $\quad D: y=x^2; y=0; x=1$.

12a) $\iint\limits_D (\sqrt{x}-y)dxdy$ $\quad D: y=\sqrt{x}; y=0; x=4$.

13a) $\iint\limits_D (x-6y)dxdy$ $\quad D: y=x^2; y=x$.

14a) $\iint\limits_D (x^2+3y^2)dxdy$ $\quad D: y=x; x+y=2; x=0$.

15a) $\iint\limits_D (x+2)dxdy$ $\quad D: y=\ln x; y=0; x=e$.

16a) $\iint\limits_D (2y-4y)dxdy$ $\quad D: x=3y; x=1; x=2$.

17a) $\iint\limits_D (x+\sqrt[3]{y})dxdy$ $\quad D: x=0; y=x; y=1$.

18a) $\iint\limits_D (x+y+1)dxdy$ $\quad D: y=x; y=2x; y=2$.

19a) $\iint\limits_D \cos(x+2y)dxdy$ $\quad D: y=x; y=\frac{\pi}{2}; x=0$.

20a) $\iint\limits_D x^2 ydxdy$ $\quad D: y=x^2; y=\sqrt{x}$.

21a) $\iint\limits_D \frac{y}{x}dxdy$ $\quad D: y=x; y=\frac{1}{2}x; x=2$.

22a) $\iint\limits_D e^y dxdy$ $\quad D: x+y=2; y=x; x=0$.

23a) $\iint\limits_D (x^2+3y^2)dxdy$ $\quad D: y=x; y=x^2$.

24a) $\iint\limits_D (2y+1)dxdy$ $\quad D: y=x; y=-x; x=1$.

25a) $\iint\limits_D \frac{x}{y^2}dxdy$ $\quad D: x=3; y=x; xy=1$.

26a) $\iint\limits_D \frac{y}{x^2}dxdy$ $\quad D: x+y=1; y=0; x=0$.

27а) $\iint\limits_D \sin(x+y)dxdy$ $\quad D: y=0; y=x; x=\pi$.

28а) $\iint\limits_D (2x+3y)dxdy$ $\quad D: x=1-y^2; x=0$.

29а) $\iint\limits_D (\sqrt[3]{y}+\sqrt{x})dxdy$ $\quad D: y=x; y=\frac{1}{3}x; x=1$.

30а) $\iint\limits_D xdxdy$ $\quad D: y=e^x; y=e; x=0$.

1б) $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2+R^2}dxdy$ $\quad D: x^2+y^2=R^2; x^2+y^2=3R^2$.

2б) $\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy$ $\quad D: x^2+y^2=R^2; (x\geq 0; y\geq 0)$.

3б) $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$ $\quad D: x^2+y^2=2x$.

4б) $\iint\limits_D e^{1+x^2+y^2}dxdy$ $\quad D: y=\sqrt{1-x^2}; y=0$.

5б) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$ $\quad D: x^2+y^2=R^2; (x\geq 0; y\geq 0)$.

6б) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{x^2+y^2+R^2}$ $\quad D: y=\sqrt{1-x^2}; y=0$.

7б) $\iint\limits_D \sqrt{1+2x^2+2y^2}dxdy$ $\quad D: x^2+y^2=4$.

8б) $\iint\limits_D (1+\frac{y^2}{x^2})dxdy$ $\quad D: x^2+y^2=1; y=x; y=0; (y\geq 0)$.

9б) $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$ $\quad D: x^2+y^2=4; x^2+y^2=2x$.

10б) $\iint\limits_D \ln(x^2+y^2)dxdy$ $\quad D: x^2+y^2=1; x^2+y^2=e^2$

11б) $\iint\limits_D \frac{\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$ $\quad D: x^2+y^2=\frac{\pi^2}{4};\quad x^2+y^2=\pi^2.$

12б) $\iint\limits_D (2+x^2+y^2)dxdy$ $\quad D: x^2+y^2=4x.$

13б) $\iint\limits_D (3x+2y)dxdy$ $\quad D: x^2+y^2=1; x^2+y^2=4; x=0; (y\ge 0).$

14б) $\iint\limits_D arctg\frac{y}{x}dxdy$

$D: x^2+y^2=1; x^2+y^2=4; y=x; y=\frac{1}{\sqrt{3}}x; (y\ge 0).$

15б) $\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy$

$D: x^2+y^2=1; x^2+y^2=9; y=-x; (x\ge 0).$

16б) $\iint\limits_D xdxdy$ $\quad D: x^2+y^2=2y.$

17б) $\iint\limits_D ydxdy$ $\quad D: x^2+y^2=2x.$

18б) $\iint\limits_D (x+y)dxdy$ $\quad D: x^2+y^2=6x; x^2+y^2=2x.$

19б) $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy$ $\quad D: x^2+y^2=4; y=0; (y\ge 0).$

20б) $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2+2}dxdy$

$D: x^2+y^2=4; x^2+y^2=9; y=x; y=-x; (x\ge 0).$

21б) $\iint\limits_D \sqrt{4-x^2-y^2}dxdy$ $\quad D: x^2+y^2=2x.$

22б) $\iint\limits_D (3x-2y)dxdy$ $\quad D: x^2+y^2=x$.

23б) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{3+x^2+y^2}}$ $\quad D: x^2+y^2=1; x^2+y^2=4$.

24б) $\iint\limits_D \frac{xdxdy}{x^2+y^2}$ $\quad D: x^2+y^2=4; x^2+y^2=2y$.

25б) $\iint\limits_D \frac{ydxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\quad D: x^2+y^2=4x$.

26б) $\iint\limits_D (2x+5y)dxdy$ $\quad D: x^2+y^2=6x$.

27б) $\iint\limits_D ydxdy$ $\quad D: x^2+y^2=1; x^2+y^2=4$.

28б) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{6-x^2-y^2}}$ $\quad D: x^2+y^2=6y$.

29б) $\iint\limits_D (2+x^2+y^2)dxdy$ $\quad D: x^2+y^2=4x; x^2+y^2=2x$.

30б) $\iint\limits_D (3+x+y)dxdy$

$D: x^2+y^2=1; x^2+y^2=4; y=x; y=\sqrt{3}x; (y\geq 0)$.

2.4 Завдання 4

Знайти об’єм тіла, обмеженого поверхнями, зробити рисунок

1.а) $z^2=x^2+y^2$; $x^2+y^2=2x$; $z=0$; б) $x^2+y^2=2x$, $z=0$, $z=x$

2. а) $x^2+y^2=1$; $z=0$; $z=1$; $x>0$; $y>0$

б) $z=x^2+y^2$, $z=0$, $x=1$, $y=2$, $x=0$ $y=0$

3. а) $x^2+y^2=z^2$, $z=0$, $y=2x$, $y=4x$, $x=3$ ($z>0$);

б) $x^2+y^2=4y$, $z=0$, $y+z=5$

4. а) $x^2+y^2=9$; $z=x$; $z=0$; $z>0$

б) $x^2+y^2+z^2=4$; $x^2+y^2=3z$

5. а) $z=x^2+y^2$; $z=x^2+2y^2$; $y=x$; $x=1$

б) $y^2+3z^2=6$; $3x^2-25y^2=75$; $z>0$

6. а) $x^2+y^2=2z$; $x^2+y^2+z^2=3$; $z>0$

б) $x=4$; $y=2$; $x+2y+3z=12$; $x=0$; $y=0$; $z>0$.

7. а) $z=5y$; $x^2+y^2=16$; $z=0$; б) $x+y+z=5$; $2x+y=5$: $y=0$; $z=0$

8. а) $2x=y^2+z^2$; $x=0$; $y=2$; $z=3$; $y=0$; $z=0$

б) $8(x^2+y^2)=z^2$; $x^2+y^2=1$; $y>0$; $z>0$

9. а) $y=x$; $y=0$; $x=1$; $z=x^2+5y^2$; $z=0$

б) $x^2+y^2+z^2=9$; $x^2+y^2<1$, $x>0$

10. а) $y=x$; $y=0$; $x=1$; $z=\sqrt{xy}$; $z=0$

б) $x^2+y^2+z^2=4$; $x^2+y^2=z^2$, $x>0$; $z>0$

11. а) $y=2x$; $y=0$; $x=2$; $z=x\ y$; $z=0$

б) $x^2+y^2=z^2$; $x^2+y^2=1$, $y>0$ $z>0$

12. а) $z=x^2+3y^2$; $z=0$; $y=x$, $y=0$, $x=1$

б) $z=8(x^2+y^2)+3$, $z=16x+3$

13. а) $z=3\sqrt{x^2+y^2}$; $z=2-x^2-y^2$

б) $y=x$; $y=0$; $x=1$; $z=3x^2+2y^2$; $z=0$

14. а) $z=10(x^2+y^2)+1$; $z=1-20y$ б) $y^2+z^2=8z$; $x=0$; $z+x=6$

15. а) $2z=x^2+y^2$; $z=0$; $x=2$; $y=3$; $x=0$; $y=0$

б) $x^2+y^2=4x$; $z=0$; $z=x$

16. а) $x^2+y^2=4z^2$; $z=0$; $y=x$; $y=8x$; $x=2$; $z>0$

б) $x^2+y^2=8y$; $z=0$; $y+z=6$

17. а) $x^2=y^2+z^2$; $y^2+z^2=2y$; $x=0$; б) $y^2 + z^2 = 2y$, $x=0$, $x=y$

18. а) $y^2+z^2=1$; $x=0$; $x=1$; $y>0$; $z>0$

б) $x=y^2+z^2$, $x=0$, $y=1$, $z=2$, $y=0$ $z=0$

19. а) $y^2+z^2=x^2$, $x=0$, $z=2y$, $z=4y$, $y=3$ ($x>0$);

б) $y^2+z^2=4z$, $x=0$, $z+x=5$

20. а) $y^2+z^2=9$; $x=y$; $x=0$; $x>0$

б) $y^2+z^2+x^2=4$; $y^2+z^2=3x$

21. а) $x=y^2+z^2$; $x=y^2+2z^2$; $z=y$; $y=1$

б) $z^2+3x^2=6$; $3y^2-25z^2=75$; $x>0$

22. а) $y^2+z^2=2x$; $y^2+z^2+x^2=3$; $x>0$

б) $y=4$; $z=2$; $y+2z+3x=12$; $y=0$; $z=0$; $x>0$.

23. а) $x=5z$; $y^2+z^2=16$; $x=0$

б) $y+z+x=5$; $2y+z=5$: $z=0$; $x=0$

24. а) $y^2+z^2=4y$; $x=0$; $x=y$

б)$8(y^2+z^2)=x^2$; $y^2+z^2=1$; $z>0$; $x>0$

25. а) $z=y$; $z=0$; $y=1$; $x=y^2+5z^2$; $x=0$

б) $y^2+z^2+x^2=9$; $y^2+z^2<1$, $y>0$

26. а) $z=y$; $z=0$; $y=1$; $x=\sqrt{yz}\ z$; $x=0$

б) $y^2+z^2+x^2=4$; $y^2+z^2=x^2$, $y>0$; $x>0$

27. а) $z=2y$; $z=0$; $y=2$; $x=y\ z$; $x=0$

б) $y^2+z^2=x^2$; $y^2+z^2=1$, $z>0$ $x>0$

28. а) $x=y^2+3z^2$; $x=0$; $z=y$, $z=0$, $y=1$

б) $x=8(y^2+z^2)+3$, $x=16y+3$

29. а) $x=3\sqrt{z^2+y^2}$ y^2+z^2; $x=2-y^2-z^2$

б) $z=y$; $z=0$; $y=1$; $x=3y^2+2z^2$; $x=0$

30. а) $x=10(y^2+z^2)+1$; $x=1-20z$

б) $y^2+z^2=4x^2$; $x=0$; $z=y$; $z=8y$; $y=2$; $x>0$

2.5 Завдання 5

Обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду $\int_l f(x,y)dl$ де l - відрізок прямої від точки $A(x_1,y_1)$ до точки $B(x_2,y_2)$.

1) $f(x,y)=2x+3y$; $A(1,-1)$; $B(2,0)$.
2) $f(x,y)=3x-2y$; $A(2,1)$; $B(2,-1)$.
3) $f(x,y)=4x+3y$; $A(-1,0)$; $B(2,1)$.
4) $f(x,y)=-4x+2y$; $A(-3,1)$; $B(2,2)$.
5) $f(x,y)=x+2y$; $A(-5,0)$; $B(2,1)$.
6) $f(x,y)=-x+3y$; $A(-4,1)$; $B(2,-1)$.
7) $f(x,y)=2x-y$; $A(-3,2)$; $B(-1,1)$.
8) $f(x,y)=3x-5y$; $A(-2,2)$; $B(1,1)$.
9) $f(x,y)=3x+5y$; $A(0,2)$; $B(5,3)$.
10) $f(x,y)=-4x+3y$; $A(-3,1)$; $B(4,2)$.
11) $f(x,y)=5x+2y$; $A(-2,3)$; $B(3,2)$.
12) $f(x,y)=-5x+2y$; $A(2,-3)$; $B(3,-2)$.
13) $f(x,y)=4x-5y$; $A(-4,2)$; $B(2,1)$.
14) $f(x,y)=-4x+5y$; $A(1,2)$; $B(3,4)$.
15) $f(x,y)=6x-2y$; $A(-1,3)$; $B(3,3)$.
16) $f(x,y)=-6x+2y$; $A(1,2)$; $B(4,3)$.

17) $f(x,y) = -5x + 6y$; $A(-3,7)$; $B(2,3)$.
18) $f(x,y) = 5x - 6y$; $A(2,5)$; $B(3,2)$.
19) $f(x,y) = 7x + 2y$; $A(1,1)$; $B(3,2)$.
20) $f(x,y) = -7x + 3y$; $A(-1,2)$; $B(3,-2)$.
21) $f(x,y) = 6x + 2y$; $A(-1,3)$; $B(2,-3)$.
22) $f(x,y) = -x + 2y$; $A(0,-3)$; $B(1,2)$.
23) $f(x,y) = x - 2y$; $A(3,-2)$; $B(2,1)$.
24) $f(x,y) = -2x + 3y$; $A(4,0)$; $B(1,3)$.
25) $f(x,y) = -3x - 2y$; $A(4,1)$; $B(2,-1)$.
26) $f(x,y) = 7x + 3y$; $A(-5,3)$; $B(3,2)$.
27) $f(x,y) = -4x + 3y$; $A(-4,1)$; $B(-3,2)$.
28) $f(x,y) = -3x + 5y$; $A(-3,2)$; $B(2,3)$.
29) $f(x,y) = -7x + 2y$; $A(1,3)$; $B(4,4)$.
30) $f(x,y) = 7x + 5y$; $A(-3,2)$; $B(-4,2)$.

2.6 Завдання 6

Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду $\int\limits_{l} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.

1) $P(x,y) = x + y$; $Q(x,y) = xy$;
$l : y = x + 1$; від точки з x_1=0 до точки з x_2=2 .
2) $P(x,y) = x + 2y$; $Q(x,y) = -x + y$;
$l : y = 3x + 2$; від точки з x_1=1 до точки з x_2=2 .
3) $P(x,y) = 2x - y$; $Q(x,y) = x + y$;
$l : y = x + 2$; від точки з x_1=2 до точки з x_2=3 .
4) $P(x,y) = 3x + y$; $Q(x,y) = 2x - y$;
$l : y = x^2$; від точки з x_1=1 до точки з x_2=1.
5) $P(x,y) = 2x - y$; $Q(x,y) = x - y$;

$l: y=\sqrt{x}$; від точки з x_1=0 до точки з x_2=4 .

6) $P(x,y)=x+y$; $Q(x,y)=2x+y$;

$l: x=3\cos t; y=\sin t$; від точки з t_1=0 до точки з t_2=$\frac{p}{2}$.

7) $P(x,y)=2x+y$; $Q(x,y)=-2x+y$;

$l: x=2\cos t; y=2\sin t$; від точки з t_1=0 до точки з t_2=p .

8) $P(x,y)=3x+2y$; $Q(x,y)=x+2y$;

$l: y=3x+1$; від точки з x_1=1 до точки з x_2=2 .

9) $P(x,y)=3x-2y$; $Q(x,y)=5x+1$;

$l: y=-x+1$; від точки з x_1=0 до точки з x_2=3 .

10) $P(x,y)=xy$; $Q(x,y)=2x-y$;

$l: y=-2x+3$; від точки з x_1=0 до точки з x_2=2 .

11) $P(x,y)=x^2+y$; $Q(x,y)=3x-2y$;

$l: y=-x+3$; від точки з x_1=0 до точки з x_2=3 .

12) $P(x,y)=x+y^2$; $Q(x,y)=x+2$;

$l: y=1-x^2$; від точки з x_1=0 до точки з x_2=1 .

13) $P(x,y)=x-2y$; $Q(x,y)=xy$;

$l: y=\sqrt{x}$; від точки з x_1=1 до точки з x_2=4 .

14) $P(x,y)=x+3y$; $Q(x,y)=x^2y$;

$l: y=x^2+1$; від точки з x_1=0 до точки з x_2=3 .

15) $P(x,y)=3xy$; $Q(x,y)=x+y$;

$l: x=2\cos t; y=2\sin t$; від точки з t_1=0 до точки з t_2=$\frac{p}{2}$.

16) $P(x,y)=4x$; $Q(x,y)=-x+y$;

$l: y=2x-3$; від точки з x_1=1 до точки з x_2=3 .

17) $P(x,y) = -2y\,; Q(x,y) = 2x + y\,;$

$l: y = -x + 2\,;$ від точки з $x_1=0$ до точки з $x_2=4$.

18) $P(x,y) = -x + 2y\,; Q(x,y) = xy\,;$

$l: x = 3\cos t; y = 2\sin t\,;$ від точки з $t_1=0$ до точки з $t_2=\frac{p}{2}$.

19) $P(x,y) = -2x + y\,; Q(x,y) = x^2 y\,;$

$l: y = 3x - 2\,;$ від точки з $x_1=1$ до точки з $x_2=3$.

20) $P(x,y) = -3x + 2y\,; Q(x,y) = x + 2y\,;$

$l: y = -2x + 3\,;$ від точки з $x_1=0$ до точки з $x_2=2$.

21) $P(x,y) = -2y + 5\,; Q(x,y) = xy\,;$

$l: y = -x + 4\,;$ від точки з $x_1=0$ до точки з $x_2=4$.

22) $P(x,y) = 2x - 3\,; Q(x,y) = x - y\,;$

$l: y = -2x + 1;$ від точки з $x_1=1$ до точки з $x_2=2$.

23) $P(x,y) = -2x + y\,; Q(x,y) = x - 2y\,;$

$l: y = -3x + 2\,;$ від точки з $x_1=0$ до точки з $x_2=3$.

24) $P(x,y) = -3x + 4y\,; Q(x,y) = xy^2\,;$

$l: y = -2x + 5\,;$ від точки з $x_1=0$ до точки з $x_2=4$.

25) $P(x,y) = x + 4y\,; Q(x,y) = x\,;$

$l: x = 2\cos t; y = \sin t;$ від точки з $t_1=0$ до точки з $t_2=\frac{p}{2}$.

26) $P(x,y) = -x + 2y\,; Q(x,y) = xy^2\,;$

$l: y = x + 1;$ від точки з $x_1=1$ до точки з $x_2=2$.

27) $P(x,y) = -5x + 2y\,; Q(x,y) = x^2 y\,;$

$l: y = -2x + 1;$ від точки з $x_1=2$ до точки з $x_2=3$.

28) $P(x,y) = -3x + y\,; Q(x,y) = x - y\,;$

$l: y = -x + 4\,;$ від точки з $x_1=1$ до точки з $x_2=4$.

29) $P(x,y)=xy^2$; $Q(x,y)=2x+y$;
$l: y=x-2$; від точки з $x_1=0$ до точки з $x_2=2$.

30) $P(x,y)=5x-7y$; $Q(x,y)=x^2y$;
$l: y=2x-1$; від точки з $x_1=1$ до точки з $x_2=3$.

2.7 Завдання 7

Відновити функцію $u=u(x,y)$ по її повному диференціалу
$$du=P(x,y)dx+Q(x,y)dy.$$

1) $P(x,y)=2xy+e^y$; $Q(x,y)=x^2+xe^y$.

2) $P(x,y)=3x^2y+y^2+\cos(x+y)$; $Q(x,y)=x^3+2xy+\cos(x+y)$.

3) $P(x,y)=2xe^y+\cos y+y$; $Q(x,y)=x^2e^y-x\sin y+x$.

4) $P(x,y)=2x\sin y+y^3+2$; $Q(x,y)=x^2\cos y+3xy^2$.

5) $P(x,y)=y^3e^x+y^2+1$; $Q(x,y)=3y^2e^x+2xy+2$.

6) $P(x,y)=2x\cos^2 y+e^{xy}y$; $Q(x,y)=-2x^2\cos y\cdot\sin y+e^{xy}x+3$.

7) $P(x,y)=\sin^2 y+3e^{3x}$; $Q(x,y)=\sin^2 y+2(x+y)\cos y\cdot\sin y+2$.

8) $P(x,y)=6xy^2+2x$; $Q(x,y)=6x^2y+4y$.

9) $P(x,y)=2x\cos 2y-2y^2\sin 2x$; $Q(x,y)=-2x^2\sin 2y+2y\cos 2x$.

10) $P(x,y)=2xe^{2y}+2y^2e^{2x}+2$; $Q(x,y)=2x^2e^{2y}+2ye^{2x}$.

11) $P(x,y)=y^5+5x^4y-2$; $Q(x,y)=5xy^4+x^5+3$.

12) $P(x,y)=3x^2y^3+y^2+2xy$; $Q(x,y)=3x^3y^2+2xy+x^2$.

13) $P(x,y)=y^2+4x^3y+7$; $Q(x,y)=2xy+x^4-2$.

14) $P(x,y)=2xy^3+3x^2y^2+7y$; $Q(x,y)=3x^2y^2+2x^3y+7x$.

15) $P(x,y)=3x^2y^2+y^3+2y$; $Q(x,y)=2x^3y+3xy^2+2x$.

16) $P(x,y)=4x^3y^2+2xy^4+3$; $Q(x,y)=2x^4y+4x^2y^3-2$.

17) $P(x,y)=3x^2y^2+2xy-7y$; $Q(x,y)=2x^3y+x^2-7x$.

18) $P(x,y)=6x^2y+6xy^2-1$; $Q(x,y)=2x^3+6x^2y+1$.

19) $P(x,y)=14xy^3-5y$; $Q(x,y)=21x^2y^2-5x+2$.

20) $P(x,y)=20x^3y^2-3y+1$; $Q(x,y)=10x^4y-3x-2$.

21) $P(x,y)=9x^2y^4-5y^2$; $Q(x,y)=12x^3y^3-10xy+2$.

22) $P(x,y)=3y^5+20x^4y-2$; $Q(x,y)=15xy^4+4x^5$.

23) $P(x,y)=2xy^6+6x^5y^2+4x$; $Q(x,y)=6x^2y^5+2x^6y-2y$.

24) $P(x,y)=2xy^5+6xy^2$; $Q(x,y)=5x^2y^4+6x^2y+3$.

25) $P(x,y)=6x^2y^3+y^4+3$; $Q(x,y)=6x^3y^2+4xy^3$.

26) $P(x,y)=e^{2y}+3ye^{3x}-y$; $Q(x,y)=2xe^{2y}+e^{3x}-x$.

27) $P(x,y)=7x^6y^2+2xy^3-1$; $Q(x,y)=2x^7y+3x^2y^2+2$.

28) $P(x,y)=6x^5y^5+6xy^3+3$; $Q(x,y)=5x^6y^4+9x^2y^2$.

29) $P(x,y)=6xy^3+10y^2+1$; $Q(x,y)=9x^2y^2+20xy$.

30) $P(x,y)=10xy^6+3y^3$; $Q(x,y)=30x^2y^5+9xy^2+4$.

2.8 Завдання 8

Знайти похідну функції U = U (x, y, z) **у напрямі вектора** $\overline{A_1A_2}$ **в т.** A_1 **та grad U|$_{A1}$**

1. U= $\ln\left(x+\dfrac{y}{2x}\right)+x+\dfrac{1}{4}+2z$, A_1 *(1; 2; 3),* A_2 *(3; 4; 1).*

2. U= $5\left(x+y-\sqrt{x^2+y^2}\right)+2y+3-4z$, A_1 *(3; 4; 1)*, A_2 *(3; 2; -1).*

3. U=$5arctg(x-y)^7+2y+x+2\ln 2z$, A_1 *(3; 4; 1)*, A_2 *(2; -1; 1).*

4. U= $2tg\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{y}+2z\right)+y+3z+7$, A_1 *(1; 1; 0)*, A_2 *(3; 4; 1).*

5. U=$\sin(x^2+y^5-2z)+2y+7z+5$, A_1 *(1; 1; 1)*, A_2 *(0; 0; 1).*

6. U=$xye^{pxy}+(1-p)y+2(1-p)+zp$, A_1 *(1; 1; 1)*, A_2 *(1; 0; 1).*

7. U=$tg(x^2+y^4-2z)+2y+6z+4$, A_1 *(1; 1; 1)*, A_2 *(0; 0; 0).*

8. U= $\sqrt{x^2+y^2+z^2}-(x+y+z)+5y+9z+10$, A_1 *(2;3;6)*, A_2 *(3;4;1)*.

9. U= $x^2y+y^2z+z^2x$, A_1 *(1;-1;2)*, A_2 *(3;4;-1)*.

10. U= $5xy^3z^2$, A_1 *(2;1;-1)*, A_2 *(4;-3;0)*.

11. U= $\ln(x^2+y^2+z^2)$, A_1 *(-1;2;1)*, A_2 *(3;1;-1)*.

12. U= $ze^{x^2+y^2+z^2}$, A_1 *(2,1,-1)*, A_2 *(3,-4,2)*.

13. U= $\ln(xy+yz+xz)$, A_1 *(-2,3-1)*, A_2 *(2,1,-3)*.

14. U= $\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}$, A_1 *(1,1,1)*, A_2 *(3,2,1)*.

15. U= x^2y+xz^2-2, A_1 *(1,1,-1)*, A_2 *(2,-1,3)*.

16. U= $xe^y+ye^x-z^2$, A_1 *(3,0,2)*, A_2 *(4,1,3)*.

17. U= $3xy^2+z^2-xyz$, A_1 *(1,1,2)*, A_2 *(3,-1,4)*.

18. U= $5x^2yz-xy^2+yz^2$, A_1 *(1,1,1)*, A_2 *(9,-3,9)*.

19. U= $(x^2+y^2+z^2)^3$, A_1 *(1,2,-1)*, A_2 *(0,-1,3)*.

20. U= x^{yz}, A_1 *(3,1,4)*, A_2 *(1,-1,-1)*.

21. U= $\ln\left(x+\frac{y}{2x}\right)+x+\frac{1}{4}+2z$, A_1 *(1; 2; 3)*, A_2 *(3; 4; 1)*.

22. U= $5(x+y-\sqrt{x^2+y^2})+2y+3-4z$, A_1 *(3; 4; 1)*, A_2 *(3; 2; -1)*.

23. U= $5arctg(x-y)^7+2y+x+2\ln 2z$, A_1 *(3; 4; 1)*, A_2 *(2; -1; 1)*.

24. U= $2tg\left(\sqrt{x}-1/y+2z\right)+y+3z+7$, A_1 *(1; 1; 0)*, A_2 *(3; 4; 1)*.

25. U= $\ln(1+x^2-y^2+z^2)$, A_1 *(1,1,1)*, A_2 *(5,-4,8)*.

26. U= $\sin(x^2+y^5-2z)+2y+7z+5$, A_1 *(1; 1; 1)*, A_2 *(0; 0; 1)*.

27. U= $xye^{pxy}+(1-p)y+2(1-p)+zp$, A_1 *(1; 1; 1)*, A_2 *(1; 0; 1)*.

28. U= $tg(x^2+y^4-2z)+2y+6z+4$, A_1 *(1; 1; 1)*, A_2 *(0; 0; 0)*.

29. U= $x^2y+y^2z+z^2x$, A_1 *(1;-1;2)*, A_2 *(3;4;-1)*.

30. U= x^2y+xz^2-2, A_1 *(1,1,-1)*, A_2 *(2,-1,3)*.

2.9 Завдання 9

а) Обчислити течію векторного поля $\bar{a}$(M) через зовнішню поверхню піраміди, створену площиною (P) та координатними площинами двома способами:

1) за означениям ; 2) за допомогою формули Остроградського-Гаусса.

1. $\bar{a}=3x\bar{i}+(y+z)\bar{j}+(x-z)\bar{k}$ (P):$x+3y+z=3$
2. $\bar{a}=(3x-1)\bar{i}+(y-x+z)\bar{j}+4z\bar{k}$ (P)$2x-y-2z=2$
3. $\bar{a}=x\bar{i}+(x+z)\bar{j}+(y+z)\bar{k}$ (P):$3x+3y+z=3$
4. $\bar{a}=(x+z)\bar{i}+(z-x)\bar{j}+(x+2y+z)\bar{k}$ (P):$x+y+z=2$
5. $\bar{a}=(y+2z)\bar{i}+(x+2z)\bar{j}+(x-2y)\bar{k}$ (P):$2x+y+2z=2$
6. $\bar{a}=(x+z)\bar{i}+2y\bar{j}+(x+y-z)\bar{k}$ (P):.$x+2y+z=2$
7. $\bar{a}=(3x-y)\bar{i}+(2y+z)\bar{j}+(2z-x)\bar{k}$ (P):$2x-3y+z=6$
8. $\bar{a}=(2y+z)\bar{i}+(x-y)\bar{j}-2z\bar{k}$ (P):$x-y+z=2$
9. $\bar{a}=(x+y)\bar{i}+3y\bar{j}+(y-z)\bar{k}$ (P):$2x-y-2z=-2$
10. $\bar{a}=(x+y-z)\bar{i}-2y\bar{j}+(x+2z)\bar{k}$ (P):$x+2y+z=2$
11. $\bar{a}=(y-z)\bar{i}+(2x+y)\bar{j}+z\bar{k}$ (P):$2x+y+z=2$
12. $\bar{a}=x\bar{i}+(y-2z)\bar{j}+(2x-y+2z)\bar{k}$ (P):$x+2y+2z=2$
13. $\bar{a}=(x+2z)\bar{i}+(y-3z)\bar{j}+z\bar{k}$ (P):$3x+2y+2z=6$
14. $\bar{a}=4x\bar{i}+(x-y-z)\bar{j}+(3y+2z)\bar{k}$ (P):$2x+y+z=4$
15. $\bar{a}=(2z-x)\bar{i}+(x+2y)\bar{j}+3z\bar{k}$ (P):$x+4y+2z=8$
16. $\bar{a}=4z\bar{i}+(x-y-z)\bar{j}+(3y+z)\bar{k}$ (P):$x-2y+2z=2$
17. $\bar{a}=(x+y)\bar{i}+(y+z)\bar{j}+2(x+z)\bar{k}$ (P): $3x-2y+2z=6$
18. $\bar{a}=(x+y+z)\bar{i}+2z\bar{j}+(y-7z\}\bar{k}$ (P}:$2x+3y+z=6$
19. $\bar{a}=(2x-z)\bar{i}+(y-x)\bar{j}+(x+2z)\bar{k}$ (P):$x-y+z=2$
20. $\bar{a}=(2y-z)\bar{i}+(x+y)\bar{j}+x\bar{k}$ (P):$x+2y+2z=4$
21. $\bar{a}=(2z-x)\bar{i}+(x-y)\bar{j}+(3x+z)\bar{k}$ (P):$x+y+2z=2$

22. $\bar a = (x + z)\,\bar i + (x + 3y)\,\bar j + y\bar k$ (P): $x + y + 2z = 2$

23. $\bar a = (x + z)\,\bar i + z\,\bar j + (2x-y)\,\bar k$ (P): $2x + 2y+.z = 4$

24. $\bar a = (3x + y)\,\bar i + (x + z)\,\bar j + y\bar k$ (P): $x + 2y + z = 2$

25. $\bar a = (y+z)\,\bar i + (2x - z)\,\bar j + (y + 3z)\,\bar k$ (P): $2x+y+3z = 6$

26. $\bar a = (y + z)\,\bar i + (x + 6y)\,\bar j + y\bar k$ (P): $x + 2y + 2z = 2$

27. $\bar a = (2y-z)\,\bar i + (x + 2y)\,\bar j + y\bar k$ (P): $x + 3y + 2z = 6$

28. $\bar a = (y + z)\,\bar i + x\,\bar j + (y-2z)\,\bar k$ (P): $2x + 2y + z = 2$

29. $\bar a = (x + z)\,\bar i + z\,\bar j + (2x - y)\,\bar k$ (P): $3x + 2y + z = 6$

30. $\bar a = z\bar i + (x + y)\,\bar j + y\bar k$ (P): $2x + y + 2z = 2$

б) Обчислити двома способами течію вектора $\bar a$ крізь замкнену поверхню σ (нормаль зовнішня).

1. $\bar a = (x + z)\bar i + (z + y)\bar k$; $\sigma: \{x^2 + y^2 = 9, z = x, z = 0 (z > 0)\}$.

2. $\bar a = 2(z - y)\bar j + (x - z)\bar k$; $\sigma: \{z = x^2 + 3y^2 + 1, z = 0, x^2 + y^2 = l)$.

3. $\bar a = x\bar i + z\bar j - y\bar k$; $\sigma: \{z = 4-2(x^2 + y^2), z = 2(x^2 + y^2)\}$.

4. $\bar a = 4x\bar i - 2y\bar i - z\bar k$; $\sigma: \{x^2 + y^2 = 1, z = 0, x + 2y + 3z = 6\}$.

5. $\bar a = 2x\bar i + z\bar k$; $\sigma: \{z = 3x^2 + 2y^2 + l, x^2+y^2 = 4, z = o\}$.

6. $\bar a = z\bar i + (3y-x)\,\bar j - z\bar k$; $\sigma: \{x^2 + y^2 = l, z = x^2 + y^2 + 2, z = 0\}$.

7. $\bar a = (z + y)\bar i + (x-z)\bar j - z\bar k$; $\sigma: \{x^2+4y^2 = 4, 3x+4y+z = 12, z = 1\}$.

8. $\bar a = (x+y+z)\,\bar i + (2y-x)\,\bar j + (3z+y)\bar k$;
$\sigma: \{y = x, y = 2x, x = 1, z = x^2 + y^2, z = 0\}$.

9. $\bar a = -2x\bar i + z\bar j + (x + y)\,\bar k$; $\sigma: (x^2 + y^2 = 2y, z = x^2 + y^2, z = O)$.

10. $\bar a = (x + y)\,\bar i + (z + y)\,\bar j + (z + x)\,\bar k$;
$\sigma: \{y = 2x, y = 4x, x = 1, z = y^2, z = 0\}$.

11. $\bar a = (x+z)\,\bar i + y\bar k$; $\sigma: \{z = 2 - x^2 - y^2, z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$.

12. $\bar a = x\bar i + y\bar j + z\bar k$; $\sigma: \{z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, z = 0\}$.

13. $\bar{a} = (6x-\cos y)\,\bar{i} + (e^{x} + z)\,\bar{j} + (2y+3z)\,\bar{k}$; σ: $\{x^2+y^2 = z^2,\ z=1,\ z=2\}$.

14. $\bar{a} = 3x\bar{i} - z\bar{j}$; σ: $\{z = 6-x^2-y^2,\ z = \sqrt{x^2+y^2}\}$.

15. $\bar{a} = x^2\,\bar{i} + y^2\,\bar{j} + z\bar{k}$: σ: $\{x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z = \sqrt{x^2+y^2}\}$.

16. $\bar{a} = 17x\bar{i} + 7y\bar{j} + 11z\bar{k}$;

σ: $\{z = x^2 + y^2,\ z = 2(x^2 + y^2),\ y = x^2,\ y = x\}$.

17. $\bar{a} = 8x\bar{i} - 2y\bar{j} + x\bar{k}$; σ: $\{x + y = 1,\ x = 0,\ z = x^2 + y^2,\ z = 0\}$.

18. $\bar{a} = 4x\bar{i} - 2y\bar{j} - z\bar{k}$;

σ: $\{3x+2y=12, 3x + y = 6, y = 0, z = 0, x + y + z = 6\}$.

19. $\bar{a} = (z + y)\,\bar{i} + y\bar{j} - x\bar{k}$; σ: $\{x^2 + y^2 = 2y,\ y = 2\}$.

20. $\bar{a} = 2x\bar{i} + 2y\bar{j} + z\bar{k}$; σ: $\{y = x^2,\ y = 4x^2,\ y = 1,\ z = y,\ z = 0 (x \geq 0)\}$.

21. $\bar{a} = (2y - 15)\,\bar{i} + (z - y)\,\bar{j} - (x - 3y)\,\bar{k}$;

σ: $\{z = 3x^2 + y^2 + 1,\ z = 0,\ x^2 + y^2 = \frac{1}{4}\}$

22. $\bar{a} = (x^2 + xy)\,\bar{i} + (y^2 + yz)\,\bar{j} + (z^2 + xz)\,\bar{k}$;

σ: $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z = \sqrt{x^2+y^2}\}$.

23. $\bar{a} = (3z^2 + x)\,\bar{i} + (e^{x} - 2y)\,\bar{j} + 2z\bar{k}$;

σ : $\{x^2 + y^2 = z^2,\ z = 1,\ z = 4\}$.

24. $\bar{a} = (8x + l)\,\bar{i} + (zx - 4y)\,\bar{j} + (e^{x} - z)\,\bar{k}$; σ : $\{x^2 + y^2 + z^2 = 2y\}$.

25. $\bar{a} = xy^2\,\bar{i} + x^2y\,\bar{j} + z\,\bar{k}$;

σ: $\{x^2 + y^2 = 1,\ z = 0,\ z = l\ (x \geq 0,\ y \geq 0)\}$.

26. $\bar{a} = (x + z)\bar{i} + (z + y)\bar{k}$; σ: $\{x^2 + y^2 = 9, z = x, z = 0 (z > 0)\}$.

27. $\bar{a} = 2(z - y)\,\bar{j} + (x - z)\,\bar{k}$; σ : $\{z = x^2 + 3y^2 + 1, z = 0, x^2 + y^2 = l)$.

28. $\bar{a} = x\bar{i} + z\bar{j} - y\bar{k}$; σ:$\{z = 4-2(x^2 + y^2)\ z = 2(x^2 + y^2)\}$.

29. $\bar{a} = 4x\bar{i} - 2y\bar{i} - z\,\bar{k}$; σ: $\{x^2 + y^2 = 1, z = 0,\ x + 2y + 3z = 6\}$.

30. $\bar{a} = 2x\bar{i} + z\bar{k}$; σ: $\{z = 3x^2 + 2y^2 + l,\ x^2+y^2 = 4, z=0\}$.

2.10 Завдання 10

Для даного векторного поля

$\bar{a} = P(x,y,z)\,\bar{i} + Q(x,y,z)\,\bar{j} + R(x,y,z)\,\bar{k}$

знайти $div\,\bar{a}$, $rot\,\bar{a}$ **в точці** M_0**.**

1) $P = xy - z^2$; $Q = 2x - z$; $R = xyz$; $M_0(1, -1, 1)$.
2) $P = yz - xy$; $Q = 3y - z$; $R = x + z$; $M_0(-1, 2, 1)$.
3) $P = xy - 2z$; $Q = 2xy + xz$; $R = y - z$; $M_0(1, 2, 0)$.
4) $P = x^3 - z^3$; $Q = xy^2 + z$; $R = xz + y$; $M_0(-1, 3, 1)$.
5) $P = x^2 y + 3z$; $Q = xz + 2z$; $R = yz + 2x$; $M_0(-2, 1, 1)$.
6) $P = 7x^2 y^3$; $Q = xz^2 + y$; $R = 3x^2 z + y$; $M_0(3, -1, 1)$.
7) $P = 3xz^3$; $Q = 2yz + x$; $R = 2x^2 z + 3y$; $M_0(-2, 1, -1)$.
8) $P = 3xy^2 + z$; $Q = x - 3z$; $R = 3x^2 z + 2y$; $M_0(1, 2, 0)$.
9) $P = 2x^4 y + zx$; $Q = z + 2y$; $R = 4xz$; $M_0(1, -2, 1)$.
10) $P = xy - yz$; $Q = 3xz^2$; $R = x - 2z$; $M_0(1, -1, 3)$.
11) $P = x^2 y + 4z$; $Q = 2x^2 z$; $R = 2x + z$; $M_0(1, 1, 0)$.
12) $P = x^2 z + 2y$; $Q = 3y^2 z$; $R = 3y + z$; $M_0(1, -2, 1)$.
13) $P = y^2 z + 3z$; $Q = 2xy^2$; $R = 2x + 3z$; $M_0(1, 3, -1)$.
14) $P = xz^2 + 2y$; $Q = 3x + z$; $R = yz^3$; $M_0(1, -2, 1)$.
15) $P = 3xz + 2y^2$; $Q = 7x + 2y$; $R = xz^2$; $M_0(1, 3, -2)$.
16) $P = 2xz^2 + 3y$; $Q = 3x + 2z$; $R = yz$; $M_0(1, -2, 0)$.
17) $P = 3yz + 2x$; $Q = 5y + xz$; $R = xyz$; $M_0(-1, 2, 2)$.
18) $P = 2yz + 5x$; $Q = xy + 3z$; $R = x - z$; $M_0(-1, 0, 2)$.

19) $P = xz^3 + y\,; Q = 2xy^3 + z\,; R = 2y + 3z\,; M_0(0\,,1\,,2)$.

20) $P = xz^2 + 3y\;\; ; Q = 3xy + z\;\; ; R = x + z\;\; ; M_0(-1\,,2\,,0)$.

21) $P = xz + 4y\,; Q = xz + y^2\;\; R = x^2 + yz\,; M_0(3\,,-1\,,0)$.

22) $P = 2yz + 5x\;\; ; Q = yz + x\;\; ; R = y^2 + z^2; M_0(1\,,-1\,,1)$.

23) $P = xz + 2y\;\; ; Q = xz^2\;\; ; R = y^3 + z\;\;\; ; M_0(-1\,,2\,,0)$.

24) $P = xz + y\;\; ; Q = 7y - z\;\; ; R = y^2 z + x\;\; ;\;\; ; M_0(-3\,,0\,,1)$.

25) $P = y^2 z^2\;\; ; Q = 3x - yz\;\; ; R = 5x^2 z\;\;\; ; M_0(-2\,,0\,,-1)$.

26) $P = 3xz + 4y\;\; ; Q = 3x + 2z\;\; ; R = 5x^2 y\;\;\; ; M_0(-3\,,1\,,0)$.

27) $P = 4xy + 2z\;\; ; Q = 3xz\;\; ; R = x^2 + yz\;\;\; ; M_0(-2\,,1\,,1)$.

28) $P = x^2 y + 3z\;\; ; Q = 4yz\;\; ; R = x + 5z\;\;\; ; M_0(-3\,,2\,,1)$.

29) $P = 5xy + 2z\;\; ; Q = 5yz^2\;\; ; R = y + 4z\;\;\; ; M_0(0\,,1\,,2)$.

30) $P = 3xz + 2y\;\; ; Q = 7y^2 z\;\; ; R = x - 4z\;\;\; ; M_0(-1\,,2\,,1)$.

2.11 Завдання 11

Обчислити циркуляцію векторного поля $\bar{a}$ по контуру трикутника, який утворюється внаслідок перетину площини P з координатними площинами, двома способами:

а) за означенням

б) із застосуванням формули Стокса.

1) $\bar{a} = y\,\bar{i} + (x+z)\,\bar{j} + z\,\bar{k}\,;\;\; P : x + 2y + z = 2.$

2) $\bar{a} = (x+2z)\,\bar{i} + z\,\bar{j} + (y+z)\,\bar{k}\,;\;\; P : 2x + y + z = 2.$

3) $\bar{a} = (2x-y)\,\bar{i} + y\,\bar{j} + (x+z)\,\bar{k}\,;\;\; P : x + y + 2z = 2.$

4) $\bar{a} = (x+2y)\,\bar{i} + (y+z)\,\bar{j} + 2y\,\bar{k}\,;\;\; P : x + y + z = 1.$

5) $\bar{a} = (x+2z)\,\bar{i} + x\,\bar{j} + (y+z)\,\bar{k}\,;\;\; P : x + 3y + z = 3.$

6) $\bar{a} = (y+z)\,\bar{i} + z\,\bar{j} + (x+2z)\,\bar{k}$; $P: x+y+3z=3.$

7) $\bar{a} = (x+3z)\,\bar{i} + (y+z)\,\bar{j} + y\,\bar{k}$; $P: 3x+y+z=3.$

8) $\bar{a} = (2x+z)\,\bar{i} + (x+y)\,\bar{j} + z\,\bar{k}$; $P: 2x-2y+z=2.$

9) $\bar{a} = (2x-z)\,\bar{i} + (x-2y)\,\bar{j} + x\,\bar{k}$; $P: x+2y+2z=2.$

10) $\bar{a} = (x+3z)\,\bar{i} + (y-2x)\,\bar{j} + (2x+z)\,\bar{k}$; $P: 2x+y+2z=2.$

11) $\bar{a} = (x-z)\,\bar{i} + (2y+x)\,\bar{j} + (x-z)\,\bar{k}$; $P: 2x+y+3z=6.$

12) $\bar{a} = (3x+z)\,\bar{i} + (4x+y)\,\bar{j} + (y+3z)\,\bar{k}$; $P: x-2y+3z=6.$

13) $\bar{a} = (x-2z)\,\bar{i} + (y+2z)\,\bar{j} + (x-2z)\,\bar{k}$; $P: 3x+2y+z=6.$

14) $\bar{a} = (2x-y)\,\bar{i} + (x-3z)\,\bar{j} + (x-2y)\,\bar{k}$; $P: x+2y+z=4.$

15) $\bar{a} = (3x+y)\,\bar{i} + z\,\bar{j} + (x+3y)\,\bar{k}$; $P: x+2y+2z=4.$

16) $\bar{a} = z\,\bar{i} + (-2x+y)\,\bar{j} + (x+y)\,\bar{k}$; $P: 2x+y+z=4.$

17) $\bar{a} = (y+z)\,\bar{i} + (x-2y)\,\bar{j} + (3y-2z)\,\bar{k}$; $P: x+2y+2z=4.$

18) $\bar{a} = (3x-y)\,\bar{i} + (y+2z)\,\bar{j} + x\,\bar{k}$; $P: 2x+y+2z=4.$

19) $\bar{a} = (2x+5y)\,\bar{i} + (y-3z)\,\bar{j} + y\,\bar{k}$; $P: 2x+2y+z=4.$

20) $\bar{a} = (3x+2z)\,\bar{i} + (x+z)\,\bar{j} + x\,\bar{k}$; $P: 2x+3y+2z=6.$

21) $\bar{a} = (2y+3z)\,\bar{i} + (y+2x)\,\bar{j} + z\,\bar{k}$; $P: 3x+2y+2z=6.$

22) $\bar{a} = (3y-2z)\,\bar{i} + (x+2y)\,\bar{j} + 5y\,\bar{k}$; $P: 2x+2y+3z=6.$

23) $\bar{a} = (y+5z)\,\bar{i} + (2x-3y)\,\bar{j} + x\,\bar{k}$; $P: 3x+3y+z=3.$

24) $\bar{a} = (y-6z)\,\bar{i} + (4x-2y)\,\bar{j} + 3x\,\bar{k}$; $P: x+3y+3z=3.$

25) $\bar{a} = (3y+x)\,\bar{i} + (2z+y)\,\bar{j} + 5y\,\bar{k}$; $P: 3x-y+3z=3.$

26) $\bar{a} = (y+4x)\,\bar{i} + (3z+2y)\,\bar{j} + 4x\,\bar{k}$; $P: 6x+6y+3z=6.$

27) $\bar{a} = (5y-x)\,\bar{i} + (7z+5y)\,\bar{j} + 7y\,\bar{k}$; $P: 3x+6y+6z=6.$

28) $\bar{a} = (x+7z)\,\bar{i} + (z+5y)\,\bar{j} + 4x\,\bar{k}$; $P: 6x+3y+6z=6.$

29) $\bar{a} = (2y+z)\,\bar{i} + (z+2x)\,\bar{j} + 3y\,\bar{k}$; $P: x+y+z=2.$

30) $\bar{a} = 6x\,\bar{i} + (3z-x)\,\bar{j} + (y+2x)\,\bar{k}$; $P: x-2y+z=2.$

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Означення подвійного інтеграла та його властивості.
2. Обчислення подвійних інтегралів в декартових координатах.
3. Геометричний зміст подвійного інтеграла.
4. Означення потрійного інтеграла та його властивості.
5. Обчислення потрійних інтегралів в декартових координатах.
6. Геометричний зміст потрійного інтеграла.
7. Заміна змінних в кратних інтегралах.
8. Обчислення кратних інтегралів у полярній, циліндричній та сферичній координатних системах.
9. Застосування кратних інтегралів для розв'язання прикладних задач механіки та фізики.
10. Означення криволінійного інтегралу першого роду. Його геометричний і фізичний зміст.
11. Означення криволінійного інтегралу другого роду. Його геометричний і фізичний зміст.
12. Обчислення криволінійного інтегралу першого роду.
13. Обчислення криволінійного інтегралу другого роду.
14. Властивості криволінійних інтегралів.
15. Формула Гріна. Умова незалежності криволінійних інтегралів від шляху інтегрування.
16. Застосування криволінійних інтегралів для розв'язання прикладних задач механіки та фізики.
17. Односторонні та двосторонні поверхні.
18. Поверхневі інтеграли I роду, їх обчислення.
19. Поверхневі інтеграли II роду, їх обчислення.
20. Теорема Остроградського-Гауса.
21. Формула Стокса.
22. Математичне означення поля. Скалярні та векторні поля. Вектор-функція.
23. Похідна за напрямком. Градієнт векторного поля, його властивості.
24. Потік векторного поля, його обчислення.
25. Застосування теореми Остроградського-Гауса до обчислення потоку векторного поля.
26. Дивергенція векторного поля і її обчислення.

27. Циркуляція і ротор векторного поля. Застосування теореми Стокса.
28. Приклади векторних полів.
29. Оператор Гамільтона. Оператор Лапласа.
30. Застосування теорії поля до розв'язання прикладних задач механіки та фізики.

ЛІТЕРАТУРА

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для ВТУЗов. – М.: 1970-1986.- т.1,2.
2. Будак Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. – М. Наука, 1967.
3. Г.І.Кулініч. Вища математика, книга 1,2. К.,1994.
4. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.И. и др. Математический анализ в вопросах и задачах. Функции нескольких переменных: Учеб. Пособие для студентов вузов.-М.: Высш.шк., 1988.
5. Сборник задач по курсу Высшей математики/ под ред. Г.И.Кручковича. – М.:Высш. Шк.., 1973
6. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высш.Шк.., 1980. – ч. 2.