

УДК 517.547.7

Сніжко Н.В.

канд. фіз.-мат. наук, доц. НУ «Запорізька політехніка»

ПРО ДЕЯКІ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ НА ДІЙСНІЙ ОСІ В ПРОСТОРАХ СУМОВНИХ ФУНКЦІЙ

В даних роботах [1, 2] встановлюються апроксимативні властивості частинних сум рядів Фур'є та інтерполяційних поліномів Лагранжа в просторах $L_{p\rho}$, $\rho(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $p > 1$ та L_p , $p \geq 2$ на дійсній осі R за умови, що наближення будується за системою функцій

$$\omega_k(x) = \left(\frac{x-i}{x+i} \right)^k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (1)$$

$$\psi_k(x) = \frac{2i}{x+i} \left(\frac{x-i}{x+i} \right)^k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2)$$

Нехай P_n (Q_n) – оператор, який ставить у відповідність кожній функції $f(x) \in L_{p\rho}$, $p > 1$ ($f_1(x) \in L_p$, $p \geq 2$) відрізок її ряду Фур'є за системою функцій (1) (відповідно (2)).

Теорема 1. Якщо $f(x) \in L_{p\rho}$, $p > 1$, або $f(x) \in C$, тоді $\|f(x) - (P_n f)(x)\|_{L_{p\rho}} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$;

якщо $f(x) \in L_{pp}^{(r)}$, $r \geq 1$, $p > 1$, тоді $\|f(x) - (P_n f)(x)\|_{L_{pp}} \leq \frac{d_1}{(n+1)^r}$,
 $n \rightarrow \infty$;

якщо $f(x) \in C^{(r)}$, $r \geq 1$, тоді $\|f(x) - (P_n f)(x)\|_{L_{pp}} \leq \frac{d_2}{(n+1)^r}$, $n \rightarrow \infty$,
 $p > 1$;

якщо $f(x) \in H_{\alpha}^{(r)}$, $r \geq 0$, $0 < \alpha \leq 1$, тоді
 $\|f(x) - (P_n f)(x)\|_{L_{pp}} \leq \frac{d_3}{(n+1)^{r+\alpha}}$, $n \rightarrow \infty$, $p > 1$.

Тут і далі d_i – цілком визначені сталі, які не залежать від n .

Теорема 2. Якщо $f_1(x) \in L_p$, $p \geq 2$, або $f_1(x) \in C_0$, тоді
 $\|f_1(x) - (Q_n f_1)(x)\|_{L_p} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$;

якщо $f_1(x) \in L_p^{(r)}$, $r \geq 1$, $p \geq 2$, тоді $\|f_1(x) - (Q_n f_1)(x)\|_{L_p} \leq \frac{d_4}{(n+1)^r}$,
 $n \rightarrow \infty$;

якщо $f_1(x) \in C_{01}^{(r)}$, $r \geq 1$, тоді $\|f_1(x) - (Q_n f_1)(x)\|_{L_p} \leq \frac{d_5}{(n+1)^r}$, $n \rightarrow \infty$,
 $p \geq 2$;

якщо $f_1(x) \in H_{\alpha 1}^{(r)}$, $r \geq 0$, $0 < \alpha \leq 1$, тоді
 $\|f_1(x) - (Q_n f_1)(x)\|_{L_p} \leq \frac{d_6}{(n+1)^{r+\alpha}}$, $n \rightarrow \infty$, $p \geq 2$.

Теореми 1 і 2 встановлюють достатні умови збіжності рядів Фур'є за системами функцій (1) та (2) відповідно в просторах L_{pp} , $\rho(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $p > 1$ та L_p , $p \geq 2$ на дійсній осі R в залежності від структурних властивостей апроксимованих функцій.

Нехай $f(x) \in C$. Тоді її інтерполяційний поліном Лагранжа за системою функцій (1) визначається наступним чином:

$$(L_n f)(x) = \sum_{k=-n}^n \alpha_k \omega_k(x), \quad \alpha_k = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^n f(x_j) e^{-\frac{2\pi}{2n+1}jk},$$

де

$$x_j = -ctg \frac{\pi}{2n+1} j, \quad j = -n, \dots, n. \quad (3)$$

Нехай $f_1(x) \in C_{01}$. Тоді її інтерполяційний поліном Лагранжа за системою функцій (1) визначається наступним чином:

$$(l_n f_1)(x) = \sum_{k=-n}^n \alpha_k^{(1)} \omega_k(x), \quad \alpha_k^{(1)} = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^n f_1(x_j) e^{-\frac{2\pi}{2n+1}jk},$$

де x_j – точки інтерполяції (3). В цьому випадку можна записати

$$(l_n f_1)(x) = - \sum_{k=-n}^n \gamma_k \psi_k(x), \quad \text{де } \gamma_k = \alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} + \dots + \alpha_{k+1}^{(1)}.$$

Теорема 3. Якщо $f(x) \in C$, тоді $\|f(x) - (L_n f)(x)\|_{L_{p\rho}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad p > 1;$

якщо $f(x) \in C^{(r)}, \quad r \geq 1$, тоді $\|f(x) - (L_n f)(x)\|_{L_{p\rho}} \leq \frac{d_7}{(n+1)^r}, \quad n \rightarrow \infty, \quad p > 1;$

якщо $f(x) \in H_{\alpha}^{(r)}, \quad r \geq 0, \quad 0 < \alpha \leq 1$, тоді $\|f(x) - (L_n f)(x)\|_{L_{p\rho}} \leq \frac{d_8}{(n+1)^{r+\alpha}}, \quad n \rightarrow \infty, \quad p > 1.$

Теорема 4. Якщо $f_1(x) \in C_{01}$, тоді $\|f_1(x) - (l_n f_1)(x)\|_{L_p} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad p \geq 2;$

якщо $f_1(x) \in C_{01}^{(r)}, \quad r \geq 1$, тоді $\|f_1(x) - (l_n f_1)(x)\|_{L_p} \leq \frac{d_9}{(n+1)^r}, \quad n \rightarrow \infty, \quad p \geq 2;$

якщо $f_1(x) \in H_{\alpha 1}^{(r)}$, $r \geq 0$ $0 < \alpha \leq 1$, тоді

$$\|f_1(x) - (l_n f_1)(x)\|_{L_p} \leq \frac{d_{10}}{(n+1)^{r+\alpha}}, \quad n \rightarrow \infty, \quad p \geq 2.$$

Теореми 3 і 4 встановлюють достатні умови збіжності в просторах $L_{p\rho}$,

$$\rho(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad p > 1 \text{ та } L_p, \quad p \geq 2 \text{ інтерполяційних поліномів Лагранжа на}$$

дійсній осі R за точками інтерполяції (3) у просторах C і C_0 відповідно в залежності від структурних властивостей апроксимованих функцій.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Snizhko N. V. The approximation of the functions on the real axis in the spaces of summable functions / N. V. Snizhko // Studii în metode de analiză numerică și optimizare. – Chișinău, 2000. – Vol. 2. – Nr. 1 (3). – P. 53–59.

2. Сніжко Н. В. Апроксимація функцій на дійсній осі в просторах сумовних функцій / Н. В. Сніжко, М. Я. Тихоненко // Науковий вісник Чернівецького університету: збірник наук. праць. Математика. – Вип. 150. – Чернівці : Рута, 2002. – С. 94–97.