ПРО НЕОБХІДНІ ТА ДОСТАТНІ УМОВИ НАЯВНОСТІ АВТОМОРФІЗМУ У ПАРАЛЕЛЬНО-ПОСЛІДОВНИХ ГРАФАХ

Костянтин Караваєв, Валентина Турчина
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

ON NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITIONS FOR THE EXISTENCE OF AUTOMORPHISM IN SERIES–PARALLEL GRAPHS

Abstract. The paper investigates the prospects of applying the algorithm of non-isomorphic subgraph generation to series–parallel graphs in order to reduce the enumeration in the branch and bound method for the optimal sequencing problem. The necessary condition for the presence of automorphism which is true in the general case is given. It is proved that for this class of graphs, this condition is also sufficient.

Особливе місце серед дискретних оптимізаційних задач теорії розкладів займають задачі упорядкування вершин орграфів. Вони знайшли своє практичне застосування у багатьох сферах виробничої діяльності, оптимізації обчислень на ЕОМ та інших галузях, де на порядок виконання завдань накладаються деякі несуперечливі технологічні обмеження. Розв'язок задач з цього класу передбачає побудову такого розподілу завдань між виконавцями у кожний момент часу, який не суперечить заданим технологічним обмеженням та надає екстремальне значення деякому функціоналу якості.

Дослідження задачі показали, що у загальному випадку вона є NP-складною. Поліноміальні алгоритми були отримані лише для декількох спеціальних класів графів, що задають технологічні обмеження, та для задач з двома виконавцями. Тому особливу увагу науковці приділяють, як пошуку нових точних поліноміальних алгоритмів, так і пришвидшенню точних методів експоненційної складності, до яких належить метод гілок та меж.

Серед підходів до скорочення перебору методом гілок та меж можна виділити два основних: скорочення за рахунок уточнення оцінок функціоналу та за рахунок відсікання гілок, що відповідають ізоморфним підграфам.

Останній підхід досліджується у роботі [1]. У ній було запропоновано можливий алгоритм генерації неізоморфних підграфів. Дослідження цього алгоритму показали, що він не втрачає неізоморфні підграфи, проте серед результуючих графів можуть зустрітися й ізоморфні. Також у роботі наведені твердження, виконання яких дозволило б повністю виключити ізоморфні підграфи, та показано, що у загальному випадку вони є хибними.

Подальше дослідження з цієї теми було присвячено пошуку таких класів графів, для яких виконувалися б вищезгадані твердження. Одним з перспективних підкласів виявилися паралельно-послідовні графи [2].

Клас паралельно-послідовних графів визначається рекурсивно таким чином:

– Орграф $G = (\{i\}, \emptyset)$, який складається з єдиної вершини, належить цьому класу.

– Якщо графи $G_1 = (V_1, U_1)$ та $G_2 = (V_2, U_2)$, де $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, належать цьому класу , тоді

$$G = G_1 S G_2 = (V_1 \cup V_2, U_1 \cup U_2 \cup T_1 \times S_2),$$

де T_1 – множина стоків графу G_1, S_2 – множина джерел графу G_2, також буде належати даному класу. В цьому випадку кажуть, що граф G є послідовною композицією графів G_1 та G_2.

– Якщо графи $G_1 = (V_1, U_1)$ та $G_2 = (V_2, U_2)$, де $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, належать цьому класу, тоді граф

$$G = G_1 P G_2 = (V_1 \cup V_2, U_1 \cup U_2)$$

також буде належати даному класу і він є паралельною композицією графів G_1 та G_2.

– Тільки ті орграфи, що можуть бути отримані шляхом скінченої кількості застосувань попередніх двох побудов, належать до класу паралельно-послідовних графів.

Графи цього класу можна природним чином подати у вигляді бінарного дерева, в якому листи відповідають окремим вершинам графу, а внутрішні вузли визначають тип композиції, що була застосована при побудові до графів, які відповідають піддеревам з коренями у дочірніх вузлах. Таке бінарне дерево називають бінарним деревом декомпозиції. Якщо у бінарному дереві декомпозиції зв'язані групи однакових типів композиції стиснути в одну вершину з відповідним об'єднанням дочірніх вузлів, то отримане дерево називають канонічним деревом декомпозиції.

Наведемо терміни, що стосуються ізоморфізму графів з [1].

Два орієнтовні графи G та H є ізоморфними, якщо між множинами їх вершин існує взаємно однозначна відповідність, що зберігає суміжність вершин та орієнтацію дуг. Позначається $\mathrm{G} \cong H$ або $\mathrm{G} = H$.

Автоморфізмом орієнтовного графу G називається ізоморфізм G на себе, або автоморфізм є підстановкою множини вершин V, що зберігає суміжність та орієнтацію дуг. Дві вершини i та j, що переходять одна в одну під дією автоморфізму $f: V \to V$ $(i \in V, j \in V,\ f(i) = j)$ будемо називати взаємозамінними та позначати $i \sim j$.

У [1] були доведені необхідні умови взаємозамінності вершин для довільного графу.

Теорема 1. Якщо у графі G вершини i та j є взаємозамінними, то графи G_1 та G_2, утворені видаленням вершин i та j з G відповідно, будуть ізоморфними.

Для паралельно-послідовних графів ці умови виявилися також достатніми, що доводиться у наступних лемах та теоремі 2.

Лема 1. Графи G_1 та G_2 ізоморфні тоді і тільки тоді, коли графи $G_1 SG$ та $G_2 SG$ є ізоморфними.

Доведення. Необхідність. Нехай графи G_1 та G_2 ізоморфні, f – відповідний ізоморфізм, G – деякий граф.

Побудуємо дві матриці суміжності M_1 та M_2: в першій рядки і стовпці відповідають вершинам графу G_1 у порядку $1,2,\dots,n$ (n – кількість вершин у графах G_1 та G_2), в другій – графу G_2 у порядку $f(1), f(2), \dots, f(n)$. За означенням ізоморфізму ці матриці збігаються. Нехай M – матриця суміжності для графу G.

Розглянемо тепер блочні матриці $M_1' = \begin{pmatrix} M_1 & D_1 \\ 0 & M \end{pmatrix}$ та $M_2' = \begin{pmatrix} M_2 & D_2 \\ 0 & M \end{pmatrix}$, де D_1 та D_2 – матриці, в яких стоять одиниці на перетині рядків, що у графах G_1 та G_2 відповідають стокам, та стовпців, що у графі G відповідають джерелам. Матриці D_1 та D_2 збігаються, оскільки їх значення визначається лише наборами рядків і стовпців, а стоки ізоморфізм переводить у стоки, за властивістю, і матриця M є однаковою у M_1' та M_2', а отже і стовпці-джерела графу G. З цього випливає, що матриці співпадають за побудовою, а з іншого боку є матрицями суміжності графів G_1SG та G_2SG відповідно, тому вони є ізоморфними за означенням.

Достатність. Нехай графи G_1, G_2 та G – деякі графи, графи G_1SG та G_2SG ізоморфні, f – відповідний ізоморфізм.

Побудуємо матрицю суміжності графу G_1SG у формі $\begin{pmatrix} M_1 & D_1 \\ 0 & M \end{pmatrix}$, де блок M_1 відповідає вершинам графу G_1, блок M – вершинам графу G, D_1 – матриця, в якій стоять одиниці на перетині рядків, що у графі G_1 відповідають стокам, та стовпців, що у графі G відповідають джерелам. Це зможемо зробити, оскільки між вершинами графів G_1 та G дуги є лише між всіма стоками G_1 та джерелами G за означенням послідовної композиції. Тоді, якщо побудуємо матрицю суміжності для графу G_2SG з рядками та стовпцями у порядку $f(1), f(2), \dots, f(m)$ (m – кількість вершин у графі G_1SG), вона буде збігатися з матрицею суміжності для графу G_1SG, за означенням ізоморфізму.

Серед вершин $f(1), f(2), \dots, f(n)$ (n – кількість вершин у графі G_1) не може бути вершин графу G, оскільки ізоморфізм зберігає всі властивості графів та сума відстаней від будь-якої вершини графу G_1 до всіх стоків графу G строго більша за аналогічну суму для будь-якої вершини графу G, за властивістю послідовної композиції. Шляхом видалення з матриць суміжності рядків і стовпців $n+1, n+2, \dots, m$, що в обох графах відповідають вершинам графу G, отримаємо матриці M_1, що є матрицями суміжності графів G_1 та G_2, а отже вони є ізоморфними за означенням. ■

Наслідок 1. Графи G_1 та G_2 ізоморфні тоді і тільки тоді, коли графи GSG_1 та GSG_2 є ізоморфними.

Доведення. Аналогічно доведенню леми 1. ■

Лема 2. Графи G_1 та G_2 ізоморфні тоді і тільки тоді, коли графи G_1PG та G_2PG є ізоморфними.

Доведення. Необхідність. Нехай графи G_1 та G_2 ізоморфні, f – відповідний ізоморфізм, G – деякий граф.

Побудуємо дві матриці суміжності M_1 та M_2: в першій рядки і стовпці відповідають вершинам графу G_1 у порядку $1,2,\dots,n$ (n – кількість вершин у графах G_1 та G_2), в другій – графу G_2 у порядку $f(1), f(2), \dots, f(n)$. За означенням ізоморфізму ці матриці збігаються. Нехай M – матриця суміжності для графу G.

Розглянемо тепер блочні матриці $M_1' = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$ та $M_2' = \begin{pmatrix} M_2 & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$. Вони співпадають за побудовою, а з іншого боку є матрицями суміжності графів G_1PG та G_2PG відповідно, з чого випливає, що вони ізоморфні за означенням.

Достатність. Нехай графи G_1, G_2 та G – деякі графи, графи G_1PG та G_2PG ізоморфні, f – відповідний ізоморфізм.

Побудуємо матрицю суміжності графу G_1PG у формі $\begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$, де блок M_1 відповідає вершинам графу G_1, блок M – вершинам графу G. Завжди зможемо це зробити, оскільки між вершинами графів G_1 та G немає дуг за означенням паралельної композиції. Тоді, якщо побудуємо матрицю суміжності для графу G_2PG з рядками та стовпцями у порядку $f(1), f(2), \dots, f(m)$ (m – кількість вершин у графі G_1PG), вона буде збігатися з матрицею суміжності для графу G_1PG, за означенням ізоморфізму.

Якщо серед вершин $f(1), f(2), \dots, f(n)$ (n – кількість вершин у графі G_1) немає вершин графу G, тоді шляхом видалення з матриць суміжності тих рядків і стовпців, що в обох графах відповідають вершинам G, отримаємо матриці M_1, які є матрицями суміжності графів G_1 та G_2, тому вони є ізоморфними за означенням.

Якщо серед вершин $f(1), f(2), \dots, f(n)$ знайдуться вершини графу G, тоді переставимо рядки і стовпці, які відповідають вершинам $f(1), f(2), \dots, f(n)$ та $1,2,\dots,n$, у матрицях суміжності так, щоб у матриці суміжності для графу G_2PG спочатку йшли вершини, що відповідають графу G_2, а потім G. Позначимо новий порядок вершин у першій матриці $i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1}, \dots, i_n$, де k – кількість тих вершин з $f(1), f(2), \dots, f(n)$, що належать графу G_2. Помітимо, що при цьому зміниться лише матриця M_1, оскільки сусідні блоки нульові, позначимо змінену матрицю M_2.

Вона також матиме блочно-діагональний вигляд, оскільки між вершинами графів G_2 та G немає дуг за означенням паралельної композиції. Тоді вершини $i_{k+1}, \dots, i_n$ у графі G_1 та вершини $f(i_{k+1}), \dots, f(i_n)$ у графі G мають дуги лише між собою (всі інші значення у відповідних рядках та стовпцях дорівнюють нулю), а відповідні підграфи є ізоморфними (мають однакові матриці суміжності після видалення рядків і стовпців, що відповідають іншим вершинам).

Побудуємо відображення g графу G_1PG на себе, яке для вершини $i_{k+1}, \dots, i_n$ співпадає з f, для вершин $f(i_{k+1}), \dots, f(i_n)$ з f^{-1}, а для інших вершин є тотожнім. Таке відображення буде автоморфізмом графу G_1PG, що випливає з попереднього абзацу. Розглянемо композицію $f_1 = f \circ g$: вона є ізоморфізмом (за властивістю композиції ізоморфізму та автоморфізму), залишає вершини $f(i_{k+1}), \dots, f(i_n)$ на місці, оскільки $f\left(f^{-1}(f(i_l))\right) = f(i_l), l = \overline{k+1, n}$, відображає вершини $i_{k+1}, \dots, i_n$ у вершини $f(f(i_{k+1})), f(f(i_{k+2})), \dots, f(f(i_n))$ та не змінює відображення решти вершин (зокрема $i_1, i_2, \dots, i_k$ відображаються у ті ж вершини графу G_2).

Якщо тепер серед $f_1(1), f_1(2), \dots, f_1(n)$ немає вершин графу G, то твердження доведено з попередніх міркувань, інакше зможемо повторити усі наведені міркування та побудувати новий ізоморфізм. Тоді, оскільки граф є скінченним та кожен наступний ізоморфізм додає нові вершини, які він залишає на місці, та не впливає на відображення вершин, які залишали на місці попередні ізоморфізми, за побудовою, зрештою всі вершини G_1 будуть проектуватися на вершини G_2. ■

Наслідок 2. Графи G_1 та G_2 ізоморфні тоді і тільки тоді, коли графи, утворені деякою послідовністю паралельних та послідовних комбінацій цих графів з відповідними графами, є ізоморфними.

Доведення. Випливає з послідовного використання лем 1, 2 та наслідку 1. ■

Наслідок 3. Дві вершини є взаємозамінними у графі G тоді і тільки тоді, коли вони є взаємозамінними у графі, утвореному деякою послідовністю паралельних та послідовних комбінацій цього графу з деякими графами.

Доведення. Випливає безпосередньо з наслідку 2. ■

Теорема 2. Якщо для деяких відкритих вершин i та j паралельно-послідовного графу G, графи $G\backslash i$ та $G\backslash j$ є ізоморфними, то вершини i та j є взаємозамінними у графі G.

Доведення. Нехай T – канонічне дерево декомпозиції графу G. Розглянемо шляхи від вершин i та j до кореня T. Першою вершиною, що належить обом цим шляхам має бути вершина p, що відповідає

паралельній композиції. Справді, якщо б p відповідала послідовній композиції, то з цього випливало б, що існує орієнтовний шлях або з вершини i у вершину j, або у зворотному напрямку, за властивістю послідовної композиції, що в свою чергу суперечить тому, що обидві ці вершини є відкритими у G.

Розглянемо тепер граф G', що відповідає піддереву T з коренем p. Цей граф є паралельно-послідовним, оскільки є підграфом паралельно-послідовного графу G, та не є зв'язним, оскільки корінь p його дерева декомпозиції відповідає паралельній композиції. Вершини i та j належать графу G' за побудовою. З наслідку 2 та ізоморфності графів $G\backslash i$ й $G\backslash j$ випливає, що графи $G'\backslash i$ та $G'\backslash j$ також є ізоморфними.

Нехай тепер $\mathrm{G}'_1, \mathrm{G}'_2, \dots, \mathrm{G}'_k$ - система максимальних (за включенням) неорієнтовно зв'язних підграфів графу G' (набір послідовно-паралельних графів, що утворюють G' за допомогою паралельної композиції). Без втрати загальності можемо вважати, що вершина $i \in \mathrm{G}'_1$, а вершина $j \in \mathrm{G}'_2$, інакше p не була б першою загальною вершиною на шляхах до кореня T.

Розглянемо тепер графи $G'\backslash i$ та $G'\backslash j$. Граф $G'\backslash i$ утворено з підграфів $\mathrm{G}'_1\backslash i, \mathrm{G}'_2, \dots, \mathrm{G}'_k$, а граф $G'\backslash j$ – з підграфів $\mathrm{G}'_1, \mathrm{G}'_2\backslash j, \dots, \mathrm{G}'_k$. З ізоморфізму цих графів випливає, що знайдеться таке бієктивне відображення f, яке підграфу $G'\backslash i$ ставить у відповідність підграф $G'\backslash j$, ізоморфний йому. Відзначимо, що підграфи $\mathrm{G}'_1\backslash i$ та G'_1 і $\mathrm{G}'_2\backslash j$ та G'_2 не ізоморфні, оскільки містять різну кількість вершин, підграфи $\mathrm{G}'_q, q = 3, \dots, k$ містяться в обох графах.

Покажемо, що на основі f можна побудувати відображення, що проектує $\mathrm{G}'_1\backslash i$ на $\mathrm{G}'_2\backslash j$ та G'_1 на G'_2. Розглянемо $f(\mathrm{G}'_1) = \mathrm{G}'_x$, нехай $x \neq 2$ та $f(\mathrm{G}'_x) = \mathrm{G}'_y$, тоді з транзитивності відношення ізоморфізму випливає, що підграфи G'_1 та G'_y - ізоморфні, а отже зможемо побудувати нове відображення, що проектує G'_1 на G'_y, а G'_x на G'_x (залишає на місці). Повторюючи аналогічну побудову, прийдемо до відображення, що проектує G'_1 на G'_2, оскільки G'_1 завжди буде проектуватися на якийсь новий підграф (попередні будуть проектуватися самі на себе) та G'_2 - єдиний підграф, який міститься лише в одному з графі та може бути ізоморфним з G'_1. Аналогічні міркування можемо застосувати до підграфу $\mathrm{G}'_1\backslash i$, а отже шукане відображення існує.

Отже, підграфи G'_1 та G'_2 і $\mathrm{G}'_1\backslash i$ та $\mathrm{G}'_2\backslash j$ є ізоморфними. Нехай g ізоморфізм з G'_1 у G'_2 і $g(i) = l$. Тоді, якщо l співпадає з вершиною j, вершини i та j є взаємозамінними у G' за означенням (можна утворити наступний автоморфізм: g переводить G'_1 у G'_2 та i у j, g^{-1} – G'_2 у G'_1,

тотожне відображення – G'_q у $G'_q, q = 3, \dots, k$), а отже, за наслідком 3, й у графі G і твердження теореми є доведеним.

Якщо ж $l \neq j$, тоді маємо послідовно-паралельний граф G'_2, в якому є дві відкриті вершини l та j і графи $G'_2 \backslash j$ та $G'_2 \backslash l$ є ізоморфними, оскільки $g(i) = l$ та графи $G'_1 \backslash i$ та $G'_2 \backslash j$ є ізоморфними, а отже отримали початкове твердження для графу меншої розмірності. Тоді можемо всі міркування доведення застосувати до нього знову. Граф є скінченним, тому врешті-решт залишиться граф з однією вершиною, а отже будуть виконані умови з попереднього абзацу. ■

Доведена теорема підтверджує перспективність використання алгоритму генерації неізоморфних підграфів для паралельно-послідовних графів. Подальшого дослідження потребує перевірка твердження 2 з [1] та розробка методу для визначення взаємозамінних відкритих вершин у паралельно-послідовних графах.

Література

1. Караваєв К.Д., Турчина В.А. Аналіз впливу автоморфізму графу на схеми направленого перебору. – Питання прикладної математики і математичного моделювання. Дніпро, 2021 р. – С. 94-104.

2. Valdes J., Tarjan R.E., Lawler E.L. The recognition of series parallel digraphs. – SIAM J. Comput. – 1982. – Pp. 298-313.