

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**  
**«ЗАПОРІЗЬКА ПОЛІТЕХНІКА»**

**Електротехнічний факультет**  
**Кафедра електроприводу та автоматизації промислових установок**

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ**

до курсу:

**«ОСНОВИ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ СКЛАДНИХ  
ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ ТА КОМПЛЕКСІВ»**

**Частина 2**

**«Аналіз і синтез систем автоматичного управління під впливом  
статистичних випадкових факторів»**

**для студентів спеціальності G3 «Електрична інженерія»**  
**всіх форм навчання**

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ до курсу: «Основи наукових досліджень складних електромеханічних систем та комплексів». Частина 2: «Аналіз і синтез систем автоматичного управління під впливом статистичних випадкових факторів», для студентів спеціальності G3 «Електрична інженерія» всіх форм навчання. Укл. В.В. Зіновкін, проф., д.т.н.; М.Л. Антонов, доц., к.т.н.; Ю.О. Крисан, доц., к.т.н. – Запоріжжя. НУ «ЗП», 2026. – 49с.

Укладачі: В.В. Зіновкін, проф., д.т.н.;  
М.Л. Антонов, доц., к.т.н.;  
Ю.О. Крисан, доц., к.т.н.

Рецензент: А.Є. Казурова, доц., к.т.н.

Відповідний за випуск: А.В. Пирожок, доц., к.т.н.

Затверджено на засіданні кафедри ЕПА  
Протокол №5 від 04.02 2026 р.

Рекомендовано до видання НМК ЕТФ  
Протокол № 7 від 19.02 2026 р.

## ЗМІСТ

|                                                                                                       |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Вступ.....                                                                                            | 4  |
| 2 Аналітичні методи аналізу і синтезу САУ при впливі<br>випадкових похибок.....                       | 5  |
| 2.1. Аналітичний метод розрахунку випадкових похибок САУ.....                                         | 5  |
| 2.2 Визначення флуктуаційної помилки.....                                                             | 8  |
| 2.3 Графоаналітичний метод розрахунку випадкових помилок САУ.....                                     | 14 |
| 2.4 Оцінка помилок від перешкод, зумовлених<br>ширококутовими впливами. Еквівалентна смуга шумів..... | 18 |
| 2.5 Визначення випадкових похибок за допомогою електронної<br>моделі.....                             | 18 |
| 2.6 Синтез систем автоматичного керування при заданій структурі<br>та впливі випадкових сигналів..... | 20 |
| 2.7 Синтез САУ за заданою структурою та дії випадкових і<br>детермінованих сигналів.....              | 22 |
| 2.8 Синтез і процедура визначення оптимальної передавальної<br>функції.....                           | 25 |
| 2.9 Визначення оптимальної імпульсної перехідної функції.....                                         | 30 |
| 2.10 Синтез оптимальної системи з кінцевою пам'яттю.....                                              | 34 |
| 2.11 Розв'язання практичних задач із довільною структурою<br>системи.....                             | 38 |
| Висновки.....                                                                                         | 41 |
| Перелік джерел посилання.....                                                                         | 44 |

## ВСТУП

Дисципліна «Основи наукових досліджень складних електромеханічних систем та комплексів». Частина 1: «Аналіз і синтез систем автоматичного управління (САУ) під впливом статистичних випадкових факторів», для студентів спеціальності G3 «Електрична інженерія» всіх форм навчання призначена для більш оволодіння і засвоєння інженерних методів автоматичного управління складними електромеханічними системами. Вона є складовою підготовки магістрів денної та заочної форм навчання та сприяє виконанню самостійних та лабораторних робіт і дипломному проекту.

В конспекті лекцій розглянуто визначальні теоретичні основи побудови і роботи САУ при роботі електромеханічних об'єктів в складних умовах експлуатації та різних режимах навантаження. Приведено конкретні приклади побудови САУ відповідно до вирішення різних інженерних задач і вимог практики.

Наведенні методи та приклади можливо використовувати при інженерних розрахунках, науково-технічних дослідженнях та при виконанні практичних і самостійних робіт.

## 2 АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД РОЗРАХУНКУ ВИПАДКОВИХ ПОХИБОК САУ

На практиці і наукових дослідженнях доволі часто мають місце випадки коли вхідний випадковий сигнал має форму білого шуму. В таких випадках необхідно визначити дисперсію помилки замкненої системи з одиничною спектральною щільністю. При цьому необхідно враховувати відповідні параметри які можуть впливати на отриманий результат і, в значній мірі, характерні риси передавальної функції [1-9].

Розглянемо основні теоретичні положення та практичні приклади, що мають місце при науково-технічних дослідженнях.

### 2.1 Визначення передавальної функції формуючого фільтра

Аналітичний метод обчислення базується на використанні справочних таблиць для обчислення інтегралів, що складаються із дробно-раціональних функцій.

Визначити дисперсію похибки найпростіше, якщо вхідний випадковий сигнал має форму білого шуму [10].

У випадку коли вхід замкненої системи білого шуму з одиничною спектральною щільністю відкритий, дисперсія системної похибки визначається виразом

$$D_{zf} = \int_0^{\infty} k_{yf}^2(\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} K_{yf}(p) K_{yf}(-p) dp, \quad (2.1)$$

де  $K_{yf}(p)$  - Лапласове представлення імпульсної перехідної функції  $k_{yf}(\tau)$ , тобто передавальної функції системи.

Інтеграл вигляду (2.1) у дробно-раціональному субінтегративному виразі є табульованим.

Визначення дисперсії помилки для сигналів, відмінних від білого шуму, для яких спектральна щільність є раціональною парна функція частоти, отримана формулою

$$D_{zf} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} K_{yf}(p) K_{yf}(-p) F_{\Phi}(-p) dp = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{c(p)c(-p)}{d(p)d(-p)} dp, \quad (2.2)$$

де  $F_\phi(p)$  - передавальна функція формуючого фільтра, що перетворює білий шум зі спектральною щільністю  $S_\gamma(w) = a^2$  в процесі з заданою спектральною щільністю  $S_f(w)$ .

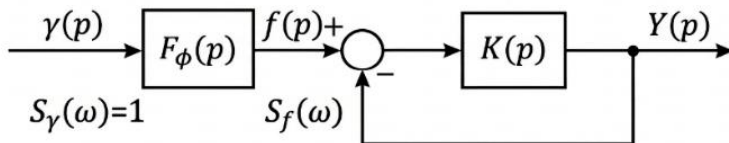


Рисунок 2.1 – Визначення еквівалентної передавальної функції системи з урахуванням формуючого фільтра

Для схеми послідовного з'єднання формуючого фільтра з даною системою (рис.2.1) при входному сигналі у вигляді білого шуму спектральна щільність сигналу на виході фільтра описується наступним рівнянням [11]:

$$S_f(w) = S_1(jw)S_1(-jw),$$

а частотну характеристику формуючого фільтра за виразом

$$F_\phi(jw) = \frac{S_1(jw)}{\sqrt{S_\gamma(w)}}, \quad (2.3)$$

або для білого шуму одиничної спектральної щільності маємо

$$\begin{aligned} S_\gamma(w) &= 1 \\ F_\phi(jw) &= (jw). \end{aligned}$$

Передавальна функція еквівалентної системи приймає наступний вигляд:

$$K_{yf}(p)F_\phi(p) = \frac{c(p)}{d(p)}. \quad (2.4)$$

Прирівнюючи поліноміальні коефіцієнти чисельника і знаменника правої частини рівняння (2.4) до коефіцієнтів многочленів

отримуємо наступні співвідношення:

$$c(p) = c_0 + c_1p + c_2p^2 + \dots + c_mp^m$$

та

$$d(p) = d + dp + d_2p^2 + \dots + d_np^n$$

( $n > m$ ), знаходимо значення останніх і обчислюємо інтеграл (2.1).

**Приклад 2.1.** Визначте передавальну функцію формуючого фільтра  $F_\Phi(p)$ , якщо спектральна щільність сигналу на вході реальної системи має наступний вигляд:

$$S_f(w) = \frac{2\alpha\sigma^2}{w^2 + a^2} = 2D \frac{a}{w^2 + a^2}.$$

Рішення: Представивши спектральну щільність у вигляді множників:

$$S_f(w) = \frac{\sigma\sqrt{2a}}{jw + a} \cdot \frac{\sigma\sqrt{2a}}{-jw + a},$$

знаходимо відповідно до формули (2.2)

$$F_\Phi(p) = \frac{K}{1 + pT}$$

Якщо спектральна щільність  $S_f(w)$  не є раціональною функцією або відома з експерименту, то для застосування аналітичного методу її потрібно апроксимувати раціональною функцією [12].

З цією метою необхідно визначитись із необхідною похибкою, що узгоджується із отриманими результатами, а потім із спектральною щільністю сигналу. В наслідку знаходимо флуктуаційну помилку, що відповідає структурній схемі, наприклад такої, що приведена на рис. 2.2. При цьому треба зформувати передавальну функцію системи керування ( $K_{yz}(p)$ ), спектральну щільність перешкоди ( $f(t)$ ) на вході системи ( $S_f(w)$ ), і знайти відповідну раціональну залежність ( $F_\Phi(p)$ ).

## 2.2 Визначення флуктуаційної похибки

Визначення флуктуаційної помилки розглядатимемо на основі структурної схеми, наведеної на рис. 1.6. Задано: передавальна функція системи  $K_{yz}(p)$  і спектральна щільність перешкоди  $f(t)$  на вході системи  $S_f(w)$ , причому  $K_{yz}(p)$  і знайдений вираз для  $F_\Phi(p)$  є раціональні дроби [13].

Дисперсія помилки, що спричинена інтерференцією, відповідно до формули (2.2) визначають за формулою

$$\begin{aligned} D_{zf} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{zf}(w) dw = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} K_{yf}(p) K_{yf}(-p) F_\Phi(p) F_\Phi(-p) dp = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{c(p)c(-p)}{d(p)d(-p)} dp \dots, \end{aligned}$$

де  $S_{zf}(w) = K_{yf}^2(w) S_f(w)$ .

Визначення помилок від задаючого впливу визначаються відповідно за формулою (2.2). При цьому, дисперсія помилки, зумовлена задаючим впливом, знаходиться за наступною формулою:

$$\begin{aligned} D_{zx} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{zx}(w) dw = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} K_{zx}(p) K_{zx}(-p) F_x(p) F_x(-p) dp \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{c(p)c(-p)}{d(p)d(-p)} dp, \end{aligned}$$

де  $S_{zx}(w) = K_{zx}^2(w) S_x(w)$ ;

$S_x(w)$  – спектральна щільність майстер-дії на вході системи;  
 $K^2_{zx}(w)$  – квадрат амплітудно-частотної характеристики помилки.

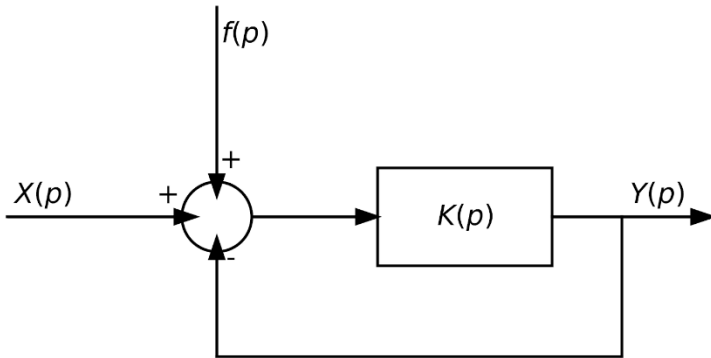


Рисунок 2.2 – Структурна схема визначення флуктуаційної похибки

Якщо в можливо визначитись із характерними рисами впливу  $X(t)$  то доцільно розрізнити сигнал у вигляді невинуватливої компоненти  $m_x(t)$ . Ця компонента є повільно змінною функцією часу, і стаціонарного центрованого випадкового процесу. В цьому випадку

$$X(t) = m_x(t) + \dot{X}(t),$$

і точність системи можна оцінити за загальною квадратичною похибкою  $\bar{Z}_x^2$ , яка є сумою квадратів наступних динамічних і випадкових похибок:

$$\bar{Z}_x^2 = z_d^2 + \bar{Z}_{\dot{x}}^2 = m_{zx}^2 + D_{zx}$$

або

$$\bar{Z}_x^2 = z_d^2 + \gamma \bar{Z}_{\dot{x}}^2$$

де  $\gamma$  - коефіцієнт, що визначає питому вагу випадкової похибки.

Динамічну випадкову похибку оцінюють за виразом:

$$z_d(t) = D_0 m_x(t) + D_1 m_x'(t) + D_2 m_x''(t) + \dots = m_{2x}(t).$$

Визначення похибки при спільній дії задаючого впливу і перешкоди враховується дисперсією сумарної похибки, що представляється результатом інтегрування

$$D_z = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_z(w) dw.$$

Спектральна щільність сумарної похибки знаходиться за наступною сумою відповідних параметрів впливу:

$$\begin{aligned} S_z(w) = \\ = K_{zx}^2(w)S_x(w) + K_{zx}(jw)K_{zf}(-jw)S_{fx}(w) + \\ + K_{zf}(jw)K_{zx}(-jw)S_{xf}(w) + K_{zf}^2(w)S_f(w), \end{aligned}$$

де  $S_{fx}(w)$  та  $S_{xf}(w)$  – взаємні спектральні щільності задаючого впливу і перешкоди

$$K_{zx}(jw) \text{ і } K_{zf}(jw) = K_{yf}(jw)$$

– частотні характеристики похибки за заданим впливом і перешкодою.

За відсутності кореляції між головною дією та інтерференцією можливо скористатись наступними умовами:

$$S_{fx}(w) = S_{xf}(w) = 0,$$

а також дисперсією помилки

$$D_z = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} K_{zx}^2(w)S_x(w)dw + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} K_{yf}^2(w)S_f(w)dw = D_{zx} + D_{zf}, \quad (2.5)$$

де  $D_{zx}$  - компонента дисперсії помилки, спричинена головною дією  $X(t)$ ;

$D_{zf}$  - помилка збурення, яка є частиною дисперсії  $f(t)$ .

Якщо задаючий вплив  $X(t)$  є регулярною функцією, а перешкода  $f(t)$  — стаціонарна випадкова функція, то похибка системи дорівнює сумі квадратів динамічної та випадкової складових похибок:

$$\overline{Z^2} = z_d^2 + \overline{Z_f^2} = z_d^2 + D_{zf}.$$

З метою більш ретельного розуміння сутті врахування впливу випадкових збурень розглянемо на прикладі.

**Приклад 2.2.** Знайти середньоквадратичну похибку системи супроводу цілі радіолокаційної станції.

На вхід системи керування надходять стаціонарні випадкові некорельовані сигнали – швидкість задаючого впливу  $X(t)$  спільно з перешкодою  $f(t)$ .

Їх вплив на передавальну функцію системи знаходимо скориставшись наступним рівнянням:

$$K_{yz}(p) = \frac{K_v(1 + pT_2)}{p(1 + pT_1)}.$$

При цьому, спектральна щільність швидкості задаючого впливу має вигляд

$$S_x(w) = \frac{2a^2\gamma}{w^2 + \gamma^2}.$$

Спектральну щільність перешкоди типу білого шуму враховуємо за відповідним рівнянням:

$$S_f(w) = N^2 = const.$$

Рішення: Середнє значення квадрату похибки представляємо у вигляді суми двох складових:

$$\overline{Z^2} = \overline{Z_x^2} + \overline{Z_f^2},$$

що в цьому випадку еквівалентне виразу

$$D_z = D_{zx} + D_{zf}.$$

Спектральну щільність сумарної похибки знаходимо за наступною сумою двох складових:

$$S_z(w) = K_{zx}^2(w)S_{\dot{x}}(w) + K_{zf}^2(w)S_f(w).$$

Підставивши у вираз спектральної щільності похибки її складові, отримаємо

$$S_x(w) = \left| \frac{T_1(jw) + 1}{T_1(jw)^2 + (1 + K_v T_2)jw + K_v} \right|^2 \frac{2a^2\gamma}{(w^2 + \gamma^2)} + \\ + \left| \frac{K_v(T_2 jw + 1)}{T_1(jw)^2 + (1 + K_v T_2)jw + K_v} \right|^2 N^2.$$

Використовуючи табличні інтеграли, знаходимо значення квадрата впливу складових, що впливають на точність керування у вигляді  $\overline{Z_{\dot{x}}^2}$

$$\overline{Z_{\dot{x}}^2} = D_{zx} = \frac{\gamma a^2 \left[ T_1^2 + \frac{1}{K_v \gamma} (1 + K_v T_2 + \gamma T_1) \right]}{(1 + K_v T_2 + \gamma T_1)(\gamma K_v T_2 + \gamma + K_v) - T_1 K_v \gamma}$$

$$\overline{Z_f^2} = D_{zf} = N^2 \frac{K_v (\gamma K_v T_2^2 + T_1)}{2T_1(1 + K_v T_2)}.$$

Якщо скористатись відомими параметрами системи та перешкодами у вигляді:  $K_v = 100\text{с}^{-1}$ ;  $T_1 = 1\text{ с}$ ;  $T_2 = 0,2\text{ с}$ ;  $N^2 = 0,36 \cdot 10^{-6}\text{рад}^2 \cdot \text{с}$ , то середньоквадратичну похибку знаходимо

$$Z_{\text{ск}} = 0,6 \cdot 10^{-3} \sqrt{\frac{100(1 + 0,04 \cdot 100)}{2 \cdot 1(1 + 20)}} = 2,1 \cdot 10^{-3}\text{рад} \approx 2\text{ п. к.}$$

Вирази для передавальної функції розімкнутої системи  $K_{yz}(p)$

при постійній величині спектральної щільності перешкоди на вході системи наведені в табл. 2.2.

Таблиця 2.2 – Спектральна щільність і перешкоди на вході системи

| Передавальні функції $K_{yz}(p)$           | Дисперсія $D_{zf}$                                                       |
|--------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| $\frac{K(1 + pT_2)}{(1 + pT_1)(1 + pT_3)}$ | $\frac{K^2[T_1T_3 + (1 + K)T_2^2]N^2}{2T_1T_3(1 + K)[T_1 + T_3 + KT_2]}$ |
| $\frac{K_v(1 + pT_2)}{p(1 + pT_1)}$        | $\frac{K_v \left(1 + K_v \frac{T_2^2}{T_1}\right) N^2}{2(1 + K_vT_2)}$   |
| $\frac{K_w(1 + pT_2)}{p^2(1 + pT_1)}$      | $\frac{(1 + 2K_vT_2^2)N^2}{2(T_2 - T_1)}$                                |

Визначення ступеня пригнічення перешкод системою. Ступінь пригнічення перешкод системою можна оцінити, ввівши коефіцієнт згладжування, рівний відношенню стандартного відхилення перешкоди на вході системи  $c/$  до стандартного відхилення помилки,  $\sigma_{zf}$  тобто

$$k_{\text{згл}} = \frac{\sigma_f}{\sigma_{zf}},$$

де

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_f(w) dw};$$

$S_f(w)$  - спектральна щільність перешкоди на вході системи.

**Приклад 2.3.** Визначити коефіцієнт згладжування і  $\sigma_{zf}$  системи, якщо на її вході діє перешкода зі спектральною щільністю

$$S_f(w) = \frac{2\beta\sigma_f^2}{1 + w^2\beta^2}.$$

а передавальна функція розімкнутої системи

$$K_{yz}(p) = \frac{K_v}{p},$$

де  $K_v = 0,5\text{с}^{-1}$ ;  $\sigma_f = 10$ ;  $\beta = 0,1\text{с}$ .

Рішення.

$$k_{\text{згл}} = \sqrt{1 + \frac{1}{K_v\beta}} = 4,6;$$

$$\sigma_{zf} = \frac{\sigma_f}{k_{\text{згл}}} = 2,18.$$

Основною перевагою аналітичного методу є можливість встановлення зв'язку між величиною RMS і параметрами системи, що дозволяє визначати значення параметрів системи, при яких RMS системи мінімальна. Однак для складних САУ аналітичний метод розрахунку випадкових похибок виявляється громіздким, і в цих випадках доводиться вдаватися до наближеного графічно-аналітичного методу.

## 2.3 Графоаналітичний метод розрахунку випадкових похибок САУ

Метод корисний для аналітичного опису спектральних щільностей головного ефекту  $S_x(w)$  та інтерференції  $S_f(w)$  за допомогою комплексних виразів, а також наявності високого порядку рівнянь динаміки системи, а також для прямого визначення спектральних щільностей і амплітудно-частотних характеристик за допомогою графічних засобів [14].

Процедура розрахунку для визначення помилки через інтерференцію виглядає так:

— будується амплітудно-частотна характеристика замкненої системи

$$K_{yf}(w) = K_0(w)$$

(рис.2.3). Ординати цієї кривої підносяться до квадрата, і будується

крива  $\llbracket K_0^2(w);$

– будується крива спектральної щільності помилки

$$S_z(w) = K_0^2(w)S_f(w).$$

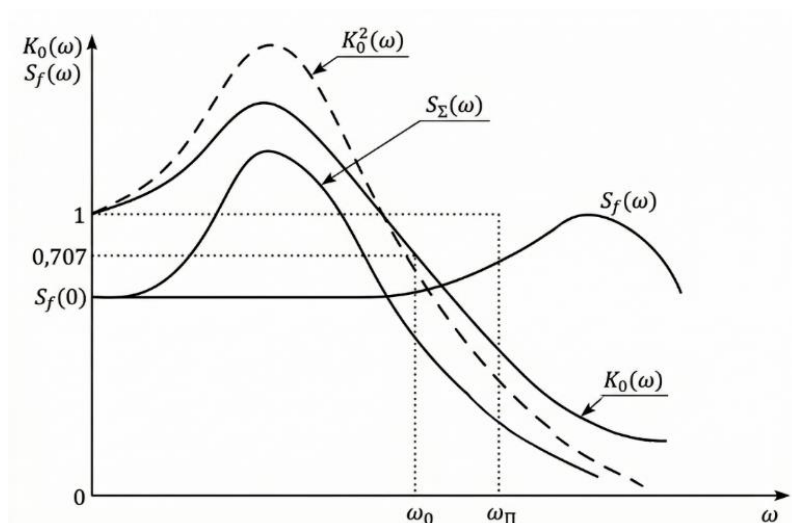


Рисунок 2.3 – Графо-аналітичне визначення флуктуаційної похибки

Для чого значення спектральної щільності на вході системи  $S_f(w)$  множиться на величину квадрата АЧХ системи для кожної даної частоти;

– визначається значення інтеграла  $\int_0^\infty S_z(w) dw$  шляхом підрахунку площі  $S$ , укладеної між кривою  $S_f(w)$  і віссю абсцис;

– середній квадрат помилки (дисперсія) визначається діленням знайденої площі на  $\pi$ , тобто

$$\overline{Z^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty S_z(w) dw = \frac{1}{\pi} \cdot \text{площа } S = D_z.$$

Графік спектральної щільності помилки  $S_z(w)$  може бути також розрахований за допомогою ЛЧХ. За заданим значенням  $K(p)$  визначаються ЛАХ і ФЧХ  $L(w)$  і  $\varphi(w)$ , знаходиться ЛАХ замкнутої

системи  $L_0(w)$ , її значення подвоюються, тобто визначається  $2L_0(w)$  підсумовуються з величиною

$$L_f(w) = 20 \lg S_f(w).$$

В результаті

$$S_z(w) = K^2_{yf} S_f(w) = \text{antilog} \frac{2L_0(w) + L_f(w)}{20}.$$

**Приклад 2.4.** Задано

$$K(p) = \frac{100(1 + 0,2p)}{p(1 + 2p)(1 + 0,03p)}$$

$$S_f(w) = 0,8 \text{град}^2 \cdot \text{с}.$$

Необхідно визначити величину помилки від перешкоди  $\overline{Z_f^2}$ .

Результати обчислень, отримані на основі викладеної методики, наведені в табл. 2.3.

За даними табл. 1.3. будуємо графік (рис. 1.8.). Розбивши графік на типові фігури I і II, визначаємо площу  $S = 21,98 \text{град}^2$ .

Похибка:  $\bar{Z}_f^2 = \frac{21,98}{\pi} \text{град}^2$ .

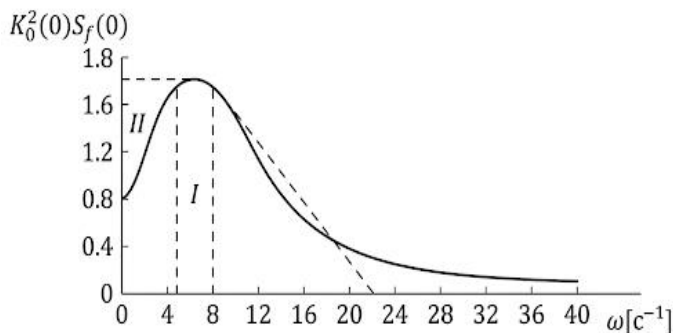


Рисунок 2.4 – Визначення флуктуаційної похибки за допомогою графічно-аналітичного методу

Таблиця 2.3 – Результати обчислень

| $w, c^{-1}$ | Формули |              |          |           |          |                               |                                                 |
|-------------|---------|--------------|----------|-----------|----------|-------------------------------|-------------------------------------------------|
|             | $L(w)$  | $\varphi(w)$ | $L_0(w)$ | $2L_0(w)$ | $L_1(w)$ | $\frac{2L_0(w) + L_1(w)}{20}$ | $\frac{2L_0(w) + L_1(w)}{20}$<br><i>antilog</i> |
| 0,1         | 60      | -102         | 0        | 0         | -1,96    | -0,098                        | 0,8                                             |
| 0,2         | 54      | -112         | 0        | 0         | -1,96    | -0,098                        | 0,8                                             |
| 0,3         | 50      | -116         | 0        | 0         | -1,96    | -0,098                        | 0,8                                             |
| 0,5         | 45      | -117         | 0        | 0         | -1,96    | -0,098                        | 0,8                                             |
| 1           | 33      | -141         | 0        | 0         | -1,96    | -0,098                        | 0,8                                             |
| 2           | 21      | -145         | 0,6      | 1,2       | -1,96    | -0,038                        | 0,917                                           |
| 3           | 15      | -145         | 1,2      | 2,4       | -1,96    | -0,022                        | 1,095                                           |
| 5           | 5       | -140         | 3,2      | 6,4       | -1,96    | -0,022                        | 1,67                                            |
| 10          | 1       | -130         | 2        | 4         | -1,96    | -0,102                        | 1,265                                           |
| 20          | -7      | -130         | -4,5     | -9        | -1,96    | -0,545                        | 0,285                                           |
| 30          | -10     | -135         | -8       | -16       | -1,96    | -0,9                          | 0,126                                           |
| 50          | -20     | -145         | -19      | -38       | -1,96    | -2                            | 0,01                                            |
| 100         | -30     | -150         | -30      | -60       | -1,96    | -3,1                          | 0,008                                           |
| 200         | -42     | -162         | -40      | -80       | -1,96    | -4,9                          | 0                                               |

## 2.4 Оцінка помилок від перешкод, зумовлених широкосмуговими впливами. Еквівалентна смуга шумів

При широкосмуговому спектрі завад, при якому в межах смуги пропускання системи

$$S_f(w) = S_f(0)$$

(див. рис.2.3), похибка від завад з певним наближенням обчислюється за формулою

$$\bar{Z}_f^2 = \frac{S_f(0)}{\pi} = K_{yf}^2(w)dw = \frac{S_f(0)}{\pi} w_{\text{ш}},$$

де смуга шумів

$$w_{\text{ш}} = K_{yf}^2(w)dw.$$

Смуга шумів аналітично визначається виразом

$$w_{\text{ш}} = \pi \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} K_{yf}(p)K_{yf}(-p)dp = \pi l,$$

тобто дорівнює помноженому на  $\pi$  табличному інтегралу  $I$  полінома чисельника і знаменника підінтегрального виразу якого збігаються з відповідними поліномами передавальної функції замкнутої системи. Для наближених розрахунків можна вважати

$$w_{\text{ш}} \approx (1,5 - 2,5)w_c,$$

де  $w_c$  – частота зрізу розімкнутої системи.

## 2.5 Визначення випадкових похибок за допомогою електронної моделі

Аналітичні розрахунки, пов'язані з визначенням похибок у складних САУ, часто займають багато часу, особливо якщо необхідно

багаторазово визначати помилку при зміні різних параметрів досліджуваної системи [19]. Метод визначення випадкових похибок за допомогою електронної моделі базується на відношенні до

$$D_z = \bar{Z}_f^2 = \int_0^\infty k_{yf}^2(t) dt, \quad (2.6)$$

тобто значення дисперсії сигналу помилки при подачі на вхід системи білого шуму дорівнює інтегралу квадрата імпульсної перехідної функції.

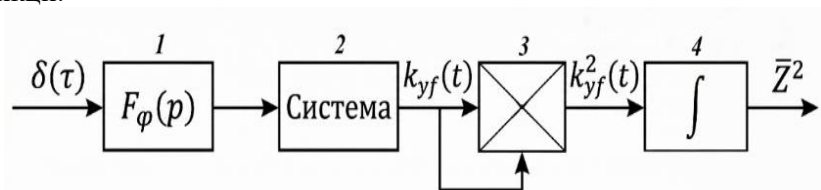


Рисунок 2.5 – Блок-схема визначення флуктуаційної похибки за допомогою електронної моделі

Схема моделювання з урахуванням реального випадкового сигналу на вході системи наведена на рис. 2.5. Для визначення  $\bar{Z}^2$ , крім формуючого фільтра 1, моделі досліджуваної системи 2 з характеристикою  $k_{yf}(t)$  передбачається квадратор 3 для піднесення значення  $k_{yf}(t)$  до квадрата, а також інтегратор 4 для визначення інтеграла  $\int_0^\infty k_{yf}^2(t) dt$ .

Одиничний імпульс подається на вхід моделі системи через формуючий пристрій  $\delta(t)$ . Оскільки імпульсна дія еквівалентна ненульовим початковим умовам, практичну -функцію можна ввести, створивши початкові умови на першому аперіодичному ланку моделі. На виході моделі при достатньо великій  $t$ , тобто у стаціонарному стані, відповідно до виразу (1.57), отримується значення  $\bar{Z}^2$ , записане вимірювальним приладом. На Рис.1.10 показано модельну діаграму для визначення дисперсії керуючої помилки системи з передавальною функцією

$$K_{yz}(p) = \frac{K_v}{p(1 + pT)}$$

і спектральної щільності впливу

$$S_f(w) = \frac{2\alpha\sigma^2}{\alpha^2 + w^2}.$$

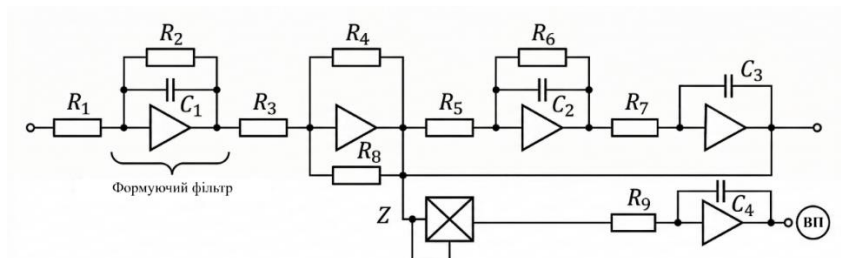


Рисунок 2.6 – Схема електронної моделі для визначення дисперсії похибки керування

## 2.6 Синтез систем автоматичного керування при заданій структурі та впливі випадкових сигналів

Розрізняють: синтез САУ при заданій структурі та впливі випадкових сигналів; синтез САУ при заданій структурі та впливі випадкових і детермінованих сигналів і синтез САУ при заданій структурі та врахуванні обмежень [24].

Синтез САУ при заданій структурі та впливі випадкових сигналів розглянемо на наступному прикладі. Завдання синтезу САУ при заданій структурі формулюється наступним чином. Задано: а) статистичні характеристики задаючого та збурюючого впливів  $S_x(w)$  і  $S_f(w)$ ; б) структура системи у вигляді функції

$$K_{yx}(p) = K_{yx}(p, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n),$$

де  $\beta_i$  — параметри системи. Потрібно знайти оптимальні параметри  $\beta_{10}, \beta_{20}, \dots, \beta_{n0}$ , при яких забезпечується умова мінімуму сумарної дисперсії помилки  $D_z = \min$  або  $\text{RMS } \bar{Z}^2 = \min$ .

За відсутності обмежень на координати системи дисперсія помилки управління визначається формулою (1.56). За допомогою

таблиць інтегралів можна отримати аналітичний вираз, що пов'язує дисперсію помилки управління  $D_z$  і параметри системи  $\beta_i$ .

$$D_z = F(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n). \quad (2.7)$$

Досліджуючи вираз (1.58) на екстремум (прирівнюючи часткові похідні по  $\beta_i$  нулю), знайдемо  $n$  рівнянь, з яких визначаються оптимальні параметри САУ, що забезпечують мінімум помилки. Якщо число змінних  $n$  невелике, пошук екстремуму функції  $F$  не викликає труднощів. При великому числі  $n$  відшукування екстремуму складної функції  $F$  пов'язане з труднощами, тому використовуються наближені методи. При врахуванні, крім дисперсії помилки, її математичного очікування, середній квадрат помилки системи виражається через параметри системи і вхідного сигналу співвідношенням

$$\alpha_z = \overline{Z^2} = m_z(\beta_1, \dots, \beta_n) + D_z(\beta_1, \dots, \beta_n).$$

Оптимальні параметри, які мінімізують середній квадрат похибки системи, якщо вона має екстремум, визначаються з системи рівнянь вигляду

$$\frac{\partial \overline{Z^2}}{\partial \beta_i} = 2m_z(\beta_1, \dots, \beta_n) \frac{\partial m_z(\beta_1, \dots, \beta_n)}{\partial \beta_i} + \frac{\partial D_z(\beta_1, \dots, \beta_n)}{\partial \beta_i} = 0.$$

У практичних випадках значна частина параметрів визначається з урахуванням технічних і конструкторських міркувань, і завданням є визначити один або кілька параметрів системи, які мінімізують RMS. Такими параметрами можуть бути часові константи коригуючих зв'язків і коефіцієнт перетворення відкритої системи.

Параметри системи, обрані за мінімальним критерієм RMS, додатково оцінюються на основі умов можливості їх технічного впровадження та дозволених динамічних показників системи (час регулювання, наявність і значення надмірної регуляції тощо).

**Приклад 2.5.** Визначити оптимальне значення  $K_v$  для системи з передавною функцією

$$K_{yz}(p) = \frac{K_v}{p},$$

яка отримує визначальну дію та перешкоду характеристикам

$$S_x(w) = \frac{\sigma^2 2a}{\alpha^2 + w^2} \text{ и } S_f(w) = a^2.$$

Рішення. Вище було отримано вираз дисперсії похибки:

$$D_z = \frac{\alpha \sigma^2}{\alpha + K_v} + \frac{\alpha^2 K_v}{2}.$$

Оптимальне значення  $K_v$  походить від умови

$$\frac{\partial D_z}{\partial K_v} = 0,$$

де отримаємо

$$\frac{\partial D_z}{\partial K_v} = \frac{\alpha \sigma^2}{(\alpha + K_v)^2} + \frac{\alpha^2}{2} = 0,$$

звідки

$$K_{v \text{ опт}} = \frac{\sigma}{a} \sqrt{2a} - \alpha.$$

Значення  $K_{v \text{ опт}}$  залежить від значення  $\sigma$  та  $\alpha$ , що характеризує визначальний ефект і інтерференцію. При зміні  $\sigma$  та  $\alpha$  змінюється і значення  $K_{v \text{ опт}}$ .

## 2.7 Синтез САУ за заданою структурою та дії випадкових і детермінованих сигналів

У цьому випадку метод вибору оптимальних параметрів схожий на попередній. Давайте проілюструємо це на прикладі.

**Приклад 2.6.** Визначити оптимальне значення  $K_v$  системи автовідстеження цілі в термінах дальності, коли ціль летить у напрямку безпосередньо до станції. У цьому випадку швидкість головної дії

$\dot{x}(t) = \dot{D}(t) = v$ , тобто є детермінованою функцією часу.

Характеристики завади  $S_f(w) = a^2$ .

Передавальна функція системи

$$K_{yz}(p) = \frac{K_v}{p}.$$

Рішення. Похибка від детермінованого задаючого впливу

$$z_d = m_z = D_1 \dot{x}(t) = D_1 v = \frac{v}{K_v}.$$

Сумарна похибка

$$\overline{Z^2} = z_d^2 + \overline{Z_f^2} = z_d^2 + D_{zf} = \frac{v^2}{K_v^2} + \frac{a^2 K_v}{2};$$

$$\frac{\partial \overline{Z^2}}{\partial K_v} = -2 \frac{v^2}{K_v^3} + \frac{a^2}{2} = 0,$$

звідки

$$K_{v \text{ опт}} = \sqrt[3]{\frac{4v^2}{a^2}}.$$

При необхідності враховувати обмеження тієї чи іншої координати системи, що є випадковою функцією часу, і вирішенні задачі в рамках лінійної теорії доцільно обмеження не самої координати, а її середнього значення (рис. 2.7).

При нормальному законі розподілу ймовірність перевищення випадковим процесом значення  $M = 3\sigma$  дорівнює 0,003, де  $\sigma$  — середньоквадратичне відхилення, а  $M$  — межі зони лінійності. Припускаючи, що в цих умовах система більшу частину часу буде поводитися як лінійна, величину  $a$  потрібно обмежити значенням

$$\sigma \leq \frac{M}{3}$$

або дисперсію — значенням

$$D \leq \frac{M^2}{9}.$$

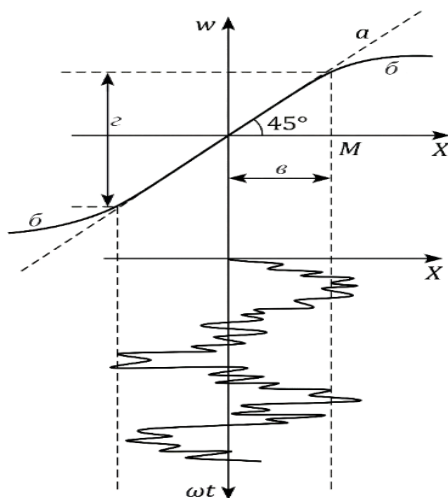
Вихідними рівняннями для вирішення задачі мінімізації RMS є вираз для похибки системи

$$\overline{Z^2} = F(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$$

та рівняння, що пов'язує параметри системи та сигналів із обмеженням, таким як  $w$ -прискорення на виході системи, тобто прискорення системи.

$$\overline{w^2} = \varphi(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \leq \left(\frac{1}{3} w_{max}\right)^2, \quad (2.8)$$

де  $w_{max} = M$  - максимально допустиме в системі значення прискорення.



$a$  - характеристика лінійної моделі;  $b$  - характеристика елемента з обмеженням;  $M$  - максимальна амплітуда збурення для лінійного виходу;  $z$  - область лінійності на виході.

Рисунок 2.7 – Характеристики елемента типу «обмеження»

Враховуючи обмеження (2.8) і замінюючи цей вираз на рівність, отримуємо, на основі методу Лагранжа

$$\overline{Z_1^2} = F(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) + \lambda \varphi(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n),$$

де  $\lambda$  - невизначений коефіцієнт Лагранжа

Знайшовши

$$\frac{\partial \overline{Z_1^2}}{\partial \beta_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

Визначимо  $n$  рівнянь з  $n+1$  невідомими. Доповнивши дані рівняння рівністю

$$w^2 = \varphi(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = \left(\frac{1}{3} w_{max}\right)^2, \quad (2.9)$$

отримаємо відсутнє рівняння для знаходження шуканих параметрів, що мінімізують помилку з урахуванням обмеження по прискоренню вихідної координати САУ. При необхідності врахування ряду обмежень (наприклад, по вихідній координаті, її швидкості, прискоренню і т. д.) відповідно збільшується число рівнянь типу (2.9), тобто

$$\overline{Z_1^2} = F(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n).$$

## 2.8 Синтез і процедура визначення оптимальної передавальної функції

Завданням синтезу САУ з довільною структурою є визначення такої характеристики  $K_{yx\text{опт}}(p)$  (рис. 2.8) з відомими статистичними характеристиками керуючої дії  $S_x(w)$  та інтерференції  $S_f(w)$ , при якій дисперсія сумарної помилки

$$\overline{Z^2} = (\overline{Y_{\text{пр}}} - \overline{Y})^2 = \min,$$

де

$$Y_{\text{пр}}(p) = X(p)K_{\text{пр}}(p);$$

$$Y(p) = n(p)K_{yx}(p);$$

$Y_{\text{пр}}(p)$  та  $Y(p)$  — задане та дійсне значення вихідної величини;  
 $K_{\text{пр}}(p)$  — алгоритм перетворення.

$$n(p) = X(p) + f(p).$$

Оптимальною характеристикою має бути фізично реалізована функція.

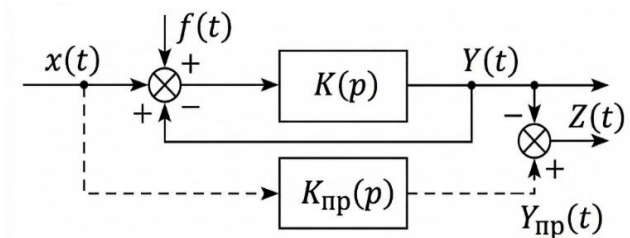


Рисунок 2.8 – Визначення помилки управління САУ

Розрізняють синтез САУ з нескінченною і скінченною пам'яттю. У САУ з *нескінченною пам'яттю* вихідне значення  $Y(t)$  за момент  $t$  зазвичай залежить не лише від поточного значення вхідного сигналу  $X(\tau)$ , а й від його попередніх значень, тобто  $Y(t)$  у певний момент часу залежить від усіх значень  $X(\tau)$  у нескінченному часовому інтервалі  $-\infty < \tau \leq t$  [35].

САУ з *кінцевою пам'яттю* називають системи, у яких імпульсна перехідна функція з деякого часу  $T$  стає тотожно рівною нулю, тобто

$$k_{yx}(t)|_{t \geq T_0} = 0,$$

або перехідна характеристика задовольняє умові

$$y(t)|_{t \geq T_0} = y_0(\infty) = \text{const.}$$

Така система повинна забезпечувати не тільки мінімальну дисперсію, але і певну швидкодію (час перехідного процесу) і точність відтворення або перетворення задаючого впливу. Нижче розглядається

синтез САУ з нескінченною і скінченною пам'яттю.

Розв'язання задачі синтезу системи з нескінченною пам'яттю на основі теорії Колмогорова — Вінера базується на таких припущеннях:

1) пошукова оптимальна система є лінійною і має постійні параметри, що дозволяє обмежити задачу знаходження  $K_{\text{УХ опт}}(P)$ ;

2) задаючі та збурюючі впливи є стаціонарними та ергодичними випадковими процесами, що мають середні значення, рівні нулю;

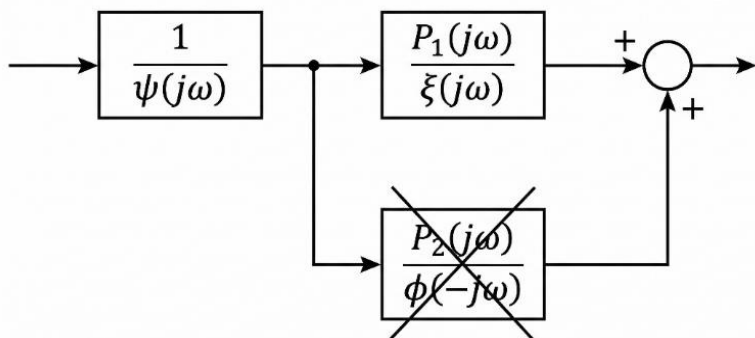


Рисунок 2.9 – Визначення фізично реалізованої оптимальної передавальної функції

3) мінімальне значення приймається як умова оптимальності

$$\overline{Z^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [Y_{\text{пр}}(t) - Y(t)]^2 dt = \min;$$

4) умовою фізичної здійсненності синтезованої системи є рівність (1.23), тобто

$$k(t) = 0 \text{ при } t < 0;$$

5) вхідний сигнал  $n(t)$  є сумою головного ефекту та інтерференції, іншими словами, головний ефект і інтерференція є адитивними.

Іноді вводяться додаткові умови:

а) впливи встановлення та збурення статистично залежать один від одного;

б) точки конкретного впливу та перешкоди не збігаються.

Додаткові умови принципово не є необхідними, оскільки можливо врахувати зв'язок між ударом і збуренням і навести їх до одного входу.

Задачу можна узагальнити на випадки нестационарних процесів і на лінійні системи з змінними параметрами. Однак розрахунки значно складніші і їх розглядати в навчальному процесі вважається не доцільним [42].

Порядок визначення оптимальної передавальної функції фізично здійсненої САУ наступний (рис. 1.13):

1) обчислюється сумарна спектральна щільність впливу і перешкоди, і ця сума подається у вигляді добутку двох множників:

$$S_x(w) + S_f(w) = \psi(jw)\psi(-jw);$$

2) виділяється складова

$$\frac{1}{\psi(jw)};$$

3) вираз розкладається на простіші компоненти

$$\frac{S_x(w)}{\psi(-jw)} = K_{\text{пр}}(jw) = \frac{P_1(jw)}{\xi(jw)} + \frac{P_2(jw)}{\psi(-jw)}$$

і відкидаються члени з полюсами, розташованими в правій напівплощині, тобто  $\frac{P_2(jw)}{\psi(-jw)}$ , при цьому виділяється фізично реалізована частина  $\frac{P_1(jw)}{\xi(jw)}$ .

4) оптимальна фізично реалізована передавальна функція системи

$$K_{\text{УХ ОПТ}}(JW) = \frac{1}{\psi(jw)} \left[ \frac{S_x(w)}{\psi(-jw)} K_{\text{пр}}(jw) \right]^+ = \frac{1}{\psi(jw)} \cdot \frac{P_1(jw)}{\xi(jw)}. \quad (2.10)$$

Для визначення реалізованої оптимальної передавальної функції в інтегральній формі Н. Вінер наводить вираз

$$K_{\text{УХ ОПТ}}(JW) = \frac{1}{2\pi\psi(jw)} \int_0^\infty e^{-j\omega t} dt \int_{-\infty}^\infty \frac{S_{y \text{ пр } n}(w)}{\psi(-jw)} e^{j\omega t} d\omega \quad (2.11)$$

де  $S_{y \text{ пр } n}(w)$  - взаємна спектральна густина заданого вихідного сигналу та загальна вхідна експозиція:

$$S_{y \text{ пр } n}(w) = S_{y \text{ пр } x}(w) + S_{y \text{ пр } f}(w).$$

Вибір формули для визначення оптимальної шестизначної функції (2.12)1.61) або (2.11)1.62) залежить від конкретного завдання.

Зазвичай співвідношення (1.61) відображають точніше залежності при умові наближеної інтерференції та нехтуванням кореляції змінних.

При наявності взаємної кореляції задаючого впливу і перешкоди оптимальна передавальна функція

$$K_{\text{yx опт}}(jw) = \frac{1}{\psi(jw)} \left[ \frac{S_x(w)}{\psi(-jw)} K_{\text{пр}}(jw) \right]^+$$

де

$$\psi(jw)\psi(-jw) = S_x(w) + S_{fx}(w) + S_{xf}(w) + S_f(w);$$

$S_{fx}(w)$  и  $S_{xf}(w)$  – зображення Фур'є від взаємно кореляційних функцій задаючого впливу і перешкоди (інтерференції).

Оптимальну передавальну функцію можна записати в наступній формі:

$$K_{\text{yx опт}}(p) = \frac{1}{\psi(p)} \left[ \frac{S_x\left(\frac{p}{j}\right) S_{fx}\left(\frac{p}{j}\right)}{\psi(-p)} K_{\text{пр}}(p) \right]^+.$$

За відсутності взаємної кореляції між задаючим впливом та інтерференцією  $S_{fx}(w)$  і  $S_{xf}(w)$ .

Значення дисперсії похибки для системи з оптимальною передавною функцією виражається як

$$D_z = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_x(w) S_f(w)}{S_x(w) + S_f(w)} K_{\text{пр}}^2(w) dw.$$

У табл. 2.5 наведено результати розрахунків оптимальної передавальної функції САУ для різних випадкових стаціонарних задаючих впливів і перешкод типу білого шуму, коли між ними кореляція відсутня. У таблиці  $\rho = \frac{A}{a}$  відношення рівнів сигнал/перешкода на вході системи.

Таблиця 2.5 – Результати досліджень

| Спектральна щільність              |                 | Оптимальна передавальна функція                                                                                      |                                                                                          |
|------------------------------------|-----------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|
| Задаючого впливу $S_x(w)$          | Завжди $S_f(w)$ | Замкнена система $K_{yx \text{ опт}}(p)$                                                                             | Розімкнена система $K_{yz \text{ опт}}(p)$                                               |
| $\frac{A^2}{w^2}$                  | $a^2$           | $\frac{x}{p+x}; x = \rho$                                                                                            | $\frac{x}{p}$                                                                            |
| $\frac{A^2\beta}{\beta^2 + w^2}$   | $a^2$           | $\frac{x-\beta}{p+x}; x = \sqrt{\rho^2 + \beta}\sqrt{\beta}$                                                         | $\frac{x-\beta}{p+\beta}$                                                                |
| $\frac{A^2}{w^4}$                  | $a^2$           | $\frac{\sqrt{2}xp + x^2}{p^2 + \sqrt{2}xp + x^2}; x = \sqrt{p}$                                                      | $\frac{\sqrt{2}xp + x^2}{p^3}$                                                           |
| $\frac{A^2\beta^2}{\beta^4 + w^4}$ | $a^2$           | $\frac{(x-\beta)(\sqrt{2}p + x + \beta)}{p^2 + \sqrt{2}xp + x^2}; x = \sqrt[4]{\rho^2 + \beta^2}\sqrt{\beta}$        | $\frac{(x-\beta)(\sqrt{2}p + x + \beta)}{p^2 + \sqrt{2}\beta p + \beta^2}$               |
| $\frac{A^2}{w^6}$                  | $a^2$           | $\frac{x(2p^2 + 2xp + x^2)}{p^3 + 2xp^2 + 2x^2p + x^3}; x = \sqrt[3]{p}$                                             | $\frac{2xp^2 + 2x^2p + x^3}{p^3}$                                                        |
| $\frac{A^2\beta^2}{\beta^6 + w^6}$ | $a^2$           | $\frac{2(x-\beta)p^2 + 2(x^2 + \beta^2)p + x^3}{p^3 + 2xp^2 + 2x^2p + x^3}; x = \sqrt[5]{p^2 + \beta^3}\sqrt{\beta}$ | $\frac{2(x-\beta)p^2 + 2(x^2 - \beta^2)p + x^3}{p^3 + 2\beta p^2 + 2\beta^2p + \beta^3}$ |

## 2.9 Визначення оптимальної імпульсної перехідної функції

Припускається, що випадкові ефекти та  $f(t)$ , які є стаціонарними випадковими функціями, застосовуються до однієї й тієї ж точки

системи

$$X(t) + f(t) = n(t),$$

де  $n(t)$  є стаціонарною випадковою функцією.

$$\overline{Z^2} = [Y_{\text{np}}(t) - Y(t)]^2 = \min.$$

За визначенням,

$$\overline{Z^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T Z^2(t) dt, \quad (2.13)$$

де

$$Z^2(t) = [Y_{\text{np}}(t)]^2 - 2Y_{\text{np}}(t)Y(t) + [Y(t)]^2 \quad (2.14)$$

Вихідний сигнал

$$Y(t) = \int_0^\infty k_{yx}(\tau) n(t - \tau) d\tau \quad (2.15)$$

та

$$[Y(t)]^2 = \left[ \int_0^\infty k_{yx}(\tau) n(t - \tau) d\tau \right] \left[ \int_0^\infty k_{yx}(\eta) n(t - \eta) d\eta \right] \quad (2.16)$$

Розв'язуючи рівняння (1.63), (1.64), (1.65), (1.66) разом, отримаємо

$$\begin{aligned} \overline{Z^2}(t) = R_{y \text{ np}}(0) - 2 \int_0^\infty k_{yx}(\tau) R_{y \text{ np } n}(\tau) d\tau + \\ + \int_0^\infty \int_0^\infty k_{yx}(\tau) k_{yx}(\eta) R_n(\tau - \eta) d\tau d\eta, \end{aligned} \quad (2.17)$$

де

$$R_{y \text{ np}}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [Y_{\text{np}}(t)]^2 dt = \overline{[Y_{\text{np}}(t)]^2},$$

— середнє значення квадрата заданого вихідного сигналу;

$$R_{y \text{ np } n}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T n(t - \tau) Y_{\text{np}}(t) dt = R_{y \text{ np } n}(-\tau),$$

– взаємна кореляційна функція між заданим вихідним та вхідним сигналами;

$$R_n(\tau - \eta) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T n(t - \tau) n(t - \eta) dt = R_n(\tau - \eta),$$

– кореляційна функція вхідного сигналу.

Рівняння (1.67) встановлює зв'язок  $\overline{Z^2}(t)$  з  $k_{yx}(t)$  із заданими кореляційними функціями  $R_{y \text{ пр } n}(\tau)$ ,  $R_{y \text{ пр } n}(\tau)$  і  $R_n(\tau)$ .

Для визначення імпульсної перехідної функції  $k_{yx \text{ опт }}(t)$ , що мінімізує RMS, позначимо

$$k_{yx}(t) = k_{yx \text{ опт }}(t) + \mu r(t), \quad (2.18)$$

де  $r(t)$  – довільна фізично реалізована імпульсна перехідна функція;  
 $\mu$  – переменний параметр.

Підставляючи вираз (2.18) у формулу (2.17) середнє значення квадрата похибки буде функцією параметра  $\mu$ , тому для знаходження мінімуму  $\overline{Z^2}(t)$  необхідно відшукати  $\frac{d\overline{Z^2}(t)}{d\mu} = 0$  при  $\mu = 0$ . Останнє впливає з умови (1.68), з якої видно, що

$$k_{yx}(t) = k_{yx \text{ опт }}(t)$$

$$\overline{Z^2}(t) = \min$$

тільки при  $\mu = 0$ . Отже,

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{Z^2}(t)}{d\mu} = & -2 \int_0^\infty r(\tau) R_{y \text{ пр } n}(\tau) d\tau + \int_0^\infty \int_0^\infty k_{yx \text{ опт }}(\tau) r(\eta) R_n(\tau - \eta) d\tau d\eta + \\ & + \int_0^\infty \int_0^\infty r(\tau) k_{yx \text{ опт }}(\eta) R_n(\tau - \eta) d\eta d\tau + \\ & + 2\mu \int_0^\infty \int_0^\infty r(\tau) r(\eta) R_n(\tau - \eta) d\tau d\eta. \end{aligned} \quad (2.19)$$

З огляду на парність кореляційної функції  $R_n(\tau)$

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} k_{yx \text{ опт}}(\tau) r(\eta) R_n(\tau - \eta) d\tau d\eta + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} r(\tau) k_{yx \text{ опт}}(\eta) R_n(\tau - \eta) d\tau d\eta \quad (2.20)$$

Підставляючи у формулу (1.69)  $\mu = 0$  і враховуючи співвідношення (2.20), знайдемо

$$2 \int_0^{\infty} r(\tau) \left[ \int_0^{\infty} k_{yx \text{ опт}}(\eta) R_n(\tau - \eta) d\eta - R_{y \text{ пр } n}(\tau) \right] d\tau = 0. \quad (2.21)$$

Оскільки  $r(\tau)$  відмінне від нуля, за винятком кінцевого числа значень  $\tau$ , вираз (2.21) справедливий за умови

$$\int_0^{\infty} k_{yx \text{ опт}}(\tau) R_n(\tau - \eta) d\eta - R_{y \text{ пр } n}(\tau) = 0 \text{ при } \tau \geq 0 \quad (2.22)$$

та

$$\int_0^{\infty} k_{yx \text{ опт}}(\tau) R_n(\tau - \eta) d\eta - R_{y \text{ пр } n}(\tau) \text{ при } \tau \geq 0 \quad (2.23)$$

Дане неінтегральне рівняння, яке називається рівнянням Вінера-Хопфа, визначає оптимальну імпульсну перехідну функцію системи [41].

З формули (2.23) випливає, що імпульсна перехідна функція буде оптимальною, якщо реакція системи на вхідний сигнал, рівний кореляційній функції  $R_n(\tau)$  реального вхідного сигналу, дорівнює взаємно кореляційній функції  $R_{y \text{ пр } n}(\tau)$  заданого вихідного і реального вхідного сигналів.

Інтегральне рівняння (2.22) легко вирішується, коли випадковий вхідний сигнал  $n(t)$  являє собою білий шум; при цьому інтегральне рівняння перетворюється в алгебраїчне, оскільки кореляційна функція білого шуму виражається через функцію  $R_n(\tau) = D\delta(\tau)$ :

$$k_{yx \text{ опт}}(\tau) D - R_{y \text{ пр } n}(\tau) = 0.$$

Функція імпульсу у цьому випадку визначається виразом

$$k_{yx \text{ опт}}(\tau) = R_{y \text{ пр } n}(\tau) \frac{1}{D} \quad (\tau \geq 0).$$

У загальному випадку, коли  $n(t)$  не є білим шумом, використовується наступний прийом. Будується лінійна система, що перетворює даний вхідний сигнал  $n(t)$  в білий шум  $\gamma$  (тобто будується фільтр, зворотний до формуючого фільтру), а потім знаходиться оптимальна система з білим шумом на вході. Послідовне з'єднання цих двох систем дає оптимальну систему з даним вхідним сигналом  $n(t)$ .

## 2.10 Синтез оптимальної системи з кінцевою пам'яттю

Синтез оптимальної системи з кінцевою пам'яттю означає, що задача ставиться не для безумовного мінімуму RMS, а для певного умовного мінімуму RMS, враховуючи виконання заданих умов, тобто певного перехідного часу  $T_0$  та обмеження величини помилки відтворення або трансформації дії налаштування (динамічна помилка).

Розглянемо синтез системи для випадку, коли сигнал, що складається з не випадкової, повільно змінної дії, представленої першими кількома членами розкладу на ряд Тейлора, діє на його вході

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$$

де  $a_0, a_1, a_2$  - будь-які коефіцієнти, і стаціонарного випадкового сигналу - перешкоди у вигляді білого шуму з кореляційною функцією

$$R_f(\tau) = a^2 \delta(\tau).$$

Алгоритм трансформації системи  $K_{\text{пр}}(p) = 1$ .

Задані умови такі: умова для перехідної функції імпульсу

$$k_{yx}(t) = \begin{cases} \neq 0, & 0 \leq t < T_0; \\ = 0, & 0 > t > T_0; \end{cases}$$

рівність нулю динамічної помилки  $-z_d(t) \equiv 0$ , обумовленої відтворенням повільно змінюваного впливу, і мінімум RMS, обумовленої перешкодою  $\bar{Z}_{f^2} = \min$ .

Оскільки коефіцієнти похибок пов'язані з імпульсною перехідною функцією співвідношенням

$$D_i = -(-1)^i \frac{1}{i!} \int_0^T \tau^i k_{yx}(\tau) d\tau = \mu_i, \quad (2.24)$$

тоді, щоб забезпечити  $-z_d(t) \equiv 0$  (тобто встановлення значення  $D_i$ ), необхідно виконати наступні умови:

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \int_0^T k_{yx}(\tau) d\tau = 1; \\ \mu_i &= \int_0^T \tau^i k_{yx}(\tau) d\tau = 0, \end{aligned}$$

де  $\mu_i$  - моменти імпульсної перехідної функції.

Дисперсія помилки від інтерференції

$$D_z = a^2 \int_0^T k_{yx}^2(\tau) d\tau,$$

Вираз для умовного мінімального RMS

$$D_{z1} = D_z + \sum_{i=0}^N -\lambda_i \mu_i = \int_0^T \left\{ a^2 k_{yx}^2(\tau) - \sum_{i=0}^N 2\lambda_i \tau^i k_{yx}(\tau) \right\} d\tau,$$

де  $\lambda_i$  - невизначені множники Лагранжа.

З умови

$$\frac{\partial D_{z1}}{\partial k_{yx}(\tau)} = 0$$

знаходимо

$$a^2 k_{yx}(\tau) = \sum_{i=0}^N \lambda_i \tau^i,$$

тобто імпульсна перехідна функція має вигляд

$$k_{yx}(\tau) = a_0 + a_0\tau + a_1\tau^2 + \dots + a_n\tau^n, (2.25)1.77)$$

де

$$a_0 = \frac{\lambda_0}{a^2};$$

$$a_i = \frac{\lambda_i}{a^2}.$$

Знайшовши значення моментів імпульсної перехідної функції з умови (1.76), визначаємо коефіцієнти задаючого впливу. Підставивши їх значення у вираз (1.77), отримаємо оптимальну перехідну функцію  $k_{yx}(\tau)$ .

**Приклад 2.7.** Визначити оптимальну перехідну функцію системи за умов

$$x(t) = a_0 + a_1t, \quad z_d(t) \equiv 0.$$

Що призводить до вимоги забезпечення  $\mu_0 = 1$  і  $\mu_1 = 0$ .

Розв'язання. У цьому випадку оптимальна імпульсна перехідна функція

$$k_{yx}(\tau) = a_1\tau.$$

Обчислимо моменти імпульсної перехідної функції:

$$\mu_0 = \int_0^T (a_0 + a_1\tau) d\tau = 1,$$

та

$$\mu_1 = \int_0^T (a_0\tau + a_1\tau^2) d\tau = 0,$$

Розв'язання отриманої системи рівнянь дає:

$$a_0 = \frac{4}{T};$$

$$a_1 = -\frac{6}{T^2},$$

і оптимальну імпульсну перехідну функцію.

$$k_{yx \text{ опт}}(\tau) = \frac{4}{T} - \frac{6}{T^2}\tau.$$

Вона реалізується шляхом наближеної апроксимації.

Якщо необхідно синтезувати систему до мінімуму RMS за допомогою двох випадкових стаціонарних дій  $X$  і  $f$ , застосованих у одній точці системи, тоді задача зводиться до пошуку мінімуму [36]

$$\overline{Z^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left[ Y_{\text{пр}}(t) - \int_0^{T_0} n(t - \eta) k_{yx}(\eta) d\eta \right]^2 dt \quad (2.26)$$

Якщо умова виконана  $z_d(t) \equiv 0$ .

У цьому рівнянні вплив на вході системи

$$n(t) = X(t) + f(t);$$

$Y_{\text{пр}}(t)$  – необхідний закон зміни змінної  $X$ :

$$Y_{\text{пр}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t - \tau) k_{yx \text{ пр}}(\tau) d\tau,$$

де  $k_{yx \text{ пр}}(\tau)$  – задане значення імпульсної перехідної функції.

Визначення мінімального RMS (2.26) за умови  $z_d(t) \equiv 0$  призводить до імпульсної перехідної функції, яка задовольняє інтегральне рівняння

$$\int_0^T R_n(t - \tau) k_{yx}(\tau) d\tau = \sum_{i=0}^r \lambda_i \tau^i + \int_{-\infty}^{\infty} R_n(t - \tau) X(\tau) d\tau \quad (0 \leq t \leq T), \quad (2.27)$$

де  $\lambda_i$  – невизначені множники Лагранжа.

Розв'язання рівняння (2.27) наведено в роботі. Виконання вимоги

$z_d(t) \equiv 0$  спричиняє збільшення RMS від впливів  $X(t)$  та  $f(t)$  і призводить до нереалізованої системи, оскільки поставлена умова вимагає створення астатичної системи  $(r + 1)$ -го порядку. При відомих коефіцієнтах  $a_0$  і  $a_1$ , поліноміального впливу  $x(t)$  синтез системи можна виконати, не накладаючи умови  $z_d(t) \equiv 0$ , що призводить до меншої величини RMS і більш простої в реалізації системи. Це досягається за рахунок обмеження величини помилки  $z_d(t)$  зверху завданням величин її коефіцієнтів помилок  $D_i$ . Останнє накладає на імпульсну перехідну функцію синтезованої системи певні обмеження:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - \int_0^T k_{yx}(\tau) d\tau = D_0; \\ \int_0^T \tau k_{yx}(\tau) d\tau = D_1; \\ \int_0^T \tau^r k_{yx}(\tau) d\tau = D_i; \end{array} \right.$$

Далі визначається умовний мінімум RMS. Зазвичай оптимальні характеристики знайденої системи практично реалізуються лише в одному чи іншому наближенні.

## 2.11 Розв'язання практичних задач із довільною структурою системи

При визначенні оптимальної передавальної функції САУ можуть бути два основні різновиди задач: а) передавальна функція системи визначається за відсутності будь-яких заданих елементів у системі. У цьому випадку всі елементи схеми вибираються відповідно до:

а) отриманої передавальної функції  $k_{yx \text{ опт}}(p)$ ;

б) передавальна функція системи визначається за умови, що частина елементів задана і змінювати їх параметри не представляється можливим.

У таких випадках завдання зводиться до вибору параметрів

коригувальних ланцюгів при знайденій оптимальній передавальній функції системи управління в цілому і відомих передавальних функціях її окремих функціонально необхідних елементів [38].

Передавальна функція послідовного коригувального пристрою системи з одиничним зворотним зв'язком для випадку, коли нулі і полюси передавальної функції заданої частини  $K_\Phi(p)$  лежать у лівій напівплощині, визначається за формулою

$$K_k(p) = \frac{K_{yx \text{ опт}}(p)}{K_\Phi(p)[1 - K_{yx \text{ опт}}(p)]} \quad (2.28)$$

**Приклад 2.8.** Задана частина системи має передавальну функцію

$$K_\Phi(p) = \frac{K_\Phi}{p(1 + pT_1)}.$$

Необхідно визначити передавальну функцію корекційного пристрою, який має бути підключений послідовно до системи для реалізації  $k_{yx \text{ опт}}(p)$ .

Рішення. Відповідно до формули (1.80), знаходимо розв'язок:

$$K_k(p) = \frac{1 + pT_1}{K},$$

де

$$K = K_\Phi(T) = K_\Phi \tau \sqrt{\frac{N}{A}}.$$

З прикладу 2.8 випливає, що при мінімальному фазовому впливі, тобто коли передавна функція має всі полюси і нулі в лівій напівплощині, коригуючий пристрій компенсує інерцію заданої частини.

У системі з неодиничним зворотним зв'язком на заданій прямій передавальній функції  $K_1(p)$  та статистичними характеристиками удару і перешкод оптимальна передавальна функція зворотного зв'язку відповідає виразу

$$K_{з.з.опт} = \frac{1}{K_{ух\text{ опт}}(p)} - \frac{1}{K_1(p)}.$$

Для лінійних систем найпростіша задача вибору параметрів коригувальних схем з урахуванням оптимальної передавальної функції системи загалом і відомих передавальних функцій функціонально необхідних елементів розв'язується за допомогою логарифмічних амплітудних і фазово-частотних характеристик.

Окрім задач, розглянутих на основі методу синтезу САУ з довільною структурною схемою, можна розв'язати й інші задачі оптимізації: визначення передбачливих і відкладених фільтрів, розрахунок оптимальної системи з урахуванням генерації інтерференцій у самій системі, розрахунок оптимального САУ з змінними параметрами тощо.

## ВИСНОВКИ

Таким чином, розглянуті методи дослідження та аналізу і синтезу систем автоматичного управління (САУ) в умовах дії статистичних випадкових факторів показав, що останні суттєво впливають на якість функціонування технічних систем.

Теоретичні основи статистичного аналізу сигналів та процесів, а також принципи оптимізації структури і параметрів систем керування дозволяють бідше ретельно підвищити точність і ефективність управління складними електромеханічними системами і об'єктами в поєднанні із забезпеченням необхідних показників точності, стійкості, швидкодії.

На прикладах показано, що реальні системи автоматичного управління функціонують у середовищі, де на них постійно діють різноманітні випадкові збурення, які можуть бути як адитивними, так і мультиплікативними. Наявність таких факторів призводить до відхилення фактичних значень керованих параметрів від заданих, що проявляється у вигляді похибок управління. Для оцінювання ефективності роботи систем у таких умовах застосовуються статистичні критерії якості, серед яких найбільш поширеним є критерій мінімуму середнього квадрата похибки, що дозволяє кількісно оцінити точність відтворення заданих сигналів та зменшити рівень впливу випадкових перешкод.

Ефективності дослідження сприяють методологічні основи використання основних понять і параметрів теорії випадкових факторів в поєднанні із випадковими збуджуючими процесами навантаження електромеханічних об'єктів.

До таких характеристик відносяться функції розподілу ймовірності, щільність розподілу, математичне очікування, дисперсія, середньоквадратичне відхилення, кореляційні та автокореляційні функції. Зазначені параметри дозволяють описувати статистичні властивості якості сигналів і визначати ступінь їхнього впливу на динаміку системи керування та керований об'єкт.

Розглянуті практичні задачі достатньо зрозуміло пояснюють вплив статистичних методів випадкового процесу (математичне очікування та кореляційна функція), що значно спрощує аналіз і синтез систем керування.

Окрему увагу доцільно приділити в роботі приділено вивченню

властивостей стаціонарних та ергодичних випадкових процесів. Показано, що стаціонарні процеси характеризуються незмінністю статистичних характеристик у часі, що значно спрощує їх математичний опис і дозволяє використовувати методи спектрального та кореляційного аналізу. Ергодичність процесу забезпечує можливість визначення його статистичних характеристик за однією достатньо довгою реалізацією, що має важливе значення для практичних досліджень і експериментів.

Розглянуто взаємозв'язок між статистичними характеристиками сигналів на вході та виході лінійних систем керування. При дослідженнях доцільно звертати увагу, що при проходженні стаціонарного випадкового сигналу через лінійну систему з постійними параметрами статистичні властивості сигналу змінюються відповідно до передавальної функції системи. Однак характер розподілу випадкового процесу може зберігатися. Це дозволяє використовувати аналітичні залежності для визначення математичного очікування, дисперсії та кореляційної функції вихідного сигналу за відомими характеристиками вхідного сигналу та параметрами системи.

При окремих напрямках дослідження необхідно скористатись методами компенсації впливу збурень за допомогою спеціальних регуляторів. Застосування ПД- та ПІ-регуляторів широко використовуюється в системах автоматичного управління для покращення динамічних характеристик і підвищення точності регулювання. Використання ПД-регулятора дозволяє покращити швидкодію системи та зменшити перерегулювання, тоді як ПІ-регулятор забезпечує усунення статичної похибки та підвищення точності відтворення заданого сигналу.

Принципи побудови систем підлеглого регулювання, які характеризуються багаторівневою структурою керування, заслуговують більш ретельного вивчення. Такі системи забезпечують більш ефективне регулювання складних електромеханічних об'єктів за рахунок розподілу функцій управління між внутрішніми та зовнішніми контурами. Це дозволяє підвищити стійкість системи до зовнішніх збурень та покращити динамічні характеристики об'єкта управління.

Значна частина роботи присвячена методам оптимізації систем автоматичного управління. Особливу увагу приділено методу модульного оптимуму, який є одним із найбільш поширених інженерних методів налаштування систем регулювання. Суть цього

методу полягає у виборі параметрів регулятора таким чином, щоб амплітудно-частотна характеристика замкненої системи мала оптимальний вигляд у робочому діапазоні частот. Це дозволяє досягти компромісу між швидкістю системи, її стійкістю та точністю регулювання.

Аналіз прикладів оптимізації за методом модульного оптимуму показав, що правильний вибір параметрів регуляторів дозволяє значно покращити якість перехідних процесів, зменшити тривалість перехідного режиму та забезпечити необхідну точність підтримання заданих параметрів. При цьому важливим є врахування статистичних характеристик збурюючих сигналів, оскільки їх вплив може суттєво змінювати поведінку системи.

Отже, використання методів статистичного аналізу та оптимізації є необхідною умовою під час проєктування сучасних систем автоматичного управління. Врахування випадкових факторів дозволяє створювати більш надійні та ефективні системи керування, що здатні забезпечувати стабільну роботу технічних об'єктів навіть у складних умовах експлуатації.

Таким чином, систематизовано теоретичні положення щодо аналізу та синтезу систем автоматичного управління в умовах дії випадкових збурень дозволяють розглядати статистичні характеристики випадкових процесів шляхом використання методів компенсації збурень та оптимізації параметрів систем керування. Володіння розглянутими методами набуває важливого значення при вирішенні практичних завдань автоматичного управління складних електромеханічних систем та комплексів.

## ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Tocci R.J., Widmer N.S. Digital Systems: Principles and Applications. M: Williams, 2004. 1024 p.
2. Islam M. S. Design considerations of sinusoidally excited permanent-magnet Machines for low-torque-ripple applications. IEEE Transactions on Industry Applications . 2005. Vol. 41, No. 4. P. 955–962.
3. Sugimoto H., Tamai S. Secondary resistance identification of an induction motor applied model reference adaptive system and its characteristics. IEEE Transactions on Industry Applications . 1987. Vol. IA-23, No. 2. P. 296–303.
4. Islam M. S. Experimental Verification of Design Techniques of Permanent-Magnet Synchronous Motors for Low-Torque-Ripple Applications. IEEE Transactions on Industry Applications . 2011. Vol. 47, No. 1. P. 88–95. DOI: [<https://doi.org/10.1109/TIA.2010.2091612>].
5. Panda S.K., Xu J.-X., Qian W. Review of torque ripple minimization in PM synchronous motor drives. Proc. IEEE Power & Energy Society General Meeting (20–24 July 2008, Pittsburgh, PA, USA) . IEEE, 2008. P. 1–6.
6. Chen C., Namuduri S., Mir S. Controller-induced parasitic torque ripples in a PM synchronous motor. IEEE Transactions on Industry Applications . 2002. Vol. 38, No. 5. P. 1273–1281.
7. Islam R., Husain I., Fardoun A., McLaughlin K. Permanent magnet synchronous motor magnet designs with skewing for torque ripple and cogging torque reduction. IEEE Transactions on Industry Applications . 2009. Vol. 45, No. 1. P. 152–160.
8. Zinovkin V., Antonov M., Krysan I. Research of Non-Stationary Electromagnetic Processes in Synchronous Electric Drive. 2017 International Conference on Modern Electrical and Energy Systems (MEES). Kremenchuk, 2017. P. 148–151. DOI: [<https://doi.org/10.1109/MEES.2017.8248874>].
9. Zinovkin V., Blyzniakov O., Vasilieva E. Physical Simulation of Electromagnetic Phenomena in Transformer Equipment under Strongly Varying Loads. 2017 International Conference on Modern Electrical and Energy Systems (MEES) . Kremenchuk, 2017. P. 312–315.
10. Computer optimization on energy- and save resource expert system parameters of management electrosteel-smelting / I. Trufanov et al. Modern Problems of Radio Engineering, Telecommunications and Computer

Science . 2002. P. 207.

11. Конопльов К. Г., Олейніченко Н. М. Новий метод розрахунку вищих гармонік при імпульсному регулюванні синхронних генераторів. Електротехніка та електроенергетика . 2010. № 2. С. 4–7.

12. Яримбаш С. Т., Килимник І. М., Яримбаш Д. С. Особливості визначення параметрів електричної схеми заміщення печної петлі печі графітації змінного струму. Електротехніка та електроенергетика . 2010. № 2. С. 36–43.

13. Лазарєв В.І., Лазарєв І.В. Про причину зменшення сил осьового пресування обмоток трансформаторів при коротких замиканнях. Електротехніка та електроенергетика . 2005. № 1. С. 18–22.

14. Моделювання електромеханічної системи ВЕУ з аеродинамічним мультиплікатором у режимі стабілізації швидкості вітротурбіни / Н.С. Голубенко та ін. Електротехніка та електроенергетика . 2011. № 1. С. 70–73.

15. Андрієнко П. Д., Лобода В. Д., Міщенко А. В. Перетворювачі частоти для електропередачі залізничного електротранспорту. Електротехніка та електроенергетика . 2001. № 1. С. 55–58.

16. Жежеленко Ю.С., Шейнкман Л.М., Степанов В.Б. Якість електроенергії на промислових підприємствах. Київ : Техніка, 2012. 384с.

17. Rashid N. Short-time Overloading of Power Transformers : Master Thesis. Stockholm, Sweden, 2011. 60 p. URL: <http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:511551/fulltext01>.

18. Data augmentation and optimization method based on conditional generative adversarial network and convolutional neural network for transformer fault diagnosis / B. Liang et al. Measurement . 2025. Vol. 254. Art. 117872. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2025.117872>.

19. Murugan R., Ramasamy R. Failure analysis of power transformer for effective maintenance planning in electric utilities. Engineering Failure Analysis . 2015. Vol. 55. P. 182–192. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2015.06.002>.

20. Liu X. H., Zhao G., Yu J. J. Simulation research on the influence of electric arc furnace nonlinear characteristics on power supply network. Proceedings of the Chinese Society of Electrical Engineering . 2004. P. 34–38.

21. An improved SVC control for electric arc furnace voltage flicker mitigation / M. Cernan et al. International Journal of Electrical Power &

Energy Systems . 2021. Vol. 129. Art. 106831. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijepes.2021.106831>.

22. Abbasi M. K., Dezfuli H. Smart Maintenance Planning for Distribution Transformers Using Discrete-time Markov Chain. 2022 26th International Electrical Power Distribution Conference (EPDC) . IEEE, 2022. P. 8–17. DOI: <https://doi.org/10.1109/EPDC56235.2022.9817256>.

23. Rama Rao K. S., Karsiti M. N. Optimal design of a furnace transformer by intelligent evolutionary methods. International Journal of Electrical Power & Energy Systems . 2012. Vol. 43, No. 1. P. 1056–1062. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijepes.2012.06.019>.

24. Samet H., Golshan M. E. H. A wide nonlinear analysis of reactive power time series related to electric arc furnaces. International Journal of Electrical Power & Energy Systems. 2012. Vol. 36, No. 1. P. 127–134. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijepes.2011.10.033>.

25. Synthesis and analysis of arc furnace electrical mode control system on the basis of three-dimensional phase currents vector distribution / O. Y. Lozynskiy et al. Electrical Engineering & Electromechanics . 2019. No. 4. P. 26–34. DOI: <https://doi.org/10.20998/2074-272X.2019.4.04>.

26. Olczykowski Z. Electric Arc Furnaces as a Cause of Current and Voltage Asymmetry. Energies . 2021. Vol. 14, No. 16. Art. 5068. DOI: <https://doi.org/10.3390/en14165058>.

27. Gzarmeski L. Comments on Active Power Flow and Energy Accounts in Electrical Systems with Non sinusoidal Waveforms and Asymmetry. IEEE Transactions on Power Delivery . 1996. Vol. 11, No. 3. P. 1244–1250. DOI: <https://doi.org/10.1109/61.517478>.

28. Awadallah S. K., Milanović J. V., Jarman P. N. The influence of modeling transformer age related failures on system reliability. IEEE Transactions on Power Systems . 2014. Vol. 30, No. 2. P. 970–979. DOI: <https://doi.org/10.1109/TPWRS.2014.2331103>

29. Ebrahim E. A. Optimal Design of SAPFs for Harmonic Mitigation of Electric Arc Furnaces with Real-Time Digital Simulation Hardware. 2023 24th International Middle East Power System Conference (MEPCON) . Cairo, Egypt, 2023. P. 1–6. DOI: <https://doi.org/10.1109/MEPCON58725.2023.10462253>.

30. So E., Arseneau R., Hanique E. Measurement and correction of no-load losses of power transformers. Conference Digest Conference on Precision Electromagnetic Measurements. 2004. P. 570–571. DOI: <https://doi.org/10.1109/CPEM.2004.305383>.

31. Волошин О. Ф., Маляр М. П., Швалагін О. О. Процедури послідовного аналізу і відсіювання варіантів комбінаторних оптимізаційних задач з нечіткими функціоналами. Вісник Київського національного університету. Серія : Кібернетика . 2010. № 10. С. 4–7.

32. Zinovkin V., Krysan I., Savchenko V. The Equivalent Parameters of Losses in Inactive Parts of Transformers under Nonsinusoidal Loads. IEEE 9th International Conference on Energy Smart Systems (ESS) . Kyiv, 2026. P. 1–6. DOI: <https://doi.org/10.1109/ESS70338.2026.11536712>.

33. Investigation of Stator Voltage Oscillations in an Asynchronous Motor Within a High-Frequency Specialized Electric Drive / V. Zinovkin et al. Lecture Notes in Networks and Systems . 2025. Vol. 1480. P. 285–295.

34. Influence of Nonstationary Electromagnetic Processes on Electromagnetic Compatibility and Technical Condition of Special-Purpose Transformer Equipment / V. Zinovkin et al. IEEE 5th KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek) . Kharkiv, 2025. P. 826–831.

35. Zinovkin V., Krysan Y., Shylo S. Devising a method for large-scale modeling of non-stationary electromagnetic processes in power transformer equipment under sharply changing loads. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies . 2025. Vol. 6, No. 8 (138). P. 6–23. DOI: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2025.348152>.

36. Study of stability criteria of automatic control systems by multiparametric aviation objects / V. Zinovkin et al. Transactions on Aerospace Research . 2024. Vol. 274, No. 1. P. 45–70. DOI: <https://doi.org/10.2478/tar-2024-0004>.

37. Multiparametric System for Automated Analysis of the Current Technical Condition of Power Transformers / V. Zinovkin et al. IEEE 4th KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek) . Kharkiv, 2024. P. 661–666.

38. Optimization of Multivariable Technological Systems' Automatic Control based on Stability Criteria / V. Zinovkin et al. IEEE 4th KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek) . Kharkiv, 2023. DOI: <https://doi.org/10.1109/KhPIWeek61412.2023.10312865>.

39. Influence of Sharp Load Fluctuations on Electromagnetic Processes in Electrical Equipment / V. Zinovkin et al. IEEE 3rd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek) . Kharkiv, 2022. P. 641–645. DOI: <https://doi.org/10.1109/KhPIWeek57572.2022.9916410>.

40. Multi-parameter Technological Process Optimization Functional Similarity Criteria / V. Zinovkin et al. IEEE 2nd KhPI Week on Advanced

Technology (KhPIWeek) . Kharkiv, 2021. P. 490–495. DOI: <https://doi.org/10.1109/KhPIWeek53812.2021.9570014>.

41. Zinovkin V., Antonov M., Krysan I. Research of electromagnetic parameters of complex electromechanical system under hardly varying loads. IEEE 7th International Conference on Energy Smart Systems (ESS) . Kyiv, 2020. P. 267–272. DOI: <https://doi.org/10.1109/ESS50319.2020.9160022>.

42. Zinovkin V., Antonov M., Krysan I. Simulation of Static Stability of Synchronous Electric Drive at Hardly Variable Load. IEEE International Conference on Modern Electrical and Energy Systems (MEES) . Kremenchuk, 2019. P. 86–89. DOI: <https://doi.org/10.1109/MEES.2019.8896368>.

43. Зіновкін В.В. Різкозмінні навантаження та їх вплив на електротехнічне обладнання і методи дослідження: навчальний посібник. Запоріжжя: ЗНТУ, 2017. 374 с.

44. Теорія автоматичного керування : навчальний посібник / П.В. Леонтьєв та ін. Суми: Сумський державний університет, 2024. 296 с. URL: <https://essuir.sumdu.edu.ua/handle/123456789/97189>.

45. Гуров А. П., Ольшевський С. І., Черно О. О., Бугрім Л. І. Теорія автоматичного керування : навчальний посібник. Миколаїв : Національний університет кораблебудування, 2018. URL: <https://eir.nuos.edu.ua/items/c6d19b91-5ad4-4563-a13d-5b3960e55d85>.

46. Марченко А. А., Гулий В. С. Теорія автоматичного керування. Комп'ютерний практикум: навчальний посібник. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2025. URL: <https://ela.kpi.ua/items/40b17431-d0a6-42bf-9387-eb408c1bfbf3>.

47. Толочко О.І. Теорія автоматичного керування. Математичні методи та програмування в MATLAB для теорії керування : навчальний посібник. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2025. URL: <https://ela.kpi.ua/items/2cb5a885-ee3-4b52-bf9d-bb218ce48929>.

48. Гайденок Ю.А. Теорія автоматичного керування. Комп'ютерний практикум: навчальний посібник. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2025. URL: <https://ela.kpi.ua/items/edac02be-d940-4fd4-a566-7c8b782b89a2>.

49. Іносов С. В., Соболевська Т. Г. Теорія автоматичного керування: методичні вказівки до лабораторних і практичних робіт. Київ: КНУБА, 2024. URL: [<https://repository.knuba.edu.ua/items/82da287f-a9d2-43e9-8f9a-1e8d7f7dc136>].

50. Мірошник М.А., Лістровий С.В., Клименко Л.А. Теорія автоматичного керування, штучний інтелект і автоматизація процесу прийняття рішення: навчальний посібник. Харків : УкрДУЗТ, 2019. URL: <https://dspace.onua.edu.ua/items/d64933de-004c-4977-a0bf-68c744eede6f>.

51. Попович М.Г., Ковальчук О.В. Теорія автоматичного керування: підручник. Київ, 2007. URL: <https://uareferats.com/index.php/book/details/336>.

52. Mironov Yu. M. Specific Features of Electric Arc Furnaces as Electric Energy Receivers. Russian Metallurgy (Metally) . 2021. Vol. 2021. P. 703–708. DOI: [<https://doi.org/10.1134/S0036029521060185>].

53. 3-D computation of transformers overheating under nonlinear loads / A. Lefevre et al. IEEE Transactions on Magnetics . 2005. Vol. 41, No. 5. P. 1564–1567.