

**В. В. КОЗЛОВ, О. В. НАБОКОВА**

**ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ  
ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ**

**Усталені режими лінійних електричних кіл**

**2015**

Ціль даного навчального посібника полягає в тім, щоб дати студентам досить повне уявлення про лінійні електричні кола, елементи, з яких вони складаються, їхні математичні описи, основні методи аналізу й розрахунку цих кіл, тобто в створенні наукової бази для наступного вивчення різних спеціальних електротехнічних дисциплін.

У підручнику викладений навчально-теоретичний матеріал, який супроводжується числовими прикладами.

Підручник призначений для студентів очної та заочної систем форм, які навчаються за напрямком "Електромеханіка", при самостійній підготовці і максимально враховує особливості типової учбової програми цього напрямку. В якості додаткового його можуть використати студенти будь-яких електротехнічних та енергетичних спеціальностей вищих навчальних закладів.

## ЗМІСТ

|   |    |
|---|----|
| <b>ПЕРЕДМОВА</b>  | 9  |
| <b>Розділ перший ФІЗИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ</b>  | 13 |
| 1.1 Електромагнітне поле. Електричний заряд. Напруженість. Потенціал                                      | 13 |
| 1.2 Електричний струм і напруга   | 15 |
| 1.3 Закон Ома   | 17 |
| 1.4 Електрорушійна сила   | 17 |
| 1.5 Миттєва потужність й енергія електричного струму. Закон Джоуля-Ленца                                  | 18 |
| 1.6 Основні характеристики магнітного поля  | 19 |
| 1.7 Закон Біо-Савара-Лапласса   | 21 |
| 1.8. Закон повного струму (теорема про циркуляції вектора магнітної індукції)                             | 22 |
| 1.9 Закон електромагнітної індукції. Правило Ленца  | 22 |
| 1.10 Силова дія магнітного поля на провідник зі струмом. Сила Ампера                                      | 24 |
| Питання для самоконтролю  | 24 |
| <b>Розділ другий ЕЛЕКТРИЧНЕ КОЛО І ЙОГО ЕЛЕМЕНТИ</b>  | 25 |
| 2.1 Основні поняття про електричне коло   | 25 |
| 2.2 Електричні схеми  | 26 |
| 2.3 Ідеальні пасивні елементи схем заміщення  | 28 |
| 2.4 Поняття про лінійні і нелінійні пасивні елементи  | 37 |
| 2.5 Ідеальні активні елементи   | 38 |
| 2.6 Реальні джерела енергії   | 41 |
| 2.7 Основні визначення, які стосуються електричного кола  | 43 |
| Питання для самоконтролю  | 44 |
| <b>Розділ третій ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ</b>  | 45 |
| 3.1 Основні закони теорії електричних кіл   | 45 |
| 3.1.1 Закон Ома для ділянки кола, що містить ЕРС  | 46 |
| 3.1.2 Перший закон Кірхгофа   | 46 |
| 3.1.3 Другий закон Кірхгофа   | 47 |
| 3.1.4 Рівняння енергетичного балансу (рівняння балансу потужностей) в електричних колах постійного струму | 49 |
| 3.2 Еквівалентні перетворення електричних кіл   | 51 |
| 3.2.1 Послідовне з'єднання елементів  | 51 |
| 3.2.2 Паралельне з'єднання елементів  | 52 |
| 3.2.3 Змішане з'єднання елементів   | 54 |
| 3.2.4 З'єднання резистивних елементів трикутником і зіркою  | 55 |

|       |   |     |
|-------|---|-----|
| 3.3   | Аналіз розгалужених електричних кіл постійного струму з одним джерелом енергії                                | 58  |
| 3.3.1 | Метод безпосереднього застосування закону Ома (метод згортання)   | 58  |
| 3.3.2 | Метод пропорційних величин  | 63  |
| 3.4   | Аналіз складних електричних кіл постійного струму з декількома джерелами енергії                              | 64  |
| 3.4.1 | Метод безпосереднього застосування законів Кірхгофа   | 64  |
| 3.4.2 | Метод контурних струмів   | 68  |
| 3.4.3 | Метод вузлових потенціалів  | 71  |
| 3.4.4 | Метод двох вузлів   | 76  |
| 3.4.5 | Метод накладення (метод суперпозиції)   | 78  |
| 3.4.6 | Активний і пасивний двополюсники  | 79  |
| 3.4.7 | Метод еквівалентного джерела  | 81  |
| 3.5   | Передача енергії від активного двополюсника до пасивного. Режими роботи електричних кіл                       | 85  |
| 3.6   | Потенційна діаграма   | 89  |
| 3.7   | Теорема компенсації   | 93  |
|       | Питання для самоконтролю  | 94  |
|       | <b>Розділ четвертий ОДНОФАЗНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ</b>   | 97  |
| 4.1   | Змінні струми й напруги   | 97  |
| 4.2   | Синусоїдний струм й основні величини, які його характеризують   | 99  |
| 4.3   | Середнє й діюче значення величин, що змінюються за синусоїдним законом  | 101 |
| 4.4   | Способи графічного зображення синусоїдних струмів і напруг  | 102 |
| 4.5   | Одержання синусоїдної ЕРС   | 105 |
| 4.6   | Ідеальні пасивні елементи в колах синусоїдного струму   | 107 |
| 4.6.1 | Резистивний елемент у колі синусоїдного струму  | 107 |
| 4.6.2 | Індуктивний елемент у колі синусоїдного струму  | 108 |
| 4.6.3 | Ємнісний елемент у колі синусоїдного струму   | 111 |
| 4.7   | Електричне коло синусоїдного струму з послідовним з'єднанням резистивного, індуктивного і ємнісного елементів | 113 |
| 4.8   | Електричне коло синусоїдного струму з паралельним з'єднанням резистивного, індуктивного і ємнісного елементів | 117 |
| 4.9   | Потужність електричного кола синусоїдного струму  | 122 |
| 4.10  | Застосування векторних діаграм до розрахунку кіл синусоїдного струму. Метод провідностей                      | 126 |

|  |     |
|--|-----|
| 4.11 Резонансні явища в колах синусоїдного струму  | 129 |
| 4.12 Послідовний коливальний контур. Резонанс напруг   | 130 |
| 4.13 Паралельний коливальний контур. Резонанс струмів  | 138 |
| 4.14 Підвищення коефіцієнта потужності споживачів електричної енергії.                           | 143 |
| 4.15 Система рівняння для миттєвих значень струмів і напруг у складних колах синусоїдного струму | 148 |
| 4.16 Подання електричних величин, які змінюються за синусоїдним законом комплексними числами     | 150 |
| 4.17 Символічний метод розрахунку кіл синусоїдного струму  | 153 |
| 4.18 Закон Ома в комплексній формі. Повний комплексний опір. Повна комплексна провідність        | 154 |
| 4.19 Закони Кірхгофа в символічній формі   | 156 |
| 4.20 Застосування символічного методу до розрахунку кіл синусоїдного струму                      | 157 |
| 4.21 Векторні й топографічні діаграми  | 158 |
| 4.22 Потужність електричного кола в символічній формі запису                                     | 159 |
| 4.23 Індукційно-зв'язані елементи електричного кола  | 165 |
| 4.24 Електричне коло з послідовним з'єднанням індукційно-зв'язаних елементів                     | 168 |
| 4.25 Електричне коло з паралельним з'єднанням індукційно-зв'язаних елементів                     | 171 |
| 4.26 Визначення взаємної індуктивності дослідним шляхом  | 172 |
| 4.27 Розрахунки складних електричних кіл при наявності індукційного зв'язку між елементами       | 173 |
| 4.28 Метод розв'язки індукційних зв'язків  | 179 |
| 4.29 Передача енергії між індукційно-зв'язаними елементами кола                                  | 181 |
| 4.30 Повітряний трансформатор (трансформатор без феромагнітного осердя)                          | 182 |
| 4.31 Резонанс в індукційно-зв'язаних коливальних контурах  | 189 |
| 4.32 Вимірювання електричних величин у колах однофазного синусоїдного струму                     | 192 |
| Питання для самоконтролю   | 193 |
| <b>Розділ п'ятий ТРИФАЗНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА</b>  | 195 |
| 5.1 Основні поняття про багатофазні кола   | 195 |
| 5.2 Отримання трифазної синусоїдної системи ЕРС  | 197 |
| 5.3 Основні схеми з'єднання трифазних електричних кіл  | 200 |
| 5.3.1 Незв'язана система трифазних електричних кіл   | 200 |
| 5.3.2 Основні схеми з'єднання обмоток генератора   | 202 |
| 5.3.3 Схеми з'єднання навантаження   | 205 |

|  |     |
|--|-----|
| 5.4 Несиметричний режим трифазного кола, що з'єднане за схемою зірка-зірка з нейтральним проводом, опором якого не можна зневажити | 206 |
| 5.5 Несиметричний режим трифазного кола, що з'єднане за схемою зірка-зірка з нейтральним проводом, опором якого можна зневажити    | 210 |
| 5.6 Симетричний режим трифазного кола, що з'єднане за схемою зірка-зірка   | 211 |
| 5.7 Аварійні режими трифазного кола, що з'єднане за схемою зірка-зірка   | 212 |
| 5.8 Принцип дії найпростішого покажчика послідовності чергування фаз   | 219 |
| 5.9 Вплив опору нейтрального проводу на несиметричний режим трифазного кола з'єданого чотири провідною зіркою                      | 222 |
| 5.10 Призначення нейтрального проводу  | 224 |
| 5.11 Розрахунок трифазного кола при з'єднанні навантаження за схемою трикутник   | 225 |
| 5.12 Аварійні режими трифазного кола, що з'єднане за схемою зірка-трикутник  | 231 |
| 5.13 Потужність трифазного кола  | 235 |
| 5.14 Вимірювання активної потужності трифазного кола   | 238 |
| 5.15 Пульсуючі й обертові магнітні поля  | 243 |
| 5.15.1 Магнітне поле однієї обмотки із синусоїдним струмом   | 244 |
| 5.15.2 Магнітне поле двох взаємно перпендикулярних у просторі обмоток  | 244 |
| 5.15.3 Магнітне поле трьох обмоток   | 246 |
| 5.16 Принцип дії асинхронного двигуна  | 248 |
| 5.17 Принцип дії синхронного двигуна   | 251 |
| 5.18 Симетричні складові трифазних систем  | 252 |
| 5.18.1 Основні поняття симетричної трифазної системи   | 253 |
| 5.18.2 Розкладання трифазної несиметричної системи векторів на три трифазні симетричні системи векторів                            | 255 |
| 5.18.3 Опори елементів трифазного кола для струмів різних послідовностей   | 258 |
| 5.19 Метод симетричних складових   | 260 |
| 5.19.1 Межі застосовності методу симетричних складових   | 260 |
| 5.19.2 Застосування методу симетричних складових для симетричних кіл з несиметричною системою ЕРС генератора                       | 261 |

|   |     |
|---|-----|
| 5.19.3 Застосування методу симетричних складових для несиметричних кіл із симетричною системою ЕРС генератора | 265 |
| 5.20 Вираження потужності трифазного кола через симетричні складові   | 276 |
| 5.21 Фільтри симетричних складових  | 277 |
| Питання для самоконтролю  | 280 |
| <b>Розділ шостий ПЕРІОДИЧНІ НЕСИНУСОЇДНІ СТРУМИ В ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ</b>                              | 283 |
| 6.1 Причини виникнення несинусоїдних струмів  | 283 |
| 6.2 Розкладання періодичної несинусоїдної кривої в тригонометричний ряд Фур'є                                 | 285 |
| 6.3 Вплив симетрії форми періодичних кривих на вид тригонометричного ряду Фур'є                               | 289 |
| 6.4 Чисельний метод визначення гармонійних складових ряду Фур'є   | 292 |
| 6.5 Діючі й середні значення періодичних несинусоїдних струмів, напруг й ЕРС                                  | 295 |
| 6.6 Потужність у колі періодичного несинусоїдного струму  | 298 |
| 6.7 Коефіцієнти, які характеризують періодичні функції  | 301 |
| 6.8 Загальна методика розрахунку лінійних електричних кіл несинусоїдного струму                               | 303 |
| 6.9 Вплив резистивного, індуктивного і ємнісного елементів кола на форму кривої струму                        | 307 |
| 6.10 Резонансні явища в електричних колах несинусоїдного струму   | 310 |
| 6.11 Вищі гармоніки в трифазних колах   | 315 |
| Питання для самоконтролю  | 323 |
| <b>Розділ сьомий ЧОТИРИПОЛЮСНИКИ</b>  | 325 |
| 7.1 Загальні відомості про чотириполюсники  | 325 |
| 7.2 Системи рівнянь чотириполюсників  | 327 |
| 7.3 Взаємозв'язок параметрів різних форм запису   | 331 |
| 7.4 Схеми заміщення чотириполюсників  | 333 |
| 7.5 Експериментальне визначення параметрів А-форми чотириполюсника  | 336 |
| 7.6 Вхідні опори чотириполюсника  | 339 |
| 7.7 Характеристичні параметри чотириполюсника   | 341 |
| 7.8 Передатні функції чотириполюсника   | 345 |
| 7.9 Способи з'єднання пасивних чотириполюсників   | 346 |
| 7.9.1 Каскадне з'єднання чотириполюсників   | 346 |

|  |     |
|--|-----|
| 7.9.2 Паралельне з'єднання чотириполюсників                                      | 349 |
| 7.9.3 Послідовне з'єднання чотириполюсників                                      | 350 |
| 7.9.4 Послідовно-паралельне з'єднання чотириполюсників                           | 351 |
| 7.9.5 Паралельно-послідовне з'єднання чотириполюсників                           | 352 |
| 7.10 Симетричні чотириполюсники  | 354 |
| 7.11 Мостові чотириполюсники   | 356 |
| 7.12 Поняття про активний чотириполюсник   | 359 |
| 7.13 Поняття про зворотний зв'язок   | 360 |
| Питання для самоконтролю   | 362 |
| <b>Розділ восьмий ЕЛЕКТРИЧНІ ФІЛЬТРИ</b>   | 363 |
| 8.1 Основні поняття про частотні електричні фільтри                              | 363 |
| 8.2 Пасивні реактивні фільтри  | 365 |
| 8.2.1 Загальна теорія $k$ -фільтрів  | 365 |
| 8.2.2 Фільтр нижніх частот ФНЧ   | 368 |
| 8.2.3 Фільтр вищих частот ФВЧ  | 371 |
| 8.2.4 Смуговий фільтр СФ   | 376 |
| 8.2.5 Загороджувальний фільтр ЗФ   | 379 |
| 8.3 Пасивні $RC$ -фільтри  | 382 |
| Питання для самоконтролю   | 384 |
| <b>Розділ дев'ятий ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ</b>               | 385 |
| 9.1 Загальні положення   | 385 |
| 9.2 Рівняння однорідної двопровідної лінії                                       | 387 |
| 9.3 Розв'язання рівнянь однорідної лінії постійного струму в усталеному режимі   | 389 |
| 9.4 Розв'язання рівнянь однорідної лінії синусоїдного струму в усталеному режимі | 393 |
| 9.5 Однорідна лінія як чотириполюсник  | 397 |
| 9.6 Біжні хвилі в однорідній лінії   | 400 |
| 9.7 Неузгоджене й узгоджене навантаження довгої лінії                            | 403 |
| 9.8 Лінія без спотворювань   | 404 |
| 9.9 Лінія без втрат  | 406 |
| 9.10 Вхідний опір лінії з розподіленими параметрами                              | 411 |
| 9.11 Експериментальне визначення параметрів лінії з розподіленими параметрами    | 414 |
| Питання для самоконтролю   | 415 |
| <b>ПРЕДМЕТНИЙ ВКАЗІВНИК</b>  | 417 |
| <b>БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК</b>  | 425 |

## Вступ

Сучасна техніка неможлива без використання механічного, теплового, світлового й іншого видів енергії, які одержують із природної енергетичної сировини. Проміжною ланкою енергетичних перетворень найчастіше є електрична енергія.

Інтенсивне використання електричної енергії обумовлено наступними її особливостями:

- великою різноманітністю й відносною дешевиною способів і технічних засобів одержання електричної енергії;

- можливістю централізованого одержання на різних електростанціях, а також зручністю передачі електричної енергії з малими втратами на великі відстані й розподілі її між споживачами;

- відносній простоті й високому коефіцієнту корисної дії перетворення електричної енергії в інші види енергії (механічну, теплову, променисту й т.д.);

- наявністю простих надійних і безпечних методів вимірювання й контролю електричних величин, а також керування режимами роботи електричних пристроїв, агрегатів і систем.

Всі різноманітні електричні машини, апарати, пристрої й системи неможливо вірно конструювати, виробляти й експлуатувати без знання основних законів електромагнетизму, без уміння якісно й кількісно аналізувати різноманітні режими, здійснювати необхідні розрахунки, без звички правильного застосування електричних і магнітних величин й їхнього вимірювання за допомогою вимірювальних приладів і систем.

Теоретичні основи електротехніки (ТОЕ) є базовим загальнотехнічним курсом для електротехнічних й електроенергетичних спеціальностей вузів. Даний посібник укладений відповідно до типової програми й призначений для допомоги переважно студентам, які навчаються за напрямком "Електромеханіка", при самостійній підготовці, але може використатися студентами будь яких технічних спеціальностей.

Курс "Теоретичні основи електротехніки" спирається на курси фізики й математики й включає вивчення співвідношень між електричними й магнітними величинами, методів розрахунку й аналізу електромагнітних процесів, принципів будови й роботи приладів, машин й апаратів, що використовують електромагнітну енергію. Він має винятково важливе значення для формування нау-

кового кругозору фахівців з електротехніки; на ньому ґрунтуються всі спеціальні електротехнічні дисципліни.

При вивченні курсу ТОЕ передбачається, що студенти мають відповідну математичну підготовку з теорії функцій комплексних змінних і тригонометричних функцій, диференціального й інтегрального вираховувань, лінійної алгебри, а також знайомі з операціями з векторами. З курсу фізики студенти повинні знати основні поняття й закони електрики й магнетизму.

Для аналізу електромагнітних явищ і процесів використовуються дві основні моделі: електричні кола й електромагнітне поле. Вибір тієї або іншої моделі визначається умовами постановки задачі. Відповідно й курс ТОЕ умовно розділяють на дві частини: теорія електричних і магнітних кіл і теорія електромагнітного поля.

*Теорія електричних і магнітних кіл* виходить із наближеної заміни реального електротехнічного пристрою ідеалізованою схемою заміщення. Ця схема містить ділянки кола, на яких визначаються шукані напруги й струми. Електромагнітні процеси вважаються зосередженими в окремих колах й елементах цих кіл і кількісно описуються за допомогою понять: електрорушійна сила, струм і напруга. Теорія кіл дозволяє з достатньою для інженерної практики точністю визначати безпосередньо напругу між кінцями розглянутої ділянки кола, не удаючись до обчислення його між проміжними точками. Струм також визначається безпосередньо, без обчислення його щільності в різних точках перетину провідника.

*Теорія електромагнітного поля* вивчає електромагнітні процеси, що розподілені в розглянутому просторі й описувані за допомогою понять: напруженість електричного поля, магнітна індукція, відносні діелектрична й магнітна проникності. Вона досліджує напруженості електричних і магнітних полів і з їхньою допомогою такі явища, як випромінювання електромагнітної енергії, розподіл об'ємних зарядів, густина струмів і т.п.

Розмежування областей застосування теорії кіл і теорії поля є умовним. Наприклад, процеси поширення електричних сигналів у лініях електропровідного зв'язку досліджуються як методами теорії кіл, так і методами теорії поля.

У даному навчальному посібнику розглянуті питання теорії лінійних електричних кіл в усталених режимах. Зміст курсу й послідовність викладу матеріалу в ньому відповідають програмі дис-

ципліни ТОЕ для електротехнічних й електроенергетичних спеціальностей вузів.

Ціль даного навчального посібника полягає в тому, щоб дати студентам досить повне уявлення про електричні кола і їхні складові елементи, їхні математичні моделі, основні методи аналізу й розрахунку цих кіл у статичних режимах роботи, тобто в створенні наукової бази для наступного вивчення різних спеціальних електротехнічних дисциплін.

За результатами вивчення курсу студент повинен знати основні методи аналізу й розрахунку ustalених процесів у лінійних колах із зосередженими параметрами, у лінійних колах несинусоїдального струму, у лінійних колах з розподіленими параметрами.

Навчальний посібник містить у собі наступні основні розділи, які розташованих у послідовності, що відповідає зростаючій складності навчального матеріалу:

- фізичні основи електротехніки;
- електричне кола та його елементи;
- теорія лінійних кіл постійного струму;
- теорія однофазних кіл синусоїдального струму;
- теорія трифазних електричних кіл;
- лінійні кола при періодичних несинусоїдальних струмах;
- основи теорії пасивних чотириполюсників
- основи теорії фільтрів;
- електричні кола з розподіленими параметрами в сталому режимі.

Велика кількість схем електричних кіл, векторних діаграм, графіків і таблиць забезпечують добру наочність навчального матеріалу й сприяють його засвоєнню. Всі приклади мають розгорнуті чисельні розв'язання.

Основа глибоких знань - систематична самостійна робота студентів з теоретичними матеріалами й уміння застосовувати теорію до розв'язання практичних задач. З метою придбання й закріплення навичок методів розрахунків, які необхідні для успішного вивчення наступних прикладних курсів, у книзі після кожної теми запропоновані додаткові завданнями для самостійного розв'язання й питання для самоконтролю, які студент повинен розглянути після пророблення відповідного розділу. До всіх задач є відповіді.

При підготовці рукопису були використані відомі підручники, збірники й посібники [1...15], а також методичні розробки авторів [16...20].

Автори щиро вдячні завідувачому кафедри "Електричні та електронні апарати" ЗНТУ професорові О. М. Расальському, який надихнув їх на написання посібника, декану ЕТФ ЗНТУ, завідувачому кафедри " Електропостачання промислових підприємств" професорові В. П. Метельському за підтримку під час роботи над рукописом та завідувачому кафедри "Електричні машини" НТУ ХПІ професорові В. І. Мілиху за ряд корисних зауважень, що сприяли поліпшенню рукопису.

## Розділ перший ФІЗИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ

У даному розділі розглядаються основні закони електромагнетизму без знання яких неможливий опис електромагнітних процесів, що відбуваються в електротехнічних пристроях. Ці закони представлені у формулюваннях переважно для постійного електричного струму, як звичайно прийнято у курсі фізики. У наступних розділах їхній зміст буде поширено й на змінний струм.

### 1.1 Електромагнітне поле. Електричний заряд. Напруженість. Потенціал

Деякі елементарні частки (електрони, позитрони, протони) вступають вступають між собою у взаємодії, які не враховують при розгляді інших форм руху матерії. Такі частки називають *зарядженими*. Елементарні заряджені частки можуть входити до складу атомів та молекул, а можуть перебувати у вільному стані. Біля будь-яких заряджених часток виникає електромагнітне поле.

*Електромагнітне поле* - це особливий стан матерії, що характеризується у всіх точках простору й у часі двома взаємозв'язаними та взаємозалежними полями, які називають електричним полем і магнітним полем. Воно проявляється в силовій взаємодії із зарядженими частками.

*Електричний заряд (кількість електрики)* – це фізична скалярна величина, яка чисельно характеризує властивість заряджених часток або тіл вступати в силові взаємодії із зовнішніми електромагнітними полями. Ця величина обумовлюється таким чином, що силова взаємодія, яка переноситься полем між зарядами, прямо пропорційно зарядам часток або тіл, які взаємодіють між собою, а напрямки сил, що діють на них з боку електромагнітного поля, залежать від знаку зарядів. Електричні заряди вимірюють у *кулонах (Кл)* або *ампер-секундах (А·с)*. Електричний заряд зарядженого тіла обов'язково є кратним модулю заряду електрона, так названому, *елементарному заряду*  $e = 1,601 \cdot 10^{-19}$  Кл.

Розрізняють два види електричних зарядів, які умовно називають *позитивними* й *негативними* (умовно вважають, що заряд протона є позитивним, а електрона - негативним).

*Точковим зарядом* називають заряджене тіло, геометричні розміри якого нехтувано малі в порівнянні з відстанями до інших зарядів розглянутої системи.

*Закон силової взаємодії точкових зарядів (закон Кулона):* сила взаємодії двох нерухомих точкових зарядів  $q_1$  й  $q_2$  в однорідному діелектричному середовищі обернено пропорційна квадрату відстані між ними й спрямована вздовж прямої, що з'єднує ці заряди:

$$F_{12} = \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2}, \quad (1.1)$$

де  $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$  Ф/м - *електрична стала* (іноді її називають *діелектричною проникністю вакууму*);  $\epsilon_r$  - *відносна діелектрична проникність*, – безрозмірна величина, що показує, у скільки разів діелектрична проникність середовища відрізняється від діелектричної проникності вакууму;  $r$  - відстань між зарядами (м).

Однйменні заряди відштовхуються один від одного, різноіменні - притягаються.

*Пробним зарядом* називають позитивний точковий заряд  $q$ , який вносять в дане електричне поле для вимірювання його характеристик.

Якщо всі заряди, що створюють *електричне поле*, у даній системі відліку є нерухомими й не змінними в часі, то поле називають електростатичним.

Для кількісного визначення електричного поля вводять силову характеристику - напруженість електричного поля.

*Напруженістю електричного поля* називають фізичну величину, що чисельно дорівнює відношенню сили, з якої електромагнітне поле діє на нерухомий пробний заряд, який поміщено в дану точку простору, до цього заряду:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}. \quad (1.2)$$

Напруженість електричного поля – векторна фізична величина. Напрямок вектора  $\vec{E}$  збігається в кожній точці простору з напрямком сили, що діє на пробний заряд.

Одиниця вимірювання напруженості електричного поля є *вольт/метр (В/м)*.

Робота сил електростатичного поля при переміщенні заряду з однієї точки поля в іншу не залежить від форми траєкторії, а обу-

мовлюється тільки положенням початкової й кінцевої точок і значенням заряду.

Отже, робота сил електростатичного поля при переміщенні заряду по будь-якій замкнутій траєкторії дорівнює нулю.

Силі поля, що мають цю властивість, називають потенційними.

Потенційна енергія електростатичного поля, визначається з точністю до довільної постійної, котру можна зафіксувати вибором точки з нульовим рівня енергії  $W_0 = 0$ .

*Потенційна енергія заряду  $q$* , який розташований у будь-якій точці простору  $k$  дорівнює роботі, яку виконає електричне поле при переміщенні заряду з даної точки в точку з нульовим рівнем енергії.

$$W_k = A_{ko}. \quad (1.3)$$

*Потенціалом електричного поля* називають скалярну фізичну величину, що чисельно дорівнює відношенню потенційної енергії електричного заряду в даній точці  $k$  електростатичного поля до цього заряду:

$$\varphi_k = \frac{W_k}{q}. \quad (1.4)$$

Потенціал є енергетичною характеристикою електростатичного поля.

Одиницею вимірювання потенціалу є *вольт (В)*.

У теоретичних питаннях нуль потенціалу вибирають в нескінченності. На практиці в електротехніці в більшості випадків за нуль потенціалу вибирають потенціал Землі.

## 1.2 Електричний струм і напруга

При переміщенні одиничного позитивного заряду між двома будь-якими точками  $a$  й  $b$  електричного поля силами електричного поля виконується робота, що дорівнює різниці потенціалів цих точок. Різницю потенціалів точок  $a$  й  $b$  називають *напругою* між цими точками:

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b. \quad (1.5)$$

Відповідно:

$$U_{ba} = \varphi_b - \varphi_a = -U_{ab}. \quad (1.6)$$

Напрямок  $U$  скалярна величина, який приписують певний напрямок. Звичайно під додатним напрямком напруги розуміють напрямок, у якому переміщуються (або могли б переміщатися) під дією електричного поля, позитивно заряджені вільні частки, тобто напрямок від точки кола з більшим потенціалом до точки кола з меншим потенціалом. Напрямок напруги вказують стрілкою.

Одиницею вимірювання напруги, як і потенціалу, є *вольт* ( $B$ ).

У провідниках може за певних умов виникнути безперервний упорядкований рух вільних носіїв електричного заряду. Такий рух називають *електричним струмом провідності*. Для існування електричного струму в провіднику необхідно створити в ньому електричне поле. Електричний струм провідності в металах та в електровакуумних приладах являє собою рух негативно заряджених часток (електронів), а струм провідності в електролітах і газах - рух як позитивно, так і негативно заряджених часток (іонів і електронів).

Чисельно електричний струм провідності (*силу струму*) визначають як межу відношення кількості електричного заряду через розглянутий поперечний переріз за деякий проміжок часу, до значення цього проміжку, коли він прагне до нуля.

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}, \quad (1.7)$$

де  $q = q_+ + q_-$  - сукупність негативних і позитивних зарядів, що переміщуються в протилежних напрямках.

У випадку коли за будь-які рівні проміжки часу через поперечний переріз провідника проходять рівні кількості заряду, струм називають постійним і визначають зі співвідношення:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}. \quad (1.8)$$

Якщо ця умова не виконується, то струм називають змінним.

Електричний струм провідності  $I$  величина скалярна, тому що в різних елементах розглянутої поверхні напрямок руху заряджених часток може не збігатися. Але якщо розглядати нескінченно малий елемент поверхні, то напрямок руху заряджених часток у всіх його точках можна вважати однаковим.

Електричному струму  $I$ , як і напрузі  $U$ , приписують напрямок. За додатний напрямок струму приймають напрямок переміщення позитивно заряджених часток. На ділянках кола, у яких переміщення заряджених часток здійснюється за рахунок енергії еле-

ктричного поля напрямок напруги й струму збігаються.

Одиницею вимірювання електричного струму є *ампер* ( $A$ ).

Напрямок струму характеризується *знаком струму*. Поняття додатний або від'ємний струм має сенс, тільки якщо порівнювати напрямок струму в електричному колі з деяким заздалегідь обраним орієнтиром - так названим умовно додатним напрямком.

Додатний напрямок струму вибирають довільно й, звичайно вказують стрілкою. Якщо в результаті розрахунку струму, що виконано з обліком обраного напрямку, отримане значення є додатним ( $I > 0$ ), то це означає, що фактичний напрямок струму збігається з обраним додатним напрямком. У супротивному випадку, коли воно є від'ємним ( $I < 0$ ), фактичний напрямок струму не збігається з обраним. Таким чином, обраний для струму додатний напрямок не означає напрямок, у якому переміщаються електричні заряди, він тільки надає певний зміст знаку струму.

Миттєві значення струму й напруги позначаються відповідно  $i$  й  $u$ .

### 1.3 Закон Ома

*Закон Ома* для однорідної ділянки електричного кола: сила струму  $I$ , що тече по однорідному металевому провіднику (тобто провіднику, у якому не діють сторонні сили), пропорційна напрузі  $U$  на кінцях провідника й обернено пропорційна опору ділянки:

$$I = \frac{U}{R}, \quad (1.9)$$

де  $R$  - електричний опір провідника, що виміряють в *омах* ( $Om$ ); у випадку прямолінійного провідника, що має постійний перетин

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S}, \quad (1.10)$$

$\rho$  - питомий електричний опір, ( $Om \cdot m$ );  $l$  - довжина провідника, ( $m$ ),  $S$  - перетин провідника, ( $m^2$ ).

### 1.4 Електрорушійна сила

Для створення усередині провідника, постійно існуючого електричного поля необхідно, щоб у провідниковому колі існувало *джерело струму (напруги)*. Якщо рух зарядів у джерелі викликає сторонніми силами, що не обумовлені електростатичним полем, то енергія сторонніх полів, які викликають ці сили, перетво-

ряться в електричну енергію. У генераторах постійного струму сторонні поля викликаються електромагнітною індукцією, у гальванічних елементах й акумуляторах - хімічними реакціями, у термогенераторах - нагріванням. При цьому біля одного затискача, який позначають знаком "+", утворюється надлишок позитивних зарядів, а біля іншого затискача, який позначають знаком "-", - надлишок негативних зарядів. У результаті розподілу зарядів усередині джерела й у зовнішньому електричному колі виникає електричне поле.

Джерела електричної енергії характеризуються *електрорушійною силою (ЕРС)*. ЕРС чисельно дорівнює роботі сторонніх сил, яка затрачується на переміщення одиничного позитивного заряду усередині джерела від затискача з меншим потенціалом до затискача з більшим потенціалом і позначається  $E$ . Тому що сторонні сили діють тільки усередині джерела струму між його електродами, ЕРС є параметром джерела, і не залежить від зовнішнього кола. Незалежно від природи сторонніх сил ЕРС джерела чисельно дорівнює напрузі між затискачами джерела енергії при відсутності струму.

Одиниця вимірювання електрорушійної сили є *вольт (В)*.

Миттєве значення ЕРС позначають  $e$ .

### 1.5 Миттєва потужність й енергія електричного струму. Закон Джоуля-Ленца

При протіканні струму вздовж однорідної ділянки електричного кола сили електричного поля виконують роботу.

При цьому відбуваються наступні енергетичні перетворення. Енергія джерела спочатку перетворюється в енергію електричного поля. Потім поле віддає енергію зарядженим часткам, що рухаються в провідниках кола. Енергія руху носіїв заряду (енергія струму) буде перетворюватися у внутрішню (теплову) енергію провідників і після деякого збільшення їхньої температури вся ця енергія розсіється в навколишнім середовищі.

За інтервал часу  $\Delta t$  через ділянку кола протікає заряд  $\Delta q = I\Delta t$ . Робота, яку при цьому виконують на цій ділянці сили електричного поля:

$$\Delta A = (\varphi_a - \varphi_b)\Delta q = UI\Delta t, \quad (1.11)$$

де  $U = U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b$  - напруга на ділянці, яку розглядаємо.

З урахуванням закону Ома (1.9) вираз (1.11) можна предста-

вити в наступних видах:

$$\Delta A = RI^2 \Delta t = \frac{U^2}{R} \Delta t. \quad (1.12)$$

*Закон Джоуля-Ленца:* робота  $\Delta A$  електричного струму  $I$ , що протікає по нерухомому провіднику з опором  $R$ , дорівнює кількості теплової енергії, що виділяється в цьому провіднику за інтервал часу  $\Delta t$ :

$$W_T = \Delta A = RI^2 \Delta t. \quad (1.13)$$

*Потужність* електричного струму дорівнює відношенню роботи струму  $\Delta A$  до інтервалу часу  $\Delta t$ , за який ця робота була виконана:

$$P = \frac{\Delta A}{\Delta t} = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R}. \quad (1.14)$$

Роботу електричного струму вимірюють у *джоулях (Дж)*, потужність – у *ваттах (Вт)*. На практиці як одиницю вимірювання електричної енергії частіше використовують *кіловат-годину (кВт·год)*.

Похідна енергії за часом, тобто швидкість надходження енергії в поточний момент часу, являє собою *миттєву потужність* ділянки кола:

$$p = \frac{dW}{dt} = u \frac{dq}{dt} = ui. \quad (1.15)$$

Миттєва потужність - величина алгебраїчна. Вона додатна якщо струм і напруга збігаються за напрямком (ділянка одержує енергію від інших частин електричного кола). Якщо напрямки струму й напруги не збігаються, вона від'ємна (ділянка віддає енергію іншим частинам електричного кола).

## 1.6 Основні характеристики магнітного поля

Подібно тому, як у просторі, що оточує електричні заряди, виникає електричне поле, так й у просторі, що оточує заряди, які рухаються, і постійні магніти, виникає силове поле, що називають *магнітним*.

Наявність магнітного поля виявляють за силовою дією на провідники зі струмом або постійні магніти, які внесені в нього.

Електричне поле створюється будь-якими зарядженими частками і діє на будь-які заряджені частки (як на нерухомі, так і на ті що рухаються). Найважливіша особливість магнітного поля полягає в тім, що воно створюється тільки зарядженими частками, що рухаються, і діє тільки на заряджені частки, що рухаються відносно магнітного поля.

*Індукція магнітного поля (магнітна індукція)* – фізична векторна величина, що характеризує силову дію магнітного поля. Вона чисельно дорівнює значенню сили  $F$ , з якої магнітне поле діє в даній точці на одиничний заряд  $q$ , що рухається з одиничною швидкістю  $v$ , якщо напрямок швидкості такий, що ця сила є максимальною

$$B = \frac{F_{\max}}{qv}. \quad (1.16)$$

Вектор магнітної індукції  $\vec{B}$  спрямован перпендикулярно до площини, до якої належать взаємно перпендикулярні вектора швидкості  $\vec{v}$  й сили  $\vec{F}$  (рис. 1.1).

Якщо вектор  $\vec{B}$  у будь який точці простору є однаковим за напрямком й чисельно, то магнітне поле вважається однорідним.

Одиницею вимірювання індукції магнітного поля є *тесла (Тл)*.

У магнітному полі лінії поля - це лінії магнітного потоку. У кожній точці цих ліній, вектор індукції магнітного поля спрямовано вздовж дотичній до цієї лінії.

Кожна *лінія магнітного поля* - це лінія рівної індукції.

Друга важлива характеристика магнітного поля – *напруженість магнітного поля*. Для однорідного середовища вектор магнітної індукції пов'язано з вектором напруженості наступним співвідношенням:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}, \quad (1.17)$$

де  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \approx 1,257 \cdot 10^{-6}$  Гн/м – *магнітна стала*,  $\mu_r$  - *відносна*

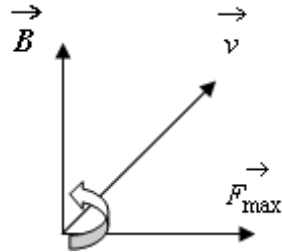


Рис. 1.1

магнітна проникність середовища – безрозмірна величина, що показує, у скільки разів магнітна індукція  $B$  у середовищу відрізняється від магнітної індукції у вакуумі  $B_0$ .

Індукцію магнітного поля вимірюють в *ампер/метр* ( $A/m$ ).

Магнітний потік – це потік вектора магнітної індукції через яку-небудь поверхню. Якщо лінії магнітної індукції перпендикулярні поверхні й індукція в кожній точці поверхні однакова

$$\Phi = BS, \quad (1.18)$$

де  $S$  - площа поверхні,  $m^2$ .

Одиниця вимірювання магнітного потоку є *вебер* ( $Вб$ ).

### 1.7 Закон Біо-Савара-Лапласа

Закон Біо-Савара-Лапласа для магнітного поля провідника зі струмом  $I$ , говорить про те, що кожен елемент  $dl$  такого провідника створює в деякій точці  $A$  (рис. 1.2) індукцію магнітного поля  $\vec{dB}$

$$\vec{dB} = \frac{\mu_r \mu_0}{4\pi} \cdot \frac{[I dl \times r]}{r^3}, \quad (1.19)$$

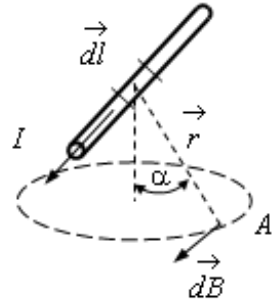


Рис. 1.2

де  $dl$  - вектор, що за модулем дорівнює довжині  $dl$  елемента й збігається за напрямком зі струмом,  $r$  - радіус-вектор, що проведено від елемента  $dl$  в точку  $A$  поля,  $r$  - модуль радіус-вектора  $r$ .

Напрямок  $\vec{dB}$ , що визначається векторним добутком (1.19), перпендикулярний до кожного з векторних співмножників  $dl$  й  $r$ , тобто перпендикулярний до площини до якої вони належать.

Напрямок вектора індукції магнітного поля  $\vec{dB}$  визначають за правилом правого гвинта: напрямок вектора індукції збігається з обертотним рухом голівки правого гвинта, якщо його поступальний рух збігається з напрямком струму в елементі  $dl$ .

Модуль вектора  $\vec{dB}$  визначають за виразом

$$dB = \frac{\mu_r \mu_o}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl}{r^3} \cdot \sin \alpha, \quad (1.20)$$

де  $\alpha$  - кут між вектора  $\vec{dl}$  й  $\vec{r}$  (рис. 1.2).

Якщо струм протікає по круглому прямолінійному провіднику, то лінії магнітного поля утворюють навколо провідника концентричні окружності із центром на осі провідника

### 1.8. Закон повного струму

*Закон повного струму (теорема про циркуляцію вектора магнітної індукції)*: циркуляція вектора індукції  $\vec{B}$  по довільному замкнутому контуру  $L$  дорівнює добутку відносної магнітної проникності  $\mu_r$ , магнітної постійної  $\mu_o$  й алгебраїчної суми струмів, які охоплює цей контур

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_L B_l \cdot dl = \mu_r \mu_o \sum_{k=1}^n I_k, \quad (1.21)$$

де  $n$  – кількість провідників зі струмами, які охоплює контур  $L$  довільної форми. Кожний струм ураховують стільки разів, скільки раз він охоплюється контуром. Струм ураховують зі знаком "+", якщо він утворить правий гвинт із напрямком обходу контуру, і зі знаком "-" - у протилежному випадку.

Наприклад, для контуру, що представлений на рис. 1.3, циркуляція вектора індукції  $\vec{B}$  пропорційна  $(I_1 - I_2)$  і не залежить від  $I_3$  (бо контур не охоплює його).

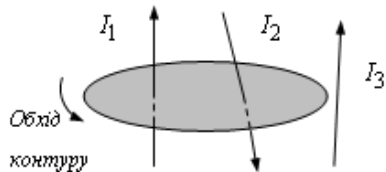


Рис. 1.3

### 1.9 Закон електромагнітної індукції. Правило Ленца

Суть закону електромагнітної індукції полягає в тім, що у випадку коли магнітний потік проходить через поверхню, яка обмежена яким-небудь контуром, то при зміні цього потоку в названому контурі виникає електрорушійна сила.

Зміна магнітного потоку, що пронизує замкнутий контур, може відбуватися з двох причин.

а) магнітний потік змінюється внаслідок переміщення контуру або його частин у постійному в часі магнітному полі.

Для провідника, який рухається зі швидкістю  $v$  і має довжину  $l$  (рис. 1.4), ЕРС дорівнює

$$E = B \sin \alpha \frac{dS}{dt} = Blv \sin \alpha, \quad (1.22)$$

де  $B$  - індукція магнітного поля;  $\alpha$  - кут між векторами швидкості й індукції магнітного поля.

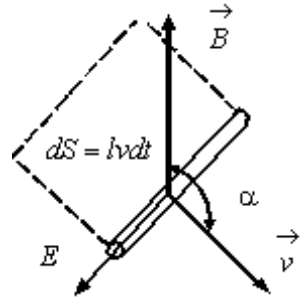


Рис. 1.4

б) магнітний потік, що пронизує контур (катушку), змінюється внаслідок зміни в часі магнітного поля при нерухомому контурі (катушці).

У цьому випадку миттєве значення ЕРС чисельно дорівнює швидкості зміни власного магнітного потокозчеплення  $\psi$

$$e = - \frac{d\psi}{dt}, \quad (1.23)$$

де  $\psi = \sum_k^w \Phi_k$  - власне потокозчеплення;  $w$  - кількість витків котушки;  $\Phi_k$  - магнітний потік, що пронизує  $k$ -ий виток котушки.

В окремому випадку, коли магнітний потік  $\Phi$  у всіх витках однаковий,  $\psi = w\Phi$  і тоді

$$e = -w \frac{d\Phi}{dt}, \quad (1.24)$$

*Правило Ленца.* При будь-якій зміні магнітного потоку через поверхню, що обмежена замкнутим контуром, в останньому виникає ЕРС такого напрямку, що викликаний нею індукційний струм створить власний магнітний потік, який буде прагнути компенсувати зміну зовнішнього магнітного потоку  $\Phi$ , яка призвела до появи цієї ЕРС. Знаки "-" у виразах (1.23 і 1.24) це математичний запис правила Ленца.

### 1.10 Силова дія магнітного поля на провідник зі струмом. Сила Ампера

*Закон Ампера:* Сила, з якою магнітне поле з індукцією  $B$  діє на ділянку провідника зі струмом  $I$ , довжиною якої  $dl$

$$\vec{dF} = I[d \vec{l} \times \vec{B}]. \quad (1.25)$$

У випадку однорідного магнітного поля сила Ампера, що діє на провідник прямо пропорційна силі струму  $I$ , довжині  $l$  цієї ділянки та синусу кута  $\alpha$  між напрямками струму та вектора магнітної індукції

$$dF = IBdl \sin \alpha. \quad (1.26)$$

Вона досягає максимального за модулем значення, коли провідник зі струмом зорієнтовано перпендикулярно лініям магнітної індукції.

Напрямок сили Ампера визначається в загальному випадку за *правилом лівої руки*: якщо долоню лівої руки розташувати таким чином, щоб складова вектора індукції, що перпендикулярна до провідника, була спрямована у долоню, а чотири витягнуті пальці вказували напрямком струму, то відігнутий на  $90^\circ$  великий палець вкаже напрямком сили, що діє на провідник зі струмом.

#### Питання для самоконтролю

Що таке електричний заряд?

Як описується взаємодія двох точкових електричних зарядів?

Які фізичні величини вводяться для опису електричного поля?

Поясніть поняття ЕРС, напруга й електричний струм?

В якому випадку значення електрорушійної сили джерела струму й різниці потенціалів на його електродах дорівнюють одне одному?

Сформулюйте закон Ома?

Як виразити питомий опір провідника через опір ділянки кола довжиною  $l$  і перетином  $S$ ?

Сформулюйте закон Джоуля-Ленца?

Сформулюйте закон повного струму.

Які фізичні величини вводяться для опису магнітного поля?

Сформулюйте закон Ампера.

Сформулюйте правило лівої руки.

## Розділ другий ЕЛЕКТРИЧНЕ КОЛО І ЙОГО ЕЛЕМЕНТИ

### 2.1 Основні поняття про електричне коло

*Електричним колом* називають сукупність пристроїв, що призначені для генерації, передачі, перетворення й використання електричного струму, електромагнітні процеси в якій можуть бути описані за допомогою таких інтегральних понять, як струм, напруга й електрорушійна сила.

Електричне коло складається із джерел електромагнітної енергії (генераторів), приймачів електричної енергії (навантаження) і проміжних ланок (проводів, апаратів), що зв'язують джерела із приймачами.

*Джерелами електромагнітної енергії* є пристрої, у яких здійснюється перетворення неелектричних видів енергії (механічної, теплової, світлової, хімічної й ін.) в енергію електромагнітного поля (генератори, термоелементи, фотоелементи, хімічні елементи).

*Приймачами електромагнітної енергії* є пристрої, у яких здійснюється перетворення електромагнітної енергії в енергію іншого виду: механічну, теплову, хімічну, енергію світлового випромінювання й т.д. Крім того, деяка частина енергії запасається в електричних і магнітних полях кола.

У більшості випадків фізичні об'єкти й середовище, у якій протікає електричний струм, спрощують до умовних елементів і зв'язків між ними. Зв'язки за змістом відповідають ідеальним провідникам з нульовим опором.

Для опису й теоретичного дослідження властивостей електричних кіл уводять поняття "двополюсник" й "чотириполюсник".

*Двополюсником* називають частину електричного кола довільної конфігурації, що з'єднується з іншими частинами кола за допомогою тільки двох затискачів (полюсів).

Розрізняють пасивні й активні двополюсники. *Пасивними* називають двополюсники, які не містять у собі джерел енергії. *Активними* називають двополюсники, що містять у собі один або кілька джерел енергії (більш точно визначення розглядається в підрозділі 3.7.6).

Властивості системи передачі описують за допомогою поняття "чотириполюсник".

*Чотириполюсником* називають частину електричного кола довільної конфігурації, що з'єднується з іншими частинами кола за

допомогою тільки двох пар затискачів (двох пар полюсів). Аналогічно двополюсникам розрізняють активні й пасивні чотириполюсники.

Розрахунки електричних кіл і дослідження процесів, що відбуваються в них, ґрунтується на різних допущеннях і деякій ідеалізації реальних об'єктів електричних кіл. Під *елементами* в теорії електричних кіл мають на увазі в більшості випадків не фізично існуючі складові частини електротехнічних пристроїв, а їхні ідеалізовані моделі, яким теоретично приписують певні електричні й магнітні властивості, так що вони в сукупності приблизно відображають явища, які відбуваються в реальних пристроях.

У теорії електричних кіл розрізняють активні й пасивні елементи. *Активними* елементами вважають джерела електричної енергії: джерела напруги й джерела струму. *Пасивними* - резистивні, індуктивні і ємнісні елементи.

Якщо електромагнітні явища в елементі можна описати лінійними диференціальними (або алгебраїчними) рівняннями, його називають *лінійним*. У протилежному випадку він є *нелінійним*. Властивості нелінійного елемента електричного кола не можуть бути виражені одним постійним числом. Властивості нелінійних елементів описують за допомогою характеристик. Для резистивних елементів це залежності напруги від струму (вольт-амперні характеристики); для індуктивних це залежності потокозчеплення від струму (вебер-амперні характеристики); для ємнісних це залежності електричного заряду від напруги (кулон-вольтні характеристики). Взагалі всі елементи електричних кіл є нелінійними в більшому або меншому ступені. Але якщо нелінійність істотно не впливає на характер процесів у колі, то нею можна зневажити. Такого роду допущення істотно спрощує математичний опис й аналіз процесів, що протікають у електричному колі.

*Лінійним* називають електричне коло, що містить тільки лінійні елементи. Якщо воно містить хоча б один нелінійний елемент його називають *нелінійним*. Надалі, за винятком випадків коли це буде оговорено особливо, у посібнику розглядаються лінійні електричні кола.

Параметрами елемента називають коефіцієнти в диференціальних (або алгебраїчних) рівняннях, які описують даний елемент.

Електричні кола, які з хорошим ступенем точності можна описати моделями, що представляють сукупність деяких самостій-

но існуючих елементів, які зосереджені в різних точках кола, називають *колами із зосередженими параметрами*. Електричні кола з елементами, параметри яких залежать від просторових координат називають *колами з розподіленими параметрами*.

## 2.2 Електричні схеми

Склад і зв'язки електричних кіл нескінченно різноманітні, тому для їхнього графічного подання використовують набори символів, що мають різний ступінь абстракції, які називають *електричними схемами*. Схема показує послідовність з'єднання елементів, з яких складається електричне коло.

Найбільш відповідає реальному об'єкту *монтажна схема*. Вона зручна для монтажу й ремонту зображеного на ній пристрою. Елементи пристрою на ній зображують з урахуванням їхніх геометричних розмірів і просторового розташування.

Всі електротехнічні пристрої, що є елементами електричних кіл мають умовні графічні позначення, які установлює ДЕРЖСТА-НДАРТ. Ці умовні графічні позначення дозволяють графічно зображувати електричне коло. Таке графічне зображення електричного кола, що містить умовні зображення елементів електричного кола і їхні з'єднання, називають *принциповою схемою* електричного кола. Ці схеми зручні для вивчення принципу роботи.

Найбільш абстрактне уявлення про електричний коло дають *схеми заміщення (розрахункові схеми)*. Вони є розрахунковими моделями відповідного пристрою, які призначені для дослідження електромагнітних процесів. Реальні елементи електричного кола представляють у схемі заміщення у вигляді одного або декількох ідеальних елементів (математичних моделей), у яких ураховують тільки істотні параметри й властивості. Надалі замість терміна *схеми заміщення електричного кола* в підручнику використовуються скорочені терміни - *схема кола* або просто *схема*.

На відміну від реальних електротехнічних об'єктів кількість ідеальних елементів є обмеженою. Але кожний реальний пристрій в електричному колі може бути представлено сукупністю тих або інших ідеальних елементів. Це дозволяє на підставі знання фізичної сутності й розрахункових співвідношень між електричними величинами таких елементів виконувати аналіз реальних електротехнічних пристроїв.

### 2.3 Ідеальні пасивні елементи схем заміщення

Ідеальними пасивними двополюсними елементами схем заміщення є резистивні, індуктивні і ємнісні.

Ці елементи називають *пасивними*, тому що енергія, яку вони споживають від інших частин кола в будь-який момент часу є невід'ємною (тобто додатною або дорівнювати нулю).

Ці елементи відповідають основним проявам електромагнітного поля в приймачах електричної енергії:

- електричний струм нагріває провідник;
- змінне магнітне поле збуджує ЕРС самоіндукції;
- змінне електричне поле у діелектрику індукує електричний

струм зсуву.

*Резистивний елемент* – ідеалізований пасивний двополюсний елемент, який відображає здатність реального об'єкта незворотно перетворювати електричну енергію в інші види енергії (теплову, механічну, світлову). Енергію електричного або магнітного полів резистивний елемент не запасає.

Зв'язок між напругою й струмом у резистивному елементі обумовлюється законом Ома для миттєвих значень:

$$u_R = Ri, \quad (2.1)$$

в окремому випадку для кіл постійного струму

$$U_R = RI. \quad (2.2)$$

Додатний напрямок напруги на резистивному елементі збігається з додатним напрямком струму

Для кількісної оцінки здатності цього елемента перетворювати електричну енергію в інші види енергії використовують параметр, що називають *активним (резистивним) опором* (або просто *опором*).

Миттєва потужність, що надходить у резистивний елемент:

$$p_R = u_R i = Ri^2 = \frac{u_R^2}{R}. \quad (2.3)$$

Отже, параметр  $R$  чисельно дорівнює:

$$R = \frac{p_R}{i^2}. \quad (2.4)$$

Миттєва потужність у резистивному елементі є квадратичною функцією струму або напруги, вона не може приймати від'ємних значень, отже, енергія завжди надходить від джерел енергії до елемента.

Кількість теплової енергії  $W_T$ , що виділяється в резистивному елементі з опором  $R$  при протіканні струму  $i$  починаючи з деякого моменту часу  $t = 0$  до розглянутого моменту  $t$  дорівнює:

$$W_T = \int_0^t Ri^2 dt . \quad (2.5)$$

Формула (2.4) математично відображає головну властивість резистивного елемента - незворотне перетворення електромагнітної енергії в теплову енергію.

Закон перетворення роботи постійного струму в тепло (*закон Джоуля-Ленца*): кількість теплової енергії при протіканні постійного струму пропорційна квадрату струму, опору та часу

$$W_T = RI^2t . \quad (2.6)$$

Величину, що є зворотною до активного опору, називають *активною провідністю*

$$G = \frac{1}{R} . \quad (2.7)$$

Активний опір відміряють в *омах* (*Ом*), активну провідність у *сименсах* (*Сим*).

Найбільш наближеними до резистивного елемента за властивостями реальними об'єктами є резистори.

Для найпростішого резистора - прямолінійного провідника з постійним поперечним перерізом опір визначається виразом

$$R = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{l}{S} , \quad (2.8)$$

$\gamma$  - *питома електрична провідність*, ( $1/(\text{Ом}\cdot\text{м})$ );  $l$  - довжина провідника, ( $\text{м}$ ),  $S$  - площа поперечного переріза, ( $\text{м}^2$ ).

*Індуктивний елемент* - ідеалізований пасивний двополюсний елемент, який відображає здатність реального об'єкта збуджувати магнітне поле при проходженні по об'єкту електричного струму й запасати енергію магнітного поля. Перетворення електричної енергії в інші види енергії в індуктивному елементі не відбувається.

Зв'язок між напругою й струмом у індуктивному елементі визначається *законом електромагнітної індукції Фарадея-Максвелла*: при зміні магнітного потоку, що пронизує індуктивний елемент, у ньому індукується електрорушійна сила  $e$ , що пропорційна швидкості зміни потокозчеплення елемента  $\psi$  і спрямована таким чином,

щоб струм, який вона викликає, прагнув компенсувати зміну магнітного потоку:

$$e = -\frac{d\psi}{dt}, \quad (2.9)$$

де  $e$  - ЕРС самоіндукції;  $\psi = \sum_k^w \Phi_k$  - власне потокозчеплення;  $w$  -

кількість витків елемента (катушки);  $\Phi_k$  - магнітний потік, що пронизує  $k$ -ий виток елемента (катушки), причому цей потік створений струмом у самому елементі.

Магнітний потік і власне потокозчеплення вимірюють у *веберах* (Вб).

Напрямок напруги на індуктивному елементі є протилежним до напрямку ЕРС

$$u_L = -e = \frac{d\psi}{dt}. \quad (2.10)$$

Додатний напрямок напруги на індуктивному елементі збігається з додатним напрямком струму.

Для збільшення власного потокозчеплення провіднику надають форму циліндричної катушки. У цьому випадку з кожним витком зчеплюється практично той самий магнітний потік  $\Phi$ , тобто власне потокозчеплення дорівнює  $\psi = w\Phi$  і тоді

$$e = -w \frac{d\Phi}{dt}. \quad (2.11)$$

Для кількісної оцінки спроможності індуктивного елемента запасати енергію магнітного поля використовують параметр, що називають індуктивність. *Індуктивність* чисельно дорівнює відношенню потокозчеплення індуктивного елемента до струму, що протікає по ньому

$$L = \frac{\psi}{i}. \quad (2.12)$$

Індуктивність відмірюють в *генрі* (Гн).

З обліком (2.11) зв'язок між напругою й струмом індуктивного елемента має вигляд:

$$u_L = \frac{d\psi}{dt} = \frac{d\psi}{di} \cdot \frac{di}{dt} = L \frac{di}{dt}. \quad (2.13)$$

Якщо зміна струму не відбувається, то значення напруги на індуктивному елементі дорівнює нулю. Тому при розрахунках сталих режимів у колах постійного струму індуктивні елементи не враховують, а ділянки електричного кола, що містять такі елементи розглядають як звичайні провідники.

Струм в індуктивності можна визначити через напругу  $u_L$ :

$$i = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L dt. \quad (2.14)$$

Миттєва потужність індуктивного елемента:

$$p_L = u_L i = Li \frac{di}{dt}. \quad (2.15)$$

Значення миттєвої потужності є додатним у моменти часу, коли струм і напруга мають однакові знаки (індуктивний елемент споживає енергію від інших ділянок електричного кола й запасє її, перетворюючи в енергію магнітного поля) і від'ємним, коли струм і напруга мають різні знаки (індуктивний елемент віддає іншим ділянкам кола енергію, яка була запасена).

*Енергія магнітного поля*, що запасена в індуктивному елементі до довільного моменту часу:

$$W_L = W_M = \int_{-\infty}^t p_L dt = L \int_0^i i di = \frac{Li^2}{2} = \frac{\psi^2}{2L}. \quad (2.16)$$

Тут прийнято, що до моменту  $t=0$  струм в індуктивному елементі був відсутній.

Значення енергії, що запасена в індуктивному елементі завжди є невід'ємним.

Найбільш наближеними до індуктивного елемента за властивостями реальними об'єктами є котушки індуктивності.

Для індуктивної котушки на замкнутому сталевому осерді постійного перерізу індуктивність визначають за виразом:

$$L = \frac{\mu_o \mu_r w^2 S}{l}, \quad (2.17)$$

де  $\mu_r$  - відносна магнітна проникність стали ( $Gн/м$ );  $w$  - кількість витків котушки;  $S$  - площа поперечного перерізу осердя ( $м^2$ );  $l$  - се-

редня довжина осердя, (м).

Якщо при зміні в часі струму в одному індуктивному елементі в другому виникає ЕРС - такі індуктивні елементи називають *індукційно зв'язаними*.

При протіканні в першому індуктивному елементі струму з'являється магнітне поле, зв'язок якого із цим елементом, характеризується *власним потокозчепленням*  $\psi_1$ . Зміна струму  $i_1$  викличе зміну магнітного потоку й власного потокозчеплення, що відповідно до закону електромагнітної індукції приведе до появи в першій котушці ЕРС самоіндукції

$$e_{L1} = -\frac{d\psi_1}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt}, \quad (2.18)$$

де  $L_1$  - індуктивність першого індуктивного елемента.

При наявності індукційного зв'язку між першим і другим індуктивними елементами, деяка частина магнітного потоку, яку викликає струм у першому індуктивному елементі, перетинає другий індуктивний елемент і виявляється зчеплена з ним. Ця частина характеризується *взаємним потокозчепленням* другого індуктивного елемента  $\psi_{21}$ .

Взаємне потокозчеплення  $\psi_{21}$  індукує у другому індуктивному елементі *ЕРС взаємної індукції*

$$e_{M2} = -\frac{d\psi_{21}}{di_1}. \quad (2.19)$$

Аналогічні міркування можна привести й для випадку, коли по другому індуктивному елементу котушці протікає струм  $i_2$ . Зміна струму  $i_2$  викличе зміну магнітного потоку й власного потокозчеплення, що відповідно до закону електромагнітної індукції спричинить появу в другому індуктивному елементу ЕРС самоіндукції

$$e_{L2} = -\frac{d\psi_2}{dt} = -L_2 \frac{di_2}{dt}, \quad (2.20)$$

де  $L_2$  - індуктивність другого індуктивного елемента.

При наявності індукційного зв'язку між другим і першим індуктивними елементами, деяка частина магнітного потоку, яку ви-

кликає струм у другому індуктивному елементі, індуктивному елементі, перетинає другий індуктивний елемент і виявляється зчеплена з ним. Ця частина характеризується *взаємним потокозчепленням* першого індуктивного елемента  $\Psi_{12}$ .

Потокозчеплення  $\Psi_{12}$  індукує у першому індуктивному елементі *ЕРС взаємної індукції*

$$e_{M1} = -\frac{d\Psi_{12}}{dt_2}. \quad (2.21)$$

Відношення потокозчеплення взаємної індукції одного індуктивного елемента до струму в іншому індуктивному елементі називають *взаємною індуктивністю* цих елементів. Для лінійних електричних кіл взаємна індуктивність двох індуктивних елементів не залежить від того, яким способом вона була визначена:

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{i_1} = M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{i_2} = M. \quad (2.22)$$

Взаємна індуктивність є їхнім спільним параметром і не залежить від значень потокозчеплень і струмів, а обумовлюється тільки конструкцією котушок, їхнім взаємним розташуванням і магнітними властивостями навколишнього середовища.

Взаємна індуктивність, так само як й індуктивність виміряється в *генрі (Гн)*. Однак на відміну від індуктивності взаємна індуктивність характеризує не якийсь самостійний елемент, а лише магнітний зв'язок між індуктивними елементами.

З урахуванням співвідношення (2.21) при протіканні струмів в обох індуктивних елементах у них наводяться ЕРС взаємної індукції:

$$\begin{aligned} e_{M1} &= -\frac{d\Psi_{12}}{dt} = -M \frac{di_2}{dt}, \\ e_{M2} &= -\frac{d\Psi_{21}}{dt} = -M \frac{di_1}{dt}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

*Ємнісний елемент* - ідеалізований пасивний двополюсний елемент, який відображає здатність реального об'єкта збуджувати електричне поле при накопичуванні на об'єкті електричних зарядів і запасати енергію електричного поля. Перетворення електричної енергії в інші види енергії в ємнісному елементі не відбувається.

Зв'язок заряду ємнісного елемента  $q$  і напруги на його затискачах  $u_C$

$$u_C = \frac{q}{C}. \quad (2.24)$$

Для кількісної оцінки спроможності ємнісного елемента запасати енергію електричного поля використовують параметр, що називають ємність.

Ємність чисельно дорівнює відношенню заряду відокремленого провідника до його потенціалу. У випадку якщо два провідники розділені діелектриком, їхня взаємна ємність чисельно дорівнює заряду, який потрібно перенести з одного провідника на інший, щоб змінити різниця потенціалів між ними на одиницю

$$C = \frac{q}{u_C}. \quad (2.25)$$

Ємність вимірюють у *фарадах* ( $\Phi$ ).

При зміні напруги на затискачах ємнісного елемента, у електричному колі, що з'єднано з ним, виникає електричний струм, сила якого обумовлюється швидкістю зміни заряду ємнісного елемента:

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt}. \quad (2.26)$$

Якщо напруга на затискачах ємнісного елемента не змінюється, то сила струму у зовнішньому колі дорівнює нулю. Тому при розрахунках сталих режимів у колах постійного струму ємнісні елементи не враховуються, а ділянки електричного кола, що містять такі елементи, розглядають як звичайні розриви кола.

Залежність напруги на конденсаторі від струму

$$u_C = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i dt. \quad (2.27)$$

Якщо в момент часу  $t=0$  напруга на ємнісному елементі дорівнювала нулю  $u_0 = 0$ , то в довільний момент часу:

$$u_C = u_0 + \frac{1}{C} \int_0^t i dt. \quad (2.28)$$

Миттєва потужність ємнісного елемента

$$P_C = u_C i = C u_C \frac{du_C}{dt}. \quad (2.29)$$

Значення миттєвої потужності є додатним у моменти часу, коли струм і напругу мають однаковий знак (ємнісної елемент споживає енергію від інших ділянок електричного кола й запасає її, перетворюючи в енергію електричного поля) і від'ємним, коли струм і напругу мають різні знаки (ємнісної елемент видає запасену енергію іншим ділянкам електричного кола).

*Енергія електричного поля*, що запасена в ємнісному елементі до довільного моменту часу

$$W_C = W_e = \int_{-\infty}^t p_C dt = C \int_0^u u_C du_C = \frac{Cu_C^2}{2} = \frac{q^2}{2C}. \quad (2.30)$$

Тут прийнято, що до моменту  $t=0$  напруга на ємнісному елементі дорівнювала нулю.

Значення енергії, що запасена в ємнісному елементі завжди є невід'ємним.

Найбільш наближеними до ємнісного елемента за властивостями реальними об'єктами є конденсатори.

Для плоского конденсатора ємність визначають за виразом:

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d}, \quad (2.31)$$

де  $\varepsilon_r$  - відносна діелектрична проникність діелектрика, ( $\Phi/m$ );  $S$  - площа пластини конденсатора, ( $m^2$ );  $d$  - відстань між пластинами конденсатора, ( $m$ ).

Елементи електричного кола, які здатні запасати енергію електричного або магнітного поля, називають *реактивними*.

Умовне графічне позначення резистивного елемента наведено на рис. 2.1, *а*, індуктивного - на рис. 2.1, *б* й ємнісного - на рис. 2.1, *в*.

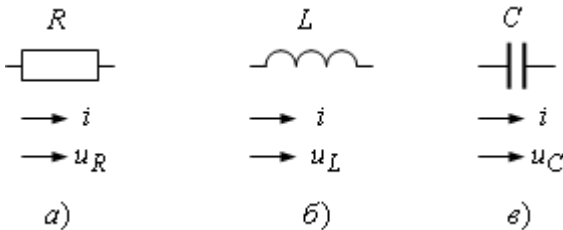


Рис. 2.1

Всі основні формули, які описують властивості ідеальних пасивних елементів електричного кола, зведені в таблицю 2.1.

Таблиця 2.1

| Елемент кола | Струм, ( $A$ )                            | Напруга, ( $B$ )                         | Миттєва потужність, ( $Bm$ ) | Енергія, (Дж)            |
|--------------|---|--|------------------------------|--------------------------|
| резистивний  | $i = \frac{u_R}{r}$                       | $u_R = Ri$                               | $p_r = Ri^2$                 | $W_r = \int_0^t ri^2 dt$ |
| індуктивний  | $i = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L dt$ | $u_L = L \frac{di}{dt}$                  | $p_L = Li \frac{di}{dt}$     | $W_L = \frac{Li^2}{2}$   |
| ємнісний     | $i = C \frac{du_C}{dt}$                   | $u_C = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t idt$ | $p_C = Cu_C \frac{du_C}{dt}$ | $W_C = \frac{Cu_C^2}{2}$ |

З табл. 2.1 видно, що тільки в резистивному елементі струм і напруга зв'язані між собою алгебраїчним співвідношенням. Між струмом і напругою в індуктивному і ємнісному елементах мають місце інтегро-диференціальні співвідношення.

Слід відзначити, що всі елементи електротехнічних пристроїв мають весь набір параметрів ( $R$ ,  $L$  й  $C$ ), тому що в будь-якому фізичному об'єкті при протіканні електричного струму відбувається незворотне перетворення енергії з виділенням тепла, виникають процеси, що пов'язані з нагромадженням і перерозподілом електричних зарядів, а в навколишній середовищі створюється магнітне поле. Однак за певних умов та або інша властивість об'єкта проявляється сильніше й, відповідно, більше значення має параметр, пов'язаний із цією властивістю, у той час як іншими властивостями й відповідними параметрами можна просто зневажити. Наприклад, при розгляді котушки індуктивності без феромагнітного сердечника залежно від частоти електричного кола, у якій котушка знаходиться, використовують різні схеми заміщення, які представлені на рис. 2.2 (для кола постійного струму - на рис. 2.2, а; для електричних кіл із частотою до 500 Гц - на рис. 2.2, б; для електричних кіл із частотою понад 500 Гц - на рис. 2.2, в).

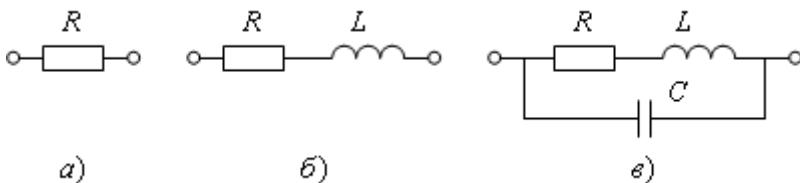


Рис. 2.2

## 2.4 Поняття про лінійні і нелінійні пасивні елементи

Якщо, у розглянутих у підрозділ 2.3 пасивних елементів, коефіцієнти  $\gamma$ ,  $\mu_r$  і  $\varepsilon_r$  (а отже й параметри  $R$ ,  $L$  і  $C$ ) є постійними й не залежать від струму і напруги, то такі елементи, називаються *лінійними*, а електричні кола, які їх містять, називають *лінійними колами*.

Всі електричні кола фактично є нелінійними. Лінійними вони можуть вважатися тільки в обмежених діапазонах значень струмів і напруг.

Залежності між значеннями струму й напруги для резистивного елемента  $u_R = f(i)$ , потокозчеплення й струму для індуктивного елемента  $\psi = f(i)$ , заряду й напруги для ємнісного елемента  $q = f(u_C)$ , у загальному випадку мають нелінійний характер (тобто їхні графіки не є прямими лініями, які проходять через початок координат).

На рис. 2.3 представлені вольт-амперні характеристики для різних резистивних елементів (2 - для лінійного резистивного елемента, 1 й 3 - для нелінійні резистивних елементів).

На відміну від лінійного резистивного елемента кожна точка ВАХ нелінійного елемента обумовлюється двома параметрами: статичним опором і диференціальним опором.

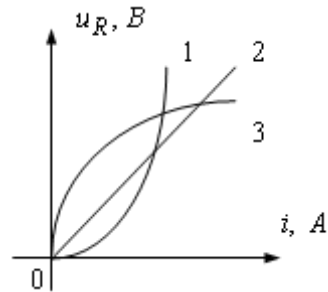


Рис. 2.3

*Статичний* або *інтегральний опір* резистивного елемента чисельно дорівнює відношенню напруги на затискачах елемента до сили струму, який протікає через нього. Цей опір є пропорційним тангенсу кута нахилу  $\alpha$  прямої, що проведена з початку координат у робочу точку 1 характеристики, стосовно осі струмів (рис. 2.4):

$$R_s = \frac{u_{1R}}{i_1} = \frac{m_u}{m_i} \cdot \operatorname{tg} \alpha = m_R \cdot \operatorname{tg} \alpha, \quad (2.32)$$

де  $m_u$ ,  $m_i$ ,  $m_R$  - масштаби відповідно для напруги, струму й опору.

*Динамічний* або *диференціальний опір* резистивного елемента чисельно дорівнює відношенню нескінченно малого приросту напруги на затискачах елемента до нескінченно малого приросту струму, що протікає через його. Цей опір є пропорційним тангенсу

кута нахилу  $\beta$  дотичної, що проведена до робочої точки 1 характеристики, стосовно осі струмів (рис. 2.5):

$$R_d = \left. \frac{du_R}{di} \right|_{i_1} = \frac{m_u}{m_i} \cdot \operatorname{tg} \beta = m_R \cdot \operatorname{tg} \beta. \quad (2.33)$$

У випадку якщо вольт-амперна характеристика є лінійною, значення  $R_s$  й  $R_d$  не залежать від вибору робочої точки й дорівнюють одне одному.

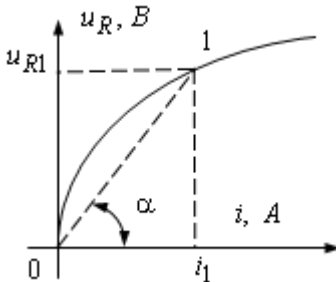


Рис. 2.4

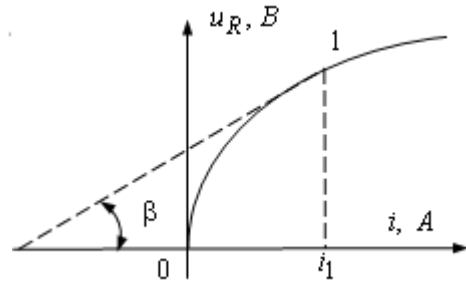


Рис. 2.5

Аналогічним способом можна зобразити кулон-вольтні характеристики для ємнісних елементів і вебер-амперні характеристики для індуктивних елементів.

В обмеженому діапазоні зміни напруг і струмів нелінійністю характеристик можна зневажити й вважати їх лінійними. Значення опорів, ємностей й індуктивностей у цьому випадку є постійними.

## 2.5 Ідеальні активні елементи

*Активними елементами* електричного кола називають джерела електричної енергії, що мають здатність віддавати енергію ділянкам електричного кола, які підключені до них.

Властивості активних елементів, як і пасивних описуються вольт-амперною характеристикою, що у цьому випадку називають зовнішньою характеристикою джерела. *Зовнішньою характеристикою джерела* електричної енергії називають залежність напруги на його затискачах (вихідної напруги) від струму джерела, що воно віддає навантаженню.

Також, як пасивні елементи електричного кола, джерела енергії можуть бути лінійними й нелінійними. Лінійні джерела мають

лінійну зовнішню характеристику.

*Ідеальними активними елементами* називають джерела енергії без втрат енергії усередині джерел.

Розрізняють два види ідеальних активних елементів:

- ідеальні джерела напруги;
- ідеальні джерела струму.

*Ідеальним джерелом напруги (джерелом ЕРС)* називають ідеалізований двополюсний елемент, що відображає спроможність реального об'єкта створювати різницю потенціалів і підтримувати струм у замкнутому електричному колі, причому напруга на його затискачах не залежить від струму, що протікає через нього. Напруга на його затискачах чисельно дорівнює електрорушійній силі.

*Ідеальним джерелом струму (джерелом струму)* називають ідеалізований двополюсний елемент, що відображає здатність реального об'єкта створювати різницю потенціалів і підтримувати струм у замкнутому електричному колі, причому струм через нього не залежить від напруги на його затискачах.

Далі в цьому розділі для спрощення аналізу й математичного опису будуть розглянуті джерела постійного струму (напруги). Однак всі отримані при цьому закономірності, поняття й властивості повною мірою поширюються на джерела змінного струму (напруги).

Умовні графічні позначення ідеального джерела ЕРС наведено на рис. 2.6, *а*, ідеального джерела струму - на рис. 2.6, *б*. Стрілка в умовній позначці джерела ЕРС спрямована від точки низького потенціалу до точки високого потенціалу (указує напрямок дії ЕРС), стрілка напруги на вихідних затискачах джерела ЕРС завжди спрямована від точки високого потенціалу до точки низького потенціалу. Напрямок подвійної стрілки в умовній позначці джерела струму вказує напрямок протікання струму.

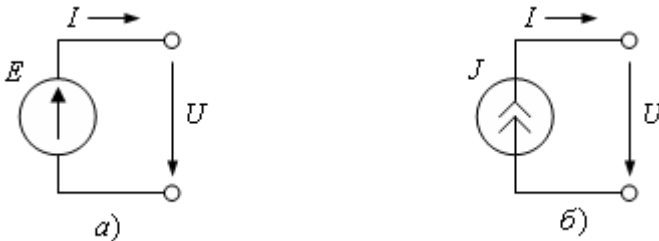


Рис .2.6

Зовнішні характеристики джерела ЕРС (1) і джерела струму (2) представлені на рис. 2.7.

На вольтамперних характеристиках електричний опір прямо пропорційний тангенсу кута нахилу характеристики, тому опір джерела ЕРС дорівнює нулю, а опір джерела, відповідно, нескінченності.

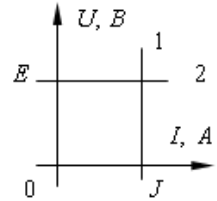


Рис. 2.7

Якщо підключити до затискачів джерела ЕРС (струму) навантаження як показано на рис. 2.8, то струм, що протікає через навантаження, напруга на навантаженні й потужність, що споживає навантаження, будуть відповідно рівні:

для джерела ЕРС (рис. 2.8, а):

$$I = \frac{U}{R_l} = \frac{E}{R_l};$$

$$U = E; \quad (2.34)$$

$$P = UI = EI = \frac{U^2}{R_l} = \frac{E^2}{R_l}.$$

для джерела струму (рис. 2.8, б):

$$I = J;$$

$$U = R_l I = R_l J; \quad (2.35)$$

$$P = UI = UJ = R_l I^2 = R_l J^2.$$

де  $R_l$  - опір навантаження.

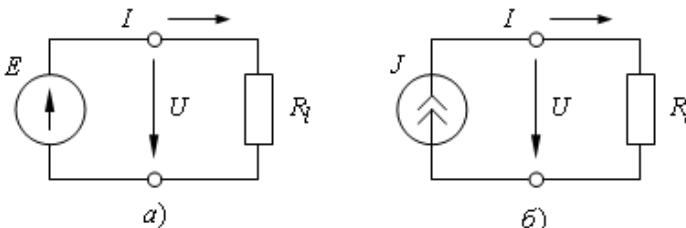


Рис. 2.8

Зі зменшенням опору навантаження струм джерела ЕРС і потужність, яку воно віддає навантаженню, необмежено зростають. Аналогічно, зі збільшенням опору навантаження напруга на затискачах джерела струму й потужність, яку воно віддає навантаженню також необмежено зростають. Тому ідеальні джерела називаються джерелами нескінченної потужності.

## 2.6 Реальні джерела енергії

Оскільки не існує технічних пристроїв, у яких у тій або іншій формі не відбувалися б необоротні перетворення енергії, у реальних джерелах енергії відбуваються втрати енергії. Тому при розрахунку їх замінюють двома ідеальними елементами:

- ідеальним джерелом ЕРС та послідовно з'єднаним з ним резистивним елементом;
- ідеальним джерелом струму та паралельно з'єднаним з ним резистивним елементом.

Опір цього резистивного елемента називають *внутрішнім опором* джерела енергії.

Реальні джерела мають кінцеву потужність і їхні *зовнішні характеристики* не паралельні осям координат, а перетинають обидві осі в характерних точках. Ці точки перетинання відповідають нульовому струму через джерело й нульовому спаду напруги.

Вольтамперная характеристика реального джерела представлена на рис 2.9.

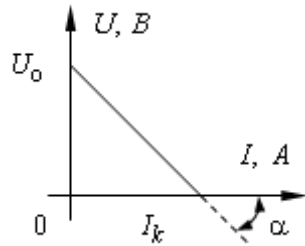


Рис. 2.9

Режим з нульовим струмом і ненульовою напругою на виході джерела називають *режимом холостого ходу* (опір навантаження при цьому дорівнює нескінченності), а режим з нульовою напругою й ненульовим струмом на виході джерела - *режимом короткого замикання* (опір навантаження при цьому дорівнює нулю).

Нахил зовнішньої характеристики обумовлюється внутрішнім опором джерела, що дорівнює:

$$R_i = \frac{U_0}{I_k} = \frac{m_U \cdot U_0}{m_I \cdot I_k} = \frac{m_U}{m_I} \cdot \operatorname{tg} \alpha = m_R \cdot \operatorname{tg} \alpha, \quad (2.36)$$

де  $U_0$  - напруга холостого ходу (В),  $I_k$  - струм короткого замикання (А),  $m_U$ ,  $m_I$ ,  $m_R$  - масштаби відповідно для напруги, струму й опору,  $\alpha$  - кут нахилу зовнішньої характеристики відносно осі струмів.

При цьому ЕРС ідеального джерела чисельно дорівнює напрузі холостого ходу реального джерела. Відповідно сила струму ідеального джерела чисельно дорівнює струму короткого зами-

кання реального джерела. Схема заміщення реального джерела ЕРС, до якого підключена навантаження, представлена на рис. 2.10, а, схема заміщення реального джерела струму, до якого підключена навантаження - на рис. 2.10, б.

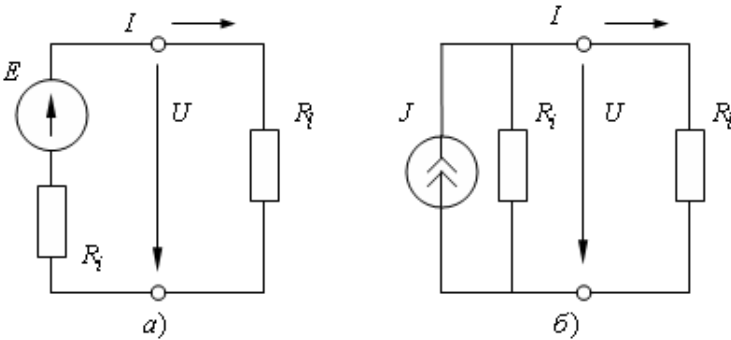


Рис. 2.10

Для реального джерела ЕРС зовнішню характеристику описують рівнянням:

$$U = U_o - R_i I = E - R_i I, \quad (2.37)$$

а для реального джерела струму зовнішню характеристику описують рівнянням:

$$I = I_k - \frac{U}{R_i} = J - \frac{U}{R_i}. \quad (2.38)$$

Обидві схеми заміщення реальних джерел електричної енергії (рис. 2.10, а й рис. 2.10, б) є еквівалентними (вони мають ту саму вольт-амперну характеристику) з погляду струмів, напруг і потужностей у зовнішніх ділянках електричного кола. Тому будь-яке реальне джерело ЕРС у процесі розрахунків можна замінити реальним джерелом струму й навпаки, використовуючи співвідношення:

$$R_i = \frac{U_o}{I_k} = \frac{E}{J}. \quad (2.39)$$

Відповідні схеми заміщення можуть застосовуватися залежно від цілей і зручності використання в конкретному випадку.

Джерела енергії можуть віддавати енергію в електричне коло (працювати в *режимі генератора*) і отримувати її з електричного кола (працювати в *режимі споживача*).

## 2.7 Основні визначення, які стосуються електричного кола

Електрична схема показує, як здійснюється з'єднання елементів електричного кола.

Активні й пасивні елементи є "електричними" складовими схеми. "Геометричними" - вітки й вузли.

*Простий вузол (вузол, що можна усунути)* – точка електричного кола, у якій з'єднані два елементи.

*Вітка* складається з одного або декількох елементів електричного кола, які з'єднані простими вузлами. У всіх елементах вітки протікає той самий електричний струм.

Елементи, які входять до складу однієї вітки, з'єднані *послідовно*.

*Складний вузол (або просто вузол)* – точка електричного кола, у якій з'єднані три й більше елементи.

Вітки, що зв'язані з однією парою вузлів, з'єднані *паралельно*.

До всіх віток, що з'єднані паралельно, прикладена однакова напруга.

Зв'язки елементів електричного кола мають топологічні властивостями, тобто вони не змінюються при будь-яких перетвореннях, які виконуються без розриву цих зв'язків.

*Замкнутим контуром (контуром)* називають сукупність віток, які утворюючий шлях, при переміщенні уздовж якого можна повернутися у вихідну точку, не проходячи більш одного разу по кожній вітці й по кожному вузлу.

*Незалежним* називається контур, що містить хоча б одну вітку, що не входить в інші контури. Для будь якого електричного кола кількість незалежних контурів завжди обмежена.

Залежно від кількості контурів, які є в електричному колі, розрізняють *одноконтурні* й *багатоконтурні* кола. Одноконтурне коло є найпростішим. Використовуючи правила перетворення схем, у ряді випадків зручно замінити багатоконтурне коло одноконтурним, що спрощує розрахунки.

У залежності від способу з'єднання елементів електричного кола розрізняють *розгалужені* й *нерозгалужені* кола. У нерозгалужених колах всі елементи з'єднані послідовно. У розгалуженому колі елементи з'єднуються послідовно, паралельно, "трикутником" або "зіркою".

Залежно від кількості джерел енергії електричні кола розрізняють *кола з одним джерелом* і *з декількома джерелами*.

**Питання для самоконтролю**

1. Що таке електричне коло?
2. Що таке джерело електричної енергії?
3. Які види схем використовують в електротехніці? Що таке монтажна схема, принципова схема й схема заміщення?
4. Що таке двополюсник?
5. Чим відрізняється пасивний двополюсник від активного?
6. Дайте визначення резистивного, індуктивного і ємнісного елементів.
7. Які параметри є основними для резистивного, індуктивного і ємнісного елементів?
8. Чим відрізняється резистивний елемент від інших пасивних елементів?
9. Визначити опір резистивного елемента, якщо при струмі в ньому  $I = 2 \text{ A}$  напруга на його затискачах  $U = 35 \text{ B}$ .
10. Відповідь:  $R = 17,5 \text{ Ом}$ .
11. Визначити струм в індуктивному елементі, якщо його індуктивність  $L = 0,1 \text{ Гн}$ , а потікозчеплення  $\psi = 5 \text{ Вб}$ .
12. Відповідь:  $I = 50 \text{ A}$ .
13. Визначити заряд ємнісного елемента й енергію електричного поля, якщо його ємність  $C = 20 \text{ мкФ}$ , а напруга на його затискачах  $U = 100 \text{ B}$ .
14. Відповідь:  $q = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Кл}$ ,  $W_e = 0,01 \text{ Дж}$ .
15. Що таке зовнішня характеристика джерела електричної енергії?
16. Чим відрізняються зовнішні характеристики джерел ЕРС, струму й реального джерела електричної енергії?
17. Чому джерела ЕРС і струму називають ідеальними?
18. Чому джерело ЕРС не можна перетворити в джерело струму й навпаки?
19. Напруга холостого ходу реального джерела електроенергії  $U_o = 15 \text{ B}$ , його внутрішній опір  $R_i = 2,5 \text{ Ом}$ . Визначити струм короткого замикання джерела.
20. Відповідь:  $I_k = 6 \text{ A}$ .
21. Дайте визначення вузла, вітки й контуру?
22. Які контури називають незалежними?

## Розділ третій ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

У цьому розділі розглядаються кола постійного струму, тобто електричні кола у яких напрямки і значення струмів та напруг лишаються незмінними протягом будь-якого інтервалу часу.

Для деяких видів приймачів постійний струм є єдиним можливим родом струму або його використання дозволяє поліпшити техніко-експлуатаційні властивості електротехнічних пристроїв. Пристрої, установки й системи постійного струму використовують на транспорті (двигуни підйомних механізмів та електротранспорту), при електрохімічному одержанні металів (електролізні ванни), в аерокосмічній техніці, у радіоелектроніці, автоматичі, комп'ютерній техніці й т.д.

У наступних розділах основні закони, поняття й методи розрахунку, які розглядаються в цьому розділі, будуть поширені на електричні кола змінного струму.

### 3.1 Основні закони теорії електричних кіл

Задачі, які виникають при розрахунку електричних кіл, досить різноманітні. Розрізняють два типи задач: задачі аналізу й задачі синтезу.

*Задачі аналізу* - це задачі розрахунку струмів і напруг у вітках кола при заданій схемі електричного кола й відомих параметрах пасивних елементів і джерел енергії (джерел струму й джерел ЕРС). Для визначення шуканих струмів і напруг необхідно скласти рівняння рівноваги електричного кола, які обумовлюються тільки геометричною конфігурацією й способами з'єднання елементів кола.

*Задачі синтезу* - це задачі розрахунку параметрів елементів електричного кола, які забезпечують необхідні струми й напруги на ділянках електричного кола (найчастіше навантаження).

Задачі синтезу є більше складними й у межах даного посібника не розглядаються.

Основою для розрахунку режиму роботи будь-якого електричного кола є рівняння, які складені на підставі фізичних законів, що описують електромагнітні явища, які відбуваються в цьому колі. Такими фундаментальними законами є закони збереження енергії й заряду. Математичним відображенням цих законів у теорії кіл є закони Кірхгофа й рівняння енергетичного балансу (рівняння балансу потужностей).

### 3.1.1 Закон Ома для ділянки кола, що містить ЕРС

У загальному випадку будь-яка вітка в електричному колі постійного струму може бути представлена у вигляді послідовного з'єднання резистивного елемента й джерела ЕРС.

*Закон Ома* для ділянки електричного кола дозволяє знайти силу струму в такій вітці за відомою різницею потенціалів на кінцях цієї ділянки й заданих параметрах елементів вітки.

Якщо напрямки ЕРС і струму на ділянці електричного кола збігаються (рис. 3.1, а)

$$I = \frac{\varphi_a - \varphi_b + E}{R} = \frac{U_{ab} + E}{R}, \quad (3.1)$$

де  $\varphi_a, \varphi_b$  - потенціали відповідних вузлів (В),  $E$  - ЕРС (В),  $R$  - опір резистивного елемента (Ом).

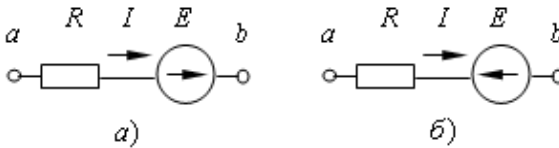


Рис. 3.1

Якщо напрямки ЕРС і струму є протилежними (рис. 3.1, б)

$$I = \frac{\varphi_a - \varphi_b - E}{R} = \frac{U_{ab} - E}{R}. \quad (3.2)$$

В окремому випадку, при відсутності ЕРС на ділянці електричного кола:

$$I = \frac{\varphi_a - \varphi_b}{R} = \frac{U_{ab}}{R}. \quad (3.3)$$

В теорії електричних кіл наряду із законом Ома основними є закони балансу струмів в вузлах (перший закон Кірхгофа) і балансу напруг у контурах кола (другий закон Кірхгофа).

### 3.1.2 Перший закон Кірхгофа

Перший закон Кірхгофа встановлює зв'язок між струмами віток, які сходяться в довільному вузлі електричного кола.

*Перший закон Кірхгофа* формулюється в такий спосіб: алгебраїчна сума струмів всіх віток, що з'єднані з будь-яким вузлом електричного кола, дорівнює нулю (прийнято, що струми, які спрямо-

вані до вузла, враховують зі знаком "+", а від вузла - зі знаком "-"):

$$\sum_{k=1}^K I_k = 0, \quad (3.4)$$

де  $K$  - кількість віток, які з'єднані з вузлом.

Інколи використовують друге формулювання першого закону Кірхгофа сума струмів, які витікають із будь-якого вузла електричного кола, дорівнює сумі струмів, які втікають у цей вузол:

$$\sum_{p=1}^P I_p = \sum_{q=1}^Q I_q, \quad (3.5)$$

де  $P$ ,  $Q$  - відповідно кількість віток зі струмами які спрямовані від вузла та до вузла,  $P + K = Q$ .

Перш ніж складати рівняння за першим законом Кірхгофа у вітках електричного кола вибирають довільно напрямки струмів. Якщо в процесі розрахунку струмів значення одного або декількох з них виявляться від'ємними, це буде свідчити про те, що напрямки протікання цих струмів не збігаються з прийнятими напрямками.

Для конкретного вузла, який представлено на рис. 3.2:

За першим формулюванням:

$$I_1 - I_2 - I_3 + I_4 = 0.$$

За другим формулюванням:

$$I_1 + I_4 = I_2 + I_3.$$

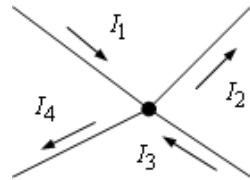


Рис. 3.2

Перший закон Кірхгофа є наслідком принципу безперервності електричного струму, відповідно до якого сумарний потік зарядів через будь-яку замкнуту поверхню дорівнює нулю, тобто кількість зарядів, які виходять через цю поверхню, повинне дорівнювати кількості зарядів, які входять.

Перший закон Кірхгофа може бути застосованим не тільки до вузла, але й до будь-якого контуру (замкненої поверхні), що охоплює довільну частину електричного кола.

### 3.1.3 Другий закон Кірхгофа

Другий закон Кірхгофа встановлює зв'язок між напругами елементів, які утворюють контури електричного кола.

*Другий закон Кірхгофа* формулюється в такий спосіб: у будь-

якому контурі алгебраїчна сума спадів напруг на всіх елементах контуру дорівнює нулю

$$\sum_{k=1}^K U_k = 0, \quad (3.6)$$

де  $K$  - кількість елементів, які входять до складу контуру.

Для запису другого закону Кірхгофа необхідно довільно задатися напрямком обходу контуру.

У рівнянні (3.6) спад напруги на резистивному елементі враховують зі знаком "+", якщо напрямок протікання струму через нього й напрямок обходу контуру збігаються або зі знаком "-", якщо вони не збігаються. Спад напруги на джерелах ЕРС враховують зі знаком "+", якщо напрямок обходу контуру й напрямок дії ЕРС не збігаються незалежно від напрямку протікання струму або зі знаком "-", якщо вони збігаються (тому що спад напруги на джерелі ЕРС чисельно дорівнює електрорушійній силі, але має протилежний знак).

На практиці зручніше застосовувати інше формулювання другого закону Кірхгофа: у будь-якому контурі алгебраїчна сума спадів напруги на всіх резистивних елементах цього контуру дорівнює алгебраїчній сумі ЕРС

$$\sum_{p=1}^P U_p = \sum_{q=1}^Q E_q, \quad (3.7)$$

де  $P$ ,  $Q$  - відповідно кількість резистивних елементів і джерел ЕРС, які входять до складу контуру,  $P + Q = K$ .

При записі рівняння (3.7) спади напруги на резистивних елементах враховують із такими ж знаками, як й у попередньому випадку. ЕРС враховують зі знаком "+", якщо напрямок обходу контуру й напрямок дії ЕРС збігаються незалежно від напрямку протікання струму або зі знаком "-", якщо вони не збігаються.

З урахуванням закону Ома для ділянки кола рівняння (3.7) можна представити у вигляді:

$$\sum_{p=1}^P R_p I_p = \sum_{q=1}^Q E_q. \quad (3.8)$$

Наприклад, для контуру електричного кола, схема якого

представлена на рис. 3.3, якщо прийняти напрямок обходу контуру за годинниковою стрілкою, рівняння за другим законом Кірхгофа має вигляд:  $E_1 + E_2 - E_3 = I_1 R_1 + I_2 R_2 - I_3 R_3 + I_4 R_4$ .

Другий закон Кірхгофа відображає закон збереження енергії.

Він пов'язаний з поняттям потенціалу електричного поля, як роботи, яка виконується при переміщенні одиничного точкового заряду в просторі. Кожен вузол (або точка) електричного кола має власний потенціал. При переміщенні уздовж контуру здійснюється робота, яка після повернення у вихідну точку буде дорівнює нулю (тому що електричне поле є потенційним).

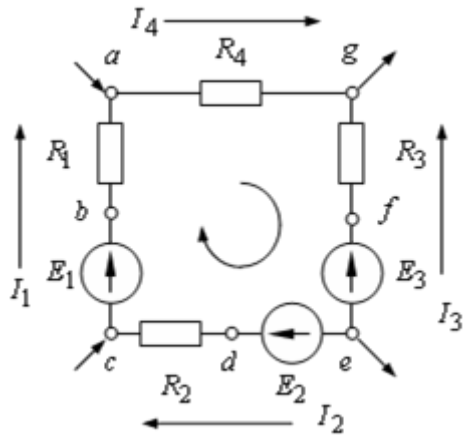


Рис. 3.3

### 3.1.4 Рівняння енергетичного балансу (рівняння балансу потужностей) в електричних колах постійного струму

Для будь-якого, скільки завгодно складного електричного кола постійного струму з будь якою кількістю джерел енергії та віток, можна скласти єдине рівняння яке зв'яже всі напруги та струми.

Це *рівняння енергетичного балансу*, яке випливає безпосередньо із закону збереження енергії: алгебраїчна сума всіх потужностей, які розвивають джерелами електричної енергії в колі, повинна бути дорівнює сумі потужностей, які навантаження перетворить в інші види енергії.

Рівняння енергетичного балансу має вигляд:

$$\sum_{p=1}^P E_p I_p + \sum_{q=1}^Q U_{Jq} J_q = \sum_{k=1}^K I_k^2 R_k. \quad (3.9)$$

де  $\sum_{p=1}^P E_p I_p$ ,  $\sum_{q=1}^Q U_{Jq} J_q$  - потужності, які віддають в електричне

коло відповідно  $P$  джерел ЕРС та  $Q$  джерел струму;  $U_{Jq}$  - напруга на затискачах  $q$ -го джерела струму;  $\sum_{k=1}^K I_k^2 R_k$  - потужність, яку споживають  $K$  резистивні елементи.

Вирази  $I_k^2 R_k$ , можуть приймати тільки невід'ємні значення, тому що навантаження (резистивні елементи) завжди працює в режимі споживання електричної енергії. Вирази  $E_p I_p$  й  $U_{Jq} J_q$  можуть приймати як додатні (джерела працюють у режимі генерації енергії) так і від'ємні значення (джерела працюють у режимі споживання енергії). Залежить це від того, чи спрямований фактичний струм від вузла з меншим потенціалом джерела до вузла з більшим потенціалом (рух зарядів здійснюється за рахунок роботи зовнішніх сил) або, навпаки, від вузла з більшим потенціалом до вузла з меншим потенціалом (рух зарядів здійснюється за рахунок роботи електричного поля).

Наприклад, акумулятор при його зарядці працює в режимі споживання електричної енергії.

У рівнянні (3.9) потужність джерела ЕРС урахують зі знаком "+", якщо напрямок струму в ньому збігається з напрямком ЕРС, а потужність джерела струму враховують зі знаком "+", якщо напрямку напруги на затискачах джерелі струму є протилежним до напрямку струму.

Як приклад розглянемо електричні кола, які складаються із двох джерел енергії (рис. 3.4).

Потенціал вузла  $a$  більше потенціалу вузла  $b$  (це обумовлює джерело ЕРС, яке спрямовано від вузла  $b$  до вузла  $a$ ). Напрямок струму визначається напрямком джерела струму.

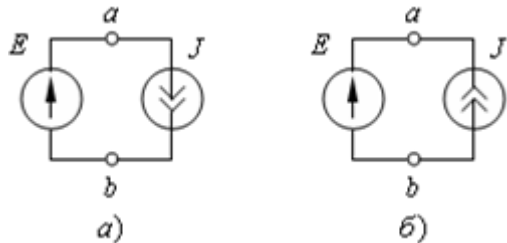


Рис. 3.4

Тому в схемі на рис. 3.4, *a* джерело ЕРС працює в режимі генерації енергії, а джерело струму в режимі споживання енергії, а в схемі на рис. 3.4, *б* навпаки джерело струму працює в режимі генерації, а джерело ЕРС у режимі споживання.

### 3.2 Еквівалентні перетворення електричних кіл

В електричних колах розрізняють наступні з'єднання елементів: послідовне, паралельне, змішане, зіркою й трикутником.

У багатьох випадку задача аналізу електричного кола істотно спрощується, якщо замінити його частину більш простим за структурою еквівалентним електричним колом. При цьому струми й напруги в частині кола, що не піддавалася перетворенням, повинні залишатися незмінними, тобто такими, якими вони були до перетворення. Розглянемо найбільш типові еквівалентні перетворення.

#### 3.2.1 Послідовне з'єднання елементів

*Послідовне з'єднання* це таке з'єднання елементів електричного кола, у якому кожна пара елементів з'єднана одним простим вузлом.

До будь-яке послідовного з'єднання може належати довільна кількість резистивних елементів і джерел ЕРС. Тоді в загальному випадку до з'єднання будуть належати  $P$  резистивних елементів й  $Q$  джерел ЕРС (рис. 3.5).

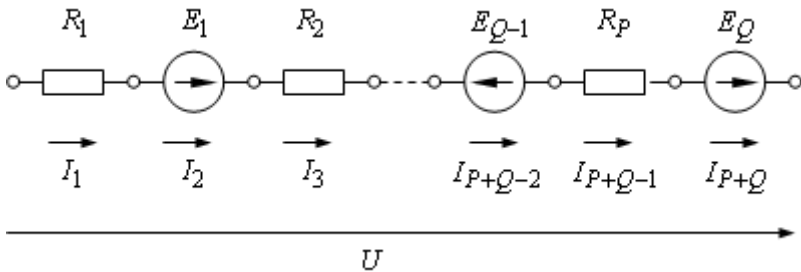


Рис. 3.5

Записавши рівняння за першим законом Кірхгофа для кожного простого вузла, одержимо:  $I_1 = I_2$ ,  $I_2 = I_3$ , ...,  $I_{P+Q-2} = I_{P+Q-1}$ ,  $I_{P+Q-1} = I_{P+Q}$ . Із зіставлення даних рівнянь витікає: при послідовному з'єднанні елементів через кожний з них протікає однаковий струм, тобто  $I_1 = I_2 = I_3 = \dots = I_{P+Q-2} = I_{P+Q-1} = I_{P+Q} = I$ .

Отримане співвідношення пояснює неможливість послідовного з'єднання декількох довільних джерел струму. При наявності одного джерела струму в послідовному з'єднанні його можна винести за межі ділянки, що розглядається, оскільки воно тільки задає

струм у з'єднанні й не впливає на інші елементи.

Для розглянутої ділянки електричного кола рівняння за другим законом Кірхгофа:  $U = R_1 I - E_1 + R_2 + \dots + E_{Q-1} + R_P I - E_Q = (R_1 + R_2 + \dots + R_P) I + (-E_1 + \dots + E_{Q-1} - E_Q) = R_{eq} I + E_{eq}$ .

Таким чином, будь-яке послідовне з'єднання елементів можна еквівалентно замінити послідовним з'єднанням одного резистивного елемента  $R_{eq}$  й одного джерела ЕРС  $E_{eq}$ .

Еквівалентний опір  $P$  послідовно з'єднаних резистивних елементів дорівнює сумі їхніх опорів

$$R_{eq} = \sum_{p=1}^P R_p. \quad (3.10)$$

Еквівалентна ЕРС  $Q$  послідовно з'єднаних джерел напруги дорівнює алгебраїчній сумі їх ЕРС:

$$E_{eq} = \sum_{q=1}^Q E_q. \quad (3.11)$$

У рівнянні (3.11) ЕРС, які збігаються за напрямком з ЕРС еквівалентного джерела, ураховують зі знаком "+", а які не збігаються - зі знаком "-".

### 3.2.2 Паралельне з'єднання елементів

*Паралельне з'єднання* це таке з'єднання елементів кола, у якому всі вони з'єднані з однією парою вузлів.

До будь-якого паралельного з'єднання може належати довільна кількість резистивних елементів і джерел струму. Тоді в загальному випадку до з'єднання будуть належати  $P$  резистивних елементів й  $Q$  джерел струму (рис. 3.6).

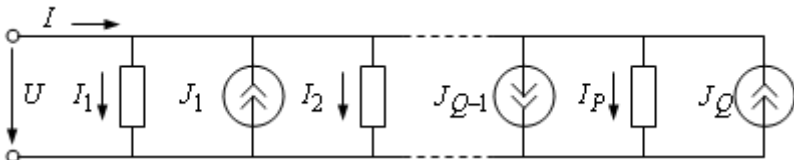


Рис. 3.6

Записавши рівняння за другим законом Кірхгофа для кожного елементарного контуру, одержимо:  $U_1 - U_2 = 0$ ,  $U_2 - U_3 = 0$ , ...,

$U_{P+Q-2} - U_{P+Q-1} = 0$ ,  $U_{P+Q-1} - U_{P+Q} = 0 \dots$  Із зіставлення даних рівнянь витікає: при паралельному з'єднанні елементів на всіх елементах напруга на кожному з них однакова, тобто  $U_1 = U_2 = U_3 = \dots = U_{P+Q-2} = U_{P+Q-1} = U_{P+Q} = U$ .

Отримане співвідношення пояснює неможливість паралельного з'єднання декількох довільних джерел ЕРС. При наявності одного джерела ЕРС у паралельному з'єднанні його можна винести за межі ділянки, що розглядається, оскільки він тільки задає напругу на з'єднанні й не впливає на інші елементи.

Для розглянутої ділянки електричного кола рівняння за першим законом Кірхгофа:  $I = \frac{U}{R_1} - J_1 + \frac{U}{R_2} + \dots + J_{Q-1} + \frac{U}{R_P} - J_Q =$   
 $= \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_P} \right) U + (-J_1 + \dots + J_{Q-1} - J_Q) = \frac{1}{R_{eq}} U + J_{eq}$ .

Таким чином, будь-яке паралельне з'єднання елементів можна еквівалентно замінити паралельним з'єднанням одного резистивного елемента  $R_{eq}$  й одного джерела струму  $J_{eq}$ .

Еквівалентний опір  $P$  паралельно з'єднаних резистивних елементів визначають через суму їх провідностей:

$$R_{eq} = \frac{1}{\sum_{p=1}^P \frac{1}{R_p}} = \frac{1}{\sum_{p=1}^P G_p} = \frac{1}{G_{eq}}, \quad (3.12)$$

де  $G_{eq}$  - еквівалентна провідність паралельно з'єднаних резистивних елементів.

Еквівалентний струм  $Q$  паралельно з'єднаних джерел струмів дорівнює алгебраїчній сумі їхніх струмів

$$J_{eq} = \sum_{q=1}^Q J_q. \quad (3.13)$$

У рівнянні (3.13) джерела струму, які збігаються за напрямком зі струмом еквівалентного джерела, ураховують зі знаком "+", а які не збігаються - зі знаком "-".

У випадках з'єднань двох і трьох резистивних елементів, що

часто зустрічаються при розрахунках, вирази для загального опору  $R_{eq}$  мають вигляд:

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2};$$

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}.$$
(3.14)

### 3.2.3 Змішане з'єднання елементів

*Змішаним з'єднанням* називають сукупність послідовних і паралельних з'єднань двополюсних елементів.

У випадку змішаного з'єднання резистивних елементів можна знайти еквівалентний опір шляхом поетапних еквівалентних перетворень для декількох окремих елементів.

*Приклад 3.1.* Розглянемо ділянку електричного кола, що складається з резистивних елементів (рис. 3.7). Опори резистивних елементів  $R_1 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 15 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 40 \text{ Ом}$ ;  $R_4 = 25 \text{ Ом}$ . Визначити еквівалентний опір кола.

*Розв'язання.* Електричне коло, схема якого представлена на рис. 3.7, має три вітки. Перша складається з одного резистивного елемента  $R_1$ ; друга - з резистивних елементів  $R_2$  й  $R_4$ , третю - з резистивного елемента  $R_3$ . Друга й третя вітки з'єднані між собою паралельно, тому що обидві з'єднані з вузлами  $a$  й  $b$  (але із цього не витікає, що паралельно з'єднано між собою елементи цих віток).

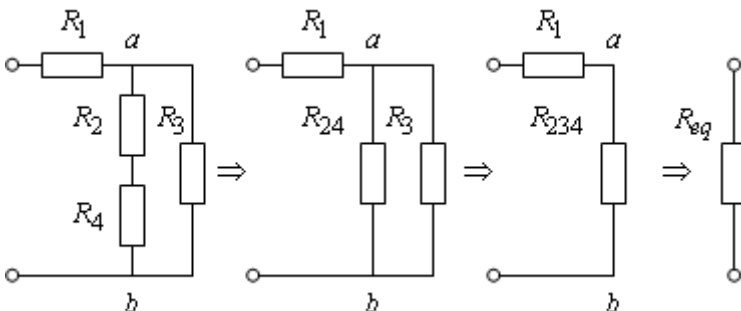


Рис. 3.7

На першому етапі еквівалентне перетворення можливо тільки для послідовного з'єднання  $R_2$  й  $R_4$  у другій вітці (тому що в колі немає інших з'єднань, які можна визначити як паралельні або послідовні). Використовуючи вираз (3.10), одержимо:

$$R_{24} = R_2 + R_4 = 15 + 25 = 40 \text{ Ом}.$$

Тепер кожна з паралельних віток складається з одного елемента. Ці елементи утворюють між собою паралельне з'єднання, для якого за допомогою виразу (3.14) знайдемо еквівалентний опір:

$$R_{234} = \frac{R_{24} \cdot R_3}{R_{24} + R_3} = \frac{40 \cdot 40}{40 + 40} = 20 \text{ Ом}.$$

У результаті ми одержимо послідовне з'єднання елементів  $R_1$  й  $R_{234}$  після чого, ще раз скориставшись виразом (3.10), знайдемо еквівалентний опір усієї ділянки електричного кола:

$$R_{eq} = R_1 + R_{234} = 10 + 20 = 30 \text{ Ом}.$$

### 3.2.4 З'єднання резистивних елементів трикутником і зіркою

У складних колах зустрічаються з'єднання, які не можна віднести до послідовних, паралельних або змішаних з'єднань. До них належать з'єднання трипроменевою зіркою й трикутником (рис. 3.8). Взаємне перетворення цих з'єднань часто дозволяє одержати більш прості змішані з'єднання й після цього розв'язати задачу подібно тому, як це було зроблено вище.

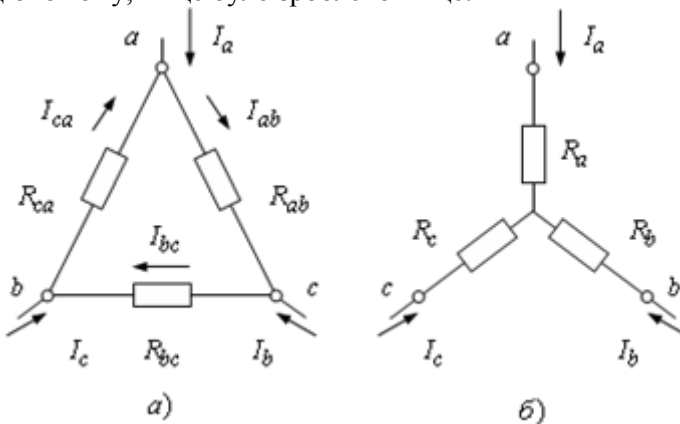


Рис. 3.8

Під з'єднанням резистивних елементів *трикутником*, (рис. 3.8, *а*) розуміють таке з'єднання, при якому кінець ( $x$ ) одного з резистивних елементів з'єднується з початком ( $b$ ) другого, кінець ( $y$ ) другого – з початком ( $c$ ) третього, кінець ( $z$ ) третього - з початком ( $a$ ) першого, а отримані точки ( $a, b, c$ ) підключаються до інших частин кола. Позначається такий тип з'єднання знаком " $\Delta$ ".

Під з'єднанням резистивних елементів *зіркою*, (рис. 3.8, *б*) розуміють таке з'єднання, при якому кінці ( $x, y, z$ ) всіх резистивних елементів з'єднується разом у вузлі  $n$ , а початки ( $a, b, c$ ) підключаються до інших частин кола. Позначається такий тип з'єднання знаком " $Y$ ".

Якщо електричне коло має ділянки, які з'єднані зіркою або трикутником, то розрахунок кола спрощується якщо зробити еквівалентну заміну з'єднання трикутник з'єднанням зірка.

Заміна трикутника резистивних елементів еквівалентною зіркою повинна бути виконана таким чином, щоб після її закінчення струми  $I_a, I_b, I_c$  і напруги  $U_{ab}, U_{bc}, U_{ca}$  у незачепленій частині електричного кола залишилися без зміни.

Складаємо для контуру трикутника (рис. 3.8, *а*) рівняння за другим законом Кірхгофа, а для вузлів  $a$  й  $b$  - рівняння за першим законом Кірхгофа й одержуємо систему:

$$\begin{cases} R_{ab}I_{ab} + R_{bc}I_{bc} + R_{ca}I_{ca} = 0 \\ I_a + I_{ca} - I_{ab} = 0 \\ I_b + I_{ab} - I_{bc} = 0 \end{cases} . \quad (3.15)$$

Розв'язуємо систему щодо струму  $I_{ab}$ :

$$I_{ab} = \frac{R_{ca}I_a - R_{bc}I_b}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} . \quad (3.16)$$

Тоді спад напруги між вузлами  $a$  й  $b$  у з'єднанні трикутник дорівнює:

$$\begin{aligned} U_{ab} &= R_{ab}I_{ab} = \frac{R_{ab}R_{ca}I_a - R_{ab}R_{bc}I_b}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} = \\ &= \frac{R_{ab}R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}I_a - \frac{R_{bc}R_{ab}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}I_b . \end{aligned} \quad (3.17)$$

У з'єднанні зірка напруга між вузлами  $a$  й  $b$  дорівнює:

$$U_{ab} = R_aI_a - R_bI_b . \quad (3.18)$$

Дорівнюючи множники при струмах у виразах (3.17) і (3.18), одержимо  $R_a$ ,  $R_b$  і, за аналогією, перестановкою індексів  $R_c$ :

$$\begin{aligned} R_a &= \frac{R_{ab} \cdot R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}; \\ R_b &= \frac{R_{bc} \cdot R_{ab}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}, \\ R_c &= \frac{R_{ca} \cdot R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

З рівнянь (3.19) можна визначити опори резистивних елементів еквівалентного трикутника:

$$\begin{aligned} R_{ab} &= R_a + R_b + \frac{R_a \cdot R_b}{R_c}, \\ R_{bc} &= R_b + R_c + \frac{R_b \cdot R_c}{R_a}, \\ R_{ca} &= R_c + R_a + \frac{R_c \cdot R_a}{R_b}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Провівши аналогічні міркування можна одержати провідності резистивних елементів еквівалентної зірки:

$$\begin{aligned} G_a &= G_{ab} + G_{ca} + \frac{G_{ab} \cdot G_{ca}}{G_{bc}}; \\ G_b &= G_{bc} + G_{ab} + \frac{G_{ba} \cdot G_{ab}}{G_{ca}}; \\ G_c &= G_{ca} + G_{bc} + \frac{G_{ca} \cdot G_{bc}}{G_{ab}}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

і провідності резистивних елементів еквівалентного трикутника:

$$\begin{aligned} G_{ab} &= \frac{G_a \cdot G_b}{G_a + G_b + G_c}; \\ G_{bc} &= \frac{G_b \cdot G_c}{G_a + G_b + G_c}; \\ G_{ca} &= \frac{G_c \cdot G_a}{G_a + G_b + G_c}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

### 3.3 Аналіз розгалужених електричних кіл постійного струму з одним джерелом енергії

#### 3.3.1 Метод безпосереднього застосування закону Ома (метод згортання)

Суть *методу безпосереднього застосування закону Ома* (його також називають *метод еквівалентних перетворень* або *метод згортання*) полягає в заміні ділянок кола еквівалентними резистивними елементами. Це дозволяє звести складне коло до найпростішого, тобто такого, що складається із джерела енергії і резистивного елемента, опір якого дорівнює еквівалентному. Після перетворення розрахунок електричного кола зводиться до ряду арифметичних операцій на підставі закону Ома. Визначивши струм джерела через цей резистивний елемент, виконують зворотне перетворення схеми електричного кола до вихідного, обчислюючи за відомими струмами напруги на ділянках кола й розподіл струмів у паралельних вітках.

Спочатку обчислюють еквівалентні опори резистивних елементів, які з'єднані послідовно, потім еквівалентні опори резистивних елементів, які з'єднані паралельно. Операції повторюються доти, поки не буде визначений еквівалентний опір усього електричного кола.

Метод еквівалентних перетворень доцільно застосовувати для розв'язання задач, у яких електричне коло має не більше трьох незалежних контурів.

*Приклад 3.2.* Розглянемо електричне коло з одним джерелом ЕРС (рис. 3.9, а). Параметри кола: ЕРС джерела  $E = 50 \text{ В}$ , опори резистивних елементів  $R_1 = 26 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 40 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 25 \text{ Ом}$ ;  $R_4 = 35 \text{ Ом}$ . Визначити струми у всіх вітках кола.

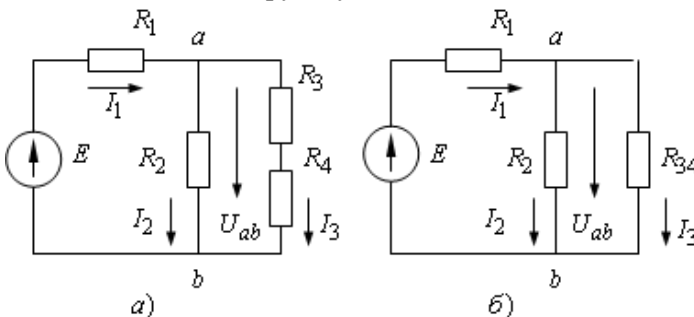


Рис. 3.9

*Розв'язання.* Задаємо умовно додатні напрямки струмів, пам'ятаючи, що для послідовного з'єднання сила струму в усіх елементах однакова.

Для послідовно з'єднаних резистивних елементів  $R_3$  й  $R_4$  еквівалентний опір відповідно до (3.10):

$$R_{34} = R_3 + R_4 = 25 + 35 = 60 \text{ Ом}.$$

Для паралельно з'єднаних резистивних елементів  $R_2$  й  $R_{34}$  (рис. 3.9, б) еквівалентний опір відповідно до (3.14):

$$R_{234} = \frac{R_2 R_{34}}{R_2 + R_{34}} = \frac{40 \cdot 60}{40 + 60} = 24 \text{ Ом}.$$

Для послідовно з'єднаних резистивних елементів  $R_1$  й  $R_{234}$  (рис. 3.10, а) еквівалентний опір:

$$R_{eq} = R_1 + R_{234} = 26 + 24 = 50 \text{ Ом}.$$

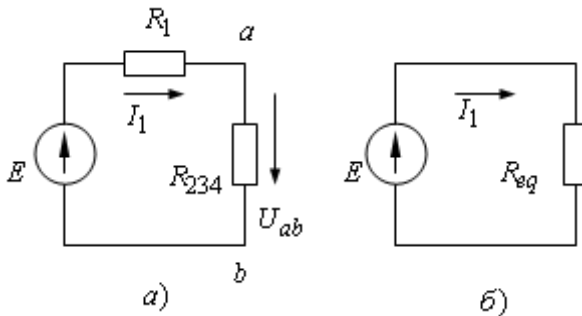


Рис. 3.10

При цьому утворилось найпростіше електричне коло, що складається із джерела ЕРС і резистивного елемента (рис. 3.10, б). Струм у цьому колі дорівнює струму в нерозгалуженій частині вихідного кола. Визначаємо його за законом Ома

$$I_1 = \frac{E}{R_{eq}} = \frac{50}{50} = 1 \text{ А}.$$

Подальший розрахунок виконуємо за законом Ома, ідучи по етапах еквівалентних перетворень у зворотному порядку.

Для еквівалентного кола на рис. 3.10, а:

$$U_{ab} = R_{234} I_1 = 24 \cdot 1 = 24 \text{ В}.$$

Для еквівалентного кола на рис. 3.9, б:

$$I_2 = \frac{U_{ab}}{R_2} = \frac{24}{40} = 0,6 \text{ A}; \quad I_3 = \frac{U_{ab}}{R_{34}} = \frac{24}{60} = 0,4 \text{ A}.$$

У випадку якщо є тільки дві паралельні вітки для знаходження сили струмів у них зручно скористатися *методом розкиду струмів*, що базується на тім, що струми в паралельних вітках обернено пропорційні опорам цих віток. Тоді струм у кожній з віток пропорційний відношенню опору іншої вітки до сумарного опору обох віток:

$$I_2 = I_1 \frac{R_{34}}{(R_2 + R_{34})} = 1 \cdot \frac{60}{40 + 60} = 0,6 \text{ A};$$

$$I_3 = I_1 \frac{R_2}{(R_2 + R_{34})} = 1 \cdot \frac{40}{40 + 60} = 0,4 \text{ A}.$$

У деяких електричних колах неможливо знайти ділянок з послідовним або паралельним з'єднанням елементів.

Зразком електричного кола такого типу є мостова схема, яка широко використовується в техніці (рис. 3.11). У цьому випадку необхідно попередньо еквівалентно перетворити з'єднання зірка в з'єднання трикутник або навпаки.

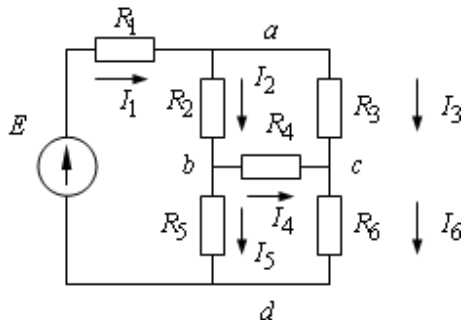


Рис. 3.11

*Приклад 3.3.* Розглянемо схему електричного кола (рис. 3.11). Параметри кола: ЕРС джерела  $E = 60 \text{ В}$ , опори резистивних елементів  $R_1 = 8 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 56 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 28 \text{ Ом}$ ;  $R_4 = 14 \text{ Ом}$ ,  $R_5 = 7 \text{ Ом}$ ,  $R_6 = 6 \text{ Ом}$ . Визначити струми у всіх вітках кола.

*Розв'язання.* У даному електричному колі немає ділянок з послідовним або паралельним з'єднанням резистивних елементів. Але в ній можна виділити три з'єднання зіркою  $R_1, R_2, R_3$ ;  $R_2, R_4, R_5$ ;  $R_3, R_4, R_6$  і два з'єднання трикутником  $R_2, R_3, R_4$ ;  $R_4, R_5, R_6$ . У результаті перетворення будь якого із чотирьох останніх з'єднань мостова схема трансформується до змішаного

з'єднання. На рис. 3.12, *а* наведено результат перетворення трикутника  $R_2, R_3, R_4$  в еквівалентну зірку, а на рис. 3.12, *б* - зірки  $R_3, R_4, R_6$  в еквівалентний трикутник.

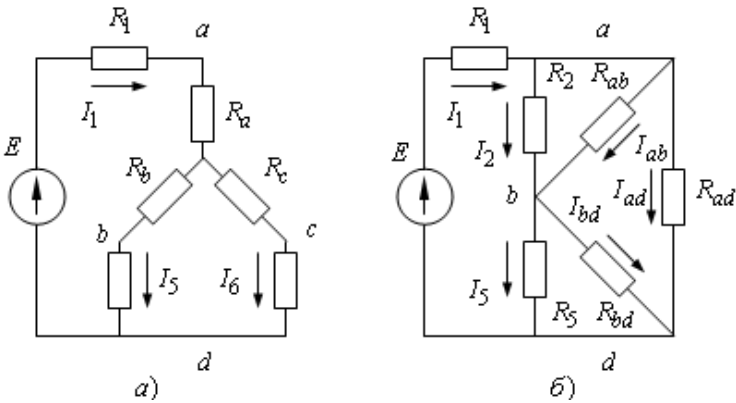


Рис. 3.12

Для розв'язання задачі зручніше використати перетворення трикутника в зірку.

Відповідно до (3.19) опори резистивних елементів еквівалентної зірки:

$$R_a = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3 + R_4} = \frac{56 \cdot 28}{56 + 28 + 14} = 16 \text{ Ом};$$

$$R_b = \frac{R_2 \cdot R_4}{R_2 + R_3 + R_4} = \frac{56 \cdot 14}{56 + 28 + 14} = 8 \text{ Ом};$$

$$R_c = \frac{R_3 \cdot R_4}{R_2 + R_3 + R_4} = \frac{28 \cdot 14}{56 + 28 + 14} = 4 \text{ Ом}.$$

Резистивні елементи  $R_b, R_5$  і  $R_c, R_6$  з'єднані послідовно. Їхні еквівалентні опори:

$$R_{b5} = R_b + R_5 = 8 + 7 = 15 \text{ Ом};$$

$$R_{c6} = R_c + R_6 = 4 + 6 = 10 \text{ Ом}.$$

Резистивні елементи  $R_{b5}$  й  $R_{c6}$  з'єднані паралельно (рис. 3.13, *а*). Їхній еквівалентний опір:

$$R_{bc56} = \frac{R_{b5} \cdot R_{c6}}{R_{b5} + R_{c6}} = \frac{15 \cdot 10}{15 + 10} = 6 \text{ Ом}.$$

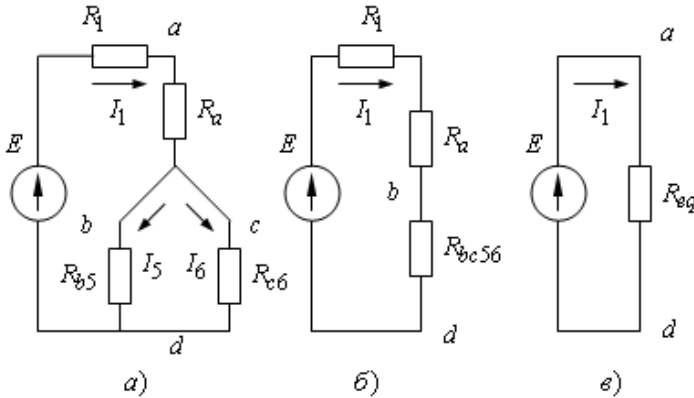


Рис. 3.13

Резистивні елементи  $R_1$ ,  $R_a$ ,  $R_{bc56}$  з'єднані послідовно (рис. 3.13, б). Еквівалентний опір електричного кола:

$$R_{eq} = R_1 + R_a + R_{234} = 8 + 16 + 20 = 30 \text{ Ом}.$$

В електричному колі (рис. 3.13, в) за законом Ома струм:

$$I_1 = \frac{E}{R_{eq}} = \frac{60}{30} = 2 \text{ А}.$$

Струми в паралельних вітках (рис. 3.13, а):

$$I_5 = I_1 \frac{R_{c6}}{R_{b5} + R_{c6}} = 2 \cdot \frac{10}{15 + 10} = 0,8 \text{ А};$$

$$I_6 = I_1 \frac{R_{b5}}{R_{b5} + R_{c6}} = 2 \cdot \frac{15}{15 + 10} = 1,2 \text{ А}.$$

Для знаходження струмів  $I_2$  і  $I_3$  використаємо закони Кірхгофа.

Складемо рівняння за другим законом Кірхгофа для контуру вихідної схеми (рис. 3.11), що складається з резистивних елементів  $R_4$ ,  $R_5$  і  $R_6$ :

$$I_4 R_4 + I_6 R_6 - I_5 R_5 = 0.$$

Звідси:

$$I_4 = \frac{I_5 R_5 - I_6 R_6}{R_4} = \frac{0,8 \cdot 7 - 1,2 \cdot 6}{14} = -\frac{80}{7} \approx -0,114 \text{ А}.$$

Знак "-" говорить про те, що фактичний напрямок струму не збігається з обраним.

За першим законом Кірхгофа для вузлів  $b$  і  $c$  маємо:

$$I_2 = I_4 + I_5 = -0,114 + 0,6 = 0,486 \text{ A};$$

$$I_3 = I_6 - I_4 = 1,2 - (-0,114) = 1,314 \text{ A}.$$

### 3.3.2 Метод пропорційних величин

Суть *методу пропорційних величин* (його також називають *методом подоби*) полягає в тім, що для найбільш віддаленого від джерела енергії резистивного елемента задають довільне значення струму (напруги). Далі використовуючи закон Ома, обчислюють напруги й струми для всіх елементів схеми. Підсумовуючи значення відповідних величин, визначають параметр джерела енергії. Якщо отримане значення не збігається із заданим, то обчислюють коефіцієнт подоби. Далі помножують на цей коефіцієнт отримані при розрахунку значення струмів і напруг і визначають фактичні значення струмів і напруг в електричному колі.

Метод подоби застосовують для розрахунку електричних кіл зі змішаним з'єднанням резистивних елементів з одним джерелом енергії. Але в сполученні з іншими методами він може бути використаний і для розрахунку більше складних електричних кіл.

*Приклад 3.4.* Розглянемо електричне коло постійного струму із джерелом ЕРС  $E$  (рис. 3.9, а). Параметри кола: ЕРС джерела  $E = 50 \text{ В}$ , опори резистивних елементів  $R_1 = 26 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 40 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 25 \text{ Ом}$ ;  $R_4 = 35 \text{ Ом}$ . Визначити струми у всіх вітках електричного кола.

*Розв'язання.* Задамося довільним значенням напруги  $U'_4 = 35 \text{ В}$  на найбільш віддаленому від джерела ЕРС резистивному елементі  $R_4$ .

За заданими значеннями напруги  $U'_4$  й опору  $R_4$  відповідно до закону Ома визначаємо струм

$$I'_3 = \frac{U'_4}{R_4} = \frac{35}{35} = 1 \text{ А}.$$

Використовуючи закон Ома, обчислюємо спад напруги на резистивному елементі  $R_3$  та напругу на ділянці  $ab$ :

$$U'_3 = R_3 I'_3 = 25 \cdot 1 = 25 \text{ В}; \quad U'_{ab} = U'_3 + U'_4 = 25 + 35 = 60 \text{ В}.$$

Далі, використовуючи закони Ома й Кірхгофа, послідовно визначаємо:

$$I_2' = \frac{U_{ab}'}{R_2} = \frac{60}{40} = 1,5 \text{ A};$$

$$I_1' = I_2' + I_3' = 1,5 + 1 = 2,5 \text{ A};$$

$$U_1' = R_1 I_1' = 26 \cdot 2,5 = 65 \text{ В}.$$

Знаходимо сподіване значення ЕРС:

$$E' = U_1' + U_{ab}' = 65 + 60 = 125 \text{ А}.$$

Знайдене значення ЕРС  $E'$  відрізняється від заданого значення ЕРС  $E$ . Обчислюємо коефіцієнт подоби

$$k = \frac{E}{E'} = \frac{50}{125} = 0,4.$$

Помножимо на коефіцієнт  $k$  значення струмів, які отримані при розрахунку, і визначимо фактичні значення струмів:

$$I_1 = k \cdot I_1' = 0,4 \cdot 2,5 = 1 \text{ A};$$

$$I_2 = k \cdot I_2' = 0,4 \cdot 1,5 = 0,6 \text{ A};$$

$$I_3 = k \cdot I_3' = 0,4 \cdot 1,5 = 0,6 \text{ A}.$$

### 3.4 Аналіз складних електричних кіл постійного струму з декількома джерелами енергії

Складні електричні кола розраховують з використанням законів Кірхгофа й розроблених на їхній основі методів, що спрощують розрахунки (контурних струмів, вузлових потенціалів, накладення, еквівалентного генератора).

#### 3.4.1 Метод безпосереднього застосування законів Кірхгофа

Закони Кірхгофа є універсальним засобом аналізу електричних кіл.

Суть методу безпосереднього застосування законів Кірхгофа полягає в складанні й наступному розв'язанні системи незалежних рівнянь за законами Кірхгофа, кількість яких повинне збігатися з кількістю невідомих величин. У більшості випадків невідомими величинами є струми у вітках.

Попередньо довільно задають напрямки струмів у всіх вітках кола, крім віток із джерелами струму (струми джерел є відомими й напрямки струмів у таких вітках обумовлюють джерела струму).

Визначають для вихідного кола кількість вузлів  $K$ , кількість всіх віток  $N$ , і кількість віток, у яких містяться джерела струму  $N_J$ . Струми у вітках із джерелами струму є відомими, тому кількість невідомих струмів дорівнює  $N - N_J$ . Загальна кількість необхідних рівнянь дорівнює кількості невідомих струмів.

Для будь-якого вузла кола можна скласти рівняння за першим законом Кірхгофа, але тільки  $(K - 1)$  рівнянь будуть незалежними (оскільки рівняння для останнього вузла є наслідком всіх попередніх рівнянь). Тому за першим законом Кірхгофа складають  $(K - 1)$  рівнянь. Відсутні  $[(N - N_J) - (K - 1)]$  рівняння складають за другим законом Кірхгофа. Складаючи рівняння за другим законом Кірхгофа, вибирають незалежні контури, що охоплюють всі вітки, у яких не містяться джерела струму (складання рівнянь для контурів, до складу яких входять джерела струму призводить до появи додаткових невідомих - напруг на джерелах струму). Контур вважають незалежним, якщо до нього належить хоча б одна вітка, що не належить до інших контурів. Напрямок обходу кожного контуру вибирають довільно.

*Приклад 3.5.* Розглянемо електричне коло постійного струму (рис. 3.14). Параметри джерел енергії:  $E_1 = 50 \text{ В}$ ,  $E_2 = 30 \text{ В}$ ,  $J = 1 \text{ А}$ , опори резистивних елементів:  $R_1 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 15 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 20 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 25 \text{ Ом}$ ,  $R_5 = 30 \text{ Ом}$ ,  $R_6 = 35 \text{ Ом}$ . Визначити струми у всіх вітках електричного кола.

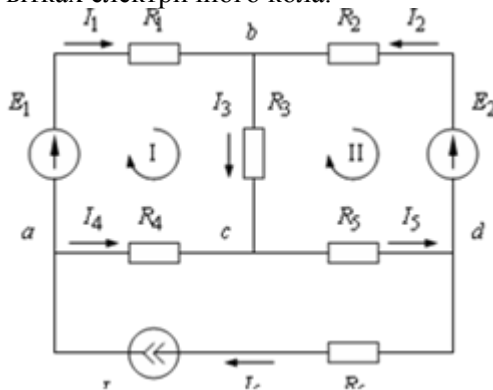


Рис. 3.14

*Розв'язання.* Довільно задаємо напрямки струмів (у вітках, до складу яких належать джерела енергії, зручніше вибирати напрямки струмів відповідно до напрямків джерел).

Кількість вузлів  $K = 4$ , кількість віток  $N = 6$ , кількість віток, у складі яких є джерела струму  $N_J = 1$ , кількість невідомих струмів  $N - N_J = 6 - 1 = 5$ . За першим законом Кірхгофа можна скласти  $K - 1 = 4 - 1 = 3$  незалежні рівняння. Відсутні  $[(N - N_J) - (K - 1)] = [(6 - 1) - (4 - 1)] = 2$  рівняння потрібно скласти за другим законом Кірхгофа.

Рівняння за першим законом Кірхгофа складаємо для вузлів  $a$ ,  $b$  і  $c$ . Як незалежні контури вибираємо контури, які містять відповідно елементи  $E_1, R_1, R_3, R_4$  і елементи  $E_2, R_5, R_3, R_2$ . Напрямок обходу для обох контурів вибираємо за годинниковою стрілкою. При запису рівнянь ураховуємо, що  $I_6 = J$ .

$$\begin{cases} J - I_1 - I_4 = 0; \\ I_1 + I_2 - I_3 = 0; \\ I_3 + I_4 - I_5 = 0; \\ I_1 R_1 + I_3 R_3 - I_4 R_4 = E_1; \\ -I_2 R_2 - I_3 R_3 - I_5 R_5 = -E_2. \end{cases}$$

У результаті розв'язання цієї системи рівнянь визначаємо струми у вітках.

Для розв'язання системи з використанням комп'ютера (наприклад, за допомогою MathCAD) необхідно представити її в матричній формі

$$AX = B,$$

де  $A$  - квадратна матриця коефіцієнтів при невідомих величинах;  $X$  - матриця-стовпець невідомих величин;  $B$  - матриця-стовпець вільних членів рівнянь.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ R_1 & 0 & R_3 & -R_4 & 0 \\ 0 & -R_2 & -R_3 & 0 & -R_5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -J \\ 0 \\ 0 \\ E_1 \\ -E_2 \end{pmatrix},$$

або

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 10 & 0 & 20 & -25 & 0 \\ 0 & -15 & -20 & 0 & -30 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 50 \\ -30 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання системи в матричній формі шукаємо у вигляді:

$$X = A^{-1}B.$$

Тоді струми у вітках електричного кола:

$$X = \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1,535 \\ -0,472 \\ 1,063 \\ -0,535 \\ 0,528 \end{vmatrix}.$$

Тому що напрямки струмів вибиралися довільно, значення деякі струмів виявилися від'ємними. Це означає, що фактичні струми спрямовані в зворотному напрямку.

Перевірку правильності розрахунку виконаємо за допомогою складання рівняння балансу потужностей:

$$E_1 I_1 + E_2 I_2 + U_J J = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 + R_5 I_1^2 + R_6 I_6^2.$$

Для визначення напруги на затискачах джерела струму складаємо рівняння за другим законом Кірхгофа для контуру, до складу якого належить джерело струму:

$$-U_J + R_4 I_4 + R_5 I_5 + R_6 I_6 = 0,$$

або

$$U_J = R_4 I_4 + R_5 I_5 + R_6 I_6 = 25 \cdot (-0,535) + 30 \cdot 0,528 + 35 \cdot 1 = 37,47 \text{ В}$$

Тоді:

$$\begin{aligned} & 50 \cdot 1,535 + 30 \cdot (-0,472) + 37,47 \cdot 1 = 10 \cdot 1,535^2 + 15 \cdot (-0,472)^2 + \\ & + 20 \cdot 1,063^2 + 25 \cdot (-0,535)^2 + 30 \cdot 0,528^2 + 35 \cdot 1^2; \end{aligned}$$

$$100 \text{ Вт} = 100 \text{ Вт}.$$

Таким чином, баланс потужностей виконується. Аналіз ре-

зультатів розрахунку показує, що джерело ЕРС  $E_1$  і джерело струму  $J$  працюють у режимі генерації енергії, а джерело ЕРС  $E_2$  у режимі споживання.

Метод безпосереднього застосування законів Кірхгофа вимагає складання великої кількості рівнянь. Тому для практичних розрахунків розроблені інші методи.

### 3.4.2 Метод контурних струмів

Метод контурних струмів ґрунтується на допущенні, що в кожному незалежному контурі кола протікає власний струм, який є незалежним від струмів в інших контурах. Контурний струм - це фіктивний струм у контурі, що є однаковим для всіх елементів цього контуру. Напрямок контурного струму кожного контуру ( $i$ , відповідно, напрямком обходу) вибирають довільно.

Суть *методу контурних струмів* полягає в тім, що фактичні струми, які протікають у вітках кола, замінюють алгебраїчною сумою контурних струмів. При цьому для віток, які належать тільки до одного контуру, сила струму дорівнює алгебраїчному значенню відповідного контурного струму (узятому зі знаком "+", якщо напрямки струму у вітці й контурного струму збігаються або зі знаком "-", якщо вони не збігаються). Для суміжних віток, які належать до складу декількох контурів, сила струму дорівнює алгебраїчній сумі відповідних контурних струмів. Знаки струмів вибирають аналогічно. Вітки, що містять джерела струму, можуть належати тільки до одного незалежного контуру.

Метод контурних струмів доцільно використовувати для розрахунку складних електричних кіл з великою кількістю вузлів. Він дозволяє виключити рівняння, які складені за першим законом Кірхгофа. Кількість невідомих у цьому методі дорівнює кількості рівнянь, які необхідно скласти для кола за другим законом Кірхгофа.

У загальному випадку для складного кола система рівнянь відповідно до методів контурних струмів має вигляд:

$$\begin{cases} R_{11}I_{11} + R_{12}I_{22} + \dots + R_{1m}I_{mm} + \dots + R_{1n}I_{nn} = E_{11}; \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{m1}I_{11} + R_{m2}I_{22} + \dots + R_{mm}I_{mm} + \dots + R_{mn}I_{nn} = E_{mm}; \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{n1}I_{11} + R_{n2}I_{22} + \dots + R_{nm}I_{mm} + \dots + R_{nn}I_{nn} = E_{nn}, \end{cases} \quad (3.23)$$

де  $R_{11}, R_{22}, \dots, R_{nn}$  - власні опори контурів, які дорівнюють ариф-

метичній сумі опорів всіх елементів контуру;  $I_{11}, I_{22}, \dots, I_{mm}$  - контурні струми;  $m$  - змінний номер контурів;  $R_{km} = R_{mk}$  - взаємні опори контурів, які дорівнюють сумі опорів спільних віток суміжних контурів (тобто віток, які одночасно належать до  $k$ -ого й  $m$ -ого контурів). Взаємні опори враховують зі знаком "+", якщо напрямки відповідних контурних струмів через них збігаються між собою й зі знаком "-", якщо не збігаються;  $E_{11}, E_{22}, \dots, E_{mm}$  - контурні ЕРС, які дорівнюють алгебраїчній сумі ЕРС відповідного контуру. При цьому кожне ЕРС контуру враховують зі знаком "+", якщо його напрямок збігається з напрямком відповідного контурного струму або зі знаком "-", якщо не збігається.

Розв'язавши отриману систему, визначають контурні струми  $I_{11}, I_{22}, \dots, I_{mm}$ , а потім фактичні струми в вітках.

Методику складання основних розрахункових рівнянь для контурних струмів розглянемо в прикладі 3.6.

*Приклад 3.6.* Розглянемо електричне коло постійного струму (рис. 3.15). Параметри джерел енергії:  $E_1 = 50 \text{ В}$ ,  $E_2 = 30 \text{ В}$ ,  $J = 1 \text{ А}$ , опори резистивних елементів  $R_1 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 15 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 20 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 25 \text{ Ом}$ ,  $R_5 = 30 \text{ Ом}$ ,  $R_6 = 35 \text{ Ом}$ . Визначити струми у всіх вітках електричного кола методом контурних струмів.

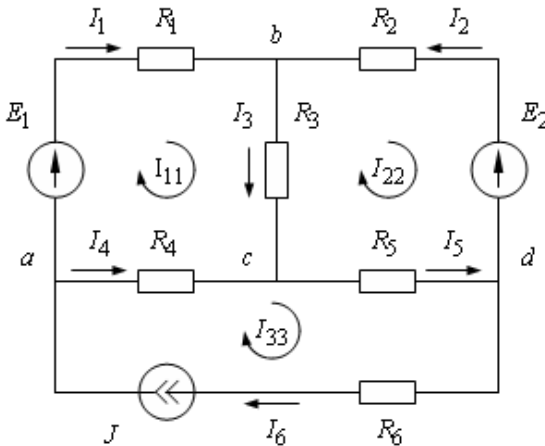


Рис. 3.15

*Розв'язання.* Нехай у довільно обраних контурах протікають незалежні контурні струми  $I_{11}, I_{22}, I_{33}$  (рис. 3.15). Напрямки кон-

турних струмів виберемо довільно й незалежно одне від іншого (наприклад, за годинниковою стрілкою).

Струм у шостій вітці обумовлює джерело струму  $I_6 = J$ .

З іншого боку, шоста вітка належить до складу тільки третього контуру, причому обраний напрямок струму у вітці збігається з обраним напрямком контурного струму. Тому  $I_6 = I_{33}$ .

Отже  $I_{33} = J$ .

Таким чином, кількість невідомих контурних струмів дорівнює кількості рівнянь, які необхідно було скласти для даного кола за другим законом Кірхгофа (див. приклад 3.5).

Складаємо рівняння за другим законом Кірхгофа для першого й другого контуру. У ліву частину рівнянь включаємо спади напруг на резистивних елементах контуру, які створюють струми, що протікають ними, а в праву частину - ЕРС джерел, що діють у контурі. ЕРС кожного джерела враховуємо зі знаком "+", якщо його напрямок збігається з напрямком протікання контурного струму (напрямок обходу контуру). Спади напруги, які створюють власні струми контуру, завжди враховуємо зі знаками "+", а спади напруги, які створюють в елементах контуру струми суміжних контурів, враховуємо зі знаками "-", якщо ці струми протікають через суміжну вітку в тім же напрямку, що й власний струм контуру.

$$\begin{cases} (R_1 + R_3 + R_4)I_{11} - R_3I_{22} - I_{33}R_4 = E_1; \\ (R_2 + R_3 + R_5)I_{22} - R_3I_{11} - I_{33}R_5 = -E_2. \end{cases}$$

Перегрупуємо елементи рівняння щодо невідомих контурних струмів і враховуємо, що  $I_{33} = J$ :

$$\begin{cases} (R_1 + R_3 + R_4)I_{11} - R_3I_{22} = E_1 + JR_4; \\ -R_3I_{11} + (R_2 + R_3 + R_5)I_{22} = -E_2 + JR_5, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} R_{11}I_{11} - R_{12}I_{22} = E_{11}; \\ -R_{21}I_{11} + R_{22}I_{22} = E_{22}, \end{cases}$$

де  $R_{11} = R_1 + R_3 + R_4 = 10 + 20 + 25 = 55 \text{ Ом}$  - власний опір першого контуру;  $R_{11} = R_2 + R_3 + R_5 = 15 + 20 + 30 = 65 \text{ Ом}$  - власний опір другого контуру;  $R_{12} = R_{21} = -R_3 = 20 \text{ Ом}$  - взаємний опір першого

й другого контурів;  $E_{11} = E_1 + R_4 J = 50 + 25 \cdot 1 = 75 \text{ В}$  - контурна ЕРС першого контуру;  $E_{22} = -E_2 + R_5 J = -30 + 30 \cdot 1 = 0 \text{ В}$  - контурна ЕРС другого контуру.

Тоді:

$$\begin{cases} 55I_{11} - 20I_{22} = 85; \\ -20I_{11} + 65I_{22} = 0. \end{cases}$$

Із другого рівняння системи виразимо струм  $I_{11}$ :

$$I_{11} = 3,25I_{22}.$$

Підставимо в перше рівняння системи й одержимо:

$$55 \cdot 3,25I_{22} - 20I_{22} = 85 \text{ або } 178,75I_{22} - 20I_{22} = 85.$$

Тоді значення контурного струму другого контуру  $I_{22} = 0,472 \text{ А}$ , а значення контурного струму першого контуру  $I_{11} = 1,535 \text{ А}$ .

Струми у всіх вітках електричного кола:

$$I_{11} = I_{11} = 1,535 \text{ А};$$

$$I_2 = -I_{22} = -0,472 \text{ А};$$

$$I_3 = I_{11} - I_{22} = 1,535 - 0,472 = 1,063 \text{ А};$$

$$I_4 = I_{33} - I_{11} = J - I_{11} = 1 - 1,535 = -0,535 \text{ А};$$

$$I_5 = I_{33} - I_{22} = J - I_{22} = 1 - 0,472 = 0,528 \text{ А};$$

$$I_6 = I_{33} = J = 1 \text{ А}.$$

Знайдені значення струмів повністю збігаються зі значеннями, які були отримані в прикладі 3.5.

### 3.4.3 Метод вузлових потенціалів

Суть *методу вузлових потенціалів* (методу вузлових напруг) полягає в тім, що струми, які протікають у вітках електричного кола, виражають на підставі закону Ома через потенціали вузлів кола й параметри елементів віток. Потім всі струми віток зв'язують умовами, які відповідають першому закону Кірхгофа, та отримують систему рівнянь, у якій невідомими величинами є потенціали вузлів. При складанні рівнянь за методом вузлових потенціалів довільно вибирають базисний вузол (приймають, його потенціал дорівнює нулю). Як результат кількість невідомих потенціалів співпадає

з кількістю незалежних рівнянь, які складені за першим законом Кірхгофа. Розв'язавши систему щодо невідомих потенціалів, можна визначають струми за складеними раніше рівняннями.

Метод вузлових потенціалів доцільно використовувати для розрахунку складних електричних кіл з невеликою кількістю вузлів. Він дозволяє виключити рівняння, які складені за другим законом Кірхгофа.

У загальному випадку для будь-якого складного кола необхідно скласти систему рівнянь наступного вигляду:

$$\begin{cases} +G_{11}\varphi_1 - G_{12}\varphi_2 - \dots - G_{1m}\varphi_m - \dots - G_{1n}\varphi_n = J_{11}; \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ -G_{m1}\varphi_1 - G_{m2}\varphi_2 - \dots + G_{mm}\varphi_m - \dots - G_{mn}\varphi_n = J_{mm}; \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ -G_{n1}\varphi_1 - G_{n2}\varphi_2 - \dots - G_{nm}\varphi_m - \dots + G_{nn}\varphi_n = J_{nn}, \end{cases} \quad (3.24)$$

де  $G_{11}, G_{22}, \dots, G_{mm}$  - *власні провідності вузлів*, які дорівнюють арифметичній сумі провідностей віток, які з'єднані з відповідним вузлом;  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  - невідомі вузлові потенціали;  $m$  - змінний номер вузлів;  $G_{km} = G_{mk}$  - *взаємні провідності вузлів* які дорівнюють арифметичній сумі провідностей віток, які з'єднують вузли  $k$  й  $m$ ;  $J_{11}, J_{22}, \dots, J_{mm}$  - вузлові струми, що враховують наявність джерел енергії в вітках, які з'єднані з відповідним вузлом,

$$J_{kk} = \sum_{m=1}^n E_m G_m + \sum_{m=1}^n J_m,$$

де  $\sum_{m=1}^n E_m G_m$  - алгебраїчна сума добутків ЕРС віток, які з'єднані з

$k$ -им вузлом на провідність цих віток, при цьому ті з них, які спрямовані до вузла враховують зі знаком "+", а ті які спрямовані від

вузла - зі знаком "-";  $\sum_{m=1}^n J_m$  - алгебраїчна сума струмів джерел

струму віток, які з'єднані з  $k$ -им вузлом, при цьому ті з них, які спрямовані до вузла враховують зі знаком "+", а ті які спрямовані від вузла - зі знаком "-".

Розв'язавши отриману систему, визначають вузлові потенціали  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ , а потім фактичні струми в вітках.

Методику складання основних розрахункових рівнянь для вузлових потенціалів розглянемо в прикладі 3.7.

*Приклад 3.7.* Розглянемо електричне коло постійного струму (рис. 3.16). Параметри джерел енергії:  $E_1 = 50 \text{ В}$ ,  $E_2 = 30 \text{ В}$ ,  $J = 1 \text{ А}$ , опори резистивних елементів  $R_1 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 15 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 20 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 25 \text{ Ом}$ ,  $R_5 = 30 \text{ Ом}$ ,  $R_6 = 35 \text{ Ом}$ . Визначити струми у всіх вітках електричного кола методом вузлових потенціалів.

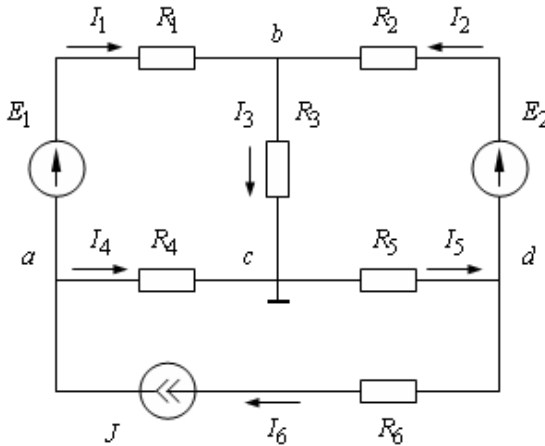


Рис .3.16

*Розв'язання.* Виберемо довільно напрямок струмів у всіх вітках.

Виразимо струми у вітках кола на підставі закону Ома через параметри схеми й невідомі потенціали вузлів:

$$I_1 = \frac{\varphi_a - \varphi_b + E_1}{R_1} = G_1(\varphi_a - \varphi_b + E_1);$$

$$I_2 = \frac{\varphi_d - \varphi_b + E_2}{R_2} = G_2(\varphi_d - \varphi_b + E_2);$$

$$I_3 = \frac{\varphi_b - \varphi_c}{R_3} = G_3(\varphi_b - \varphi_c);$$

$$I_4 = \frac{\varphi_a - \varphi_c}{R_4} = G_4(\varphi_a - \varphi_c);$$

$$I_5 = \frac{\varphi_c - \varphi_d}{R_5} = G_5(\varphi_c - \varphi_d),$$

де  $G_m = 1/R_m$  - провідність відповідної вітки.

Струм у шостій вітці обумовлює джерело струму  $I_6 = J$ .

Потенціал одного з вузлів можна прийняти за нульову точку відліку для інших потенціалів. Як базовий вузол приймемо вузол  $c$  (тобто умовно його заземлимо).

Складемо на підставі першого закону Кірхгофа рівняння для незаземлених вузлів  $a, b, d$ :

$$\begin{aligned} -I_1 - I_4 + I_6 &= 0; \\ +I_1 + I_2 - I_3 &= 0; \\ -I_2 + I_5 - I_6 &= 0. \end{aligned}$$

або з урахуванням записаних раніше співвідношень для струмів:

$$\begin{cases} -G_1(\varphi_a - \varphi_b + E_1) - G_4(\varphi_a - \varphi_c) + J = 0; \\ +G_1(\varphi_a - \varphi_b + E_1) + G_2(\varphi_d - \varphi_b + E_2) - G_3(\varphi_b - \varphi_c) = 0; \\ -G_2(\varphi_d - \varphi_b + E_2) + G_5(\varphi_c - \varphi_d) - J = 0. \end{cases}$$

Перегрупуємо елементи рівняння щодо невідомих вузлових потенціалів і врахуємо, що  $\varphi_c = 0$ :

$$\begin{cases} (G_1 + G_4) \cdot \varphi_a - G_1 \cdot \varphi_b - 0 \cdot \varphi_d = J - G_1 \cdot E_1; \\ -G_1 \cdot \varphi_a + (G_1 + G_2 + G_3) \cdot \varphi_b - G_2 \cdot \varphi_d = G_1 \cdot E_1 + G_2 \cdot E_2; \\ -0 \cdot \varphi_a - G_2 \cdot \varphi_b + (G_2 + G_5) \cdot \varphi_d = -J - G_2 \cdot E_2, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} +G_{11} \cdot \varphi_a - G_{12} \cdot \varphi_b - G_{13} \cdot \varphi_d = J_{11}; \\ -G_{21} \cdot \varphi_a + G_{22} \cdot \varphi_b - G_{23} \cdot \varphi_d = J_{22}; \\ -G_{31} \cdot \varphi_a - G_{32} \cdot \varphi_b + G_{33} \cdot \varphi_d = J_{33}, \end{cases}$$

де  $G_{11} = 1/R_1 + 1/R_4 = 1/10 + 1/25 = 0,14$  *Сим* - власна провідність вузла  $a$ ;  $G_{22} = 1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3 = 1/10 + 1/15 + 1/20 \approx 0,2167$  *Сим* - власна провідність вузла  $b$ ;  $G_{33} = 1/R_2 + 1/R_5 = 1/15 + 1/30 = 0,1$  *Сим* - власна провідність вузла  $c$ ;  $G_{12} = G_{21} = 1/R_1 = 1/10 = 0,1$  *Сим* -

взаємна провідність вузлів  $a$  й  $b$ ;  $G_{13} = G_{31} = 0$  Сим - взаємна провідність вузлів  $a$  й  $c$  (тому що внутрішній опір джерела струму є нескінченно великим);  $G_{23} = G_{32} = 1/R_2 = 1/15 = 0,0667$  Сим - взаємна провідність вузлів  $b$  й  $c$ ;  $J_{11} = J - E_1/R_1 = 1 - 50/10 = -4$  А - вузловий струм вузла  $a$ ;  $J_{22} = E_1/R_1 + E_2/R_2 = 50/10 + 30/15 = 7$  А - вузловий струм вузла  $b$ ;  $J_{22} = -J - E_2/R_2 = -1 - 30/15 = -3$  А - вузловий струм вузла  $c$ .

$$\begin{cases} 0,14 \cdot \varphi_a - 0,1 \cdot \varphi_b - 0 \cdot \varphi_d = -4; \\ -0,1 \cdot \varphi_a + 0,2167 \cdot \varphi_b - 0,0667 \cdot \varphi_d = 7; \\ -0 \cdot \varphi_a - 0,0667 \cdot \varphi_b + 0,1 \cdot \varphi_d = -3. \end{cases}$$

Отриману систему розв'язуємо *методом Крамера*.

Визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0,14 & -0,1 & -0 \\ -0,1 & 0,2167 & -0,0667 \\ -0 & -0,0667 & 0,1 \end{vmatrix} = 0,001411 \text{ Сим}^3.$$

Допоміжні визначники:

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} -4 & -0,1 & -0 \\ 7 & 0,2167 & -0,0667 \\ -3 & -0,0667 & 0,1 \end{vmatrix} = -0,01889 \text{ А} \cdot \text{Сим}^2;$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} 0,14 & -4 & -0 \\ -0,1 & 7 & -0,0667 \\ -0 & -3 & 0,1 \end{vmatrix} = 0,02999 \text{ А} \cdot \text{Сим}^2;$$

$$\Delta_d = \begin{vmatrix} 0,14 & -0,1 & -4 \\ -0,1 & 0,2167 & 7 \\ -0 & -0,0667 & -3 \end{vmatrix} = -0,02233 \text{ А} \cdot \text{Сим}^2.$$

Обчислюємо вузлові потенціали:

$$\varphi_a = \frac{\Delta_a}{\Delta} = -\frac{0,01889}{0,001411} = -13,39 \text{ В};$$

$$\varphi_b = \frac{\Delta_b}{\Delta} = \frac{0,02999}{0,001411} = 21,25 \text{ В};$$

$$\varphi_d = \frac{\Delta_d}{\Delta} = -\frac{0,02233}{0,001411} = -15,82 \text{ В},$$

а струми у всіх вітках електричного кола:

$$I_1 = \frac{-13,39 - 21,25 + 50}{10} = 1,536 \text{ А};$$

$$I_2 = \frac{-15,82 - 21,25 + 30}{15} = 0,471 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{21,25 - 0}{20} = 1,063 \text{ А};$$

$$I_4 = \frac{-13,39 - 0}{25} = 0,536 \text{ А};$$

$$I_5 = \frac{0 + 15,82}{30} = 0,527 \text{ А};$$

$$I_6 = J = 1 \text{ А}.$$

Знайдені значення струмів менш ніж на 0,25% відрізняються від значень, які були отримані в прикладах 3.5 й 3.6. Наявність похибки пояснюється погрішністю при округленні результатів обчислень.

Метод вузлових потенціалів дістав широке розповсюдження в зв'язку зі зручністю його застосування при розрахунках на комп'ютерах.

#### 3.4.4 Метод двох вузлів

Метод вузлових потенціалів є найбільш зручним для кіл, що мають тільки два вузли (наприклад, вузли  $a$  й  $b$ ). Прийнемо як базовий вузол  $b$  ( $\varphi_b = 0$ ). Тоді виходячи з методу вузлових потенціалів:

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = \frac{\sum_{k=1}^n E_k G_k + \sum_{k=1}^n J_k}{\sum_{k=1}^n G_k}, \quad (3.25)$$

де  $U_{ab}$  - напруга між вузлами електричного кола;  $\sum_{k=1}^n E_k G_k$  - алгебраїчна сума добутків ЕРС віток на провідності віток, при цьому ті з них, які спрямовані до вузла  $a$  враховуються зі знаком "+", а ті які

спрямовані від вузла  $a$  зі знаком "-";  $\sum_{k=1}^n J_k$  - алгебраїчна сума струмів джерел струму віток, при цьому ті з них, які спрямовані до вузла  $a$  враховуються зі знаком "+", а ті які спрямовані від вузла  $a$  зі знаком "-";  $\sum_{k=1}^n G_k$  - сума провідностей всіх віток електричного кола.

Після обчислення напруги  $U_{ab}$  струм у будь-якій  $k$ -ій вітці, що не містить джерела струму, визначають за законом Ома для ділянки кола:

$$I_k = G_k(\pm E_k - U_{ab}), \quad (3.26)$$

де ЕРС, які спрямовані до вузла  $a$ , враховують зі знаком "+", а ті які спрямовані від вузла  $a$  - зі знаком "-".

*Приклад 3.8.* Розглянемо електричне коло постійного струму (рис. 3.17). Параметри джерел енергії:  $E_1 = 55 \text{ В}$ ,  $E_2 = 45 \text{ В}$ ,  $J = 1 \text{ А}$ , опори резистивних елементів:  $R_1 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 20 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 30 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 35 \text{ Ом}$ ,  $R_5 = 15 \text{ Ом}$ . Визначити струми у всіх вітках електричного кола методом двох вузлів.

*Розв'язання.* Провідності віток:

$$G_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{10} = 0,1 \text{ Сим};$$

$$G_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{20} = 0,05 \text{ Сим};$$

$$G_4 = \frac{1}{R_4 + R_5} = \frac{1}{35 + 15} = 0,02 \text{ Сим}.$$

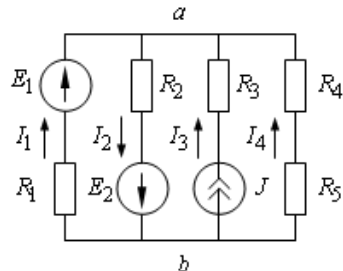


Рис. 3.17

Напруга між вузлами електричного кола:

$$U_{ab} = \frac{E_1 G_1 - E_2 G_2 + J}{G_1 + G_2 + G_4} = \frac{55 \cdot 0,1 - 45 \cdot 0,05 + 1}{0,1 + 0,05 + 0,02} = 25 \text{ В}.$$

Тоді струми у вітках:

$$I_1 = G_1(E_1 - U_{ab}) = 0,1 \cdot (55 - 25) = 3 \text{ А};$$

$$I_2 = G_2(E_2 + U_{ab}) = 0,05 \cdot (45 + 25) = 3,5 \text{ А};$$

$$I_3 = J = 1 \text{ А};$$

$$I_4 = -G_4 U_{ab} = -0,02 \cdot 25 = -0,5 \text{ А}.$$

### 3.4.5 Метод накладення (метод суперпозиції)

Для лінійних електричних кіл є справедливим *принцип суперпозиції*, що формулюють в такий спосіб: струм у будь-якій вітці електричного кола дорівнює алгебраїчній сумі часткових струмів у цій вітці під дією окремо кожного із джерел енергії цього кола.

*Метод суперпозиції (метод накладення)* безпосередньо витікає з принципу суперпозиції.

При розрахунку електричного кола методом накладення в ньому по черзі залишають тільки одне джерело енергії й для кожної випадку розраховують часткові струми у всіх його вітках. Для цього по черзі приймають, всі джерела енергії крім одного дорівнюють нулю. Внутрішні опори джерел урахують у всіх розрахунках (для цього джерела ЕРС у схемі замінюють короткозамкненими перемичками, а вітки із джерелами струму розмикають).

Метод накладення можна застосовувати тільки для лінійних електричних кіл. Його доцільно використовувати, якщо кількість джерел енергії невелика.

Розглянемо застосування методу накладення на прикладі електричного кола з двома джерелами енергії (рис. 3.18).

*Приклад 3.9.* Розглянемо електричне коло постійного струму (рис. 3.18). Параметри джерел енергії:  $E = 75 \text{ В}$ ,  $J = 3 \text{ А}$ , опори резистивних елементів:  $R_1 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 20 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 30 \text{ Ом}$ . Визначити струми у всіх вітках електричного кола методом суперпозиції.

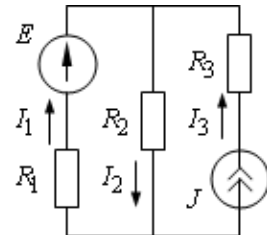


Рис. 3.18

*Розв'язання.* Задамо додатні напрямки струмів (рис. 3.18). По черзі розраховуємо струми у всіх вітках кола під дією кожного джерела енергії окремо.

Уважаємо, що джерело струму дорівнює нулю (замість джерела струму залишаємо розрив у вітці, тому що його внутрішній опір дорівнює нескінченності). Розраховуємо часткові струми від джерела ЕРС (рис. 3.19, а):

$$I_1' = I_2' = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{75}{10 + 20} = 2,5 \text{ А};$$

$$I_3' = 0 \text{ А}.$$

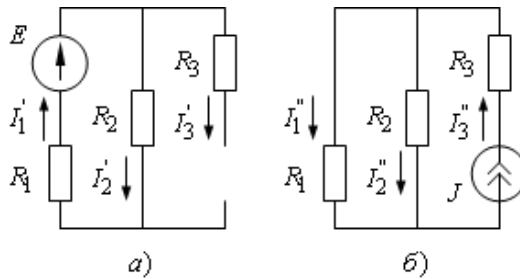


Рис. 3.19

Вважаємо, що джерело ЕРС дорівнює нулю (замість джерела ЕРС залишаємо короткозамкнену перемичку у вітці, тому що його внутрішній опір дорівнює нулю). Розраховуємо часткові струми від джерела струму (рис. 3.19, б). У цьому випадку зручно скористатися методом розкиду струмів:

$$I_3'' = J = 3 \text{ A};$$

$$I_1'' = J \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 3 \cdot \frac{20}{10 + 20} = 2 \text{ A};$$

$$I_2'' = J \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 3 \cdot \frac{10}{10 + 20} = 1 \text{ A}.$$

Алгебраїчно додаючи відповідні часткові струми, викликані окремими джерелами енергії з урахуванням їх напрямків, одержуємо шукані струми:

$$I_1 = I_1' - I_1'' = 2,5 - 2 = 0,5 \text{ A};$$

$$I_2 = I_2' + I_2'' = 2,5 + 1 = 3,5 \text{ A};$$

$$I_3 = I_3' - I_3'' = 3 - 0 = 3 \text{ A}.$$

### 3.4.6 Активний і пасивний двополіусники

*Двopolіусник* - це узагальнююча назва електричного кола будь-якої складності або його частини, що має два вихідних затискачі. Двopolіусник на схемах умовно зображують прямокутником.

Якщо двopolіусник містить джерела енергії, які не компенсують один одного, то такий двopolіусник називають активним й у прямокутнику, що його зображує ставлять літеру А (рис. 3.20, а).

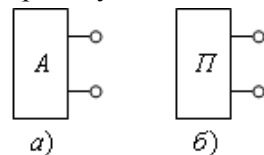


Рис. 3.20

*Активний двополюсник* характеризується трьома взаємозалежними параметрами: *напругою холостого ходу*  $U_o$ , *струмом короткого замикання*  $I_k$  й *вхідним опором*  $R_{in}$ .

$$R_{in} = \frac{U_o}{I_k}. \quad (3.27)$$

Активний двополюсник можна замінити або еквівалентним реальним джерелом ЕРС, ЕРС якого дорівнює напрузі холостого ходу на вихідних затискачах двополюсника, а внутрішній опір дорівнює вхідному опору двополюсника, або реальним джерелом струму, струм якого дорівнює струму короткого замикання двополюсника, а внутрішній опір дорівнює вхідному опору двополюсника.

Вхідний опір двополюсника щодо вихідних затискачів обчислюють при усуненні з розрахункової схеми всіх джерел енергії (вітки з ідеальними джерелами струму розривають, а ідеальні джерела ЕРС у вітках замінюють короткозамкненими перемичками). Струм короткого замикання й напругу холостого ходу обчислюють будь-яким розрахунковим методом.

Параметри двополюсника можуть бути визначені експериментально за дослідами холостого ходу (до вихідних затискачів двополюсника підключають вольтметр) і короткого замикання (до вихідних затискачів двополюсника підключають амперметр). Вхідний опір двополюсника в цьому випадку визначають зі співвідношення (3.27).

Якщо у двополюсника відсутні джерела енергії або вони компенсують один одного, то такий двополюсник називають *пасивним*, а в прямокутнику, що його зображує ставлять літеру  $\Pi$  (рис. 3.20, б). Пасивний двополюсник характеризується тільки одним параметром – вхідним опором  $R_{in}$ . Напруга холостого ходу  $U_o$  й струм короткого замикання  $I_k$  такого двополюсника дорівнюють нулю.

Два або декілька двополюсників є *еквівалентними*, якщо їхні параметри повністю збігаються. Такі двополюсники можна взаємно замінити без зміни режиму роботи решти електричного кола. Із цього положення, зокрема, витікає, що двополюсник будь-якої складності можна еквівалентно замінити найпростішим електричним колом. Такі перетворення широко використовують в теорії електричних кіл для спрощення розрахунків складних кіл.

### 3.4.7 Метод еквівалентного джерела

*Метод еквівалентного джерела* так само називають *методом еквівалентного генератора*, *методом активного двополюсника* або *методом холостого ходу й короткого замикання*. Застосування методу доцільно для визначення струму в якій-небудь одній вітці складного електричного кола, особливо в тих випадках коли потрібно визначити струм для декількох значень параметрів цієї вітки.

У його основі лежить *теорема про еквівалентне джерело*, суть якої полягає в наступному: в електричному колі будь-якої складності завжди можна подумки виділити одну вітку. Стосовно виділеної вітки вся інша частина електричного кола являє собою двополюсник (рис. 3.21, а), що може бути замінений еквівалентним реальним джерелом ЕРС (рис. 3.21, б) або еквівалентним реальним джерелом струму (рис. 3.21, в).

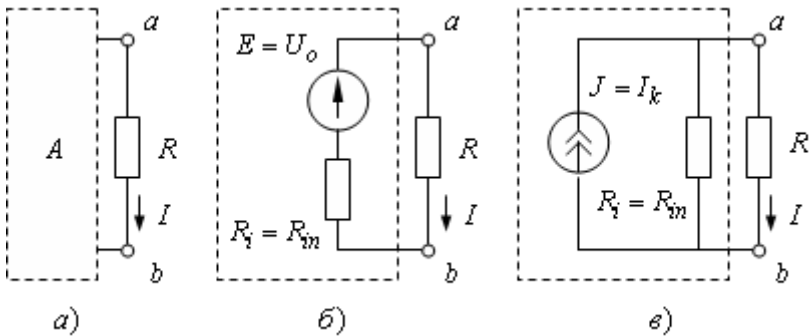


Рис. 3.21

Відповідно розрізняють два варіанти методу: метод еквівалентного джерела ЕРС і метод еквівалентного джерела струму.

*Метод еквівалентного джерела ЕРС.* Для знаходження струму в довільній вітці  $ab$ , опір якої  $R$ , цим методом треба:

- розімкнути вітку  $ab$  і розглянути іншу частину електричного кола як двополюсник;
- знайти напругу на затискачах  $ab$  двополюсника (напругу холостого ходу  $U_0$ );
- визначити вхідний опір  $R_{in}$  двополюсника щодо затискачів  $ab$  (при цьому джерела ЕРС у схемі потрібно замінити короткозамкненими перемичками, а вітки із джерелами струму розімкнути),

- замінити двополюсник еквівалентним реальним джерелом ЕРС у якого ЕРС дорівнює напрузі холостого ходу двополюсника  $E = U_o$ , а внутрішній опір дорівнює вхідному опору двополюсника  $R_i = R_{in}$ ;

- обчислити струм у вітці  $ab$  за законом Ома:

$$I = \frac{U_o}{R_{in} + R} = \frac{E}{R_i + R}. \quad (3.28)$$

*Метод еквівалентного джерела струму.* Для знаходження струму в довільній вітці, опір якої  $R$ , цим методом треба:

- розімкнути вітку  $ab$  розглянути іншу частину електричного кола як двополюсник;

- замінити вітку  $ab$  короткозамкненою перемичкою й знайти струм двополюсника через цю перемичку (струм короткого замикання  $I_k$ );

- визначити вхідний опір  $R_{in}$  двополюсника щодо затискачів  $ab$  (при цьому джерела ЕРС у схемі потрібно замінити короткозамкненими перемичками, а вітки із джерелами струму розімкнути),

- замінити двополюсник еквівалентним реальним джерелом струму в якого сила струму дорівнює струму короткого замикання двополюсника  $J = I_k$ , а внутрішній опір дорівнює вхідному опору двополюсника  $R_i = R_{in}$ ;

- обчислити струм у вітці  $ab$  методом розкиду струму в паралельних вітках:

$$I = I_k \frac{R_{in}}{R_{in} + R} = J \frac{R_i}{R_i + R}. \quad (3.29)$$

Розглянемо застосування цього методу до завдання визначення струму в одній з віток електричного кола, що була розглянута в прикладі 3.8.

*Приклад 3.10.* Розглянемо електричне коло постійного струму (рис. 3.22, *a*). Параметри джерел енергії:  $E_1 = 55 \text{ В}$ ,  $E_2 = 45 \text{ В}$ ,  $J = 1 \text{ А}$ , опори резистивних елементів:  $R_1 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 20 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 30 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 35 \text{ Ом}$ ,  $R_5 = 15 \text{ Ом}$ . Визначити струм у вітці з резистивним елементом  $R_2$  методом еквівалентного джерела.

*Розв'язання:* Перетворимо вихідне коло, виділивши в ньому

$R_2$  так, як це показано на рис. 3.22, б.

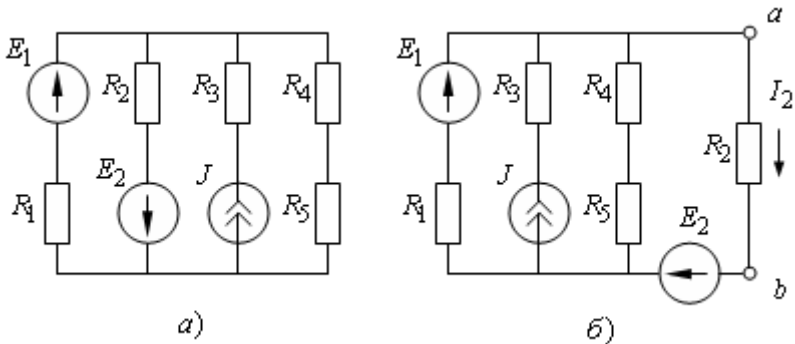


Рис. 3.22

Розв'язуємо задачу методом еквівалентного джерела ЕРС.

Знаходимо напругу між точками  $a$  й  $b$  у режимі холостого ходу (рис. 3.23, а). Для цього використовуємо метод контурних струмів. Ураховуємо, що в другому контурі сила контурного струму обумовлюється джерелом струму  $I_{22} = J = 1$  А.

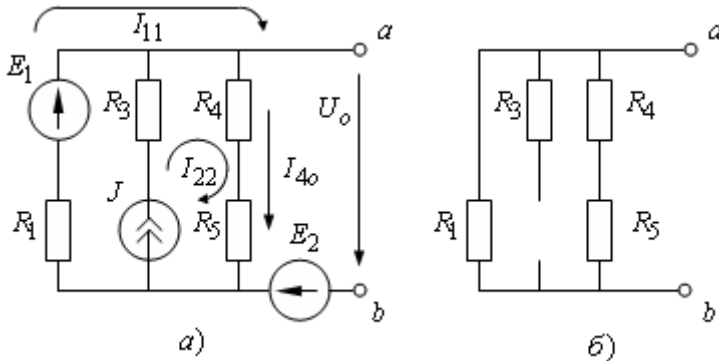


Рис. 3.23

$$(R_1 + R_4 + R_5)I_{11} + (R_4 + R_5)I_{22} = E_1.$$

$$I_{11} = \frac{E_1 - J(R_4 + R_5)}{R_1 + R_4 + R_5} = \frac{55 - 1(35 + 15)}{10 + 35 + 15} = 0,0833 \text{ A};$$

$$I_{40} = I_{11} + I_{22} = I_{11} + J = 0,0833 + 1 = 1,0833 \text{ A};$$

$$U_o = E_2 + (R_4 + R_5)I_{40} = 45 + (35 + 15) \cdot 1,0833 = 99,17 \text{ В}.$$

Визначаємо вхідний опір двополюсника. Попередньо в схемі джерела ЕРС  $E_1$  й  $E_2$  у схемі замінюємо короткозамкненими перемичками, а вітку із джерелом струму  $J$  розмикаємо:

$$R_{in} = \frac{R_1(R_4 + R_5)}{R_1 + R_4 + R_5} = \frac{10 \cdot (35 + 15)}{10 + 35 + 15} = 8,333 \text{ Ом.}$$

Струм у шуканій вітці електричного кола:

$$I_2 = \frac{U_o}{R_{in} + R_4} = \frac{99,17}{8,333 + 20} = 3,5 \text{ А.}$$

Вирішуємо задачу методом еквівалентного джерела струму.

Визначаємо струм короткого замикання двополюсника використовуючи метод контурних струмів (рис. 3.24). Ураховуємо, що в третьому контурі сила контурного струму обумовлюється джерелом струму  $I_{33k} = J = 1 \text{ А}$ .

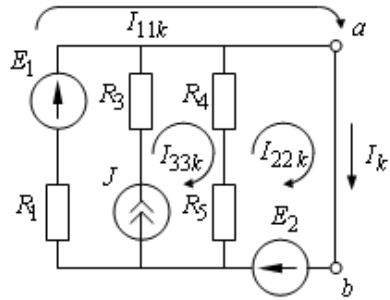


Рис. 3.24

$$\begin{cases} R_1 I_{11k} = E_1 + E_2; \\ (R_4 + R_5) I_{22k} - (R_4 + R_5) I_{33k} = E_2. \end{cases}$$

$$I_{11k} = \frac{E_1 + E_2}{R_1} = \frac{55 + 45}{10} = 10 \text{ А;}$$

$$I_{22k} = \frac{E_2 + (R_4 + R_5)J}{R_4 + R_5} = \frac{45 + (45 + 15) \cdot 1}{45 + 15} = 1,9 \text{ А;}$$

$$I_k = I_{11k} + I_{22k} = 10 + 1,9 = 11,9 \text{ А.}$$

Вхідний опір двополюсника визначаємо так само, як у методі еквівалентного джерела ЕРС. Струм у шуканій вітці електричного кола:

$$I_2 = I_k \frac{R_{in}}{R_{in} + R_2} = 11,9 \cdot \frac{8,333}{8,333 + 20} = 3,5 \text{ А.}$$

Знайдене значення струму  $I_2$  обчислене двома методами збігається з його значенням, що було отриманим у результаті розв'язання задачі в прикладі 3.8.

### 3.5 Передача енергії від активного двополюсника до пасивного. Режим роботи електричних кіл

Для дослідження передачі енергії від активного двополюсника до пасивного розглянемо схему електричного кола, що складається з реального джерела ЕРС і резистивного елемента (рис. 3.25). Вважаємо, що параметри джерела ЕРС є незмінними, а опір навантаження варіюється.

Струм в електричному колі на підставі закону Ома, з обліком послідовного з'єднання джерела енергії й навантаження:

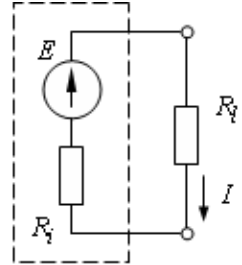


Рис. 3.25

$$I = \frac{E}{R_i + R_l}. \quad (3.30)$$

Спад напруги усередині джерела:

$$U_i = R_i I = E \frac{R_i}{R_i + R_l}. \quad (3.31)$$

Напруга на вихідних затискачах джерела й на навантаженні:

$$U_l = E - U_i = E - E \frac{R_i}{R_i + R_l} = E \frac{R_l}{R_i + R_l}. \quad (3.32)$$

Потужність, що генерує джерело ЕРС:

$$P = EI = \frac{E^2}{R_i + R_l}. \quad (3.33)$$

Потужність втрат усередині джерела ЕРС:

$$P_d = I^2 R_i = \frac{E^2 R_i}{(R_i + R_l)^2}. \quad (3.34)$$

Потужність, що отримує навантаження:

$$P_l = I^2 R_l = \frac{E^2 R_l}{(R_i + R_l)^2}. \quad (3.35)$$

Коефіцієнт корисної дії (ККД) джерела енергії:

$$\eta = \frac{P_l}{P} = \frac{R_l}{R_i + R_l}. \quad (3.36)$$

Отримані рівняння зв'язують між собою величини, які характеризують передачу енергії від джерела енергії до навантаження (режим електричного кола).

Серед безлічі режимів роботи електричного кола найбільший інтерес становлять наступні режими: *холостого ходу*, *короткого замикання*, *узгодженого навантаження* і *номінальний*.

Режим *холостого ходу* або *неробочий режим* (ХХ) - це режим, при якому навантаження відключене від джерела енергії ( $R_{l_0} \rightarrow \infty$ ). Тоді струм у зовнішньому колі відсутній  $I_0 = 0$ . При цьому джерело не віддає енергію в зовнішнє коло  $P_0 = 0$ , а навантаження не споживає її  $P_l = 0$ . ККД у цьому режимі прагне до 1 (якщо в режимі холостого ходу усередині джерела немає втрат енергії). З виразу (3.32) витікає, що в режимі холостого ходу напруга на вихідних затискачах джерела дорівнює його ЕРС ( $U_{l_0} = E$ ).

*Режимом короткого замикання* (КЗ) - це режим, що виникає при з'єднанні між собою без якого-небудь опору вихідних затискачів джерела енергії ( $R_{l_k} \rightarrow 0$ ). У цьому режимі струм (струм КЗ) у

колі обмежується тільки внутрішнім опором джерела  $R_i$  ( $I_k = \frac{E}{R_i}$ ),

що вкрай небезпечно, тому що звичайно цей опір дуже малий й струм у колі може досягати значень, при яких джерело може вийти з ладу. Тому режим короткого замикання в більшості випадків є аварійним. Але деякі види електротехнічного обладнання (печі електрошлакового переплаву, зварювальні агрегати й ін.) працюють у режимах, які близькі до режиму короткого замикання. Напруга на вихідних затискачах джерела  $U_{l_k} = 0$ . Потужність, що генерує джерело ЕРС досягає максимального значення й повністю

витрачається на втрати усередині джерела:  $P_{max} = P_k = P_{d_k} = \frac{E^2}{R_i}$ .

Навантаження енергію не споживає  $P_l = 0$ . Тому ККД  $\eta_k = 0$ .

Режими холостого ходу й короткого замикання є межовими.

*Режим узгодженого навантаження* (*узгоджений режим*) - це режим, при якому потужність, що навантаження отримує від джерела, досягає максимального значення. Це можливо при певному співвідношенні (узгодженні) параметрів електричного кола, звідки й випливає назва даного режиму.

З виразу (3.35) витікає, що при певному значенні опору навантаження потужність навантаження досягає максимуму, тому що вона дорівнює нулю в режимах короткого замикання ( $R_{l_k} = 0$ ,

$$I_k = \frac{E}{R_i}) \text{ і холостого ходу } (R_{l_o} \rightarrow \infty, I_o = 0). \text{ Взв'явши похідну } \frac{dP_l}{dR_l}$$

й дорівнявши її нулю, з отриманого рівняння визначають значення опору навантаження, що відповідає максимуму потужності.

$$\frac{dP_l}{dR_l} = E^2 \frac{(R_i + R_l)^2 - 2R_l(R_i + R_l)}{(R_i + R_l)^4} = E^2 \frac{R_i^2 - R_l^2}{(R_i + R_l)^4} = 0.$$

$$\text{Звідси } R_l = R_i. \text{ Ця умова відповідає струму } I_y = \frac{E}{2R_i} = \frac{I_k}{2}.$$

Потужність приймача в цьому режимі досягає максимуму й дорівнює потужності втрат усередині джерела:  $P_{l_y} = P_{l_{\max}} = P_{d_y} = \frac{E^2}{4R_i}$ .

Потужність джерела  $P_y = \frac{E^2}{2R_i}$ . Як видно з отриманих виразів у ре-

жимі погодженого навантаження ККД джерела  $\eta_y = 0,5$ . Такий режим є характерним для радіоелектронних пристроїв, де при передачі малопотужних сигналів прагнуть одержати максимальну потужність у приймачі не дивлячись на низьке значення ККД. У силових електротехнічних колах при передачі електричної енергії великої потужності прагнуть забезпечити найбільший можливий ККД. У цьому випадку необхідне дотримання умови  $R_l \gg R_i$ , для чого необхідно або збільшувати опір навантаження, або зменшувати внутрішній опір джерела.

*Номинальний режим (НР)* - це режим, при якому елементи електричного кола працюють в умовах, що відповідають проектним. Для елементів електричних кіл номінальними параметрами, що забезпечують номінальний режим роботи, є струм, напруга й потужність, які представлені в довідковій літературі, технічній документації та на самому елементі.

Номинальні потужності й струми багатьох елементів електричних кіл (двигунів, генераторів, резисторів й ін.) встановлюють, виходячи з нагрівання їх до найбільшої припустимої температури.

Під номінальною напругою  $U_{nom}$  звичайно мають на увазі напругу холостого ходу  $U_o$ , а не напругу при якому забезпечується номінальний струм  $I_{nom}$ .

Енергетичні установки звичайно працюють у режимах, при яких струми й потужності не перевищують номінальних значень, а напруги близькі до номінального. З урахуванням номінальних напруг і струмів джерел і навантажень виконують вибір проводів й апаратів електричних кіл.

Для більш наочного уявлення про отримані взаємозв'язки величин вживають характеристики - функції, у яких як аргумент використовують струм навантаження  $I_l$ :  $U_l(I_l)$ ;  $U_i(I_l)$ ;  $P(I_l)$ ;  $P_d(I_l)$ ;  $P_l(I_l)$ ;  $\eta(I_l)$ .

С метою одержання узагальнених характеристик дані величини виражають у відносних одиницях. Як базисні значення використовують: для струму - струм короткого замикання  $I_k = \frac{E}{R_i}$ , для напруг - ЕРС джерела  $E$ ; для потужностей - максимальну потужність джерела ЕРС  $P_{max} = \frac{E^2}{R_i}$ .

Як аргумент у всіх функціях використовують відносне значення струму  $I^* = \frac{I_l}{I_k} = \frac{E}{R_i + R_l} \cdot \frac{R_i}{E} = \frac{R_i}{R_i + R_l}$ . З урахуванням останнього співвідношення з виразів (3.31-3.36) одержують безрозмірні характеристики:

спад напруги усередині джерела:

$$U_i^* = \frac{U_i}{E} = \frac{R_i}{R_i + R_l} = I^* . \quad (3.37)$$

напруга на вихідних затискачах джерела й на навантаженні:

$$U_l^* = \frac{U_l}{E} = \frac{E - U_i}{E} = 1 - \frac{R_i}{R_i + R_l} = 1 - I^* . \quad (3.38)$$

потужність, що генерує джерело ЕРС:

$$P^* = \frac{P}{P_{max}} = \frac{E^2}{R_i + R_l} \cdot \frac{R_i}{E^2} = \frac{R_i}{R_i + R_l} = I^* . \quad (3.39)$$

потужність втрат усередині джерела ЕРС:

$$P_d^* = \frac{P_d}{P_{max}} = \frac{E^2 R_i}{(R_i + R)^2} \cdot \frac{R_i}{E^2} = \frac{R_i^2}{(R_i + R)^2} = (I^*)^2. \quad (3.40)$$

потужність, що отримує навантаження:

$$P_l^* = \frac{P_l}{P_{max}} = \frac{E^2 R_l}{(R_i + R_l)^2} \cdot \frac{R_i}{E^2} = \frac{R_i}{R_i + R_l} \cdot \frac{R_l}{R_i + R_l} = I^* (1 - I^*). \quad (3.41)$$

коефіцієнт корисної дії (ККД) джерела енергії:

$$\eta^* = \frac{P_l}{P_{max}} \cdot \frac{P_{max}}{P} = \frac{R_l}{R_i + R_l} = I^*. \quad (3.42)$$

На рис. 3.26, *а* в безрозмірній формі представлені графіки залежностей  $U_l^*(I^*)$  й  $U_i^*(I^*)$ , а на рис. 3.26, *б* - графіки залежностей  $P^*(I^*)$ ,  $P_l^*(I^*)$ ,  $U_d^*(I^*)$  і  $\eta^*(I^*)$ .

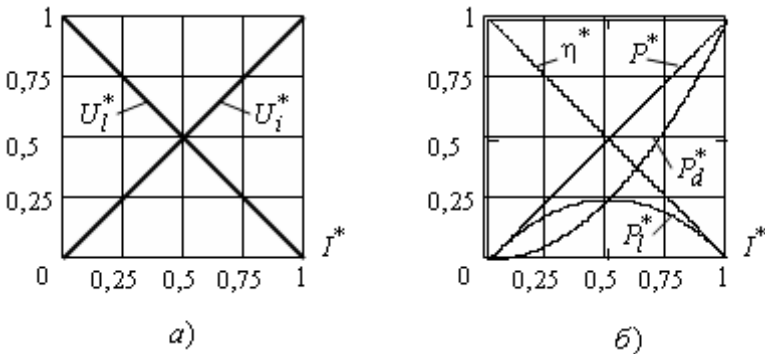


Рис. 3.26

### 3.6 Потенційна діаграма

*Потенційна діаграма* являє собою графічне зображення розподілу потенціалів уздовж будь-якого контуру електричного кола, що не містить джерела струму.

Потенційна діаграма відображає потенціали окремих точок електричного контуру щодо деякої фіксованої початкової (базисної) точки, потенціал якої вважають рівним нулю.

При побудові потенційної діаграми по осі абсцис відкладають в обраному масштабі всі опори контуру, у порядку його послідовного обходу. Напрямок обходу вибирають довільно. По осі ординат ві-

дкладають потенціали відповідних вузлів. Таким чином, кожній точці розглянутого контуру відповідає точка потенційної діаграми.

При правильному розрахунку й побудові потенційної діаграми потенціали початкової й кінцевої точок повинні збігтися (тому що при обході контуру ми повертаємося в початкову точку). При проходженні через резистивний елемент потенціал збільшується на значення спаду напруги на даному резистивному елементі, якщо ми рухаємося проти фактичного напрямку струму, або відповідно зменшується на те ж значення, якщо ми рухаємося за фактичним напрямком струму. Одночасно змінюється координата по осі абсцис на значення опору відповідного резистивного елемента. При проходженні через джерело ЕРС потенціал збільшується на значення ЕРС, якщо напрямки обходу й ЕРС збігаються. Якщо напрямки обходу й ЕРС не збігаються, потенціал зменшується на значення ЕРС. З уваги на те що внутрішній опір джерела ЕРС дорівнює нулю, зміни координати по осі абсцис у цьому випадку не відбувається.

*Приклад 3.11.* Розглянемо електричне коло постійного струму (рис. 3.27). Параметри джерел енергії:  $E_1 = 50 \text{ В}$ ,  $E_2 = 30 \text{ В}$ ,  $J = 1 \text{ А}$ , опори резистивних елементів:  $R_1 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 15 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 20 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 25 \text{ Ом}$ ,  $R_5 = 30 \text{ Ом}$ ,  $R_6 = 35 \text{ Ом}$ . Побудувати потенційну діаграму для контуру до складу якого входять обидва джерела ЕРС.

*Розв'язання.* Струми в вітках електричного кола були обчислені в прикладах 3.5-3-7.

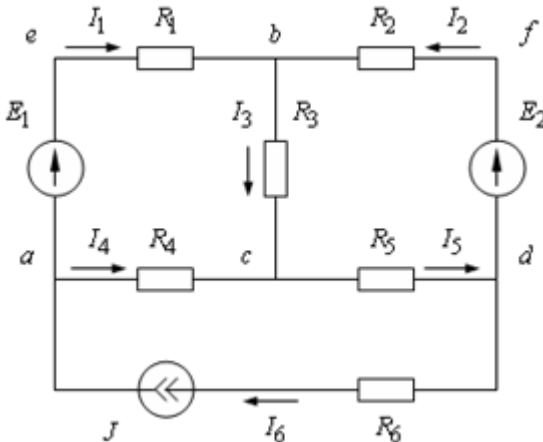


Рис. 3.27

Розглянемо контур, що складається з наступних елементів електричного кола:  $R_4, E_1, R_1, R_2, E_2, R_5$ . На додаток до нумерації вузлів, яка застосовувалась в прикладах 3.5-3.7 тут позначені літерами й прості вузли  $e$  та  $f$ .

Як базисну точку вибираємо вузол  $c$  (тобто приймаємо що його потенціал дорівнює нулю  $\varphi_c = 0 \text{ В}$ ). В якості базисної точки можна було прийняти будь-яку іншу точку контуру. Потенціали інших вузлів обчислюємо послідовно обходячи контур за годинниковою стрілкою:

$$\varphi_c = 0 \text{ В};$$

$$\varphi_a = \varphi_c + R_4 I_4 = 0 + 25 \cdot (-0,536) = -13,4 \text{ В};$$

$$\varphi_e = \varphi_a + E_1 = -13,4 + 50 = 36,6 \text{ В};$$

$$\varphi_b = \varphi_e - R_1 I_1 = 36,626 - 10 \cdot 1,536 = 21,24 \text{ В};$$

$$\varphi_f = \varphi_b + R_2 I_2 = 21,24 + 15 \cdot (-0,471) = 14,18 \text{ В};$$

$$\varphi_d = \varphi_f - E_2 = 14,18 - 30 = -15,82 \text{ В};$$

$$\varphi_c = \varphi_d + I_5 R_5 = -15,82 + 30 \cdot 0,527 = -0,01 \approx 0 \text{ В}.$$

Отже, розрахунок потенціалів точок контуру виконано правильно.

Потенційна діаграма графічно відображає другий закон Кірхгофа. Дійсно, якщо додати записані раніше рівняння для потенціалів контуру, то отримуємо:

$$-E_1 + E_2 = R_4 I_4 - R_1 I_1 + R_2 I_2 + R_5 I_5.$$

При побудові потенційної діаграми точку нульового потенціалу " $c$ " поміщаємо в початок координат (рис. 3.28), уздовж осі абсцис відкладаємо опори елементів контуру в порядку їхнього проходження, відповідно до напрямку обходу. Для вибору масштабу по осі абсцис підсумуємо опори резистивних елементів уздовж розглянутого контуру. Сумарний опір контуру дорівнює:

$$R_4 + R_1 + R_2 + R_5 = 25 + 10 + 15 + 30 = 80 \text{ Ом}.$$

Вибираємо масштаб по осі абсцис ( $R$ ) і осі ординат ( $\varphi$ ).

Позначення точок на діаграмі повинні відповідати позначенням відповідних точок на схемі. По осі ординат відкладаємо потенціали точок контуру щодо базисної точки " $c$ ".

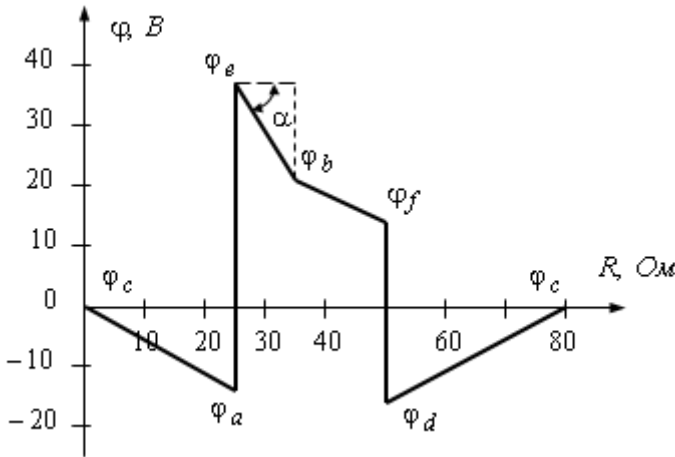


Рис. 3.28

Потенційна діаграма становить практичний інтерес, тому що дає наочне уявлення про розподіл напруг між окремими точками контуру, дозволяє судити про найвищі потенціали, про точки рівних потенціалів у контурі. Крім того, можуть бути знайдені точки, різниця потенціалів між якими дорівнює заданому значенню.

Використовуючи потенційну діаграму, можна визначити струм на окремих ділянках кола, які належать даному контуру. Наприклад, розглянемо ділянку, що характеризує зміну потенціалу уздовж резистивного елемента  $R_1$ . Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює опорі резистивного елемента, а другий спаду напруги на ньому. Тоді тангенс кута нахилу пропорційний силі струму:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m_U}{m_R} \cdot \frac{\varphi_e - \varphi_b}{R_1} = \frac{m_U}{m_R} \cdot I_1 = m_I \cdot I. \quad (3.43)$$

де  $m_U$ ,  $m_R$ ,  $m_I$  - масштаби відповідно для напруги, опору й струму.

Таким чином, за нахилом ділянки діаграми можна судити про силу струму, що протікає по даній ділянці кола. У випадку послідовного з'єднання сила струму у всіх елементах однакова, тому для всіх резистивних елементів нахил відповідних відрізків ламаної теж повинен бути однаковим.

### 3.7 Теорема компенсації

*Теорема компенсації:* будь-який пасивний елемент електричного кола можна замінити:

- ідеальним джерелом напруги з ЕРС, що чисельно дорівнює напрузі на цьому елементі ( $E = U$ ), і який направлений назустріч струму  $I$ ;

- ідеальним джерелом струму  $J$ , сила струму якого дорівнює струму в цьому елементі ( $J = I$ ), і який направлений відповідно до струму  $I$ .

Виділимо пасивний резистивний елемент  $R_k$  зі струмом  $I_k$  і напругою  $U_k$  зі схеми кола (рис. 3.29, а й рис. 3.30, а).

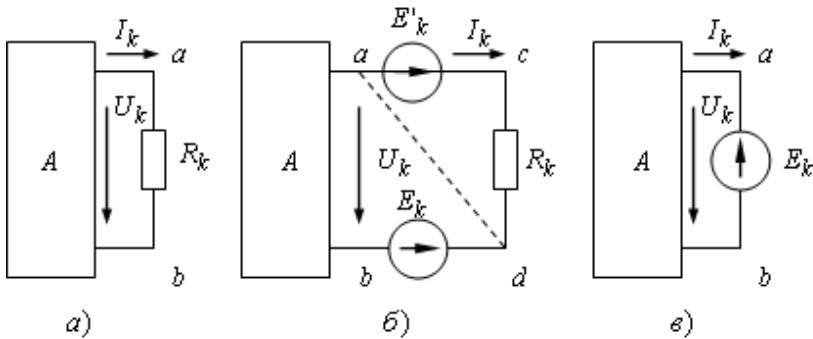


Рис. 3.29

Для доказу першого випадку теореми увімкнемо послідовно з резистивним елементом  $R_k$  назустріч один одному два ідеальних джерела ЕРС  $E_k = E'_k = U_k = R_k I_k$  (рис. 3.29, б). Таке вмикання джерел ЕРС не викличе зміну режиму роботи кола, тому що їхні дії взаємно компенсуються.

Різниця потенціалів між вузлами "а" й "d" дорівнює:  $\Phi_a - \Phi_d = R_k I_k - E'_k = 0$ . Отже, потенціали вузлів "а" й "d" рівні  $\Phi_a - \Phi_d$ .

Вузли "а" й "d", як вузли рівного потенціалу, можна об'єднати в один вузол і закорочену ділянку "а - d" видалити з розрахункової схеми без порушення режиму роботи всього кола. Схема кола, яку одержимо в результаті видалення закороченої ділянки, представлена на рис. 3.29, в. У ній пасивний елемент резистивний еле-

мент  $R_k$  замінений ідеальним джерелом ЕРС  $E_k = U_k$ .

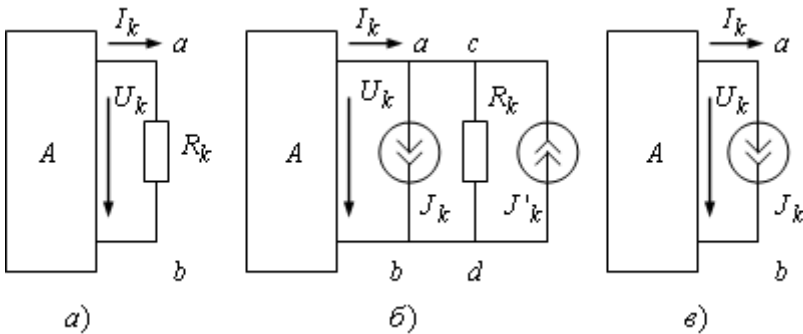


Рис. 3.30

Для доказу другого випадку теореми увімкнемо паралельно з резистивним елементом  $R_k$  назустріч один одному два ідеальних джерела струму  $J_k = J'_k = I_k$ , які направлені назустріч один одному (рис. 3.30, б). Таке вмикання джерел струму не викличе зміну режиму роботи кола, тому що їхні дії взаємно компенсуються.

Струми в вітках "a - c" й "d - b" дорівнюють нулю ( $I_{ac} = I_{db} = I_k - J'_k = 0$ ) і тому ці вітки можна відключити без порушення роботи режиму роботи всього кола. Схема кола, яку одержимо в результаті видалення даної ділянки, представлена на рис. 3.30, в. У ній пасивний резистивний елемент  $R_k$  замінений ідеальним джерелом струму  $J_k = I_k$ .

### Питання для самоконтролю

1. Скільки всього рівнянь повинна містити система, що складена за першим й другим законам Кірхгофа, для визначення струмів всіх віток електричного кола.
2. При якій умові кількість невідомих струмів співпадає з кількістю віток електричного кола.
3. Сформулюйте правило вибору знака ЕРС у законі Ома для ділянки електричного кола.
4. Якому фундаментальному фізичному закону відповідає перший закон Кірхгофа?
5. Сформулюйте перший (другий) закон Кірхгофа.
6. Чому кількість рівнянь, що складають за першим законом Кірх-

- гофа, не може дорівнювати кількості вузлів електричного кола?
7. Як визначається кількість незалежних рівнянь, які можна скласти для електричного кола за першим (другим) законом Кірхгофа?
  8. Сформулюйте правило вибору знаків у рівняннях, що складають для контурів електричного кола за другим законом Кірхгофа.
  9. Сформулюйте правило вибору незалежних контурів електричного кола.
  10. Сформулюйте правило вибору знака потужності джерела енергії в балансі потужностей електричного кола.
  11. Як зміниться загальний опір послідовний з'єднаних резистивних елементів, які мають однаковий опір, якщо їхню кількість збільшити в 2 рази?
  12. Відповідь: збільшиться в 2 рази.
  13. Як зміниться загальний опір паралельний з'єднаних резистивних елементів, які мають однаковий опір, якщо їхню кількість збільшити в 3 рази?
  14. Відповідь: зменшиться в 3 рази.
  15. Еквівалентний опір декількох послідовно (паралельно) з'єднаних елементів більше чи менше опору кожного з них?
  16. Визначте еквівалентний опір трьох паралельно з'єднаних резистивних елементів, якщо їхні опори  $R_1 = 20 \text{ Ом}$ ;  $R_2 = 10 \text{ Ом}$ ;  $R_3 = 20 \text{ Ом}$ .  
Відповідь:  $R_{eq} = 5 \text{ Ом}$ .
  17. Чи можливо послідовне (паралельне) з'єднання віток електричного кола?
  18. В електричному колі резистивні елементи, опори яких:  $R_1 = 20 \text{ Ом}$ ;  $R_2 = 15 \text{ Ом}$ ;  $R_3 = 25 \text{ Ом}$ , з'єднані послідовно. У колі протікає струм  $I = 0,5 \text{ А}$ . Чому дорівнює напруга на затисках цієї ділянки кола?  
Відповідь:  $U = 30 \text{ В}$ .
  19. Сформулюйте основний принцип, на якому базується метод контурних струмів.
  20. Сформулюйте основний принцип, на якому базується метод вузлових потенціалів.
  21. Сформулюйте правило вибору знаків ЕРС джерел у методі двох вузлів.

22. Як в умові приклада 3.9 необхідно змінити значення електро рушійної сили джерела ЕРС, щоб струм через нього дорівнював нулю?

Відповідь: зменшити на  $15\text{ В}$ .

23. Сформулюйте основний принцип, на якому базується метод на-кладення.
24. Сформулюйте основну теорему, на якій заснований метод екві-валентного джерела.
25. Що таке баланс потужностей для схеми і як його скласти?
26. Якщо на потенційній діаграмі ламана, для одної з ділянок елек-тричного кола, є паралельною до осі абсцис, то чому дорівнює струм на цій ділянці?

Відповідь: струм дорівнює нулю.

27. Як формулюється теорема про еквівалентне джерело? Як ви-значаються параметри еквівалентного джерела розрахунковим шляхом? експериментальним шляхом?
28. Як формулюється теорема про компенсації?
29. Для електричного кола, схема якого представлена на рис. 3.9, *a*, потрібно обчислити потужність навантаження. Параметри кола: ЕРС джерела  $E = 60\text{ В}$ , опори резистивних елементів  $R_1 = 10\text{ Ом}$ ,  $R_2 = 40\text{ Ом}$ ,  $R_3 = 25\text{ Ом}$ ;  $R_4 = 15\text{ Ом}$ . Визначити струми у всіх вітках кола.

Відповідь:  $P = 120\text{ Вт}$ .

30. Для електричного кола, схема якого представлена на рис. 3.25 потрібно визначити потужність навантаження в узгодженому режимі. Параметри джерела: ЕРС джерела  $E = 110\text{ В}$ , внутріш-ній опір джерела  $R_i = 5\text{ Ом}$ .

Відповідь:  $P_{\max} = 605\text{ Вт}$ .

## Розділ четвертий ОДНОФАЗНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ

Змінний струм довгий час не знаходив практичного застосування. Це було пов'язане з тим, що перші генератори електричної енергії виробляли постійний струм, що цілком задовольняв технологічним процесам електрохімії, а двигуни постійного струму мають хороші регульовальні характеристики. Однак у міру розвитку виробництва постійний струм усе менше став задовольняти зростаючим вимогам економічного електропостачання.

Основною перевагою синусоїдного струму є можливість легко трансформувати напругу. Це дає можливість здійснити економічну передачу електричної енергії на великі відстані. Виходячи з техніко-економічних міркувань, електричну енергію виробляють, розподіляють й споживають переважно у вигляді енергії синусоїдного струму. Звідси зрозуміла важливість вивчення процесів, що протікають у колах змінного струму, і методики їхнього розрахунку, як для наступних розділів курсу, так і для застосування отриманих знань на практиці. Це і є задачею даного розділу.

Електричні кола змінного струму в порівнянні з колами постійного струму мають ряд особливостей. Змінні струми й напруги викликають змінні електричні й магнітні поля. Зміни цих полів у колах приводять до виникнення явищ самоіндукції й взаємної індукції, які впливають на процеси, що протікають у колах, і ускладнюють їхній аналіз.

### 4.1 Змінні струми й напруги

*Змінними* називають струми (напруги, ЕРС), які змінюються в часі за значенням і напрямком. Значення струму (напруги, ЕРС) у будь-який момент часу називають миттєвим. Миттєве значення є функція часу. Її прийнято позначати рядковою літерою. Один з можливих напрямків струму (напруги) умовно приймають за додатний. Струм і напруга визначені, якщо зазначено їхній додатний напрямок і відома математична залежність цих величин від часу:

$$\begin{aligned}i &= F(t), \\u &= F(t).\end{aligned}\tag{4.1}$$

Струми й напруги, миттєві значення яких повторюються через рівні проміжки часу, називають періодичними. *Періодом* по-

*вторення (періодом)* називають найменший додатний проміжок часу, по закінченню якого періодичні функції струму або напруги повторюють свої миттєві значення, тобто виконуються умови:

$$\begin{aligned} i &= F(t) = F(t - T) = F(t + T), \\ u &= F(t) = F(t - T) = F(t + T), \end{aligned} \quad (4.2)$$

де  $T$  - період повторення, с.

Величину, яка є зворотною до періоду, тобто кількість періодів за одиницю часу, називають *частотою*:

$$f = \frac{1}{T}. \quad (4.3)$$

Одиниця вимірювання частоти - *герц (Гц)*.

Приклади графіків періодичних струмів представлені на рис. 4.1.

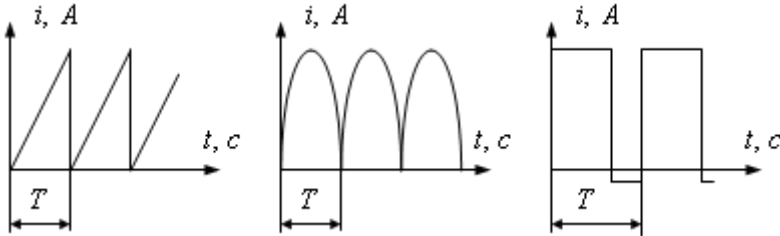


Рис. 4.1

Постійний струм можна розглядати як окремий випадок періодичного струму, період зміни якого є нескінченно великим, тобто частота дорівнює нулю.

Найбільше з миттєвих значень періодичного струму називають *максимальним* або *амплітудним*.

Для кількісної оцінки періодичних струмів вводять поняття середнього й діючого значень струму.

*Середнім значенням струму* за період (або *постійної складового струму*) називають значення постійного струму, що чисельно дорівнює відношенню кількості електричного заряду який пройшов через поперечний переріз провідника протягом періоду до часу цього періоду

$$I_0 = \frac{1}{T} \int_0^T i dt. \quad (4.4)$$

Поняття діючого значення вводять як еквівалент теплової дії періодичного струму. За законом Джоуля-Ленца на ділянці електричного кола з опором  $R$ , якою протікає струм  $i$ , протягом елементарного проміжку часу  $dt$  виділиться  $Ri^2 dt$  джоулів тепла, а за період  $T$  -  $R \int_0^T i^2 dt$  джоулів. Позначимо через  $I$  постійний струм, при протіканні якого за той же проміжок часу  $T$  в опорі  $R$  виділиться

така ж кількість тепла. Тоді:  $R \int_0^T i^2 dt = RI^2 T$ . Звідси:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}. \quad (4.5)$$

Діючим значенням струму за період (його також називають так само ефективним або середньоквадратичним) називають значення постійного струму, що за час одного періоду вдіє той же самий тепловий або електродинамічний ефект, що й розглянутий періодичний струм.

Аналогічно визначають середні й діючі значення напруг й ЕРС.

Діючі значення електричних величин позначають так само як і відповідні електричні величини в колах постійного струму, щоб підкреслити подібність цих понять.

Поняття діючого значення широко використовують в колах змінного струму. Прилади електромагнітної, електродинамічної й теплової систем, які використовують для вимірювання змінних струмів і напруг, градуують в діючих значеннях. Технічні дані електротехнічних пристроїв також зазначають у діючих значеннях.

#### 4.2 Синусоїдний струм й основні величини, які його характеризують

З періодичних струмів всіх можливих форм найбільше поширення дістав синусоїдний струм. У порівнянні з іншими видами струму синусоїдний струм має ряд переваг, бо його використання дозволяє:

- розв'язати задачі підвищення напруги трансформаторами

для забезпечення економічності при передачі електричної енергії на великі відстані й наступне її зниження для розподілу між споживачами;

- зберегти незмінними синусоїдні форми кривих напруг і струмів на всіх ділянках складного лінійного кола, у тому числі при багаторазових трансформаціях;

- відносно просто за допомогою нерухомих обмоток одержати обертаюче магнітне поле, яке використовують в синхронних й асинхронних обертових машинах.

*Колами синусоїдного струму* називають електричні кола, у яких електричні величини (струм, напруга, ЕРС) змінюються в часі за синусоїдним (гармонійним) законом й математично описуються функціями:

$$\begin{aligned} i(t) &= I_m \sin(\omega t + \psi_i); \\ u(t) &= U_m \sin(\omega t + \psi_u); \\ e(t) &= E_m \sin(\omega t + \psi_e) \end{aligned} \quad (4.6)$$

де  $i$ ,  $u$ ,  $e$  - миттєві значення;  $I_m$ ,  $U_m$ ,  $E_m$  - амплітудні значення;  $\psi_i$ ,  $\psi_u$ ,  $\psi_e$  - початкові фази;  $\omega$  - кутова (кругова, циклічна) частота.

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}. \quad (4.7)$$

Одиниця вимірювання кутової частоти - 1/секунду ( $s^{-1}$ ).

Одиниця вимірювання початкової - *радіан (рад)*. На практиці в більшості випадків у якості одиниці вимірювання кута фазового зсуву використовують *градус* (інколи кажуть *електричний градус*).

Аргумент синуса ( $\omega t + \psi$ ) називають *фазою*. Фаза характеризує стан коливання в поточний момент часу.

Діапазон частот струмів, які застосовуються в техніці складає від наднизьких частот (0.01...10...10 Гц - у системах автоматичного регулювання, в аналоговій обчислювальній техніці) до надвисоких (3000...300000 МГц - міліметрові хвилі: радіолокація, радіоастрономія). В Україні, країнах СНД і більшості країн Європи найбільше розповсюдження дістали електроустановки синусоїдного струму зі стандартною частотою 50 Гц. У США і Японії стандартної є частота 60 Гц.

Стандартній промисловій частоті  $f = 50 \text{ Гц}$  відповідають кутова частота  $\omega = 314 \text{ с}^{-1}$  і період  $T = 0,02 \text{ с}$ .

При порівнянні напруги й струму однакової частоти за часом використовують поняття *кут фазового зсуву* між напругою й струмом (*фазовий зсув* напруги щодо струму)

$$\varphi = (\omega t + \psi_u) - (\omega t + \psi_i) = \psi_u - \psi_i. \quad (4.8)$$

Одиниця вимірювання кута фазового зсуву, так само як і початкової фази - *радіан* або *градус*.

Фазовому зсуву відповідає час

$$t_\varphi = \frac{\psi_u - \psi_i}{\omega} = \frac{\psi_u - \psi_i}{2\pi} \cdot T, \quad (4.9)$$

який показує на яку частину періоду (на який час) напруга досягає раніше (або пізніше) своїх амплітудних (або нульових) значень. Залежно від знака часу напругу називають випереджаючою або відстаючою відносно струму. У випадку якщо  $\varphi = 0$  напруга й струм збігаються за фазою.

### 4.3 Середнє й діюче значення величин, що змінюються за синусоїдним законом

За період середнє значення струму (постійна складова струму), що змінюється за синусоїдним законом, дорівнює нулю

$$I_0 = \frac{1}{T} \int_0^T I_m \sin \omega t = 0. \quad (4.10)$$

Тому на практиці під середнім значенням струму, що змінюється за синусоїдним законом, розуміють середнє за модулем значення (враховуючи симетрію функції середнє за додатний півперіод)

$$I_{av} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} I_m \sin \omega t = \frac{2}{\pi} I_m \approx 0,637 I_m. \quad (4.11)$$

Аналогічно для напруг і ЕРС, що змінюються за синусоїдним законом

$$\begin{aligned} U_{av} &= \frac{2}{\pi} U_m; \\ E_{av} &= \frac{2}{\pi} E_m. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Діюче значення струму, що змінюється за синусоїдним законом:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \approx 0,707 I_m. \quad (4.13)$$

Аналогічно для напруг і ЕРС, що змінюються за синусоїдним законом:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}, \quad (4.14)$$

$$E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}.$$

#### 4.4 Способи графічного зображення синусоїдних струмів і напруг

Існує два способи графічного зображення синусоїдальних струмів і напруг:

- за допомогою графіків;
- за допомогою обертових векторів у декартових координатах.

На рис. 4.2 представлені графіки залежностей напруги  $u(t)$  й струму  $i(t)$  від часу. Такі графіки називають *хвильовими діаграмами*.

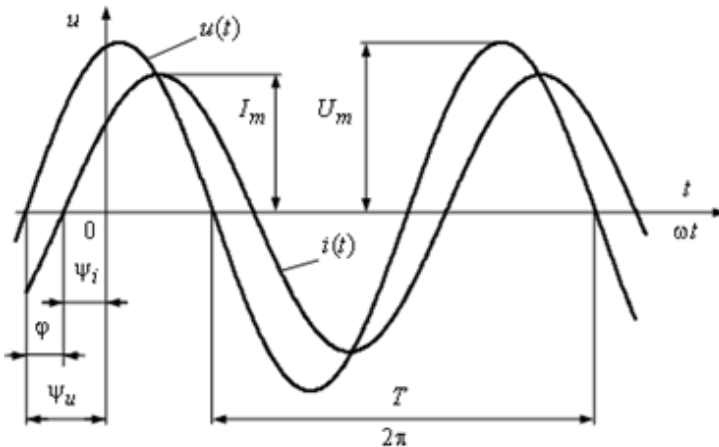


Рис. 4.2

Синусоїдні напруга й струм, які представлені на рис. 4.2, відповідають випадку  $\psi_u > 0$ ,  $\psi_i > 0$ ,  $\varphi > 0$ . Замість часу  $t$  по осі абсцис частіше відкладають значення  $\omega t$ , переходячи від секунд до радіанів. Це дозволяє простіше встановлювати масштаб по цій осі (період синусоїд становить  $2\pi$ ).

Хвильові діаграми незручні для дослідження складних електричних кіл.

На рис. 4.3 представлено зображення синусоїдних струму і напруги у вигляді векторів, що обертаються з постійною кутовою швидкістю  $\omega$  (яка відповідає кутовій швидкості струму) проти напрямку руху годинної стрілки щодо центра  $O$  декартових координат. Довжини векторів дорівнюють амплітудним значенням струму та напруги у відповідному масштабі.

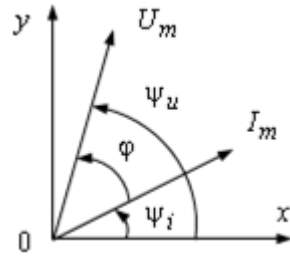


Рис. 4.3

У теорії електричних кіл прийнято дані вектори зображувати для значення часу  $t = 0$ . У цьому випадку вектори займають положення щодо осі абсцис під кутом, що дорівнює початковим фазам струму  $\psi_i$  та напруги  $\psi_u$ . Прийнято, що додатні значення початкової фази відкладають від осі абсцис проти годинної стрілки, а від'ємні - за годинною.

Тоді проекції обох векторів на вісь ординат будуть змінюватися за синусоїдним законом  $i(t) = I_m \cdot \sin(\omega t + \psi_i)$  та  $u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + \psi_u)$ .

У такий же спосіб на площині можна представити будь яку кількість векторів, які відповідають різним синусоїдним функціям. Якщо вони мають однакову кутову частоту, то будуть обертатися синхронно, не змінюючи взаємного положення, що обумовлюється тільки початковою фазою цих функцій. Тому при аналізі кіл, у яких всі струми й напруги мають однакову частоту, її можна виключити з параметрів, обмежившись тільки амплітудою й початковою фазою. У цьому випадку вектори, що зображують синусоїдні функції можна вважати нерухомими.

Сукупність векторів електричних величин однієї частоти, що зображені у єдиній системі координат називають *векторною діаграмою*. Якщо на діаграмі представлені вектора різних електричних

величин (у більшості випадків струму й напруги), то таку векторну діаграму називають *суміщеною* (рис. 4.3).

Кут фазового зсуву між напругою і струмом відкладають від вектора струму до вектора напруги.

При розрахунках кіл синусоїдного струму прийнято оперувати з діючими значеннями електричних величин. Тому при подальшому викладі будемо використати головним чином їх.

Оскільки для синусоїдного струму співвідношення між амплітудними й діючими значеннями є постійним, то на векторних діаграмах вектор, який відображає амплітудне значення, при відповідній зміні масштабу одночасно відтворює діюче.

Векторні діаграми широко застосовують при аналізі кіл синусоїдного струму. Їхнє застосування робить розрахунок кола більше наочним і простим. При розрахунку кіл синусоїдного струму постійно виконують операції додавання (віднімання) миттєвих значень струмів, напруг й ЕРС. Використання векторних діаграм дозволяє замінити додавання (віднімання) миттєвих значень величин додаванням (відніманням) відповідних векторів.

На рис. 4.4 представлені два вектори струмів  $\bar{I}_{1m}$  й  $\bar{I}_{2m}$ , проєкції яких на вертикальну вісь дають миттєві значення цих струмів для  $t = 0$ . Тому що ці вектора обертаються з однаковою кутовою швидкістю  $\omega$ , то їхнє взаємне розташування не змінюється, і кут фазового зсуву між ними залишається постійним. Тому що алгебраїчна сума проєкцій векторів на вісь абсцис дорівнює загальному струму, то вектор загального струму дорівнює геометричній сумі векторів струму.

Вектор, що зображує підсумувальну синусоїду, дорівнює сумі векторів, що зображують складові (рис. 4.4).

Побудова векторної діаграми в масштабі дозволяє визначити значення  $I_{3m}$  і  $\psi_3$  з діаграми, після чого можна записати миттєве значення струму шляхом урахування кутової частоти  $i_3 = I_{3m} \sin(\omega t + \psi_3)$ .

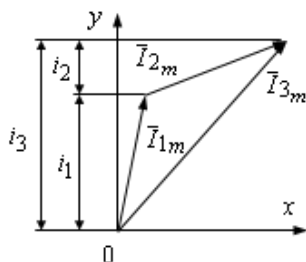


Рис. 4.4

Віднімання векторів може бути замінено операцією додавання векторів шляхом зміни напрямку вектора, який віднімається, на  $180^\circ$ , що відповідає зміні його знака.

### 4.5 Одержання синусоїдної ЕРС

Синусоїдні ЕРС у сучасній техніці одержують різноманітними методами в електромашинних та електронних генераторах й інших пристроях.

Основними джерелами енергії синусоїдного струму є електромеханічні генератори, які перетворюють енергію обертового руху в електричну енергію. Принцип дії таких генераторів базується на явищі збудження вихрового електричного поля при зміні магнітного поля, що призводить до виникнення індукованої електрорушійної сили в замкнутому контурі при зміні магнітного потоку крізь поверхню, що обмежена цим контуром.

Розглянемо поперечний переріз спрощеної моделі однофазного генератора синусоїдного струму (рис. 4.5).

Нехай прямокутна провідникова рамка (виток), площа якої  $S_g$ , рівномірно обертається з постійною кутовою швидкістю  $\omega$  у магнітному полі між полюсами  $N$  й  $S$  постійного магніту.

Припустимо, що магнітне поле у зоні обертання є постійним й рівномірним. Значення магнітної індукції дорівнює  $B$ .

При обертанні рамки магнітний потік, який перетинає її площину, змінюється. У положенні, коли площина рамки є перпендикулярною до магнітних ліній магнітного поля, потік  $\Phi$  досягає максимального значення

$$\Phi_m = B \cdot S_g. \quad (4.15)$$

У міру повороту рамки із цього положення він зменшується й стає нульовим, коли площина рамки розташовується уздовж ліній магнітного поля. Потім напрямок магнітного потоку відносно рамки змінює свій знак, і він починає збільшуватися (за модулем). Таким чином, магнітний потік, що пронизує рамку, змінюється залежно від кута її повороту за косинусоїдним законом

$$\Phi = \Phi_m \cos \alpha, \quad (4.16)$$

де  $\alpha$  - кут між напрямком ліній магнітного поля й нормаллю до площини рамки, *рад*.

Якщо в момент часу  $t = 0$  нормаль рамки була розташована

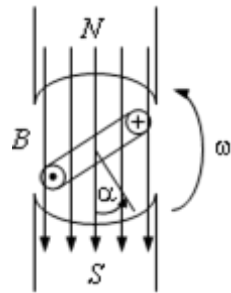


Рис. 4.5

під кутом  $\psi_e$  до напрямку ліній магнітного поля, то в поточний момент часу кут  $\alpha$  дорівнює

$$\alpha = \omega t + \psi_e. \quad (4.17)$$

Отже магнітний потік безперервно змінюється в часі відповідно до виразу:

$$\Phi = \Phi_m \cos(\omega t + \psi_e) = B \cdot S_e \cos(\omega t + \psi_e). \quad (4.18)$$

За законом електромагнітної індукції при зміні магнітного потоку через поверхню, обмежену будь яким контуром, у даному контурі виникає електрорушійна сила

$$e(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = B \cdot S_e \cdot \omega \sin(\omega t + \psi_e) = E_m \sin(\omega t + \psi_e). \quad (4.19)$$

Звідси випливає, що кутова частота ЕРС дорівнює кутовій швидкості обертання рамки, а початкова фаза - початковому кутовому положенню. Амплітуда ЕРС пропорційна індукції магнітного поля й швидкості обертання рамки. ЕРС досягає амплітудного значення, коли площа рамки розташована паралельно лініям магнітної індукції. При такому положенні рамки магнітний потік, що пронизує її, дорівнює нулю, а швидкість перетинання магнітних ліній є максимальною.

Ця ЕРС через контактні кільця, що обертаються разом з рамкою й через нерухомі щітки, які скочають по поверхнях контактних кілець, передається на вихідні затискачі генератора, на яких створюється синусоїдна напруга, що чисельно дорівнює ЕРС. Якщо до затискачів на щітках приєднати яке-небудь навантаження, то в електричному колі, що утвориться, виникне електричний струм.

Розглянутий спосіб одержання ЕРС є лише ілюстрацією й у техніці не використовують через економічну недоцільність створення досить сильного рівномірного магнітного поля в такому великому повітряному проміжку. Конструкція реальних генераторів значно складніше й у них замість рамки використовують багатовиткову обмотку. Значення ЕРС при цьому зростає пропорційно кількості витків. Крім того, обмотка, у якій індукується ЕРС, у них нерухома, а магнітне поле обертається навколо її. Але принцип дії таких генераторів відповідає розглянутому.

## 4.6 Ідеальні пасивні елементи в колах синусоїдного струму

У розділі 2 були розглянуті ідеальні пасивні елементи електричних кіл й їхні параметри. Наведені там співвідношення є справедливими й у колах синусоїдного струму, якщо в них у якості ЕРС, напруг і струмів підставити відповідні функції часу.

### 4.6.1 Резистивний елемент у колі синусоїдного струму

Якщо через резистивний елемент протікає синусоїдний струм

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i), \quad (4.20)$$

то за законом Ома напруга на його затискачах буде дорівнювати

$$u(t) = Ri = RI_m \sin(\omega t + \psi_u). \quad (4.21)$$

Отже, напруга на затискачах резистивного елемента й струм, що проходить через нього, мають однакову початкову фазу (збігаються за фазою)

$$\psi_u = \psi_i = \psi. \quad (4.22)$$

Кут фазового зсуву між напругою й струмом

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = 0. \quad (4.23)$$

Закон Ома для діючих значень напруги й струму резистивного елемента:

$$U = RI. \quad (4.24)$$

Миттєва потужність, що надходить до резистивного елемента

$$p = ui = U_m I_m \sin^2(\omega t + \psi) = UI(1 - \cos 2(\omega t + \psi)), \quad (4.25)$$

має постійну складову  $UI$  і змінну складову  $UI \cos 2(\omega t + \psi)$ , що змінюється з подвоєною частотою  $2\omega$ . У будь-який момент часу значення струму й напруги мають однаковий знак, тому  $p \geq 0$ .

Середнє значення потужності, що надходить у резистивний елемент за період, називають *активною потужністю*:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T UI(1 - \cos 2(\omega t + \psi)) dt = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R}. \quad (4.26)$$

На рис. 4.6, *a* представлені графіки залежностей миттєвих значень напруги  $u(t)$ , струму  $i(t)$  і потужності  $p(t)$  від часу, а на

рис. 4.6, б - суміщена векторна діаграма для резистивного елемента.

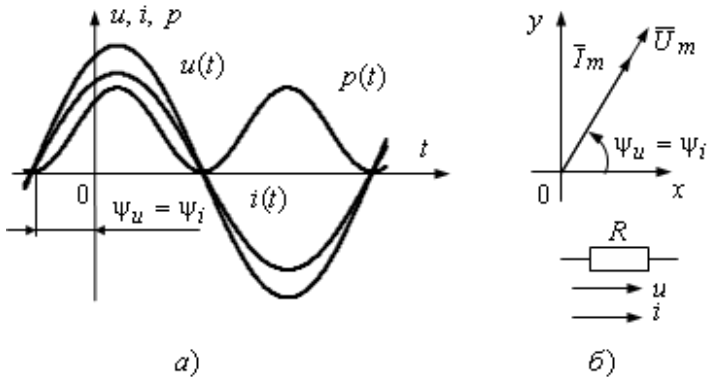


Рис. 4.6

#### 4.6.2 Індуктивний елемент у колі синусоїдного струму

Якщо через індуктивний елемент протікає синусоїдний струм

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i), \quad (4.27)$$

то його потокозчеплення дорівнює

$$\Psi(t) = Li = LI_m \sin(\omega t + \psi_i) = \Psi_m \sin(\omega t + \psi_i) \quad (4.28)$$

і в індуктивному елементі наводиться ЕРС самоіндукції

$$e_L = -\frac{d\Psi}{dt} = -\omega\Psi_m \cos(\omega t + \psi_i) = -\omega LI_m \sin\left(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}\right). \quad (4.29)$$

Напруга на затискачах індуктивного елемента

$$u = -e_L = \omega LI_m \sin\left(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}\right) = U_m \sin\left(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}\right). \quad (4.30)$$

Отже, напруга на затискачах індуктивного елемента випереджає струм, що проходить через нього, за фазою на кут  $\frac{\pi}{2}$ :

$$\psi_u = \psi_i + \frac{\pi}{2}. \quad (4.31)$$

Кут фазового зсуву між напругою й струмом

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = \frac{\pi}{2}. \quad (4.32)$$

За аналогією з резистивним елементом уводять поняття *індуктивний опір*:

$$X_L = \omega L. \quad (4.33)$$

*Індуктивний опір* являє собою розрахункову величину, за допомогою якої враховують явище самоіндукції. Він виникає як реакція магнітного поля кола на процес зміни запасу енергії в ньому й не супроводжується тепловими явищами. Значення індуктивного опору пропорційно частоті струму, що протікає через індуктивний елемент. При збільшенні частоти воно прагне до нескінченності, а в колах постійного струму ( $\omega = 0$ ) дорівнює нулю.

Величину, що є зворотною до індуктивного опору, називають *індуктивною провідністю*:

$$B_L = \frac{1}{X_L} = \frac{1}{\omega L}. \quad (4.34)$$

Одиниця вимірювання індуктивного опору - *ом* (*Ом*), індуктивної провідності - *сименс* (*Сим*).

Індуктивний опір й індуктивна провідність є параметрами індуктивного елемента.

Закон Ома для діючих значень напруги й струму індуктивного елемента:

$$U = X_L I. \quad (4.35)$$

Миттєва потужність, що характеризує швидкість перетворення енергії джерела в енергію магнітного поля

$$\begin{aligned} p = ui &= U_m I_m \sin(\omega t + \psi_i) \sin(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}) = \\ &= 2UI \sin(\omega t + \psi_i) \cos(\omega t + \psi_i) = UI \sin 2(\omega t + \psi_i), \end{aligned} \quad (4.36)$$

проходить через нульове значення, коли через нуль проходить або напруга  $u$ , або струм  $i$ . Якщо знаки струму й напруги збігаються, її значення додатне. У цей час індуктивний елемент споживає енергію джерел на створення енергії магнітного поля. Якщо знаки струму й напруги не збігаються, її значення від'ємне. У цей час енергія магнітного поля віддається зворотно джерелу енергії. Відбувається періодичний обмін енергії між джерелом й індуктивним елементом, причому середня потужність, що надходить до індуктивного елемента за період дорівнює нулю (тобто індуктивний

елемент активну потужність не споживає).

Для індуктивного елемента вводять поняття *індуктивна потужність*, що дорівнює амплітудному значенню миттєвої потужності

$$Q = p_m = UI = X_L I^2 = \frac{U^2}{X_L} = \omega LI^2 = \frac{U^2}{\omega L}. \quad (4.37)$$

Одиниця вимірювання індуктивної потужності - *вольт-ампер реактивний (вар)*.

*Енергія магнітного поля* індуктивного елемента

$$w_L = \frac{Li^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2} \sin^2(\omega t + \psi_i) = \frac{LI^2}{2} (1 - \cos 2(\omega t + \psi_i)) \quad (4.38)$$

має постійну складову  $\frac{LI^2}{2}$  й змінну складову  $\frac{LI^2}{2} \cos 2(\omega t + \psi_i)$ , що змінюється з подвоєною частотою  $2\omega$ . У будь-який момент часу значення енергії магнітного поля невід'ємне  $w_L \geq 0$ .

Коли значення струму й напруги мають однакові знаки, енергія накопичується в магнітному полі. Коли значення струму й напруги мають різні знаки, енергія, що накопичена в магнітному полі, повертається в зовнішнє коло. Причому в зовнішнє коло повертається в точності та кількість енергії, що була накопичена.

На рис. 4.7, *а* представлені графіки залежностей миттєвих значень напруги  $u(t)$ , струму  $i(t)$  і потужності  $p(t)$  від часу, а на рис. 4.7, *б* - суміщена векторна діаграма для індуктивного елемента.

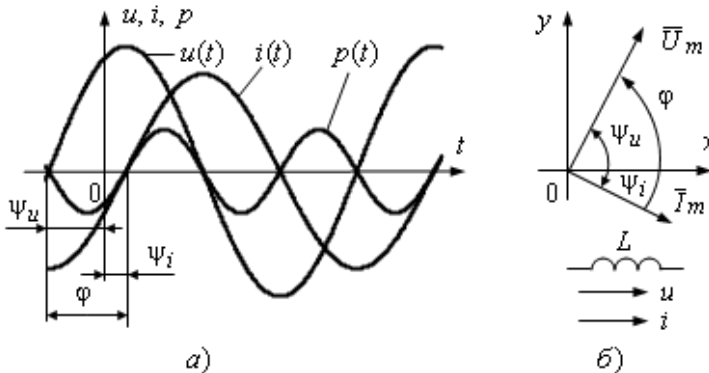


Рис. 4.7

### 4.6.3 Ємнісний елемент у колі синусоїдного струму

Якщо напруга на затискачах ємнісного елемента змінюється за синусоїдним законом

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u), \quad (4.39)$$

то за гармонійним законом буде змінюватися й заряд ємнісного елемента

$$q = Cu = CU_m \sin(\omega t + \psi_u), \quad (4.40)$$

і ємнісний елемент буде періодично перезаряджатися. При цьому в зовнішній частині кола буде протікати електричний струм, миттєве значення якого пропорційно швидкості зміни заряду

$$\begin{aligned} i &= \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt} = \omega CU_m \cos(\omega t + \psi_u) = \\ &= \omega CU_m \sin\left(\omega t + \psi_u + \frac{\pi}{2}\right) = I_m \sin(\omega t + \psi_i). \end{aligned} \quad (4.41)$$

За аналогією з резистивним елементом уводять поняття *ємнісна провідність*

$$B_C = \omega C. \quad (4.42)$$

*Ємнісна провідність* являє собою розрахункову величину, за допомогою якої враховують обмеження швидкості перезарядження ємнісного елемента. Воно виникає як реакція електричного поля кола на процес зміни запасу енергії в ньому й не супроводжується тепловими явищами. Значення ємнісної провідності пропорційно частоті напруги, що прикладена до затискачів ємнісного елемента. При збільшенні частоти воно прагне до нескінченності, а в колах постійного струму ( $\omega = 0$ ) дорівнює нулю.

Величину, що є зворотною до ємнісної провідності, називають *ємнісним опором*:

$$X_C = \frac{1}{B_C} = \frac{1}{\omega C}. \quad (4.43)$$

Одиниця вимірювання ємнісного опору - *ом* (*Ом*), ємнісної провідності - *сименс* (*Сим*).

Ємнісний опір й ємнісна провідність є параметрами ємнісного елемента.

Закон Ома для діючих значень напруги й струму ємнісного

елемента

$$U = X_C I. \quad (4.44)$$

Миттєва потужність, що характеризує швидкість перетворення енергії джерела в енергію електричного поля

$$\begin{aligned} p &= ui = U_m I_m \sin(\omega t + \psi_u) \sin(\omega t + \psi_u + \frac{\pi}{2}) = \\ &= 2UI \sin(\omega t + \psi_u) \cos(\omega t + \psi_u) = UI \sin(2(\omega t + \psi_u)) \end{aligned} \quad (4.45)$$

проходить через нульове значення, коли через нуль проходить або напруга  $u$ , або струм  $i$ . Якщо знаки струму й напруги збігаються, її значення додатне. У цей час ємнісний елемент споживає енергію джерела на створення енергії електричного поля. Якщо знаки струму й напруги не збігаються - від'ємне. У цей час енергія електричного поля віддається зворотно джерелу енергії. Відбувається періодичний обмін енергії між джерелом і ємнісним елементом, причому середня потужність, що надходить у ємнісний елемент дорівнює нулю (тобто ємнісний елемент активну потужність не споживає).

Для ємнісного елемента вводять поняття *ємнісна потужність*, що дорівнює амплітудному значенню миттєвої потужності

$$Q = p_m = UI = X_C I^2 = \frac{U^2}{X_C} = \frac{I^2}{\omega C} = \omega C U^2. \quad (4.46)$$

Одиниця вимірювання ємнісної потужності - *вольт-ампер реактивний (вар)*.

*Енергія електричного поля* ємнісного елемента

$$w_C = \frac{Cu^2}{2} = \frac{CU_m^2}{2} \sin^2(\omega t + \psi_u) = \frac{CU^2}{2} (1 - \cos 2(\omega t + \psi_u)) \quad (4.47)$$

має постійну складову  $\frac{CU^2}{2}$  й змінну складову

$\frac{CU^2}{2} \cos 2(\omega t + \psi_u)$ , що змінюється з подвоєною частотою  $2\omega$ . У будь-який момент часу значення енергії електричного поля невід'ємне  $w_C \geq 0$ .

Коли значення струму й напруги мають однакові знаки, енергія накопичується в електричному полі. Коли значення струму й

напруги мають різні знаки, енергія, що накопичена в електричному полі, повертається в зовнішнє коло. Причому в зовнішнє коло повертається в точності та кількість енергії, що була накопичена.

На рис. 4.8, *а* представлені графіки залежностей миттєвих значень напруги  $u(t)$ , струму  $i(t)$  і потужності  $p(t)$  від часу, а на рис. 4.8, *б* - суміщена векторна діаграма для ємнісного елемента.

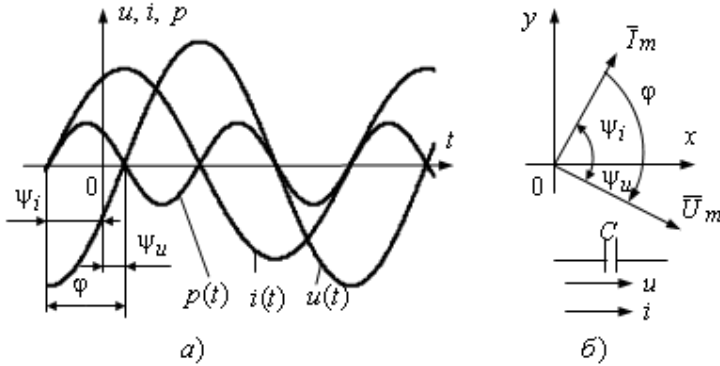


Рис. 4.8

#### 4.7 Електричне коло синусоїдного струму з послідовним з'єднанням резистивного, індуктивного і ємнісного елементів

При проходженні через ділянку електричного кола (рис. 4.9), що складається з послідовно з'єднаних резистивного, індуктивного і ємнісного елементів, синусоїдного струму

$$i = I_m \sin \omega t, \quad (4.48)$$

на затискачах цієї ділянки кола створюється напруга, миттєве значення якої у відповідності із другим законом Кірхгофа, дорівнює алгебраїчній сумі миттєвих значень напруг на окремих елементах

$$u = u_R + u_L + u_C, \quad (4.49)$$

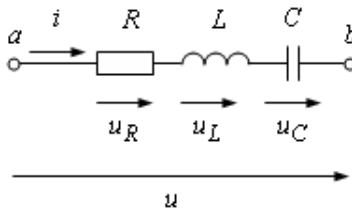


Рис. 4.9

При цьому напруга на резистивному елементі  $u_R$  збігається за фазою зі струмом, на індуктивному  $u_L$  - випереджає за фазою струм на кут  $\frac{\pi}{2}$ , а ємнісному  $u_C$  - відстає за фазою від струму на кут  $\frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} u_R &= U_{Rm} \sin \omega t = R I_m \sin \omega t, \\ u_L &= U_{Lm} \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) = X_L I_m \cos \omega t, \\ u_C &= U_{Cm} \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) = -X_C I_m \cos \omega t. \end{aligned} \quad (4.50)$$

З обліком цього напруга на затискачах всієї розглянутої ділянки кола

$$\begin{aligned} u &= R I_m \sin \omega t + X_L I_m \cos \omega t - X_C I_m \cos \omega t = \\ &= R I_m \sin \omega t + (X_C - X_L) I_m \cos \omega t = I_m (R \sin \omega t + X \cos \omega t) = \\ &= U_m \sin(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Рівняння (4.51) являє собою тригонометричну форму запису другого закону Кірхгофа для миттєвих значень напруг. Величину

$$X = X_L - X_C, \quad (4.52)$$

яка входить у нього, називають *реактивним опором* кола. Залежно від знака реактивний опір може мати індуктивний ( $X > 0$ ) або ємнісної ( $X < 0$ ) характер. Значення активного опору, на відміну від значення реактивного опору, завжди невід'ємне.

Для спрощення рівняння (4.51) використаємо тригонометричні співвідношення:

$$\begin{aligned} m \sin \alpha \pm n \cos \alpha &= \sqrt{m^2 + n^2} \sin(\alpha \pm \beta), \\ \beta &= \arctg \frac{n}{m}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Тоді амплітудне значення напруги на затискачах всієї ділянки кола

$$U_m = \sqrt{R^2 + X^2} I_m. \quad (4.54)$$

З рівняння (4.54) випливає, що амплітудні й діючі значення напруги на затискачах розглянутої ділянки кола й струму, що протікає через цю ділянку коло, зв'язані співвідношеннями, що аналогічні до закону Ома

$$\begin{aligned} U_m &= ZI_m, \\ U &= ZI, \end{aligned} \quad (4.55)$$

де  $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$  - повний опір розглянутої ділянки кола, Ом.

Фазовий зсув між напругою й струмом

$$\varphi = \arctg \frac{X}{R} = \arctg \frac{X_L - X_C}{R}. \quad (4.56)$$

Зміна реактивного опору в межах  $-\infty < X < +\infty$  приводить до зміни кута фазового зсуву від  $-\frac{\pi}{2}$  до  $\frac{\pi}{2}$ .

Кут  $\varphi$  додатний при індуктивному характері опору кола, тобто коли  $X > 0$ . При цьому струм відстає за фазою від напруги, і кут  $\varphi$  відраховують вдовж осі абсцис вліво від струму до напруги. Кут  $\varphi$  від'ємний при ємнісному характері опору кола, тобто коли  $X < 0$ . При цьому напруга відстає за фазою від струму, і кут  $\varphi$  відраховують вдовж осі абсцис вправо від струму до напруги.

Якщо опори індуктивного і ємнісного елементів чисельно однакові, то вони компенсують один одного й опір ділянки кола є суто активним

$$\begin{aligned} X &= X_L - X_C = 0; \\ Z &= R. \end{aligned} \quad (4.57)$$

У цьому випадку струм і напруга збігаються за фазою.

У випадку відсутності в колі резистивного елемента ( $R = 0$ ), повний опір кола буде суто реактивним, а фазовий зсув дорівнює  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , якщо  $X_L > X_C$ , або дорівнює  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ , якщо  $X_L < X_C$ .

На рис. 4.10 представлені хвильова й суміщена векторна діаграма напруг і струму для випадку активно-індуктивного характеру опору ділянки електричного кола ( $\varphi > 0$ ), а на рис. 4.11 для випадку активно-ємнісного характеру опору ( $\varphi < 0$ ).

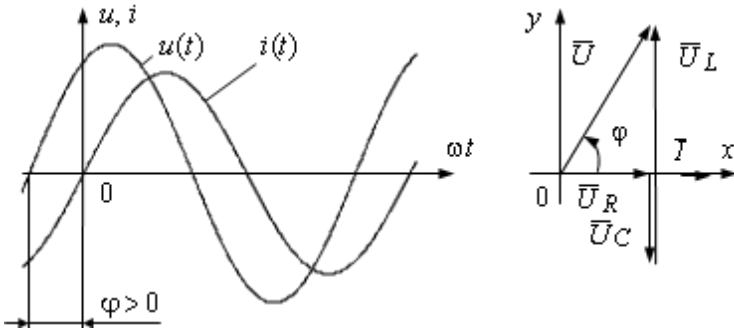


Рис. 4.10

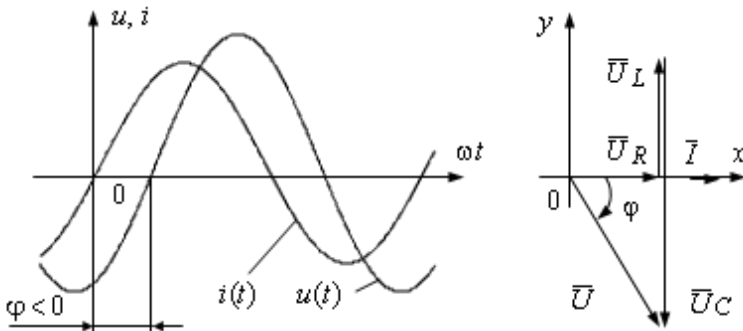


Рис. 4.11

Від хвильових і суміщених векторних діаграм напруг і струму (рис. 4.9 і рис. 4.10) перейдемо до трикутників опорів (на рис. 4.12, а - випадок активно-індуктивного опору ділянки електричного кола, а на рис. 4.12, б - випадок активно-ємнісного опору).

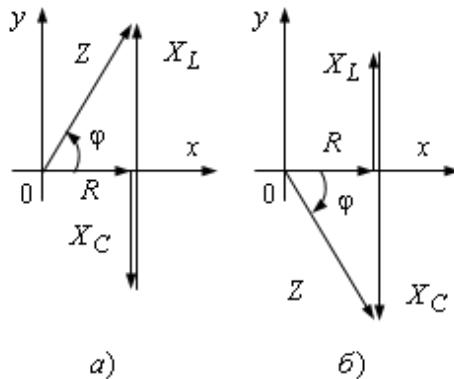


Рис. 4.12

З отриманих рівнянь і трикутників опорів випливає, що активний і реактивний опори кола зв'язані з повним опором співвідношеннями

$$\begin{aligned} R &= Z \cos \varphi, \\ X &= Z \sin \varphi. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Помноживши праві й ліві частини рівнянь (4.58) на діюче значення струму, одержимо діючі значення напруг на активному й реактивному опорах, які називають відповідно *активною* й *реактивною складовими напруги*:

$$\begin{aligned} U_a &= RI = ZI \cos \varphi = U \cos \varphi, \\ U_p &= XI = ZI \sin \varphi = U \sin \varphi. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Тому що миттєві значення напруги на активному й реактивному опорі мають зсув за фазою на кут  $\frac{\pi}{2}$ , то діюче значення сумарної напруги пов'язане з активною й реактивною складовими співвідношенням:

$$U = \sqrt{U_a^2 + U_p^2}. \quad (4.60)$$

Якщо до затискачів ділянки електричного кола, що складається з послідовно з'єднаних резистивного, індуктивного і ємнісного елементів, прикладена синусоїдна напруга

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u), \quad (4.61)$$

то струм у колі

$$i = \frac{U_m}{Z} \sin(\omega t + \psi_u - \varphi). \quad (4.62)$$

#### 4.8 Електричне коло синусоїдного струму з паралельним з'єднанням резистивного, індуктивного і ємнісного елементів

Якщо до затискачів ділянки електричного кола (рис. 4.13), що складається з паралельно з'єднаних резистивного, індуктивного і ємнісного елементів, прикладена синусоїдна напруга

$$u = U_m \sin \omega t, \quad (4.63)$$

те в нерозгалуженій частині цього кола протікає струм, миттєве значення якого відповідно до першого закону Кірхгофа, дорівнює

алгебраїчній сумі миттєвих значень струмів паралельних віток

$$i = i_R + i_L + i_C. \quad (4.64)$$

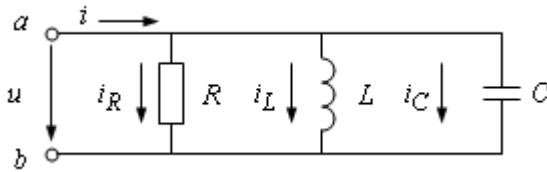


Рис. 4.13

При цьому струм через резистивний елемент  $i_R$  збігається за фазою з напругою, через індуктивний  $i_L$  - відстає за фазою від напруги на кут  $\frac{\pi}{2}$ , а через ємнісної  $i_C$  - випереджає за фазою напругу на кут  $\frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} i_R &= I_{Rm} \sin \omega t = \frac{U_m}{R} \sin \omega t, \\ i_L &= I_{Lm} \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{U_m}{X_L} \cos \omega t, \\ i_C &= I_{Cm} \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{U_m}{X_C} \cos \omega t. \end{aligned} \quad (4.65)$$

З урахуванням цього струм у нерозгалуженій частині кола

$$\begin{aligned} i &= \frac{U_m}{R} \sin \omega t - \frac{U_m}{X_L} \cos \omega t + \frac{I_m}{X_C} \cos \omega t = \\ &= \frac{U_m}{R} \sin \omega t - \left( \frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \right) U_m \cos \omega t = \\ &= U_m (G \sin \omega t - B \cos \omega t) = I_m \sin(\omega t - \varphi). \end{aligned} \quad (4.66)$$

Рівняння (4.66) являє собою тригонометричну форму запису першого закону Кірхгофа для миттєвих значень струмів. Величину

$$B = B_L - B_C, \quad (4.67)$$

яка входить у нього, називають *реактивною провідністю* електричного кола. Залежно від знака реактивна провідність може мати ін-

дуктивний ( $B > 0$ ) або ємнісної ( $B < 0$ ) характер. Значення активної провідності, на відміну від значення реактивної провідності, завжди невід'ємне.

Тоді амплітудне значення струму на вході кола

$$I_m = \sqrt{G^2 + B^2} U_m. \quad (4.68)$$

З рівняння (4.68) витікає, що амплітудні й діючі значення напруги на затискачах кола й струму, що протікає через нерозгалужену частину кола, зв'язані співвідношенням, що аналогічно до закону Ома

$$\begin{aligned} I_m &= YU_m, \\ I &= YU. \end{aligned} \quad (4.69)$$

де  $Y = \sqrt{G^2 + B^2}$  - *повна провідність* розглянутого кола, *Сим.*

Фазовий зсув між напругою й струмом

$$\varphi = \arctg \frac{B}{G} = \arctg \frac{B_L - B_C}{G}. \quad (4.70)$$

Зміна реактивної провідності в межах  $-\infty < B < +\infty$  призводить до зміни кута фазового зсуву від  $-\frac{\pi}{2}$  до  $\frac{\pi}{2}$ .

Кут  $\varphi$  додатний при індуктивному характері провідності кола, тобто при  $B > 0$ . При цьому струм у нерозгалуженій частині кола відстає за фазою від напруги, і кут  $\varphi$  відраховують вдовж осі абсцис вліво від струму до напруги. Кут  $\varphi$  від'ємний при ємнісному характері провідності кола, тобто при  $B < 0$ . При цьому напруга відстає за фазою від струму, і кут  $\varphi$  відраховують вдовж осі абсцис праворуч від струму до напруги.

Якщо індуктивна і ємнісна провідностей чисельно однакові, то вони компенсують одна одну й повна провідність кола є суто активною

$$\begin{aligned} B &= B_L - B_C = 0; \\ Y &= G. \end{aligned} \quad (4.71)$$

У цьому випадку струм і напруга збігаються за фазою.

У випадку відсутності в колі резистивного елемента ( $G = 0$ ), повна провідність ділянки кола буде суто реактивною, а фазовий

зсув дорівнює  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , якщо  $B_L > B_C$ , або дорівнює  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ , якщо  $B_L < B_C$ .

На рис. 4.14 представлені хвильові й суміщені векторні діаграми напруг і струму для випадку активно-індуктивного характеру провідності ділянки електричного кола ( $\varphi > 0$ ), а на рис. 4.15 для випадку активно-ємнісного характеру провідності ( $\varphi < 0$ ).

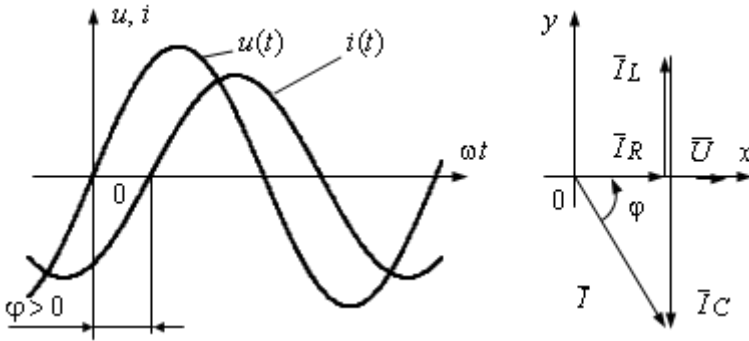


Рис. 4.14

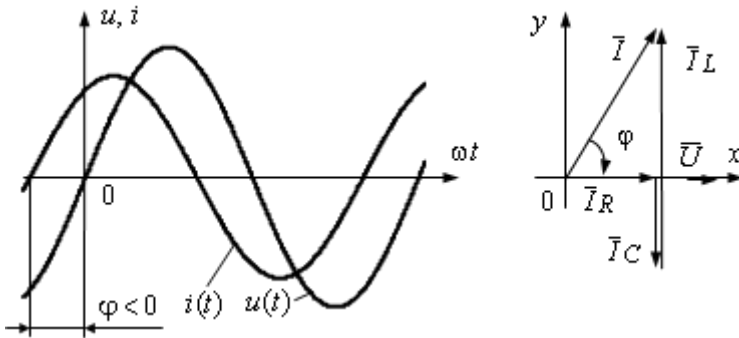


Рис. 4.15

Від хвильових і суміщених векторних діаграм напруг и струму (рис. 4.14 і рис. 4.15) перейдемо до трикутників провідностей (на рис. 4.16, *a* - випадок активно-індуктивної провідності ділянки електричного кола, а на рис. 4.12, *б* - випадок активно-ємнісної провідності).

З отриманих рівнянь і трикутників провідностей витікає, що активна й реактивна провідності кола зв'язані з повною провідніс-

ттю співвідношеннями

$$\begin{aligned} G &= Y \cos \varphi, \\ B &= Y \sin \varphi. \end{aligned} \quad (4.72)$$

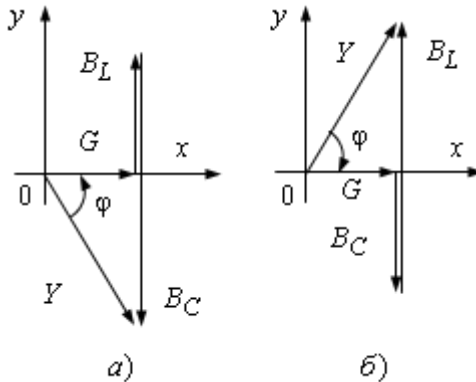


Рис. 4.16

Помноживши праві й ліві частини рівнянь (4.72) на діюче значення напруги, одержимо діючі значення струмів через активну й реактивну провідності, які називають відповідно *активною* й *реактивною складовими струму*

$$\begin{aligned} I_a &= GU = YU \cos \varphi = I \cos \varphi, \\ I_p &= BU = YU \sin \varphi = I \sin \varphi. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Тому що миттєві значення струмів через активну й реактивну провідності мають зсув за фазою на кут  $\frac{\pi}{2}$ , то діюче значення струму пов'язане з активною й реактивною складовими співвідношенням

$$I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2}. \quad (4.74)$$

Якщо на вході електричного кола з паралельним з'єднанням резистивного, індуктивного і ємнісного елементів протікає струм

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i), \quad (4.75)$$

то напруга на затискачах ділянки кола

$$i = YI_m \sin(\omega t + \psi_i + \varphi). \quad (4.76)$$

#### 4.9 Потужність електричного кола синусоїдного струму

Розглянемо деяку довільну ділянку електричного кола, що не містить джерел електричної енергії й з'єднана з іншими ділянками кола у двох вузлах. Як відзначалося раніше, таку ділянку електричного кола називають пасивним двополюсником.

Нехай початкова фаза вхідної напруги на затискачах цього двополюсника дорівнює нулю, а фазовий зсув між вхідними напругою й струмом  $\varphi$ . Тоді

$$\begin{aligned} u &= U_m \sin \omega t, \\ i &= I_m \sin(\omega t - \varphi). \end{aligned} \quad (4.77)$$

Миттєва потужність, що характеризує швидкість надходження енергії у двополюсник

$$\begin{aligned} p &= ui = U_m \sin \omega t I_m \sin(\omega t - \varphi) = U_m I_m \sin \omega t \sin(\omega t - \varphi) = \\ &= \frac{U_m I_m}{2} (\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)) = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t - \varphi) \end{aligned} \quad (4.78)$$

складається із двох доданків: постійної складової  $UI \cos \varphi$  і змінної гармонійної складової  $UI \cos(\omega t - \varphi)$ , що змінюється з подвоєною кутовою частотою в порівнянні з кутовою частотою вхідних напруги й струму.

Середнє значення другого доданка за час періоду  $T$ , протягом якого вона здійснює два цикли змін, дорівнює нулю  $\int_0^T \cos(2\omega t - \varphi) dt = 0$ . Тому активна потужність, що надходить у розглянутий двополюсник

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt = UI \cos \varphi. \quad (4.79)$$

Множник  $\cos \varphi$  називають *коефіцієнтом потужності*. Чим ближче кут  $\varphi$  до нуля, тим ближче  $\cos \varphi$  до одиниці й, отже, тим більша при заданих значеннях напруги й струму, активна потужність передається від джерела двополюснику.

Значення активної потужності, яку споживає пасивний двополюсник, не може бути від'ємним (інакше двополюсник буде генерувати енергію), тому  $\cos \varphi \geq 0$ , тобто на вході пасивного двопо-

люсника  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ . Випадок  $P = 0$ ,  $|\varphi| = \frac{\pi}{2}$  теоретично можливий для двополюсника, що не має резистивних елементів (двополюсник без втрат), а містить тільки ідеальні індуктивні й ємнісні елементи.

Активна потужність може бути розрахована й за іншими формулами:

$$P = I^2 Z \cos \varphi = U^2 Y \cos \varphi = I^2 R = U^2 G. \quad (4.80)$$

Активна потужність може бути також виражена через активні складові напруги ( $U_a = U \cos \varphi$ ) або струму ( $I_a = I \cos \varphi$ )

$$P = U_a I = U I_a. \quad (4.81)$$

Співвідношення (4.81) пояснюють фізичний зміст понять активні складові струму й напруги. Вони відповідають тій частині струму або напруги, які витрачається у двополюснику на перетворення електромагнітної енергії в інші види енергії.

Розглянемо докладніше електричне кола у випадку активно-індуктивного характеру навантаження. При цьому

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad (4.82)$$

$$0 < \cos \varphi < 1.$$

Відповідно до рівняння (4.78) миттєва потужність коливається з подвоєною кутовою частотою  $2\omega$  щодо лінії, що відстоїть від осі  $\omega t$  на  $P = UI \cos \varphi$  (рис. 4.17).

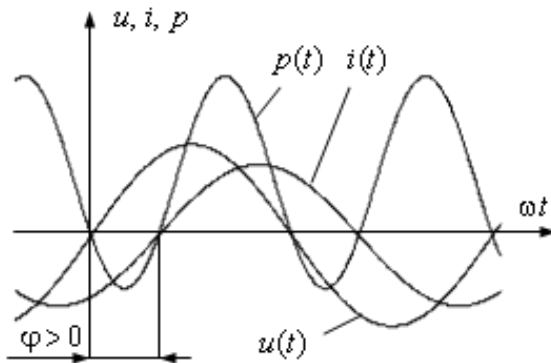


Рис. 4.17

У проміжки часу, коли вхідні напруга й струм мають однакові знаки, значення миттєвої потужності додатне; енергія надходить із джерела енергії у двополюсник. У двополюснику вона розсіюється у вигляді теплової енергії в резистивних елементах і запасється у вигляді енергії магнітного поля в індуктивних елементах й енергії електричного поля в ємнісних елементах.

У проміжки часу, коли напруга й струм мають різні знаки, значення миттєвої потужності від'ємне; енергія частково повертається із двополюсника в джерело. Відбувається це за рахунок перетворення енергії, що була запасена в магнітних й електричних полях відповідно індуктивних й ємнісних елементів

Як видно з рис. 4.17 протягом більшої частини періоду миттєва потужність додатна й відповідно додатна (розташована над віссю часу) площа кривої переважає над від'ємною площею кривої. У результаті середня потужність за період, тобто активна потужність,  $P > 0$ .

Аналогічні процеси відбуваються й у випадку активно-ємнісного характеру кола. При цьому

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0; \quad (4.83)$$

$$0 < \cos \varphi < 1.$$

Величину, що дорівнює добутку діючих значень вхідних струму й напруги на затискачах кола називають *повною потужністю*

$$S = UI. \quad (4.84)$$

Амплітуда синусоїдної складової миттєвої потужності чисельно дорівнює повній потужності.

Повна потужність є розрахунковою потужністю, тому що ця потужність урахує напругу й струм, за значеннями яких вибираються всі елементи електротехнічних пристроїв й апаратів. Тому в технічних даних електричних машин указують їхню повну потужність.

Коефіцієнт потужності може бути визначений через активну й повну потужність

$$\cos \varphi = \frac{P}{S}. \quad (4.85)$$

Повна потужність не має фізичного змісту, але її можна визначити як максимально можливу активну потужність при заданих значеннях вхідних струму й напруги, тобто активну потужність при  $\cos\varphi = 1$ .

Інтенсивність обміну енергії прийнято характеризувати максимальним значенням швидкості надходження енергії в магнітне поле індуктивних елементів й електричне поле ємнісних елементів, яку називають *реактивною потужністю*.

У загальному випадку формула для реактивної потужності має вигляд:

$$Q = UI\sin\varphi. \quad (4.86)$$

Залежно від знака кута  $\varphi$  значення реактивної потужності може бути або додатним, або від'ємним. За знаком реактивної потужності можна судити про характер енергії, що запасється в електричному колі: при  $Q > 0$  енергія запасється переважно в магнітному полі індуктивних елементів, при  $Q < 0$  - в електричному полі ємнісних елементів. При  $Q = 0$  у колі відсутній обмін енергією між реактивними елементами й джерелом.

Реактивні потужності індуктивних й ємнісних елементів можуть бути представлені у вигляді:

$$Q_L = UI \sin \frac{\pi}{2} = UI = \omega LI^2 = \omega \frac{LI_m^2}{2} = \omega W_{L\max}, \quad (4.87)$$

$$Q_C = UI \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -UI = -\omega CU^2 = -\omega \frac{CU_m^2}{2} = \omega W_{C\max}.$$

де  $W_{L\max}$ ,  $W_{C\max}$  - максимальні значення енергії, які періодично запасують індуктивні і ємнісні елементи.

Реактивна потужність електричного кола, що містить індуктивні і ємнісні елементи, пропорційна різниці максимальних значень енергії, які запасуються в магнітному й електричному полях:

$$Q = \omega(W_{L\max} - W_{C\max}). \quad (4.88)$$

Реактивна потужність може бути обчислена й за іншими формулами:

$$Q = I^2 Z \sin\varphi = U^2 Y \sin\varphi = I^2 X = U^2 Y. \quad (4.89)$$

Реактивна потужність може бути також виражена через реак-

тивні складові напруги ( $U_p = U \sin \varphi$ ) або струму ( $I_p = I \sin \varphi$ )

$$Q = U_p I = UI_p. \quad (4.90)$$

Співвідношення (4.90) пояснює фізичний зміст понять реактивні складові струму й напруги. Вони відповідають тій частині струму або напруги, що витрачається у двополюснику на формування магнітних або електричних полів і запасання енергії в них.

Активна, реактивна й повна потужності мають однакову розмірність (Дж/с). Для того щоб підкреслити різний фізичний зміст, що вкладається в ці поняття, одиницям даних величин привласнені різні назви. Одиниця вимірювання активної потужності, так само як і миттєвої потужності, є ватах (Вт), повної потужності - вольт-ампер (ВА), реактивної потужності - у вольт-ампер реактивний (вар).

З виразів (4.79, 4.84, 4.86) витікає взаємозв'язок активної, повної й реактивної потужності:

$$\begin{aligned} S^2 &= P^2 + Q^2 \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{Q}{P} \\ \sin \varphi &= \frac{Q}{S}. \end{aligned} \quad (4.91)$$

#### 4.10 Застосування векторних діаграм до розрахунку кіл синусоїдного струму. Метод провідностей

Розглянемо електричне коло синусоїдного струму зі змішаним з'єднанням елементів (рис. 4.18). Характер опору в першій з паралельних віток кола активно-індуктивний, а в другій - активно-емнісній.

Нехай напруга на вході кола

$$u = U_m \sin \omega t. \quad (4.92)$$

Повні опори віток

$$\begin{aligned} Z_1 &= \sqrt{R_1^2 + X_L^2}, \\ Z_2 &= \sqrt{R_2^2 + X_C^2}. \end{aligned} \quad (4.93)$$

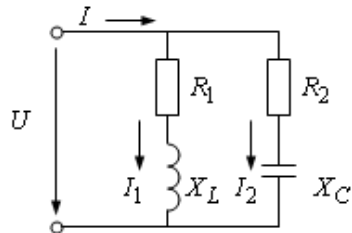


Рис. 4.18

Фазові зсуви між вхідною напругою й струмами віток (з урахуванням того, що початкова фаза напруги дорівнює нулю, вони одночасно чисельно дорівнюють початковим фазам струмів)

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \operatorname{arctg} \frac{R_1}{X_L}; \\ \varphi_2 &= \operatorname{arctg} \frac{R_2}{X_C}.\end{aligned}\quad (4.94)$$

Тоді струми в паралельних вітках

$$\begin{aligned}i_1 &= I_{1m} \sin(\omega t - \varphi_1); \\ i_2 &= I_{2m} \sin(\omega t - \varphi_2),\end{aligned}\quad (4.95)$$

де  $I_{1m} = \frac{U_m}{Z_1}$  й  $I_{2m} = \frac{U_m}{Z_2}$

Струм у нерозгалуженій частині електричного кола

$$i = I_m \sin(\omega t - \varphi). \quad (4.96)$$

Для визначення струму в нерозгалуженій частині кола треба визначити тільки дві величини, що його характеризують - амплітуду  $I_m$  й початкову фазу  $\varphi$ , оскільки кутова частота струму задана. Значення цих величин можна легко знайти графічно, додавши вектори  $\bar{I}_{1m}$  й  $\bar{I}_{2m}$  один до одного так, як це роблять у механіці при знаходженні вектора результуючої сили

$$\bar{I}_m = \bar{I}_{1m} + \bar{I}_{2m}. \quad (4.97)$$

Вектори вихідних струмів і результат їхнього додавання представлені на векторній діаграмі (рис. 4.19).

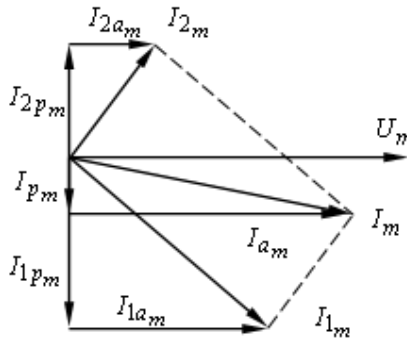


Рис. 4.19

З векторної діаграми шляхом безпосередніх вимірювань можна знайти амплітуду  $I_m$  й початкову фазу  $\varphi$  результуючого струму в нерозгалуженій частині електричного кола.

З розгляду трикутника струмів:

$$I_m = \sqrt{I_{1m}^2 + I_{2m}^2 + 2I_{1m}I_{2m} \cos(\varphi_1 - \varphi_2)};$$

$$\varphi = \arctg \frac{I_{1m} \sin \varphi_1 + I_{2m} \sin \varphi_2}{I_{1m} \cos \varphi_1 + I_{2m} \cos \varphi_2}. \quad (4.98)$$

Даний метод знаходження результуючого струму при великій кількості паралельних віток досить трудомісткий. До того ж графічний метод не забезпечує достатню точність.

Більш зручним та точним є *метод провідностей*. Розглянемо струм у кожній вітці як суму активної й реактивної складових:

$$\bar{I}_{1m} = \bar{I}_{1a_m} + \bar{I}_{1p_m};$$

$$\bar{I}_{2m} = \bar{I}_{2a_m} + \bar{I}_{2p_m}. \quad (4.99)$$

Амплітуди активні й реактивні складові струмів у паралельних вітках:

$$I_{1a_m} = I_{1m} \cos \varphi_1 = \frac{U_m}{Z_1} \cdot \frac{R_1}{Z_1} = U_m \cdot G_1,$$

$$I_{1p_m} = I_{1m} \sin \varphi_1 = \frac{U_m}{Z_1} \cdot \frac{X_L}{Z_1} = U_m \cdot B_L,$$

$$I_{2a_m} = I_{2m} \cos \varphi_2 = \frac{U_m}{Z_2} \cdot \frac{R_2}{Z_2} = U_m \cdot G_2,$$

$$I_{2p_m} = I_{2m} \sin \varphi_2 = \frac{U_m}{Z_2} \cdot \frac{X_C}{Z_2} = U_m \cdot B. \quad (4.100)$$

де  $G_1$  й  $G_2$  - активні провідності відповідно першої й другої віток;

$B_1$  і  $B_2$  - активні провідності відповідно першої й другої віток:

$$G_1 = \frac{R_1}{Z_1^2}; \quad B_L = \frac{X_L}{Z_1^2};$$

$$G_2 = \frac{R_2}{Z_2^2}; \quad B_C = \frac{X_C}{Z_2^2}. \quad (4.101)$$

Тоді амплітуди активної й реактивної складових результуючого струму і його амплітуда:

$$\begin{aligned} I_{a_m} &= I_{a1_m} + I_{a2_m} = G_1 U_m + G_2 U_m = G U_m; \\ I_{p_m} &= I_{p1_m} - I_{p2_m} = B_L U_m - B_C U_m = B U_m; \\ I_m &= \sqrt{I_{a_m}^2 + I_{p_m}^2} = \sqrt{G^2 + B^2} U_m = Y U_m. \end{aligned} \quad (4.102)$$

де  $G = G_1 + G_2$ ;  $B = B_L - B_C$ ;  $Y = \sqrt{G^2 + B^2}$  - відповідно активна, реактивна й повна провідності електричного кола.

Початкова фаза  $\varphi$  результуючого струму

$$\varphi = \arctg \frac{I_{p_m}}{I_{a_m}} = \arctg \frac{B_L - B_C}{G_1 + G_2}. \quad (4.103)$$

#### 4.11 Резонансні явища в колах синусоїдного струму

В електричному колі синусоїдного струму, що містить як індуктивні, так й ємнісні елементи, накладаються два процеси передачі енергії.

Перший виникає між електричним колом і зовнішнім джерелом енергії. Цей процес протікає із частотою *змушених коливань*, що задає джерело енергії.

Другий виникає усередині електричного кола в результаті обміну енергією між індуктивними і ємнісними елементами (накопичувачами енергії). Цей процес відбувається із частотою *власних (вільних) коливань*, що залежить від параметрів елементів розгляданого кола.

У теорії коливань резонансом називається процес змушених коливань із частотою власних коливань. Інтенсивність коливань при такому режимі за інших рівних умов максимальна. Тому резонанс, що відповідає цьому визначенню, умовно називають *амплітудним*.

В електротехніці *резонансом* називають такий режим пасивного кола, що містить як індуктивні, так й ємнісні елементи, при якому струм на вході кола, якщо він є відмінним від нуля, збігається за фазою з вхідною напругою. Тому резонанс, що відповідає цьому визначенню, умовно називають *фазовим*. При резонансі вхідний реактивний опір (вхідна реактивна провідність) кола дорівнює нулю.

нює нулю.

У колах з малими втратами резонансні частоти, що відповідають амплітудному й фазовому резонансам, збігаються.

Найпростіше електричне коло, у якому може виникати коливальний обмін енергією між індуктивним й ємнісним елементами, називають *одиначним коливальним контуром*. Він являє собою замкнуте коло, що містить у собі індуктивний і ємнісний елементи. Розрізняють послідовний й паралельний коливальні контури.

#### 4.12 Послідовний коливальний контур. Резонанс напруг

*Послідовний коливальний контур* являє собою електричне коло, що містить ємнісний й індуктивний елементи, які з'єднанні послідовно із джерелом енергії (рис. 4.20). Наявність резистивного елемента не обов'язкова, хоча звичайно він є присутнім.

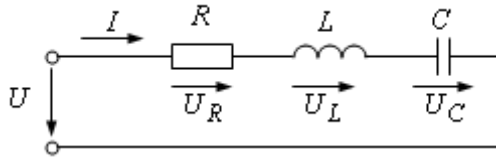


Рис. 4.20

Фазовий зсув для такого електричного кола

$$\varphi = \arctg \frac{X_L - X_C}{R}. \quad (4.104)$$

Оскільки за визначенням резонанс виникає у випадку збігу початкових фаз вхідних напруги й струму ( $\varphi = 0$ ), то умова резонансу в послідовному коливальному контурі

$$X = X_L - X_C = 0, \quad (4.105)$$

або, що те ж саме

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0. \quad (4.106)$$

Є два способи досягнення резонансу:

- *параметричний*, тобто шляхом підбора відповідних параметрів  $L$  й  $C$  при заданій незмінній кутовій частоті  $\omega$  джерела енергії;
- *частотний*, тобто шляхом підбора кутової частоти  $\omega$  джерела енергії при заданих незмінних параметрах  $L$  й  $C$ .

З виразу (4.106) можна визначити кутову частоту, при якій

настає режим резонансу в послідовному контурі. Її називають *резонансною частотою*

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (4.107)$$

При резонансі значення повного опору є мінімальним й чисельно дорівнює активному опору контуру

$$Z_o = \sqrt{R^2 + (X_{Lo} - X_{Co})^2} = R. \quad (4.108)$$

Діюче значення струму при незмінних параметрах контуру в цьому випадку досягає максимального значення

$$I_o = \frac{U}{R}. \quad (4.109)$$

Опори реактивних елементів при резонансній частоті дорівнюють один одному

$$\begin{aligned} X_{Lo} &= \omega_o L = \frac{L}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\frac{L}{C}}; \\ X_{Co} &= \frac{1}{\omega_o C} = \frac{\sqrt{LC}}{C} = \sqrt{\frac{L}{C}}. \end{aligned} \quad (4.110)$$

Величину, що чисельно дорівнює опору індуктивного або ємнісного елемента при резонансі називають *характеристичним (хвильовим) опором* контуру

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (4.111)$$

Одиниця вимірювання хвильового опору *ом (Ом)*.

У режимі резонансу напруги на індуктивному і ємнісному елементі є однаковими й урівноважують одна одну. Тому резонанс у послідовному коливальному контурі називають *резонансом напруг*.

Векторна діаграма для послідовного контуру в режимі резонансу напруг представлена на рис. 4.21. Тут напруги на затискачах реактивних елементів  $U_L$  і  $U_C$  однакові і компенсують один одного, бо їхні вектори перебувають у протифазі (фазовий зсув між ними дорівнює  $\pi$ ). Вся вхідна напруга  $U$  припадає на активний опір  $R$ .

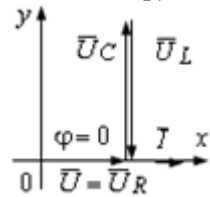


Рис.4.21

Відношення діючого значення напруги на затискачах індуктивного або ємнісного елемента до діючого значення вхідної напруги на затискачах кола при резонансі напруг називають *добротністю контуру*

$$D = \frac{U_{Lo}}{U} = \frac{U_{Co}}{U} = \frac{I_o X_{Lo}}{IR} = \frac{I_o X_{Co}}{IR} = \frac{I_o \rho}{I_o R} = \frac{\rho}{R}. \quad (4.112)$$

З отриманого співвідношення видно, що якщо  $X_{Lo} = X_{Co} > R$  (або що ж саме  $D > 1$ ), та напруга на затискачах реактивних елементів буде перевищувати напругу, що прикладена до вхідних затискачів кола.

Ця властивість дозволяє використовувати послідовний коливальний контур як підсилювач напруги. Обладнання яке працює у режимі резонансу напруг широко застосовують у радіотехніці. Добротність коливальних контурів радіотехнічних апаратів лежить у межах від декількох десятків до декількох сотень, тому в режимі резонансу напруга на реактивних елементах може в багато разів перевищувати прикладене до контуру напруга.

У той же час в силових електричних колах резонанс напруг звичайний явище небажане, тому що виникаючі перенапруги можуть спричинити пробій ізоляції й вивести з ладу електроустаткування. Крім того, таке підвищення напруги необхідно враховувати з погляду техніки безпеки.

Величину, що є зворотною до добротності контуру називають *загасанням контуру*

$$d = \frac{1}{D} = \frac{R}{\rho}. \quad (4.113)$$

Добротність контуру й загасання контуру є безрозмірними величинами.

Розглянемо енергетичні процеси в реактивних елементах контуру при резонансі напруг. У цьому випадку вхідні напруга й струм контуру збігаються за фазою і кутова частота джерела збігається с резонансною частотою  $\omega = \omega_o$

$$\begin{aligned} i &= I_m \sin(\omega_o t + \psi); \\ u &= U_m \sin(\omega_o t + \psi). \end{aligned} \quad (4.114)$$

Миттєве значення енергії, що запасється в магнітному полі

індуктивного елемента в режимі резонансу

$$\begin{aligned} w_L &= \frac{Li^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2} \sin^2(\omega_o t + \psi) = LI^2 \sin^2(\omega_o t + \psi) = \\ &= \frac{LI^2}{2} (1 - \cos 2(\omega_o t + \psi)). \end{aligned} \quad (4.115)$$

Напруга на затискачах ємнісного елемента

$$u_{Co} = I_m \frac{1}{\omega_o C} \sin\left(\omega_o t + \psi - \frac{\pi}{2}\right) = I_m \rho \sin\left(\omega_o t + \psi - \frac{\pi}{2}\right). \quad (4.116)$$

Миттєве значення енергії, що запасасться в електричному полі ємнісного елемента в режимі резонансу

$$\begin{aligned} w_C &= \frac{Cu^2}{2} = \frac{CI_m^2 \rho^2}{2} \sin^2\left(\omega_o t + \psi - \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= \frac{CI_m^2 \rho^2}{2} \cos^2(\omega_o t + \psi) = CI^2 \rho^2 \cos^2(\omega_o t + \psi) = \\ &= \frac{LI^2}{2} (1 + \cos 2(\omega_o t + \psi)). \end{aligned} \quad (4.117)$$

Як видно з отриманих виразів (4.115 і 4.117), енергія, що запасасться в реактивних елементах, має дві складові: постійну й змінну, що змінюється з подвоєною частотою  $2\omega_o$ . Причому змінні складові енергій індуктивного й ємнісного елементів перебувають у протифазі. Тому сумарна енергія, що запасасться в реактивних елементах, постійна

$$w = w_L + w_C = LI^2 = CU \frac{C}{C}. \quad (4.118)$$

Ємнісної й індуктивний елементи контуру при резонансі періодично обмінюються енергією, але без обміну енергією із джерелом живлення. Енергія джерела витрачається тільки на теплові втрати в резистивному елементі.

Припустимо, що в розглянутому електричному колі параметри пасивних елементів  $R$ ,  $L$ ,  $C$  й амплітуда напруги  $U$  на вході контуру лишаються незмінними, а кутова частота джерела змінюється.

Залежності струму, опорів, фазового зсуву між вхідними напругою й струмом, напруг на окремих ділянках кола від частоти

називають *частотними характеристиками контуру*.

Розглянемо графіки частотних характеристик індуктивного й реактивного опорів (рис. 4.22, *а*), реактивного й повного опору контуру (рис. 4.22, *б*) і фазового зсуву між вхідними напругою й струмом (рис. 4.22, *в*). Вони описуються наступними виразами:

$$X_L(\omega) = \omega L;$$

$$X_C(\omega) = \frac{1}{\omega C};$$

$$X(\omega) = \omega L - \frac{1}{\omega C}; \quad (4.119)$$

$$Z(\omega) = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2};$$

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{R} \cdot \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right).$$

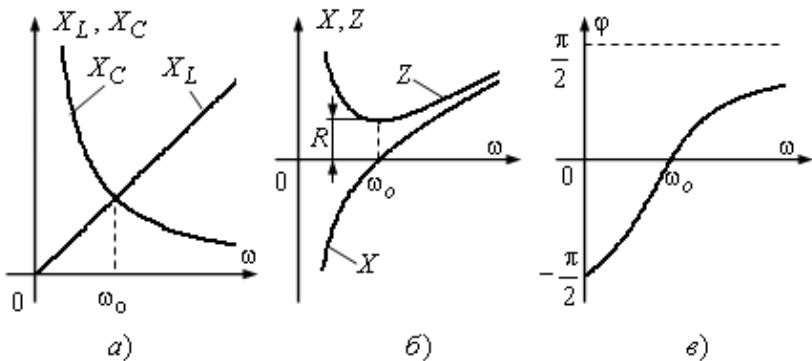


Рис. 4.22

При частотах нижче резонансної  $X_C > X_L$  (рис. 4.22, *а*) й тому повний опір кола має активно-ємнісний характер, а фазовий зсув  $\varphi < 0$  (рис. 4.22, *в*). При частотах вище резонансної  $X_C < X_L$  й тому повний опір кола має активно-індуктивний характер, а фазовий зсув  $\varphi > 0$ .

Розглянемо графіки частотних характеристик вхідного струму й напруги на затискачах резистивного елемента (рис. 4.23, *а*), напруги на затискачах індуктивного і ємнісного елементів (рис. 4.23, *б*). Такі графіки називають *резонансними кривими*. Вони

описуються наступними виразами:

$$I(\omega) = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}};$$

$$U_R(\omega) = \frac{UR}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}};$$

$$U_L(\omega) = \frac{U\omega L}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}};$$

$$U_C(\omega) = \frac{U}{\omega C \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$
(4. 120)

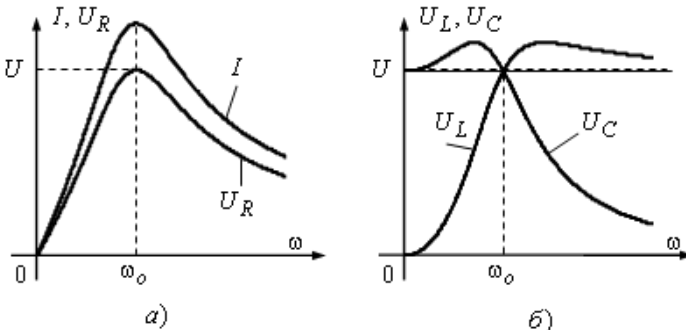


Рис. 4.23

Графік залежності струму від частоти показує, що розглянуте коло має вибірні властивості. Контур має найменший опір для струмів, кутова частота яких близька до його резонансної частоти.

Графік залежності напруги на резистивному елементі від кутової частоти повторює форму графіка залежності струму від кутової частоти (рис. 4.23, *а*). З графіків (рис 4.23, *б*) видно, що напруги на індуктивному і ємнісному елементах мають максимуми однакові за значенням, але зсунені щодо резонансної частоти. Максимум напруги ємнісного елемента зсунений у бік менших частот  $\omega_{C \max} < \omega_0$ , тобто раніш максимуму струму, тому що для одер-

жання значення напруги  $U_C$  необхідно помножити значення струму  $I$  на убутне значення ємнісного опору  $X_C$ . Максимум індуктивного зсунений убік більших частот  $\omega_{L\max} > \omega_o$ , тобто пізніше максимуму струму, тому що для одержання значення напруги  $U_L$  необхідно помножити значення струму  $I$  на зростаюче значення індуктивного опору  $X_L$ .

Максимуми напруг на індуктивному і ємнісному елементах мають місце при частотах

$$\begin{aligned}\omega_{L\max} &= \omega_o \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{R^2 C}{2L}}} = \omega_o \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{1}{2D}}}; \\ \omega_{C\max} &= \omega_o \sqrt{1 - \frac{R^2 C}{L}} = \omega_o \sqrt{1 - \frac{1}{D}}.\end{aligned}\quad (4.121)$$

Значення максимумів напруг на індуктивному і ємнісному елементах й їхній зсув залежать від добротності контуру. Зі збільшенням добротності максимальні значення збільшуються, а їхні частоти прагнуть до резонансної частоти.

Для оцінки впливу значень параметрів на форму резонансній кривій  $I(\omega)$  виразимо дані величини у відносних одиницях, використовуючи як базисні значення: для струму - струм у режимі резона-

нсу  $I_o = \frac{U}{R}$ , для кутових частот - резонансну частоту  $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .

Перетворимо вираз повного опору кола

$$\begin{aligned}Z &= \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega L D R}{D R} - \frac{D R}{\omega C D R}\right)^2} = \\ &= \sqrt{R^2 + D^2 R^2 \left(\frac{\omega L R}{\sqrt{\frac{L}{C}} R} - \frac{R}{\omega C \sqrt{\frac{L}{C}} R}\right)^2} = \\ &= R \sqrt{1 + D^2 \left(\omega \sqrt{LC} - \frac{1}{\omega \sqrt{LC}}\right)^2} = R \sqrt{1 + D^2 \left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega}\right)^2}.\end{aligned}\quad (4.122)$$

Відносне значення струму в контурі

$$\frac{I}{I_o} = \frac{U \cdot R}{Z \cdot U} = \frac{1}{\sqrt{1 + D^2 \left( \frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega} \right)^2}}. \quad (4.123)$$

Чим більше добротність контуру (тобто чим менше активний опір контуру при незмінних інших параметрах кола), тим більш гострою стає форма кривої. Чим гостріше резонансна крива, тим краще вибірні властивості контуру. На рис. 4.24 представлені резонансні криві  $\frac{I}{I_o} \left( \frac{\omega}{\omega_o} \right)$  для контурів, добротності яких розрізняються у два рази.

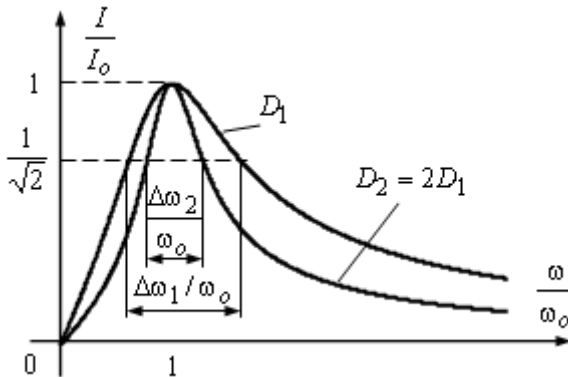


Рис. 4.24

Для оцінки вибірних властивостей кола вводять умовне поняття *смуга пропускання контуру*, тобто смуга частот, у межах активна потужність, яку споживає контур, і вхідний струм контуру задовольняють умовам

$$\begin{aligned} \frac{P}{P_o} &\geq \frac{1}{2}; \\ \frac{I}{I_o} &\geq \frac{1}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \quad (4.124)$$

де  $P_o$  - активна потужність, яку споживає контур у резонансному режимі.

Для визначення відносної смуги пропускання покладемо в рівнянні (4.124)  $\frac{I}{I_o} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Дістанемо  $1 + D^2 \left( \frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega} \right)^2 = 2$ . Додатні корені даного квадратного рівняння  $\frac{\omega_{1,2}}{\omega_o} = \pm \frac{1}{2D} + \sqrt{\frac{1}{4D^2} + 1}$ .

Отже, відносна смуга пропускання

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_o} = \frac{\omega_2}{\omega_o} - \frac{\omega_1}{\omega_o} = \frac{1}{D} = d. \quad (4.125)$$

### 4.13 Паралельний коливальний контур. Резонанс струмів

*Паралельний коливальний контур* являє собою електричне коло, що містить ємнісний й індуктивний елементи, які з'єднані паралельно з джерелом енергії (рис. 4.25). Наявність резистивних елементів не обов'язкова, хоча звичайно вони присутні.

Фазовий зсув для такого електричного кола

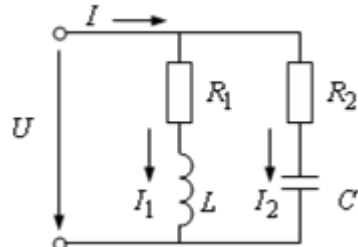


Рис. 4.25

$$\varphi = \arctg \frac{B_L - B_C}{G}. \quad (4.126)$$

Оскільки за визначенням резонанс виникає у випадку збігу початкових фаз вхідних напруги й струму ( $\varphi = 0$ ), то умова резонансу в паралельному коливальному контурі

$$B = B_L - B_C = 0. \quad (4.127)$$

Активні й реактивні провідності паралельних віток:

$$G_1 = \frac{R_1}{Z_1^2} = \frac{R_1}{R_1^2 + \omega^2 L^2}; \quad B_L = \frac{X_L}{Z_1^2} = \frac{\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2};$$

$$G_2 = \frac{R_2}{Z_2^2} = \frac{R_2}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}; \quad B_C = \frac{X_{C2}}{Z_2^2} = \frac{1}{\omega C \left( R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2} \right)}. \quad (4.128)$$

За умовою резонансу

$$\frac{\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} = \frac{1}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}. \quad (4.129)$$

Розв'язавши рівняння (4.129), одержимо вираз для резонансної кутової частоти:

$$\omega_o' = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{\frac{L}{C} - R_1^2}{\frac{L}{C} - R_2^2}} = \omega_o \sqrt{\frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}}. \quad (4.130)$$

Аналіз виразу (4.130) дозволяє відзначити ряд особливостей явища резонансу в паралельному контурі:

- резонансна частота залежить не тільки від параметрів реактивних елементів контуру, але й від активних опорів  $R_1$  й  $R_2$ . Тому резонансу в паралельному контурі можна домогтися зміною п'яти параметрів. Причому, зміною індуктивності або ємності в контурі можна створити два резонансних режими. У цьому можна переконатися проаналізувавши умову резонансу. Вираз (4.129) відносно  $L$  або  $C$  є квадратним рівнянням, і при певних співвідношеннях інших параметрів може дати два речовинних розв'язання.

- резонанс можливий лише, якщо обидва активні опори не менші або обидва не більші ніж хвильовий опір. Якщо ця умова не виконана, то кутової частоти, при якій мав би місце резонанс, не існує (тому що значення підкореневого виразу в (4.130) у цьому випадку від'ємне).

Векторна діаграма для паралельного контуру в режимі резонансу представлена на рис. 4.26. При її побудові використовуємо активні й реактивні складові струмів

$$\begin{aligned} I_{a1} &= UG_1; & I_{p1} &= UB_L; \\ I_{a2} &= UG_2; & I_{p2} &= UB_C. \end{aligned} \quad (4.131)$$

Оскільки реактивні складові струмів  $I_{1p}$  і  $I_{2p}$  дорівнюють одна одній і компенсують одна одну, бо їхні вектори перебувають у протифазі (фазовий зсув між ними дорівнює  $\pi$ ), то резонанс у паралельному коливальному контурі одержав назву *резонанс струмів*.

У результаті компенсації реактивних складових струмів вхідний струм у нерозгалуженій частині паралельного коливального контуру є сумою лише активних складових струмів у паралельних вітках.

З векторної діаграми (рис. 4.26) випливає, що при резонансі струмів вхідний струм паралельного коливального контуру може бути значно менше струмів у вітках.

Ця властивість дозволяє використати паралельний коливальний контур як підсилювач струму.

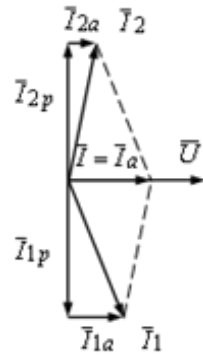


Рис. 4.26

Опір паралельного контуру при резонансі струмів

$$Z_o = R_o = \frac{R_1 R_2 + \rho^2}{R_1 + R_2}. \quad (4.132)$$

Струм у нерозгалуженій частині паралельного контуру при резонансі струмів

$$I_o = \frac{U}{R_o}. \quad (4.133)$$

Добротність паралельного контуру

$$D = \frac{\rho}{R_1 + R_2}. \quad (4.134)$$

Енергетичні процеси в паралельному коливальному контурі в резонансному режимі такі ж як й у послідовному контурі: сумарна енергія, що запасється в магнітному й електричному полях кола постійна й дорівнює максимальній енергії індуктивного (або ємнісного) елемента. Між індуктивним й ємнісним елементами відбувається коливальний обмін енергією. Джерело енергії в цьому процесі не бере участь, воно тільки віддає енергію активним елементам контуру.

При виконанні умови  $R_1 = R_2 \neq \rho$ , резонансна частота у паралельному коливальному контурі така сама, як при резонансі в послідовному коливальному контурі

$$\omega_o' = \omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (4.135)$$

При виконанні умови  $R_1 = R_2 = \rho$ , резонанс спостерігається при будь-якій частоті. Дійсно активні й реактивні провідності паралельних віток в цьому випадку

$$\begin{aligned}
 G_1 &= \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{\frac{L}{C} + \omega^2 L^2} = \frac{\sqrt{LC}}{L + \omega^2 L^2 C}; \\
 B_L &= \frac{\omega L}{\frac{L}{C} + \omega^2 L^2} = \frac{\omega C}{1 + \omega^2 LC}; \\
 G_2 &= \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{\frac{L}{C} + \frac{1}{\omega^2 C^2}} = \frac{\sqrt{LC} \omega^2 C}{\omega^2 LC + 1}; \\
 B_C &= \frac{\frac{1}{\omega C}}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} = \frac{\omega C}{\omega^2 LC + 1}.
 \end{aligned} \tag{4.136}$$

З виразів (4.136) витікає, що еквівалентна реактивна провідність кола дорівнює нулю, а еквівалентна повна провідність кола дорівнює еквівалентній активній й не залежить від частоти.

$$Y = G = G_1 + G_2 = \frac{\sqrt{LC}}{L + \omega^2 L^2 C} + \frac{\sqrt{LC} \omega^2 C}{L + \omega^2 L^2 C} = \sqrt{\frac{C}{L}} = \rho. \tag{4.137}$$

Отже, струм збігається за фазою з напругою при будь-якій частоті і його діюче значення

$$I = \frac{U}{\rho}. \tag{4.138}$$

В ідеальному паралельному коливальному контурі активні опори втрати відсутні й  $R_1 = R_2 = 0$  (рис. 4.27).

Резонансна частота ідеального паралельного контуру збігається з резонансною частотою послідовного контуру (4.105).

У цьому окремому випадку  $I_{a1} = I_{a2} = 0$ . Тому при резонансі

$I_1 = I_2 = I_{p1} = I_{p2}$ , а вхідний струм  $I = I_1 + I_2 = I_{p1} - I_{p2} = 0$ , як представлено на векторній діаграмі (рис. 4.28).

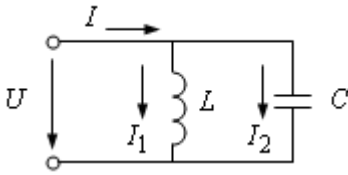


Рис. 4.27

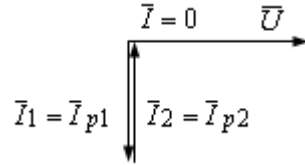


Рис. 4.28

Посилення струму в цьому випадку прагне в нескінченність.

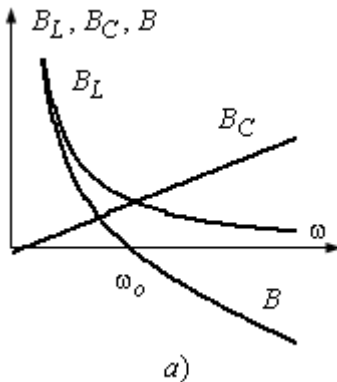
Розглянемо графіки частотних характеристик реактивних провідностей віток і вхідної провідності для ідеального паралельного контуру (рис. 4.29, а), а також резонансну криву вхідного струму (рис. 4.29, б). Вони задаються наступними виразами:

$$B_L(\omega) = \frac{1}{\omega L};$$

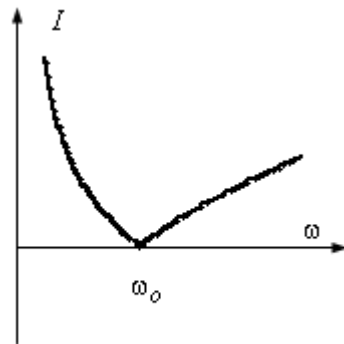
$$B_C(\omega) = \omega C;$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\omega L} - \omega C; \quad (4.139)$$

$$I(\omega) = \left| \frac{1}{\omega L} - \omega C \right| \cdot U$$



а)



б)

Рис. 4.29

Резонанс струмів на відміну від резонансу напруг - явище безпечне для електроенергетичних установок. Тому що струми в

вітках взаємно незалежні, то їхні значення обумовлюються прикладеною напругою й повними опорами віток (відповідно до закону Ома).

#### 4.14 Підвищення коефіцієнта потужності споживачів електричної енергії.

Для кращого використання обладнання повинне працювати з можливо більш високим коефіцієнтом потужності. Розроблювачі електроустановок прагнуть забезпечити його максимальне значення. Наявність в електричних мережах реактивних струмів обумовлює додаткові втрати активної потужності в трансформаторах, генераторах електростанцій, додаткові втрати напруги, вимагає збільшення номінальної потужності трансформаторів. Високий коефіцієнт потужності навантаження потрібний також для зниження втрат при передачі енергії.

Струм у лінії електропередачі (ЛЕП) обумовлюється навантаженням

$$I = \frac{P}{U \cos \varphi}. \quad (4.140)$$

Втрати енергії в лінії передачі

$$\Delta P = R_L I^2 = R_L \frac{P^2}{U^2 \cos^2 \varphi}, \quad (4.141)$$

де  $R_L$  - активний опір лінії.

Отже, втрати в лінії передачі дуже сильно залежать від  $\cos \varphi$ , тому що вони обернено пропорційні квадрату його значення. Чим нижче коефіцієнт потужності, тим дорожче обходиться електропостачання.

Задача підвищення коефіцієнта потужності особливо істотна для енергоємних споживачів, наприклад металургійних комбінатів.

Вхідний опір більшості споживачів електричної енергії має активно-індуктивний характер ( $\varphi > 0$ ). Основними споживачами реактивної потужності індуктивного характеру на промислових підприємствах є асинхронні двигуни (60-65 % загального її споживання), трансформатори, включаючи зварювальні (20-25%), вентиляльні перетворювачі, реактори та інше.

З метою підвищення коефіцієнта потужності здійснюють ряд

заходів:

- замінюють асинхронні двигуни, які недовантажені, двигунами меншої потужності (для асинхронного двигуна в режимі холостого ходу  $\cos \varphi_o = 0,2 \dots 0,3$ , а в режимі номінального навантаження  $\cos \varphi_n = 0,85 \dots 0,9$ );

- замінюють трансформатори й інше електроустаткування старих конструкцій на нові, більш досконалі, з меншими втратами на перемагнічування;

- створюють раціональні схеми електропостачання за рахунок зменшення кількості щаблів трансформації;

- застосовують синхронні двигуни замість асинхронних, коли це припустимо за умовами технологічного процесу, (бо у синхронних двигунів у режимі перезбудження  $\varphi < 0$ );

- додатково підмикають до споживачів застосовуються спеціальні компенсуючі пристрої, що є джерелами реактивної енергії смісного характеру: конденсаторні батареї відповідної ємності та вентильні статичні джерела реактивної потужності.

Розглянемо кілька прикладів.

*Приклад. 4.1.* Нехай є споживач електричної енергії, схема заміщення якого представлена на рис. 4.30. Діюче значення синусоїдальної напруги на вході  $U = 100 \text{ В}$ , частота  $f = 50 \text{ Гц}$ , а опори елементів схеми заміщення  $R = 30 \text{ Ом}$ ;  $X_L = 40 \text{ Ом}$ .

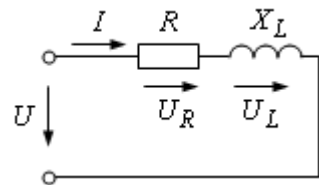


Рис. 4.30

*Розв'язання.* Повний опір електричного кола (навантаження)

$$Z_l = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50 \text{ Ом}.$$

Діючі значення струму й напруги на ідеальних елементах

$$I = \frac{U}{Z_n} = \frac{100}{50} = 2 \text{ А};$$

$$U_R = IR = 2 \cdot 30 = 60 \text{ В};$$

$$U_L = IX_L = 2 \cdot 40 = 80 \text{ В}.$$

Кут фазового зсуву між напругою й струмом на вході

$$\varphi_l = \arctg \frac{X_L}{R} = \arctg \frac{40}{30} = 53,1^\circ.$$

Коефіцієнт потужності навантаження (і всього кола)

$$\cos\varphi_I = \frac{R}{Z} = \frac{30}{50} = 0,6.$$

Повна, активна й реактивна потужності, які віддаються джерелом енергії навантаженню

$$S = S_I = UI = 100 \cdot 2 = 200 \text{ ВА};$$

$$P = P_I = I^2 R = 2^2 \cdot 30 = 120 \text{ Вт};$$

$$Q = I^2 X_L = 2^2 \cdot 40 = 160 \text{ вар}.$$

*Приклад 4.2.* З метою підвищення коефіцієнта потужності в електричному колі із прикладу 4.1, підмикаємо послідовно з навантаженням конденсатор. Параметри джерела енергії й навантаження залишимо незмінними (рис. 4.31).

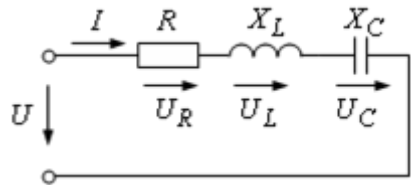


Рис. 4.31

*Розв'язання.* З умови резонансу напруг опір конденсатора (ємнісного елемента)

$$X_C = X_L = 40 \text{ Ом}.$$

Його ємність

$$C_1 = \frac{1}{2\pi f X_C} = \frac{1}{2 \cdot 50 \cdot 3,14 \cdot 40} = 79,6 \cdot 10^{-6} \text{ Ф} = 79,6 \text{ мкФ}.$$

Повний опір ділянки кола

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{30^2 + (40 - 40)^2} = 30 \text{ Ом}.$$

Кут фазового зсуву між напругою й струмом на вході електричного кола

$$\varphi = \arctg \frac{X_L - X_C}{R} = \arctg \frac{40 - 40}{30} = 0^\circ.$$

Коефіцієнт потужності кола

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{30}{30} = 1.$$

Діючі значення струму й напруг на елементах електричного

кола й напруги на навантаженні

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{100}{30} = 3,33 \text{ A};$$

$$U_R = IR = 3,33 \cdot 30 = 99,9 \text{ B};$$

$$U_L = IX_L = 3,33 \cdot 40 = 133,2 \text{ B};$$

$$U_C = IX_C = 3,33 \cdot 40 = 133,2 \text{ B};$$

$$U_n = \sqrt{U_R^2 + U_L^2} = \sqrt{99,9^2 + 133,2^2} = 166,5 \text{ B}.$$

Повна, активна й реактивна потужності, які джерело енергії віддає електричному колу

$$S = UI = 100 \cdot 3,33 = 333; \text{ BA}$$

$$P = I^2 R = 3,33^2 \cdot 30 = 333 \text{ Bm};$$

$$Q = I^2 (X_L - X_C) = 3,33^2 \cdot (40 - 40) = 160 \text{ вар}.$$

Повна, активна й реактивна потужності навантаження

$$S_l = U_l I = 166,5 \cdot 3,33 = 554,4 \text{ BA};$$

$$P_l = I^2 R = 3,33^2 \cdot 30 = 332,7 \text{ Bm};$$

$$Q_l = I^2 X_L = 3,33^2 \cdot 40 = 443,6 \text{ вар}$$

Зіставляючи отримані результати з результатами, які отримані в прикладі 4.1, приходимо до наступних висновків:

- зросли струм й активна потужність, що джерело енергії віддає в електричне коло;
- напруга на навантаженні перевищує напругу джерела;
- збільшилася потужність, яку споживає навантаження.

*Приклад 4.3.* З метою підвищення коефіцієнта потужності в електричному колі із приклада 4.1, підмикаємо паралельно з навантаженням конденсатор. Параметри джерела енергії й навантаження залишимо незмінними (рис. 4.32).

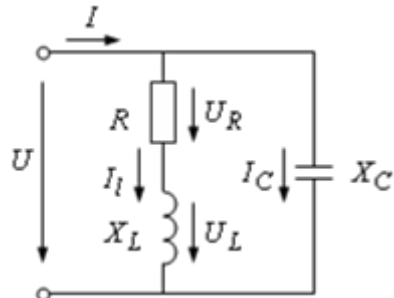


Рис. 4.32

*Розв'язання.* Оскільки навантаження, так само як й у прикладі 4.1, підмікнено безпосередньо до джерела енергії, то діючі значення струму й напруги й потужність, що воно споживає, не змінилося в порівнянні із прикладом 4.1.

Активна й реактивна провідності навантаження

$$G_l = \frac{R}{Z_n^2} = \frac{30}{50^2} = 0,012 \text{ Сим};$$

$$B_L = \frac{X_L}{Z_n^2} = \frac{40}{50^2} = 0,016 \text{ Сим}$$

З умови резонансу струмів реактивна провідність конденсатора (ємнісного елемента)

$$B_C = B_L = 0,016 \text{ Сим.}$$

Його ємність

$$C = \frac{B_C}{2\pi f X_C} = \frac{0,016}{2 \cdot 50 \cdot 3,14} = 50,9 \cdot 10^{-6} \text{ Ф} = 50,9 \text{ мкФ}.$$

Активна провідність вітки, що складається з одного ємнісного елемента, дорівнює нулю.

Еквівалентні активної, реактивна й повна провідності електричного кола

$$G = G_l = 0,012 \text{ Сим};$$

$$B = B_L - B_C = 0,016 - 0,016 = 0 \text{ Сим};$$

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2} = \sqrt{0,012^2 + 0^2} = 0,012 \text{ Сим.}$$

Кут фазового зсуву між напругою й струмом на вході кола

$$\varphi = \arctg \frac{B}{G} = \arctg \frac{0}{0,012} = 0^\circ.$$

Коефіцієнт потужності електричного кола

$$\cos \varphi = \frac{G}{Y} = \frac{0,012}{0,012} = 1.$$

Діюче значення струму на вході кола

$$I = UY = 100 \cdot 0,012 = 1,2 \text{ А.}$$

Повна, активна й реактивна потужності, які джерело енергії

віддає в електричне коло

$$S = UI = 100 \cdot 1,2 = 120 \text{ ВА};$$

$$P = U^2 G = 100^2 \cdot 0,012 = 120 \text{ Вт};$$

$$Q = U^2 B = 100^2 \cdot 0 = 0 \text{ вар.}$$

Зіставляючи результати прикладів 4.1 і 4.3, дійдемо висновку, що при резонансі струмів:

- зменшуються загальний струм і повна потужність, які джерело енергії віддає в електричне коло;

- для навантаження струм, напруга й потужність яки вона споживає залишаються такими ж, як й у випадку без компенсації фазового зсуву (приклад 4.1).

Звичайно на підприємствах коефіцієнт потужності доводять до значення  $\cos \varphi = 0,92 \dots 0,95$ . Подальше збільшення коефіцієнта потужності недоцільно через велике значення необхідної для цього ємності конденсаторних батарей й їхніх габаритних розмірів. Необхідна ємність конденсаторних батарей у цьому випадку визначається зі співвідношення

$$C = \frac{P}{\omega U^2} (\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_2). \quad (4.142)$$

де  $\varphi_1, \varphi_2$  - відповідно кути фазового зсуву до та після підвищення коефіцієнту потужності.

Економічно вигідно підмикати конденсатори на можливо більш високу напругу, тому що це дозволяє застосовувати конденсатори меншої ємності. Індивідуальна компенсація за допомогою конденсаторів доцільна лише для потужних споживачів із відносно низьким коефіцієнтом потужності й великою кількістю годин роботи в році.

#### 4.15 Система рівняння для миттєвих значень струмів і напруг у складних колах синусоїдного струму

Припустимо, що є схема складного розгалуженого електричного кола синусоїдного струму з декількома джерелами енергії, закони зміни й додатні напрямки яких задані (рис. 4.33). Також відомі активні опори, індуктивності і ємності пасивних елементів електричного кола. Необхідно визначити струми у всіх вітках електричного кола.

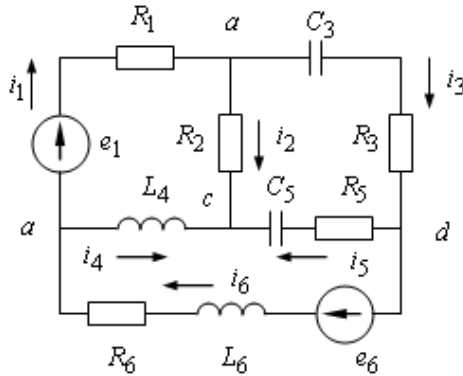


Рис. 4.33

Як і для кіл постійного струму, розв'язання варто почати з вибору додатних напрямків струмів.

Як видно зі схеми електричного кола кількість невідомих струмів шість (що відповідає кількості віток, які не містять джерел струму), отже, необхідно скласти шість незалежних рівнянь на підставі законів Кірхгофа.

Складаємо три рівняння за першим законом Кірхгофа для вузлів  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Інші три рівняння складаємо за другим законом Кірхгофа для трьох незалежних контурів електричного кола. Напрямок обходу контурів прийнято за годинною стрілкою.

$$\begin{cases} i_1 + i_4 - i_6 = 0; \\ i_2 + i_3 - i_1 = 0; \\ -i_2 - i_4 - i_5 = 0; \\ u_{R_1} + u_{R_2} - u_{L_4} = e_1; \\ u_{C_3} + u_{R_3} + u_{R_5} + u_{C_5} - u_{R_2} = 0; \\ u_{L_4} - u_{C_5} - u_{R_5} + u_{L_6} + u_{R_6} = e_6. \end{cases} \quad (4.143)$$

Напруги й струми для пасивних елементів електричного кола зв'язані наступними рівняннями:

$$\begin{aligned} u_{R_1} &= R_1 i_1; & u_{R_2} &= R_2 i_2; & u_{R_3} &= R_3 i_3; \\ u_{R_5} &= R_5 i_5; & u_{R_6} &= R_6 i_6; & u_{L_4} &= L_4 \frac{di_4}{dt}; \\ u_{L_6} &= L_6 \frac{di_6}{dt}; & u_{C_3} &= \frac{1}{C_3} \int i_3 dt; & u_{C_5} &= \frac{1}{C_5} \int i_5 dt. \end{aligned} \quad (4.144)$$

З обліком цього система рівнянь (4.143) матиме вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} i_1 + i_4 - i_6 = 0; \\ i_2 + i_3 - i_1 = 0; \\ -i_2 - i_4 - i_5 = 0; \\ R_1 i_1 + R_2 i_2 - L_4 \frac{di_4}{dt} = e_1; \\ \frac{1}{C_3} \int i_3 dt + R_3 i_3 + R_5 i_5 + \frac{1}{C_5} \int i_5 dt - R_2 i_2 = 0; \\ L_4 \frac{di_4}{dt} - \frac{1}{C_5} \int i_5 dt - R_5 i_5 + L_6 \frac{di_6}{dt} + R_6 i_6 = e_6. \end{array} \right. \quad (4.145)$$

Отримана система диференціальних рівнянь у загальному випадку дозволяє розрахувати струми електричного кола при довільній їхній зміні, у тому числі й зміні за синусоїдним законом.

Значення струмів і напруг лінійного кола синусоїдного струму можуть бути знайдені шляхом безпосереднього розв'язання системи диференціальних рівнянь, однак навіть для відносно простих кіл ця задача виявляється досить трудомісткою. На практиці аналіз таких кіл звичайно виконують за допомогою символічного методу (методу комплексних амплітуд).

#### 4.16 Подання електричних величин, які змінюються за синусоїдним законом комплексними числами

Як було зазначено вище в підрозділі 4.4, електричні величини, які змінюються за синусоїдним законом, можна представити у вигляді векторів. Будь який вектор на площині можна представити сукупністю двох координат: або в прямокутній декартовій системі координат двома проєкціями на осі, або в полярній системі координат у вигляді модуля (довжини) і кута з віссю, що прийнята за початок відліку (аргументу).

З курсу математики відомо, що комплексне число  $X$  може бути записане в показовій або алгебраїчній формі:

$$\underline{X} = X e^{j\psi} = X (\cos \varphi + j \sin \varphi) = X' + jX'' = \operatorname{Re}(\underline{X}) + j \operatorname{Im}(\underline{X}), \quad (4.146)$$

де  $X$  - модуль комплексного числа;  $e$  - основа натурального логарифма;  $j$  - уявна одиниця ( $j = \sqrt{-1}$ );  $\varphi$  - аргумент комплексного чис-

ла;  $X'$  й  $\text{Re}(X)$  - дійсна частина комплексного числа;  $X''$  й  $\text{Im}(X)$  - уявна частина комплексного числа.

Це дає можливість представити електричні величини комплексними числами.

Наприклад, вектор напруги  $\bar{U}_m$  відповідає комплексному числу  $\underline{U}_m$ , модуль якого дорівнює  $U_m$  й аргумент – куту  $\psi_u$ . Це комплексне число  $\underline{U}_m$  називають *комплексною амплітудою* напруги. Як будь-яке комплексне число комплексну амплітуду можна представити в показовій, тригонометричній й алгебраїчній формах:

$$\begin{aligned}\underline{U}_m &= U_m e^{j\psi_u} = U_m (\cos \psi_u + j \sin \psi_u) = \\ &= U_m' + jU_m'' = \text{Re}(\underline{U}_m) + j \text{Im}(\underline{U}_m).\end{aligned}\quad (4.147)$$

На практиці довжини векторів прийнято брати рівними в масштабі діючому значенню відповідної електричної величини. Під *комплексним діючим значенням* напруги (*комплексною напругою*) розуміють величину:

$$\underline{U} = \frac{\underline{U}_m}{\sqrt{2}} = \frac{U_m e^{j\psi_u}}{\sqrt{2}} = U e^{j\psi_u} . \quad (4.148)$$

Алгебраїчну й показову форми запису комплексних чисел використовують у розрахунках. Тригонометрична форма є просто розгорнутим записом переходу від показової форми до алгебраїчної. Множник виду  $e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$  називають *оператором повороту*. Він являє собою одиничний вектор, що повернуто щодо дійсної осі на кут  $\varphi$ . Назва оператора пояснюється тим, що множення будь-якого вектора на оператор повороту призводить до розвороту цього вектора на кут  $\varphi$ . Дійсні й уявні числа  $+1$ ;  $-1$ ;  $+j$ ;  $-j$  можна розглядати як окремі випадки оператор повороту:  $1 = e^{j0}$ ;  $-1 = e^{j\pi}$ ;  $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$ ;  $-j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$ .

При розрахунках використовують відомі з курсу математики правила дій з комплексними числами.

Перехід від показової форми запису до алгебраїчної

$$\begin{aligned}X' &= X \cos \varphi; \\ X'' &= X \sin \varphi.\end{aligned}\quad (4.149)$$

Перехід від алгебраїчної форми запису до показового

$$X = \sqrt{(X')^2 + (X'')^2};$$

$$\varphi = \begin{cases} \varphi = \arctg \frac{X''}{X'}, \text{ якщо } X' \neq 0, X'' > 0; \\ \varphi = \arctg \frac{X''}{X'} \pm \frac{\pi}{2}, \text{ якщо } X' \neq 0, X'' < 0; \\ \varphi = \frac{\pi}{2}, \text{ якщо } X' = 0, X'' > 0; \\ \varphi = \frac{\pi}{2}, \text{ якщо } X' = 0, X'' < 0. \end{cases} \quad (4.150)$$

Алгебраїчну форму запису комплексних чисел використовують при алгебраїчному підсумовуванні

$$(X'_1 + jX''_1) \pm (X'_2 + jX''_2) = (X'_1 \pm X'_2) + j(X''_1 \pm X''_2). \quad (4.151)$$

При множенні, діленні й піднесенні до квадрату також можна використати алгебраїчну форму запису комплексних чисел

$$\begin{aligned} (X'_1 + jX''_1) \cdot (X'_2 + jX''_2) &= \\ &= (X'_1 X'_2 - X''_1 X''_2) + j(X'_1 X''_2 + X''_1 X'_2); \\ (X' + jX'')^2 &= (X')^2 - (X'')^2 + j2X'X''; \\ (X'_1 + jX''_1) : (X'_2 + jX''_2) &= \\ &= \frac{X'_1 X'_2 + X''_1 X''_2}{(X'_2)^2 + (X''_2)^2} + j \frac{X'_2 X''_1 - X''_2 X'_1}{(X'_2)^2 + (X''_2)^2}, \end{aligned} \quad (4.152)$$

але більш зручною в цих випадках є показова форма запису комплексних чисел

$$\begin{aligned} X_1 e^{j\varphi_1} \cdot X_2 e^{j\varphi_2} &= X_1 X_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}; \\ (X e^{j\varphi})^2 &= X^2 e^{j2\varphi}; \\ X_1 e^{j\varphi_1} : X_2 e^{j\varphi_2} &= \frac{X_1}{X_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}. \end{aligned} \quad (4.153)$$

Якщо комплексне число має вигляд  $\underline{X} = X' + jX'' = X e^{j\varphi}$ , то комплексне число  $\underline{X}^* = X' - jX'' = X e^{-j\varphi}$  називають *спряженим комплексним числом*.

При додаванні або множенні спряжених комплексних чисел результатом є дійсні числа

$$\begin{aligned}(X' + jX'') + (X' - jX'') &= 2X'; \\ (X' + jX'') \cdot (X' - jX'') &= (X')^2 + (X'')^2.\end{aligned}\tag{4.154}$$

#### 4.17 Символічний метод розрахунку кіл синусоїдного струму

Даний метод ґрунтується на ідеї функціонального перетворення, при якому операції над вихідними функціями (оригіналами) замінюють більш простими операціями над деякими новими функціями (зображеннями).

Сутність методу комплексних амплітуд полягає в тому, що при розрахунку лінійних кіл синусоїдного струму переходять від інтегро-диференціальних рівнянь, які складені для миттєвих значень, до лінійних алгебраїчних рівнянь, які складені для комплексів амплітуд струмів і напруг. Цей перехід виконують наступним чином:

- миттєве значення струму  $i$  замінюють комплексною амплітудою струму  $I_m$ ;

- миттєве значення напруги на резистивному елементі, що дорівнює  $Ri$  – комплексною амплітудою напруги  $RI_m$ , що збігається зі струмом по фазі;

- миттєве значення напруги на індуктивному елементі, що дорівнює  $L \frac{di}{dt}$  – комплексною амплітудою напруги  $j\omega LI_m$ , що ви-

переджає струм на  $\frac{\pi}{2}$  (про це свідчить множник  $j$ );

- миттєве значення напруги на ємнісному елементі, що дорівнює  $\frac{1}{C} \int idt$  – комплексною амплітудою напруги  $-\frac{j}{\omega C} I_m$ , що відстає від струму на  $\frac{\pi}{2}$  (про це свідчить множник  $(-j)$ );

тає від струму на  $\frac{\pi}{2}$  (про це свідчить множник  $(-j)$ );

- миттєве значення ЕРС  $e$  – комплексною амплітудою ЕРС  $E_m$ .

Цей метод є найбільш ефективним для розрахунку складних кіл синусоїдального струму.

### 4.18 Закон Ома в комплексній формі. Повний комплексний опір. Повна комплексна провідність

Розглянемо електричне коло з послідовним з'єднанням резистивного, індуктивного і ємнісного елементів (рис. 4.34).

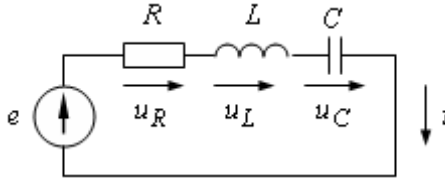


Рис. 4.34

На підставі другого закону Кірхгофа для миттєвих значень

$$u_R + u_L + u_C = e, \quad (4.155)$$

або з урахуванням співвідношень між напругою й струмом для пасивних елементів електричного кола

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt = e. \quad (4.156)$$

Перейдемо до комплексних амплітудних значень як це представлено в підрозділі 4.17

$$RL_m + j\omega LL_m - j \frac{1}{\omega C} I_m = (R + jX_L - jX_C) I_m = \underline{E}_m. \quad (4.157)$$

Звідси маємо

$$I_m = \frac{\underline{E}_m}{R + jX_L - jX_C}. \quad (4.158)$$

Якщо поділити ліву й праву частини рівняння (4.158) на  $\sqrt{2}$  одержимо рівняння, що дозволяє знайти комплексне діюче значення струму

$$I = \frac{\underline{E}}{R + jX_L - jX_C}. \quad (4.159)$$

Закон Ома в символічній формі запису

$$\underline{U} = (R + jX_L - jX_C) I = \underline{Z} I, \quad (4.160)$$

де -  $\underline{Z} = R + jX_L - jX_C$  - комплексний повний опір в алгебраїчній формі, Ом.

Взаємні переходи для комплексного повного опору з алгебраїчної форми в показову й навпаки:

$$\begin{aligned}\underline{Z} &= R + jX_L - jX_C = \\ &= \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} e^{j \arctg \frac{X_L - X_C}{R}} = Ze^{j\varphi}; \quad (4.161) \\ \underline{Z} &= Ze^{j\varphi} = Z \cos \varphi + j \sin \varphi = R + jX = R + j(X_L - X_C),\end{aligned}$$

де  $\varphi = \arctg \frac{X_L - X_C}{R}$  - аргумент комплексного повного опору (він же кут фазового зсуву між напругою й струмом).

Величину, що є зворотною до комплексу повного опору називають *комплексною повною провідністю*

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = G - jB = Ye^{-j\varphi}. \quad (4.162)$$

Виразимо комплексну повну провідність через активний і реактивний опори

$$\begin{aligned}\underline{Y} &= \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + j(X_L - X_C)} = \\ &= \frac{R - j(X_L - X_C)}{(R + j(X_L - X_C))(R - j(X_L - X_C))} = \frac{R - j(X_L - X_C)}{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \quad (4.163) \\ &= \frac{R - j(X_L - X_C)}{Z^2} = \frac{R}{Z^2} - j \frac{X_L - X_C}{Z^2} = G - jB.\end{aligned}$$

Тоді:

$$\begin{aligned}G &= \frac{R}{Z^2}; & B &= \frac{X_L - X_C}{Z^2}; \\ B_L &= \frac{X_L}{Z^2}; & B_C &= \frac{X_C}{Z^2}; \\ Y &= \sqrt{G^2 + B^2}; & \varphi &= \arctg \frac{B}{G}.\end{aligned} \quad (4.164)$$

При використанні комплексної повної провідності закон Ома має вигляд:

$$\underline{I} = \underline{YU}, \quad (4.165)$$

або

$$\underline{I} = \underline{U}G - j\underline{U}B = \underline{I}_a + j\underline{I}_p, \quad (4.166)$$

де  $\underline{I}_a$  - комплексна активна складова струму;  $\underline{I}_p$  - комплексна реактивна складова струму.

#### 4.19 Закони Кірхгофа в символічній формі

Закони Кірхгофа в комплексній формі запису є фактично модифікацією законів Кірхгофа у векторній формі запису.

За першим законом Кірхгофа, алгебраїчна сума миттєвих значень струмів у вітках, які з'єднані з будь-яким вузлом електричного кола, дорівнює нулю:

$$\sum_{k=1}^K i_k = 0, \quad (4.167)$$

де  $K$  - кількість віток, які з'єднані з вузлом.

Підставивши замість миттєвих значень струмів їхні комплексні діючі значення, одержимо *перший закон Кірхгофа в символічній формі* запису: алгебраїчна сума комплексних діючих значень струмів у вітках, які з'єднані з будь-яким вузлом електричного кола, дорівнює нулю:

$$\sum_{k=1}^K L_k = 0. \quad (4.168)$$

За другим законом Кірхгофа в будь-якому замкнутому контурі алгебраїчна сума миттєвих значень спадів напруги на всіх пасивних елементах контуру дорівнює алгебраїчній сумі миттєвих значень ЕРС, які входять до складу цього контуру:

$$\sum_{k=1}^K \left( R_k i_k + L_k \frac{di_k}{dt} + \frac{1}{C} \int i_k dt \right) = \sum_{k=1}^K e_k, \quad (4.169)$$

де  $K$  - кількість елементів, які входять до складу контуру.

Підставивши замість миттєвих значень струмів й ЕРС їхні комплексні діючі значення, одержимо *другий закон Кірхгофа в символічній формі* запису: у будь-якому замкнутому контурі алгебраїчна сума комплексних діючих значень спадів напруги на всіх пасивних елементах контуру дорівнює алгебраїчній сумі комплекс-

них діючих значень ЕРС, які входять до складу цього контуру

$$\sum_{k=1}^K L_k Z_k = \sum_{k=1}^K E_k . \quad (4.170)$$

#### 4.20 Застосування символічного методу до розрахунку кіл синусоїдного струму

Оскільки закон Ома, перший і другий закони Кірхгофа у комплексній формі справедливі для кіл синусоїдного струму, то можна записавши рівняння для миттєвих значень електричних величин, потім перейти до рівнянь у комплексних діючих значеннях.

Це дозволяє в тому випадку, коли окремі вітки кола не зв'язані між собою індукційно (тобто немає місце явище взаємоіндукції), розрахунок кіл синусоїдного струму виконувати, використовуючи ті ж прийоми й методи, що й розглянуті раніше стосовно до кіл постійного струму. Тільки постійним ЕРС, струмам і напругам у колах постійного струму відповідають комплексні діючі значення цих величин у колах синусоїдного струму, активним опорам і провідностям відповідають комплексні повні опори і провідності:

$$E \Rightarrow \underline{E}; I \Rightarrow \underline{I}; U \Rightarrow \underline{U}; R \Rightarrow \underline{Z}; G \Rightarrow \underline{Y}. \quad (4.171)$$

На відміну від систем рівнянь, які складені для миттєвих значень струмів і напруг, рівняння, які складені для комплексних зображень, є алгебраїчними. Розв'язання таких рівнянь набагато простіше, ніж розв'язання диференціальних рівнянь.

Алгоритм застосування символічного методу складається із трьох етапів:

- зображення всіх електричних величин і параметрів кола комплексними числами. Тут для полегшення задачі доцільне складання розрахункової схеми заміщення електричного кола, на якій всі дані зазначені в комплексній формі.

- визначення шуканих величин будь-яким методом, відомим з теорії кіл постійного струму.

- перетворення, якщо потрібно, отриманих величин з комплексної форми у форму подання цих величин синусоїдними функціями часу.

Таким чином, з використанням схем заміщення у комплексній формі й складених на їхній основі рівнянь у символічній формі запису, аналіз кола синусоїдного струму стає не складніше аналізу кола

постійного струму й може виконуватися з використанням тих же методів: методу безпосереднього застосування законів Кірхгофа, методу контурних струмів, методу еквівалентного генератора й інших.

Якщо ж окремі вітки електричного кола синусоїдного струму зв'язані одна з одною індукційно, то застосування символічного методу має свої особливості, про які буде сказано далі.

#### 4.21 Векторні й топографічні діаграми

Струми й напруги на різних ділянках електричного кола синусоїдного струму, як правило, не збігаються за фазою. Для наочного подання про фазове розташування різних векторів електричних величин й якісного контролю правильності розрахунку правлять суміщені векторні діаграми струмів і напруг. Аналітичні розрахунки електричних кіл синусоїдного струму рекомендується супроводжувати побудовою відповідних векторних діаграм.

Для кіл синусоїдного струму, за аналогією з колами постійного струму, також будують топографічні (потенційні) діаграми. Топографічна діаграма являє собою векторну діаграму, у якій потенціалу кожного вузлу електричного кола на діаграмі відповідає певна точка. Положення цієї точки фіксують вектором напруги стосовно якої-небудь іншої точки, потенціал якої умовно прийнятий за нуль. Топографічна діаграма дає наочне подання про розподіл напруг в електричному колі і дозволяє визначити напругу за значенням й фазою між будь-якими двома точками кола. Для цього відповідні точки на діаграмі досить з'єднати прямою лінією, довжина якої у відповідному масштабі відповідає значенню шуканої напруги, а напрямок її - фазу цієї напруги.

*Приклад 4.4.* Розглянемо побудову топографічної діаграми для електричного кола з декількома послідовно з'єднаними пасивними елементами (рис. 4.35). Опори пасивних елементів електричного кола:  $R_1 = 10 \text{ Ом}$ ;  $R_2 = 15 \text{ Ом}$ ;  $X_L = 15 \text{ Ом}$ ;  $X_C = 5 \text{ Ом}$ . Діюче значення струму  $I = 2 \text{ А}$ .

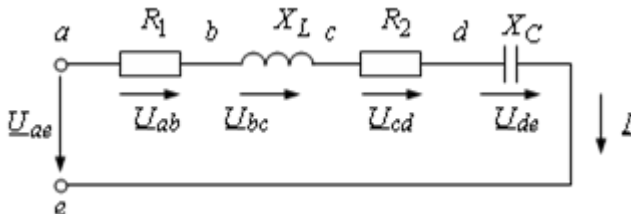


Рис. 4.35

*Розв'язання.* Умовно прийнято, що потенціал вузла  $e$  дорівнює нулю  $\varphi_e = 0$  В.

Обхід контуру здійснюємо назустріч додатному напрямку струму (умовно прийнято, що початкова фаза струму дорівнює нулю  $\psi_i = 0$ ). Відповідно до порядку розташування в схемі елементів  $X_C$ ,  $R_2$ ,  $X_L$ ,  $R_1$  розраховуємо й відображаємо на діаграмі вектори напруг:

$$\underline{U}_{de} = -jX_C I = -j5 \cdot 2e^{j0^\circ} = -j10 = 10e^{-j90^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{U}_{cd} = R_2 I = 15 \cdot 2e^{j0^\circ} = 30 = 30e^{j0^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{U}_{bc} = jX_L I = j15 \cdot 2e^{j0^\circ} = j30 = 30e^{j90^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{U}_{ab} = R_1 I = 10 \cdot 2e^{j0^\circ} = 20 = 20e^{j0^\circ} \text{ В}.$$

На підставі проведених розрахунків побудуємо топографічну діаграму, відкладаючи вектора один за одним як це представлено на рис. 4.36. З'єднавши початок координат з кінцем вектора  $\underline{U}_{ab}$ , отримаємо вектор напруги на вході кола  $\underline{U}_{ae}$ .

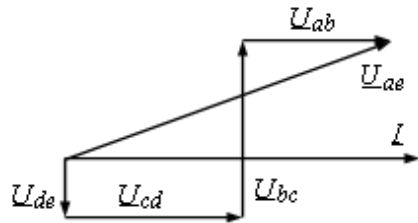


Рис. 4.36

$$\begin{aligned} \underline{U}_{ae} &= \underline{U}_{de} + \underline{U}_{cd} + \underline{U}_{bc} + \underline{U}_{ab} = -j10 + 30 + j30 + 30 = \\ &= 60 + j20 = 63,2e^{j18^\circ} \text{ В}. \end{aligned}$$

#### 4.22 Потужність електричного кола в символічній формі запису

Якщо відомі комплексні діючі значення напруг і струмів, можна обчислити всі види потужності як для окремих елементів так і для всього електричного кола. Нехай комплексне діюче значення напруги на затискачах ділянки кола дорівнює  $Ue^{j\psi_u}$ , а комплексне діюче значення струму через цю ділянку -  $Ie^{j\psi_i}$ . Тоді *комплексну повну потужність* визначають шляхом перемноження комплексного діючого значення напруги й спряженого комплекс-

ного діючого значення струму

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{U} \underline{I}^* = U e^{j\psi_u} \left( I e^{j\psi_i} \right)^* = U e^{j\psi_u} I e^{-j\psi_i} = UI e^{j(\psi_u - \psi_i)} = \\ &= UI e^{j\varphi} = UI \cos\varphi + jUI \sin\varphi = S \cos\varphi + jS \sin\varphi = P + jQ, \end{aligned} \quad (4.172)$$

де  $\underline{I}^*$  - спряжене комплексне діюче значення струму, що одержують із вихідного зміною знака в показнику (або перед уявною частиною, якщо використовується алгебраїчна форма запису комплексного числа) Так доводиться формально робити для того, щоб у формулі комплексної повної потужності показник комплексного числа відповідав куту фазового зсуву  $\varphi = \psi_u - \psi_i$ .

Таким чином, повна потужність може бути визначена як модуль показової форми запису комплексної повної потужності, активна й реактивна потужності - відповідно як дійсна і уявна частини алгебраїчної форми запису комплексної повної потужності.

Для визначення комплексної повної потужності пасивних елементів зручніше скористатися іншою формулою:

$$\underline{S} = \underline{Z} I^2 = (R + jX) I^2 = P + jQ \quad (4.173)$$

*Приклад 4.5.* Розглянемо електричне коло синусоїдного струму, схема заміщення якого представлена на рис. 4.37 і для якого задано: миттєве значення напруги джерела живлення  $u = \sin\omega t$  В, кутова частота  $\omega = 314$  с<sup>-1</sup>; опори резистивних елементів  $R_1 = 10$  Ом,  $R_2 = 40$  Ом,  $R_3 = 20$  Ом; індуктивності і ємності реактивних елементів  $L_1 = 15,9$  мГн,  $L_2 = 95,5$  мГн,  $C_1 = 212$  мкФ,  $C_3 = 79,6$  мкФ. Потрібно визначити струми в вітках електричного кола, напруги на його ділянках, потужності джерела й приймачів, побудувати суміщену векторну діаграму струмів і напруг.

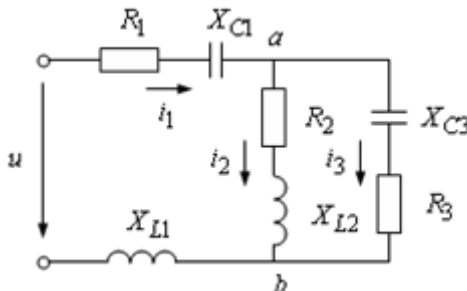


Рис. 4.37

Розв'язання. Опори реактивних елементів:

$$X_{L1} = \omega L_1 = 314 \cdot 15,9 \cdot 10^{-3} = 5 \text{ Ом};$$

$$X_{L2} = \omega L_2 = 314 \cdot 95,5 \cdot 10^{-3} = 30 \text{ Ом};$$

$$X_{C1} = \frac{1}{\omega C_1} = \frac{1}{314 \cdot 212 \cdot 10^{-6}} = 15 \text{ Ом};$$

$$X_{C3} = \frac{1}{\omega C_3} = \frac{1}{314 \cdot 79,6 \cdot 10^{-6}} = 40 \text{ Ом}.$$

Розрахунок виконуємо символічним методом. Всі комплексні числа, які використовуємо в розрахунку зручніше записувати як в алгебраїчній, так й у показовій формі.

Комплексні повні опори віток

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j(X_{L1} - X_{C1}) = 10 + j(5 - 15) = 10 - j10 = 14,1e^{-j45^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + jX_{L2} = 40 + j30 = 50,0e^{j37^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 - jX_{C3} = 20 - j40 = 44,7e^{-j63^\circ} \text{ Ом}.$$

Комплексне діюче значення напруги джерела живлення

$$\underline{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_e} = \frac{141}{\sqrt{2}} e^{j0^\circ} = 100e^{j0^\circ} = (100 + j0) \text{ В}.$$

Від вихідної схеми заміщення перейдемо до схеми заміщення з комплексними повними опорами (рис. 4.38). Щоб підкреслити аналогію між розрахунками електричних кіл синусоїдного струму та електричних кіл постійного струму на схемі заміщення комплексні повні опори позначені так само як резистивні елементи.

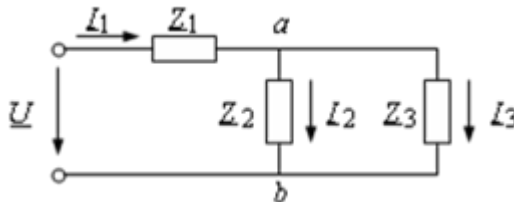


Рис. 4.38

Для розрахунку отриманого кола використовуємо метод еквівалентних перетворень.

Ділянку  $ab$  з паралельним з'єднанням опорів  $Z_2$  і  $Z_3$  замінюємо еквівалентним комплексним повним опором

$$\begin{aligned} Z_{ab} &= \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} = \frac{(40 + j30)(20 - j40)}{40 + j30 + 20 - j40} = \frac{(40 + j30)(20 - j40)}{60 - j10} = \\ &= 35,1 - j10,8 = 36,8e^{-j17^\circ} \text{ Ом.} \end{aligned}$$

Опори  $Z_1$  й  $Z_{ab}$ , які з'єднані послідовно, замінюємо еквівалентним комплексним повним опором:

$$\begin{aligned} Z_o &= Z_1 + Z_{ab} = 10 - j10 + 35,1 - j10,8 = \\ &= 45,1 - j20,8 = 49,7e^{-j25^\circ} \text{ Ом.} \end{aligned}$$

Комплексне діюче значення струму у нерозгалуженій частині електричного кола за законом Ома:

$$I_1 = \frac{U}{Z_o} = \frac{100 + j0}{45,1 - j20,8} = 1,83 + j0,84 = 2,01e^{j25^\circ} \text{ А.}$$

Комплексні діючі значення напруг на ділянках кола:

$$\underline{U}_1 = Z_1 I_1 = (10 - j10)(1,83 + j0,84) = 26,7 - j9,9 = 28,5e^{-j20^\circ} \text{ В;}$$

$$\underline{U}_{ab} = Z_{ab} I_1 = (35,1 - j10,8)(1,83 + j0,84) = 73,3 + j9,7 = 73,9e^{j8^\circ} \text{ В.}$$

Комплексні діючі значення струмів в паралельних вітках за законом Ома:

$$I_2 = \frac{U_{ab}}{Z_2} = \frac{73,3 + j9,7}{40 + j30} = 1,29 - j0,72 = 1,48e^{-j29^\circ} \text{ А;}$$

$$I_3 = \frac{U_{ab}}{Z_3} = \frac{73,3 + j9,7}{20 - j40} = 0,54 + j1,56 = 1,65e^{j71^\circ} \text{ А.}$$

Правильність розв'язання перевіримо, використовуючи перший і другий закони Кірхгофа:

$$I_1 = I_2 + I_3 = 1,29 - j0,72 + 0,54 + j1,56 = 1,83 + j0,84 = 2,01e^{j25^\circ} \text{ А;}$$

$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_{ab} = 26,7 - j9,9 + 73,3 + j9,7 = 100,0 - j0,2 = 100,2e^{j0^\circ} \text{ В.}$$

Відносна похибка не перевищує 1%, тобто отриманні при перевірці значення практично збігаються з вихідними.

Діючі значення струмів і напруг дорівнюють модулям відповідних комплексних діючих значень цих величин

$$U_1 = 28,5 \text{ В}; U_{ab} = 73,9 \text{ А}; I_1 = 2,01 \text{ А}; I_2 = 1,48 \text{ А}; I_3 = 1,65 \text{ А}.$$

Початкові фази струмів і напруг дорівнюють аргументам відповідних комплексних діючих значень цих величин

$$\psi_{U_1} = -20^\circ; \psi_{U_{ab}} = 8^\circ; \psi_{I_1} = 25^\circ; \psi_{I_2} = -29^\circ; \psi_{I_3} = 71^\circ.$$

Перейдемо від комплексних діючих значень струмів і напруг до миттєвих значень цих величин.

$$\begin{aligned} u_1 &= \sqrt{2}U_1 \sin(\omega t + \psi_{U_1}) = \sqrt{2} \cdot 28,5 \sin(314t - 20^\circ) = \\ &= 40,3 \sin(314t - 20^\circ) \text{ В}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{ab} &= \sqrt{2}U_{ab} \sin(\omega t + \psi_{U_{ab}}) = \sqrt{2} \cdot 73,9 \sin(314t + 8^\circ) = \\ &= 104,5 \sin(314t + 8^\circ) \text{ В}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_1 &= \sqrt{2}I_1 \sin(\omega t + \psi_{I_1}) = \sqrt{2} \cdot 2,01 \sin(314t + 25^\circ) = \\ &= 2,84 \sin(314t + 25^\circ) \text{ А}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_2 &= \sqrt{2}I_2 \sin(\omega t + \psi_{I_2}) = \sqrt{2} \cdot 1,48 \sin(314t - 29^\circ) = \\ &= 2,09 \sin(314t - 29^\circ) \text{ А}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_3 &= \sqrt{2}I_3 \sin(\omega t + \psi_{I_3}) = \sqrt{2} \cdot 1,65 \sin(314t + 71^\circ) = \\ &= 2,33 \sin(314t + 71^\circ) \text{ А}. \end{aligned}$$

Використовуючи комплексні діючі значення напруг і струмів, побудуємо у відповідно вибраних масштабах суміщену діаграму (рис. 4.39).

На діаграмі виконана перевірка за першим і другим законами Кірхгофа у векторній формі. Виконана перевірка підтверджує, що розрахунки виконані правильно.

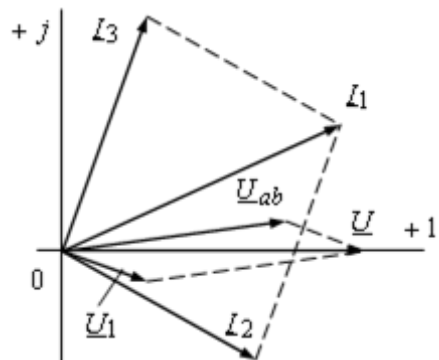


Рис. 4.39

Комплексні повні потужності джерела живлення й окремих віток електричного кола:

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}_1^* = 100 \cdot (1,83 - j0,84) = 183 - j84 = 201e^{-j25^\circ} \text{ ВА};$$

$$\underline{S}_1 = I_1^2 \underline{Z}_1 = 2,01^2 \cdot (10 - j10) = 40,4 - j40,4 = 57,1e^{-j45^\circ} \text{ ВА};$$

$$\underline{S}_2 = I_2^2 \underline{Z}_2 = 1,48^2 \cdot (40 + j30) = 87,6 + j65,7 = 109,5e^{j37^\circ} \text{ ВА};$$

$$\underline{S}_3 = I_3^2 \underline{Z}_1 = 1,65^2 \cdot (20 - j40) = 54,5 - j108,9 = 121,8e^{-j63^\circ} \text{ ВА}.$$

Активні потужності джерела живлення й окремих віток електричного кола

$$P = \text{Re}(\underline{S}) = \text{Re}(183 - j84) = 183 \text{ Вт};$$

$$P_1 = \text{Re}(\underline{S}_1) = \text{Re}(40,4 - j40,4) = 40,4 \text{ Вт};$$

$$P_2 = \text{Re}(\underline{S}_2) = \text{Re}(87,6 + j65,7) = 87,6 \text{ Вт};$$

$$P_3 = \text{Re}(\underline{S}_3) = \text{Re}(54,5 - j108,9) = 54,5 \text{ Вт}.$$

Реактивні потужності джерела живлення й окремих віток електричного кола

$$Q = \text{Im}(\underline{S}) = \text{Im}(183 - j84) = -84 \text{ вар};$$

$$Q_1 = \text{Im}(\underline{S}_1) = \text{Im}(40,4 - j40,4) = -40,4 \text{ вар};$$

$$Q_2 = \text{Im}(\underline{S}_2) = \text{Im}(87,6 + j65,7) = 65,7 \text{ вар};$$

$$Q_3 = \text{Im}(\underline{S}_3) = \text{Im}(54,5 - j108,9) = -108,9 \text{ вар}.$$

Перевірка за балансом потужностей:

$$P_E = P_1 + P_2 + P_3 = 40,4 + 87,6 + 54,5 = 182,5 \approx 183 \text{ Вт};$$

$$Q_E = Q_1 + Q_2 + Q_3 = -40,4 + 65,7 - 108,9 = -83,6 \approx -84 \text{ вар}.$$

Підсумовані активна і реактивна потужності окремих віток електричного кола практично збігається з активною і реактивною потужностями джерела живлення. Відносна похибка яка не перевищує 1%, пояснюється округлення під час розрахунків.

Фазові зсуви між вхідними напругою і струмом та напругами і струмами окремих віток електричного кола

$$\varphi = \arg(201e^{-j25^\circ}) = -25^\circ; \quad \varphi_1 = \arg(57,1e^{-j45^\circ}) = -45^\circ;$$

$$\varphi_2 = \arg(109,5e^{j37^\circ}) = 37^\circ; \quad \varphi_3 = \arg(121,8e^{-j63^\circ}) = -63^\circ.$$

### 4.23 Індукційно-зв'язані елементи електричного кола

Елементи електричного кола можуть розташовуватися в просторі таким чином, що створювані ними магнітні потоки будуть частково зчіплюватися з контурами протікання струму інших елементів. Якщо зміна струму в одному з елементів кола приводить до появи ЕРС в іншому елементі кола, то такі елементи є індукційно-зв'язаними. ЕРС, що при цьому виникає, називають ЕРС взаємної індукції. Індукційно-зв'язані елементи можуть зв'язувати, у тому числі й електричні кола, які не мають гальванічного (електричного) з'єднання між собою.

У випадку двох індуктивних елементів (ідеальних котушок індуктивності), якими протікають струми  $i_1$  й  $i_2$ , частина магнітних ліній поля кожної з котушок може бути зчеплена з витками іншої котушки. Тому крім власних потокозчеплень кожної з котушок потрібно при розрахунках таких електричних кіл урахувати додаткові потокозчеплення витків першої й другої котушок індуктивності

$$\Psi_{12} = \sum_{k=1}^{w_1} \Phi_{k12}; \quad (4.174)$$

$$\Psi_{21} = \sum_{k=1}^{w_2} \Phi_{k21},$$

де  $\Phi_{k12}$  - потік через  $k$ -виток першого елемента (котушки) від струму в другому елементі (котушці);  $\Phi_{k21}$  - потік через  $k$ -виток другого елемента (котушки) від струму в першому елементі (котушці).

Коефіцієнт пропорційності між додатковим потокозчепленням першої (другої) котушки й струмом другої (першої) котушки називають *взаємною індуктивністю* першої і другої (другої і першої) котушок

$$M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{i_2}; \quad (4.175)$$

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{i_1}.$$

Експериментальна перевірка показує, що у випадку постійної магнітної проникності середовища  $M_{12} = M_{21} = M$ . Строгий доказ цієї рівності є можливим тільки із застосуванням теорії електромагнітного поля.

Величину  $M$  називають *взаємною індуктивністю (коефіцієнтом взаємної індукції)*.

Одиницею вимірювання взаємної індуктивності елементів кола, так само як й індуктивності, є *генрі (Гн)*.

Взаємна індуктивність пов'язана з індуктивностями елементів наступним співвідношенням

$$M = k \sqrt{L_1 L_2}, \quad (4.176)$$

де  $k$  – *коефіцієнт індукційного зв'язку*.

Коефіцієнт індукційного зв'язку є безрозмірною величиною.

Значення коефіцієнта індукційного зв'язку завжди менше одиниці

$$0 \leq k < 1. \quad (4.177)$$

Він міг би дорівнювати одиниці, якби весь магнітний потік, що створюється струмом однієї котушки, повністю (без розсіювання) зчіплювався б з витками іншої котушки, що можливо лише у випадку суміщення котушок. Практично витки двох котушок, так само як і різні витки однієї й тієї ж котушки, пронизуються різними магнітними потоками (тому що завжди існують потоки розсіювання) і тому завжди  $k < 1$ .

Взаємна індуктивність у лінійних електричних колах не залежить від напрямку й значень струмів, а обумовлюється тільки конструкцією котушок індуктивності, їхнім взаємним розташуванням і магнітними властивостями навколишнього середовища. Вона є спільним параметром індукційно-зв'язаних елементів електричного кола.

Переміщенням однієї котушки індуктивності щодо іншої можна змінити коефіцієнт індукційного зв'язку й взаємну індуктивність індукційно-зв'язаних елементів.

Повне поточозчеплення кожної із двох розглянутих індукційно-зв'язаних котушок індуктивності містить дві складові - власне поточозчеплення та взаємне поточозчеплення, які можуть додаватися або відніматися залежно від напрямку струмів у котушках

індуктивності й їхнього взаємного розташування

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \psi_{11} \pm \psi_{12}; \\ \psi_2 &= \psi_{22} \pm \psi_{21}, \end{aligned} \quad (4.178)$$

де  $\psi_{11}$ ,  $\psi_{22}$  - власні потокозчеплення першої й другої котушок індуктивності.

Для полегшення розв'язання питання про знак додаткових потокозчеплень удаються до спеціальної розмітки затискачів індукційно-зв'язаних елементів кола.

Два затискачі, що належать двом різним індукційно-зв'язаним елементам кола, називають *однойменними* й позначають однаковими значками, керуючись наступним правилом: при однаковому напрямку струмів щодо однойменних затискачів магнітні потоки самоіндукції й взаємної індукції в кожному елементі (і відповідно ЕРС самоіндукції й взаємній індукції) повинні додаватися один до одного.

Застосуємо це правило для розмітки затискачів двох співвісних котушок із загальним феромагнітним осердям, які представлені на рис. 4.40. Напрямок силових ліній магнітних потоків визначаємо за правилом буравчика.

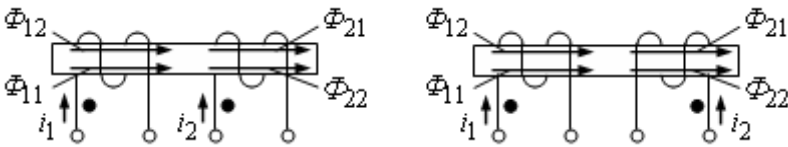


Рис. 4.40

Щоб не захарашувати креслення, осердя котушок на електричних схемах звичайно не зображують, а обмежуються тим, що однойменні затискачі відзначають однаковими значками (наприклад, точками або зірочками) (рис. 4.41).

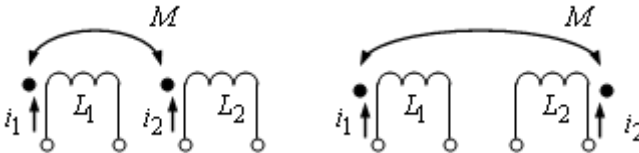


Рис. 4.41

Якщо на електричній схемі струми двох індукційно-зв'язаних котушок індуктивності однаково орієнтовані щодо однойменних

затискачів котушок, то має місце *узгоджене з'єднання*, у протилежному випадку - *зустрічне*. Таким чином, тип з'єднання котушок (узгоджене або зустрічне) визначається спільно способом намотування котушок індуктивності і напрямками струмів у них.

Визначити розташування однойменних затискачів двох котушок можна на підставі простого експерименту, для якого необхідні джерело постійної напруги й амперметр магнітоелектричної системи (рис. 4.42).

Одна з котушок індуктивності з'єднується з амперметром, інша з джерелом напруги. При замиканні ключа  $Q$  короткочасно виникає струм  $i_2$ , що прагне послабити магнітне поле, яке створює струм  $i_1$ . Отже, у момент вмикання джерела напруги струми  $i_1$  й  $i_2$  спрямовані щодо однойменних затискачів котушок індуктивності у протилежні боки.

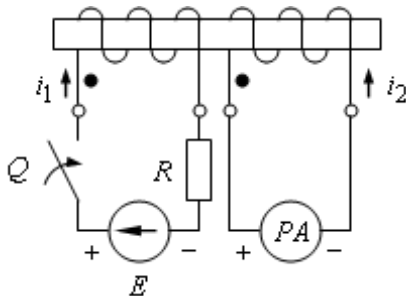


Рис. 4.42

Напрямок струму  $i_1$  обумовлюється полярністю джерела напруги. Напрямок струму  $i_2$  визначають за короткочасним відхиленням стрілки амперметра. Якщо стрілка відхиляється убік шкали, то струм  $i_2$  спрямований до додатного затискача амперметра. При цьому затискачі котушок, які з'єднані із затискачами амперметра й джерела напруги одного знака, є однойменними.

#### 4.24 Електричне коло з послідовним з'єднанням індукційно-зв'язаних елементів

Розглянемо задачу аналізу електричного кола з послідовним з'єднанням індукційно-зв'язаних елементів на прикладі двох котушок індуктивності.

При узгодженому з'єднанні струми в обох котушках індуктивності в будь-який момент часу спрямовані однаково щодо однойменних затискачів (рис. 4.43), тому магнітні потоки самоіндукції й взаємної індукції, які зчеплені з кожною з них, додаються один до одного.

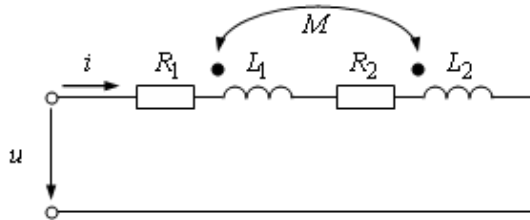


Рис. 4.43

Складемо рівняння для контуру електричного кола за другим законом Кірхгофа для миттєвих значень із обліком того, що в обох котушках протікає той самий струм

$$R_1 i + L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} + R_2 i + L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} = u, \quad (4.179)$$

або в комплексній формі запису

$$\underline{I}(R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)) = \underline{U}. \quad (4.180)$$

Еквівалентний опір кола при узгодженому вмиканні послідовно з'єднаних індукційно-зв'язаних котушок індуктивності

$$\underline{Z}_{\text{узг}} = R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 + 2M). \quad (4.181)$$

Напруга на котушках індуктивності має три складові

$$\begin{aligned} \underline{U}_{k1} &= \underline{I}(R_1 + j\omega L_1 + j\omega M); \\ \underline{U}_{k2} &= \underline{I}(R_2 + j\omega L_2 + j\omega M). \end{aligned} \quad (4.182)$$

На рис. 4.44 представлена векторна діаграма для випадку узгодженого вмикання послідовно з'єднаних індукційно-зв'язаних котушок індуктивності.

При зустрічному зєднанні струми в обох котушках кола в будь-який момент часу спрямовані однаково щодо різнойменних затисків (як показано на рис. 4.45), тому магнітні потоки взаємної індукції, зчеплені з кожною з них, віднімаються від магнітних потоків самоіндукції.

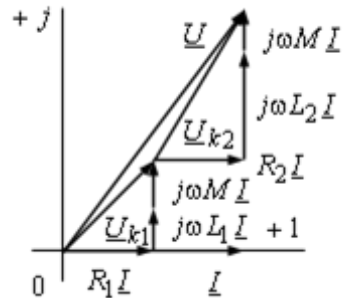


Рис. 4.44

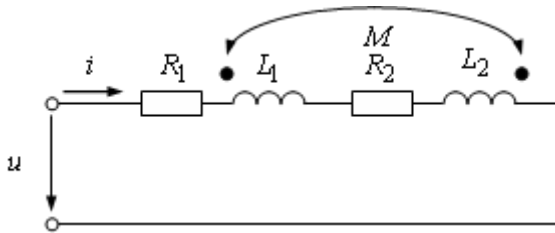


Рис. 4.45

Складемо рівняння для контуру електричного кола за другим законом Кірхгофа для миттєвих значень із обліком того, що в обох котушках протікає той самий струм

$$R_1 i + L_1 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} + R_2 i + L_2 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} = u, \quad (4.183)$$

або в комплексній формі запису

$$\underline{I}(R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)) = \underline{U}. \quad (4.184)$$

Еквівалентний опір кола при зустрічному вмиканні послідовно з'єднаних індукційно-зв'язаних котушок

$$\underline{Z}_{зустр} = R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 - 2M). \quad (4.185)$$

Напруги на котушках індуктивності також мають по три складові

$$\begin{aligned} \underline{U}_{k1} &= \underline{I}(R_1 + j\omega L_1 - j\omega M); \\ \underline{U}_{k2} &= \underline{I}(R_2 + j\omega L_2 - j\omega M). \end{aligned} \quad (4.186)$$

Із зіставлення виразів (4.181 й 4.186) видно, що при узгодженому вмиканні еквівалентний опір кола більший ніж при зустрічному за рахунок зміни реактивного опору кола

$$\begin{aligned} X_{юзг} &= \omega(L_1 + L_2 + 2M) = X_{L1} + X_{L2} + 2X_M; \\ X_{зустр} &= \omega(L_1 + L_2 - 2M) = X_{L1} + X_{L2} - 2X_M. \end{aligned} \quad (4.187)$$

На рис. 4.46 представлені векторні діаграми при зустрічному вмиканні послідовно з'єднаних індукційно-зв'язаних котушок. Якщо індуктивність однієї з котушок менше взаємної індуктивності, то при зустрічному вмиканні в ній спостерігається "ємнісний" ефект (рис. 4.46, б), коли напруга відстає за фазою від струму, що протікає через котушку. Але при всіх умовах реактивний опір кола має індуктивний характер, тому що еквівалентна індуктивність

$L = L_1 + L_2 - 2M > 0$  і струм відстає за фазою від напруги.

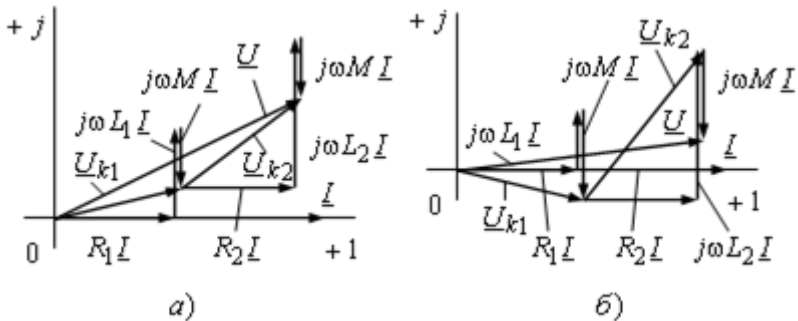


Рис. 4.46

#### 4.25 Електричне коло з паралельним з'єднанням індукційно-зв'язаних елементів

Розглянемо задачу аналізу електричного кола з паралельним з'єднанням індукційно-зв'язаних елементів на прикладі двох котушок індуктивності. Схема електричного кола з паралельним з'єднанням двох індукційно-зв'язаних котушок представлена на рис. 4.47.

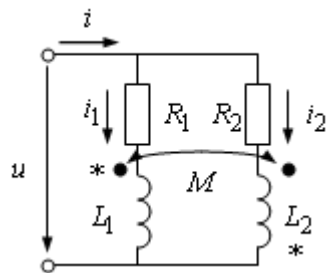


Рис. 4.47

Складемо систему рівнянь на підставі законів Кірхгофа для миттєвих значень із урахуванням обраних напрямків струмів

$$\begin{cases} i = i_1 + i_2; \\ u = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt}; \\ u = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt}. \end{cases} \quad (4.188)$$

У рівняннях (4.188) і наступних у цьому підрозділі формулах верхній знак відповідає узгодженому вмиканню (однойменні затискачі на рис. 4.47 позначені символами •), а нижній знак – зустрічному (однойменні затискачі на рис. 4.47 позначені символами \*).

У комплексній формі запису

$$\begin{aligned} \underline{I} &= \underline{I}_1 + \underline{I}_2; \\ \underline{U} &= (R_1 + j\omega L_1)\underline{I}_1 \pm j\omega M \underline{I}_2; \\ \underline{U} &= (R_2 + j\omega L_2)\underline{I}_2 \pm j\omega M \underline{I}_1. \end{aligned} \quad (4.189)$$

Розв'язавши систему рівнянь щодо невідомих струмів, одержимо

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \frac{\underline{Z}_2 \mp \underline{Z}_M}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2} \underline{U}; \\ \underline{I}_2 &= \frac{\underline{Z}_1 \mp \underline{Z}_M}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2} \underline{U}; \\ \underline{I} &= \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \mp 2\underline{Z}_M}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2} \underline{U}. \end{aligned} \quad (4.190)$$

де  $\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1$ ;  $\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2$  - комплексні повні опори віток без врахування явища взаємоіндукції;  $\underline{Z}_M = jX_M = j\omega M$  - комплексний опір взаємної індуктивності.

Вхідний комплексний повний опір розглянутого кола

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \mp 2\underline{Z}_M}. \quad (4.191)$$

#### 4.26 Визначення взаємної індуктивності дослідним шляхом

*Перший спосіб.* Різниця індуктивного опору при узгодженому і зустрічному вмиканні котушок індуктивності дозволяє обчислити їхню взаємну індуктивність за результатами простих дослідів. Виконаємо два експерименти. В одному з них з'єднаємо котушки індуктивності послідовно. В іншому - ті ж котушки індуктивності знову з'єднаємо послідовно, але попередньо поміняємо місцями затискачі однієї з котушок. Виміряємо діючі значення струму і напруги на вході й активну потужність електричного кола для кожного експерименту. Якщо обидва експерименти провести при однаковій напрузі джерела живлення, то менший струм буде відповідати узгодженому вмиканню. Це дозволяє розмітити однойменні затискачі котушок.

За результатами вимірювань обчислимо реактивні опори

$$X_{yзг} = \omega(L_1 + L_2 + 2M) = \frac{U}{I_{yзг}} \sin \arccos \left( \frac{P_{yзг}}{UI_{yзг}} \right); \quad (4.192)$$

$$X_{зустр} = \omega(L_1 + L_2 - 2M) = \frac{U}{I_{зустр}} \sin \arccos \left( \frac{P_{зустр}}{UI_{зустр}} \right).$$

Тоді віднімаючи одне значення з іншого, дістанемо

$$\begin{aligned} X_{yзг} - X_{зустр} &= 4\omega M; \\ M &= \frac{X_{согл} - X_{встр}}{4\omega}. \end{aligned} \quad (4.193)$$

*Другий спосіб.* З'єднаємо першу котушку індуктивності з джерелом синусоїдної ЕРС через амперметр, а до затискачів другої котушки приєднаємо вольтметр із великим внутрішнім опором (рис. 4.48). Виміряємо струм  $I_1$  і напругу  $U_2$ .

Діюче значення напруги на другій котушці

$$U_2 = \omega M I_1. \quad (4.194)$$

Звідси

$$M = \frac{U_2}{\omega I_1}. \quad (4.195)$$

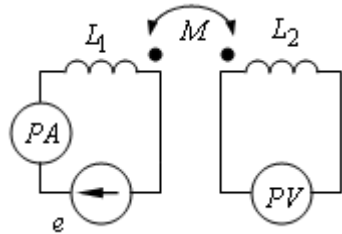


Рис. 4.48

#### 4.27 Розрахунки складних електричних кіл при наявності індукційного зв'язку між елементами

Розрахувати складні електричні кола при наявності явища взаємної індукції можна використовуючи метод безпосереднього складання рівнянь за першим й другим законами Кірхгофа, тому що вони справедливі для будь-яких кіл. У рівняння за другим законом Кірхгофа у вирази для напруг індукційно-зв'язаних елементів повинні бути додані напруги, які виникають за рахунок явища взаємної індукції.

Для розрахунку таких кіл також можна використовувати ме-

тод контурних струмів, тому що він базується на другому законі Кірхгофа, який враховує ЕРС взаємної індукції. При складанні рівнянь за методом контурних струмів варто мати на увазі, що при наявності індукційного зв'язку між елементами контурів, їхній взаємний опір не дорівнює нулю навіть при відсутності в них спільних віток.

Метод накладення, який ґрунтується на лінійності рівнянь, що складені за законами Кірхгофа, також можна використовувати, оскільки при наявності взаємної індукції рівняння лишаються лінійними.

Це ж стосується й до методу еквівалентного джерела енергії за умови, що струм визначають для вітки, що елементи якої не зв'язані індукційно з елементами інших віток кола.

Метод вузлових потенціалів для розрахунку кіл з індукційно-зв'язаними елементами застосувати неможливо, тому що він ґрунтується на першому законі Кірхгофа. Але струм у будь-якій вітках в таких колах залежить не тільки від потенціалів вузлів, з якими вітка з'єднана, та параметрів елементів, що містяться в ній, але й від струмів інших віток, які наводять ЕРС взаємної індукції. Тому не можна безпосередньо виразити струми віток через потенціали вузлів й параметрів елементів, як у колах без індукційно-зв'язаних елементів.

З цієї ж причини неможливо застосування, за винятком послідовного з'єднання індукційно-зв'язаних елементів, і методу еквівалентних перетворень.

*Приклад 4.6.* Розглянемо розгалужене електричне коло, схема заміщення якого представлена на рис. 4.49. Вважаємо, що розмітка однойменних затискачів індукційно-зв'язаних елементів задані. Параметри пасивних елементів електричного кола: опори резистивних елементів  $R_1 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 40 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 20 \text{ Ом}$ ; ємність й індуктивності реактивних елементів  $C_1 = 212 \text{ мкФ}$ ,  $L_2 = 15,9 \text{ мГн}$ ,  $L_3 = 95,5 \text{ мГн}$ ; взаємна індуктивність  $M = 31,8 \text{ мГн}$ . Миттєві значення ЕРС джерел живлення  $e_1 = 141 \sin \omega t \text{ В}$ ,  $e_2 = 282 \sin \omega t \text{ В}$ ,  $e_3 = 141 \sin(\omega t + 45) \text{ В}$ ; кутова частота  $\omega = 314 \text{ с}^{-1}$ . Потрібно визначити струми методом безпосереднього застосування законів Кірхгофа.

*Розв'язання.* Напрямки струмів у всіх вітках вибираємо так щоб вони збігалися з напрямками відповідних ЕРС, як це показано

на рис. 4.49. Розрахунок виконуємо символічним методом.

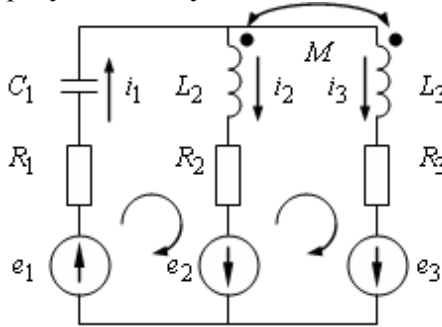


Рис. 4.49

Опори реактивних елементів:

$$X_{C1} = \frac{1}{\omega C_1} = \frac{1}{314 \cdot 212 \cdot 10^{-6}} = 15 \text{ Ом};$$

$$X_{L2} = \omega L_1 = 314 \cdot 15,9 \cdot 10^{-3} = 5 \text{ Ом};$$

$$X_{L3} = \omega L_2 = 314 \cdot 95,5 \cdot 10^{-3} = 30 \text{ Ом}.$$

Опір взаємної індуктивності, який враховує наявність індукційного зв'язку

$$X_M = \omega M = 314 \cdot 30,8 \cdot 10^{-3} = 10 \text{ Ом}.$$

Комплексні повні опори віток

$$\underline{Z}_1 = R_1 - jX_{C1} = 10 - j15 = 18,0e^{-j56^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + jX_{L2} = 40 + j5 = 40,3e^{j7^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 + jX_{L3} = 20 + j30 = 36,1e^{j56^\circ} \text{ Ом}.$$

Комплексні діючі значення ЕРС джерел живлення

$$\underline{E}_1 = \frac{U_{1m}}{\sqrt{2}} e^{j\psi_{e1}} = \frac{141}{\sqrt{2}} e^{j0^\circ} = 100e^{j0^\circ} = (100 + j0) \text{ В};$$

$$\underline{E}_2 = \frac{U_{2m}}{\sqrt{2}} e^{j\psi_{e2}} = \frac{282}{\sqrt{2}} e^{j0^\circ} = 200e^{j0^\circ} = (200 + j0) \text{ В};$$

$$\underline{E}_3 = \frac{U_{3m}}{\sqrt{2}} e^{j\psi_{e3}} = \frac{141}{\sqrt{2}} e^{j45^\circ} = 100e^{j45^\circ} = (70,7 + j70,7) \text{ В}.$$

Складемо систему рівнянь для визначення струмів електричного кола, використовуючи закони Кірхгофа. Вона повинна складатися із трьох рівнянь: одного за першим законом Кірхгофа й двох за другим законом Кірхгофа. При складанні рівнянь за другим законом Кірхгофа враховуємо індукційні зв'язки котушок.

Напрямки обходу двох незалежних контурів вибираємо за годинною стрілкою, як це показано на рис. 4.49.

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0; \\ \left( R_1 i_1 + \frac{1}{C_1} \int i_1 dt \right) + \left( R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_3}{dt} \right) = e_1 + e_2; \\ - \left( R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_3}{dt} \right) + \left( R_3 i_3 + L_3 \frac{di_3}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \right) = -e_2 + e_3. \end{cases}$$

У комплексній формі запису

$$\begin{cases} \underline{I}_1 - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 0; \\ \underline{Z}_1 \underline{I}_1 + (\underline{Z}_2 \underline{I}_2 + jX_M \underline{I}_3) = \underline{E}_1 + \underline{E}_2; \\ -(\underline{Z}_2 \underline{I}_2 + jX_M \underline{I}_3) + (\underline{Z}_3 \underline{I}_3 + jX_M \underline{I}_2) = -\underline{E}_2 + \underline{E}_3. \end{cases}$$

У результаті розв'язання цієї системи рівнянь визначаємо струми у вітках.

Для розв'язання системи з використанням комп'ютера (наприклад, за допомогою MathCAD) необхідно представити її в матричній формі

$$AX = B,$$

де  $A$  - квадратна матриця коефіцієнтів при невідомих величинах;  $X$  - матриця-стовпець невідомих величин;  $B$  - матриця-стовпець вільних членів рівнянь.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ \underline{Z}_1 & \underline{Z}_2 & jX_M \\ 0 & -(\underline{Z}_2 - jX_M) & \underline{Z}_3 - jX_M \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \underline{E}_1 + \underline{E}_2 \\ -\underline{E}_2 + \underline{E}_3 \end{vmatrix},$$

або

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 10 - j15 & 40 + j5 & j10 \\ 0 & -(40 - j5) & 20 + j20 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 100 + 200 \\ -129,3 + j70,7 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання системи в матричній формі шукаємо у вигляді:

$$X = A^{-1}B .$$

$$X = \begin{pmatrix} 9,04 + j1,91 \\ 4,85 + j1,26 \\ 4,19 + j0,65 \end{pmatrix}$$

Тоді комплексні діючі струми у вітках електричного кола:

$$I_1 = 9,04 + j1,91 = 9,24e^{j12^\circ} \text{ А};$$

$$I_2 = 4,85 + j1,26 = 5,01e^{j15^\circ} \text{ А};$$

$$I_3 = 4,19 + j0,65 = 4,24e^{j9^\circ} \text{ А}.$$

*Приклад 4.7.* Розглянемо розгалужене електричне коло, схема заміщення якого представлена на рис. 4.49. Вважаємо, що розмітка однойменних затискачів індукційно-зв'язаних елементів задані. Вважаємо, що розмітка однойменних затискачів індукційно-зв'язаних елементів задані. Параметри пасивних елементів електричного кола залишилися такими самими як у прикладі 4.6. Потрібно визначити струми методом контурних струмів.

*Розв'язання.* Складаємо систему рівнянь для визначення струмів кола, використовуючи метод контурних струмів. Як незалежні контури розглянемо ті ж контури, що й у попередньому прикладі (рис. 4.49). Напрямок контурних струмів вибираємо таким чином, що він збігається з обраним напрямком обходу контурів.

При обчисленні власних ( $Z_{11}; Z_{22}$ ) і взаємних ( $Z_{12}; Z_{21}$ ) опорів незалежних контурів електричного кола необхідно враховувати наявність індукційних зв'язків між котушками.

При знаходженні власних опорів  $Z_{11}; Z_{22}$  незалежних контурів кола враховуємо тільки ті індукційні зв'язки, які є усередині даного незалежного контуру у вигляді подвоєних опорів взаємної індуктивності. Це необхідно робити тому, що контурний струм у кожній із двох індукційно-зв'язаних котушок індуктивності наводить у іншій котушці ЕРС взаємної індукції виду  $\pm j\omega M$ , які додаються один до одного (за аналогією з послідовним з'єднанням двох індукційно-зв'язаних котушок). Знак "+" відповідає випадку, коли власний контурний струм однаково орієнтований щодо однойменних затискачів котушок, знак "-" - протилежному випадку.

Тоді власні опори контурів кола мають вигляд

$$\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = 10 - j15 + 40 + j5 = 50 - j10 = 51,0e^{-j11^\circ} \text{ Ом};$$

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{22} &= \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 - j2X_M = 40 + j5 + 20 + j30 - j2 \cdot 10 = \\ &= 60 + j15 = 61,8e^{j14^\circ} \text{ Ом}. \end{aligned}$$

При знаходженні взаємних опорів  $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}$  необхідно враховувати опори, спільні для I й II контурів. До них належать:

- опір вітки, яка є спільною для цих контурів  $\underline{Z}_2 = R_2 + jX_{L2}$ ;
- опір взаємної індукції між котушкою першого контуру й котушкою другого контуру кола (опір взаємної індуктивності в цьому випадку беруться без подвоєння його значення).

Тоді власні опори контурів кола мають вигляд

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} &= -\underline{Z}_2 + jX_M = -40 - j5 + j10 = \\ &= -40 + j5 = 40,3e^{j173^\circ} \text{ Ом} \end{aligned}$$

В останнім рівнянні знак "-" перед комплексним опором  $\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2$  другої котушки прийнято за загальним правилом для взаємних опорів контурів, що викладено в підрозділі 3.7.2, тому що в даному опорі контурні струми спрямовані назустріч один одному; знак "+" перед опором  $jX_M$  узятий тому, що контурний струм  $I_{11}$  у котушці індуктивності  $L_2$  й контурний струм  $I_{22}$  у котушці індуктивності  $L_3$  однаково орієнтовані щодо однойменних затисків котушок.

Тоді система рівнянь для визначення контурних струмів має вигляд

$$\begin{cases} (50 - j10)I_{11} + (-40 + j5)I_{22} = 100 + 200; \\ (-40 + j5)I_{11} + (60 + j15)I_{22} = -200 + 70,7 + j70,7. \end{cases}$$

Розв'язавши дану систему, визначимо контурні струми у незалежних контурах електричного кола.

Отриману систему розв'язуємо методом Крамера.

Визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 50 - j10 & -40 + j5 \\ -40 + j5 & 60 + j15 \end{vmatrix} = 1575 + j550 \text{ Ом}^2.$$

Допоміжні визначники

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 300 & -40 + j5 \\ -129,3 + j70,7 & 60 + j15 \end{vmatrix} = 13180 + j7974 \text{ В} \cdot \text{Ом};$$

$$\Delta_{22} = \begin{vmatrix} 50 - j10 & 300 \\ -40 + j5 & -129,3 + j70,7 \end{vmatrix} = 6242 + j3328 \text{ В} \cdot \text{Ом}.$$

Контурні струми

$$\underline{I}_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} = \frac{13180 + j7974}{1575 + j550} = 9,04 + j1,91 = 9,24e^{j12^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{22} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta} = \frac{6242 + j3328}{1575 + j550} = 4,19 + j0,65 = 4,24e^{j9^\circ} \text{ А}.$$

Струму у вітках електричного кола

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{11} = 9,04 + j1,91 = 9,24e^{j12^\circ} \text{ А};$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_2 &= \underline{I}_{11} - \underline{I}_{22} = 9,04 + j1,91 - 4,19 - j0,65 = \\ &= 4,85 + j1,26 = 5,01e^{j15^\circ} \text{ А}; \end{aligned}$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{22} = 4,19 + j0,65 = 4,24e^{j9^\circ} \text{ А}.$$

Струми обчислені двома методами у прикладах 4.6 і 4.7 повністю збігаються.

#### 4.28 Метод розв'язки індукційних зв'язків

Наявність індукційно-зв'язаних елементів обмежує розрахунок лінійних кіл трьома методами: методом безпосереднього застосування законів Кірхгофа, методом контурних струмів і методом накладення. Усунення індуктивних зв'язків і заміна їх електричними дозволяє перейти до еквівалентної схеми заміщення й провести розрахунок будь-яким методом, що можна застосувати для розрахунку лінійних кіл.

У загальному випадку розв'язку будь-яких двох індукційно-зв'язаних елементів, які з'єднані в одному вузлі (рис. 4.50, *а*), можна здійснити за допомогою переходу до еквівалентної схеми, що представлена на рис. 4.50, *б*. При цьому одночасно врахуємо два можливих випадки: коли в спільному вузлі індукційно-зв'язані елементи з'єднані однойменними затискачами (однойменні затис-

качі на рис. рис. 4.50, *a* позначені \*) й коли різнойменними (однойменні затискачі на рис. рис. 4.50, *a* позначені •).

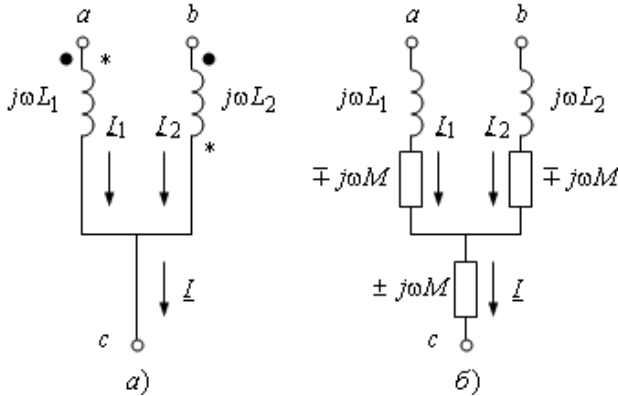


Рис. 4.50

Для доказу еквівалентності цих схем досить скласти рівняння за законами Кірхгофа для кожної зі схем і довести їхню ідентичність.

Для схеми з індукційно-зв'язаними елементами (рис. 4.50, *a*) маємо

$$\begin{cases} \underline{U}_{ac} = j\omega L_1 I_1 \pm j\omega M I_2; \\ \underline{U}_{bc} = j\omega L_2 I_2 \pm j\omega M I_1. \end{cases} \quad (4.196)$$

Для схеми без індукційно-зв'язаних елементів маємо

$$\begin{cases} \underline{U}_{ac} = j\omega(L_1 \mp M) I_1 \pm j\omega M I; \\ \underline{U}_{bc} = j\omega(L_2 \mp M) I_2 \pm j\omega M I. \end{cases} \quad (4.197)$$

В системах (4.196 і 4.197) верхні знаки відповідають випадку, коли в спільному вузлі індукційно-зв'язані елементи з'єднані однойменними затискачами й нижні - коли різнойменними.

З огляду на, що за першим законом Кірхгофа  $I = I_1 + I_2$ , після підстановки  $I$  в останню систему рівнянь, одержимо систему, що аналогічна системі (4.196).

Знаки додаткових опорів обумовлюються тільки способом з'єднання індукційно-зв'язаних елементів і не залежать від обраних напрямків струмів.

Дві будь-які індукційно-зв'язані вітки, що не з'єднані зі спільним вузлом, також можна замінити еквівалентною схемою без індукційного зв'язку, однак ця схема досить складна й користуватися нею недоцільно.

#### 4.29 Передача енергії між індукційно-зв'язаними елементами кола

Розглянемо, як передається енергія між двома індукційно-зв'язаними елементами кола.

Нехай для двох індукційно-зв'язаних елементів кола відомі струми  $I_1 = I_1 e^{j\psi_1}$  й  $I_2 = I_2 e^{j\psi_2}$ .

Складемо вирази для комплексів повних потужностей першого й другого елементів, які обумовлені взаємною індукцією у випадку їхнього узгодженого вмикання

$$\begin{aligned} \underline{S}_{M1} &= \underline{U}_{M1} \underline{I}_1^* = j\omega M \underline{I}_1 \underline{I}_1^* = e^{j\frac{\pi}{2}} \omega M I_1 e^{j\psi_1} I_2 e^{-j\psi_2} = \\ &= \omega M I_1 I_2 e^{j\left(\frac{\pi}{2} + \psi_1 - \psi_2\right)} = \\ &= \omega M I_1 I_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \psi_1 - \psi_2\right) + j\omega M I_1 I_2 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \psi_1 - \psi_2\right) = \\ &= \omega M I_1 I_2 \sin(\psi_1 - \psi_2) + j\omega M I_1 I_2 \cos(\psi_1 - \psi_2) = \\ &= P_{1M} + jQ_{1M}; \end{aligned} \tag{4.198}$$

$$\begin{aligned} \underline{S}_{M2} &= \underline{U}_{M2} \underline{I}_2^* = j\omega M \underline{I}_2 \underline{I}_2^* = e^{j\frac{\pi}{2}} \omega M I_2 e^{j\psi_2} I_1 e^{-j\psi_1} = \\ &= \omega M I_1 I_2 e^{j\left(\frac{\pi}{2} + \psi_2 - \psi_1\right)} = \\ &= \omega M I_1 I_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \psi_2 - \psi_1\right) + j\omega M I_1 I_2 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \psi_2 - \psi_1\right) = \\ &= -\omega M I_1 I_2 \sin(\psi_1 - \psi_2) + j\omega M I_1 I_2 \cos(\psi_1 - \psi_2) = \\ &= P_{2M} + jQ_{2M}. \end{aligned}$$

Звідси випливає

$$\begin{aligned} P_{1M} &= -P_{2M} = \omega M I_1 I_2 \sin(\psi_1 - \psi_2); \\ Q_{1M} &= Q_{2M} = \omega M I_1 I_2 \cos(\psi_1 - \psi_2). \end{aligned} \tag{4.199}$$

При цьому сумарна активна потужність, що обумовлена взаємною індукцією, дорівнює нулю, тому що  $P_M = P_{1M} + P_{2M} = 0$ . Це означає, що на загальний баланс активної потужності кола інду-

кційно-зв'язані елементи не впливають.

Якщо  $0 < \psi_1 - \psi_2 < \pi$ , то  $0 < \psi_1 - \psi_2 < \pi$ ,  $P_{2M} < 0$ . При такій умові енергія передається з кола в магнітне поле через перший елемент і повертається зворотно в коло через другий елемент. Якщо  $-\pi < \psi_1 - \psi_2 < 0$ , то  $P_{1M} < 0$ ,  $P_{2M} > 0$ , а енергія передається з кола в магнітне поле через другий елемент і повертається в коло через перший.

Сумарна реактивна потужність, що обумовлена взаємоіндукцією, дорівнює

$$Q_M = 2\omega M I_1 I_2 \cos(\psi_1 - \psi_2). \quad (4.200)$$

Енергія, що запасена двома індуктивними елементами за рахунок взаємної індукції

$$W_M = M i_1 i_2. \quad (4.201)$$

Отримані результати, справедливі й у тому випадку, якщо індукційно-зв'язані елементи гальванічно (електрично) не з'єднані.

#### **4.30 Повітряний трансформатор (трансформатор без феромагнітного осердя)**

*Трансформатор* – це статична (тобто без рухомих частин) електромагнітна машина, яка призначена для перетворення змінних у часі напруг й струмів за амплітудою без зміни їхньої частоти, а також для електричного розділення електричних кіл. Звідси виникла й сама назва цієї машина, що походить від латинського слова *transformare* - перетворювати. Таке перетворення необхідно, наприклад, коли напруга джерела енергії відрізняється від напруги, що потрібна для приймача енергії.

Трансформатори складаються з декількох індукційно-зв'язаних котушок або обмоток, що розташовані на спільному *осерді* (*магнітопроводі*). Принцип дії трансформатора базується на явищі електромагнітної індукції. Осердя може бути виконаний з феромагнітного або неферомагнітного матеріалу. Прикладом трансформатора останнього типу є *повітряний трансформатор*. Такі трансформатори застосовують при високих частотах у техніці зв'язку, різних радіотехнічних пристроях, а в ряді спеціальних вимірювальних пристроїв і при низьких частотах змінного струму.

Найпростіший повітряний трансформатор складається із двох нерухомих циліндричних обмоток, які розташовані на спільному

неферромагнітному осерді, але не з'єднані гальвонічно. Магнітну проникність осердя повітряного трансформатора можна вважати постійною.

Повітряний трансформатор є лінійним. Наявність феромагнітного осердя обумовило б нелінійні властивості трансформатора.

Обмотку, яку підмикають до джерела енергії, називають первинною, а до якої підмикають приймач енергії (навантаження), називають вторинною. Напряга між затискачами обмоток і струми в цих обмотках називаються відповідно первинними й вторинними напругами й струмами трансформатора. Кола, до складу яких входять первинна й вторинна обмотка трансформатора, називаються відповідно первинним і вторинним колами трансформатора. Енергія з первинного кола передається у вторинне коло за допомогою магнітного поля.

На рис. 4.51 представлена схема заміщення трансформатора, первинна обмотка якого підімкнена до джерела синусоїдальної напруги. Параметри первинної обмотки  $R_1$  й  $L_1$ , вторинної -  $R_2$  й  $L_2$ . Взаємна індуктивність обмоток трансформатора  $M$ . Опір навантаження, яке підімкнено до затисків вторинної обмотки, дорівнює  $Z_L = R_L + jX_L = Ze^{j\phi_L}$ .

Опори  $R_1$  й  $R_2$  враховують втрати енергії в обмотках трансформатора.

Додатні напрямки первинних та вторинних струмів і напруг указані на рис. 4.51.

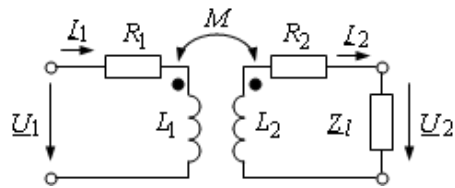


Рис. 4.51

Змінний синусоїдний струм  $i_1$ , що протікає первинною обмоткою трансформатора під впливом синусоїдної напруги  $u_1$  джерела енергії, збуджує змінний магнітний потік  $\Phi_0$ . Цей магнітний потік перетинає витки первинної обмотки, збуджуючи в них ЕРС самоіндукції  $e_1$ , і витки вторинної обмотки, збуджуючи в них ЕРС взаємної індукції  $e_2$ . Тому значення струму в первинній обмотці обумовлюється різницею  $u_1 - e_1$ . При підмиканні навантаження до вторинної обмотки в ній під дією ЕРС  $e_2$  виникає змінний синусоїда-

льний струм  $i_2$ . Цей струм збуджує в осерді магнітний потік, що спрямований зустрічно стосовно магнітного потоку, що створюється струмом первинною обмоткою. У результаті потік у осерді  $\Phi_o$  зменшується, що приводить до зменшення ЕРС  $e_1$  і збільшення різниці  $u_1 - e_1$ . Внаслідок цього струм первинної обмотки  $i_1$  збільшується й відновлює значення магнітного потоку  $\Phi_o$ . Таким чином, за допомогою ЕРС первинної обмотки  $e_1$  в осерді трансформатора автоматично підтримується постійний за амплітудою магнітний потік.

Рівняння за другим законом Кірхгофа для миттєвих значень струмів і напруг первинного й вторинного кола трансформатора

$$\begin{cases} u_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}; \\ -u_2 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}, \end{cases} \quad (4.202)$$

або в символічній формі запису

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = R_1 I_1 + j\omega L_1 I_1 - j\omega M I_2; \\ -\underline{U}_2 = R_2 I_2 + j\omega L_2 I_2 - j\omega M I_1. \end{cases} \quad (4.203)$$

Розв'язавши отриману систему рівнянь щодо напруги й струму первинної обмотки, дістанемо

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \frac{R_1 + j\omega L_1}{j\omega M} \underline{U}_2 + \frac{(R_1 + j\omega L_1)(R_2 + j\omega L_2) + \omega^2 M^2}{j\omega M} I_2; \\ I_1 = \frac{R_2 + j\omega L_2}{j\omega M} I_2 + \frac{1}{j\omega M} \underline{U}_2. \end{cases} \quad (4.204)$$

З обліком того, що відповідно до закону Ома струм  $I_2 = \frac{\underline{U}_2}{Z_l}$ ,

одержимо

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \left( \frac{R_1 + j\omega L_1}{j\omega M} + \frac{(R_1 + j\omega L_1)(R_2 + j\omega L_2) + \omega^2 M^2}{j\omega M Z_l} \right) \underline{U}_2; \\ I_1 = \frac{R_2 + j\omega L_2 + Z_l}{j\omega M} I_2. \end{cases} \quad (4.205)$$

З отриманих виразів видно, що напруга й струм первинної обмотки трансформатора пропорційні напрузі й струму вторинної обмотки й залежать від опору навантаження  $Z_2$ .

Побудуємо якісну векторну діаграму струмів і напруг для первинного й вторинного кіл, вважаючи, що опір навантаження має активно-індуктивний характер (рис. 4.52). Для цього задамося струмом  $I_2$ . Напруга на навантаженні  $U_2$  випереджає струм  $I_2$  на кут  $\varphi_2$ . Вектор спаду напруги  $R_2 I_2$  збігається за фазою зі струмом  $I_2$ , а вектор спаду напруги  $j\omega L_2 I_2$  випереджає струм  $I_2$  на кут  $90^\circ$ . З'єднавши кінець вектора  $j\omega L_2 I_2$  з початком векторної діаграми, одержимо вектор  $(-j\omega M I_1)$ .

Вектор струму  $I_1$  відкладемо під кутом  $90^\circ$  убік випереження стосовно вектора  $(-j\omega M I_1)$ . Вектор спаду напруги  $R_1 I_1$  збігається за фазою зі струмом  $I_1$ , а вектор  $j\omega L_1 I_1$  випереджає струм  $I_1$  на кут  $90^\circ$ . Вектор  $(-j\omega M I_2)$  відстає від струму  $I_2$  на кут  $90^\circ$ . Геометрична сума трьох останніх векторів дорівнює вектору напруги  $U_1$ .

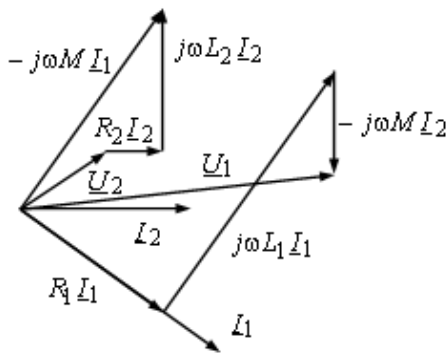


Рис. 4.52

Нехай у трансформаторі, що розглядається, струм вторинної обмотки  $I_2 = 0$  (режим холостого ходу). Струм у первинній обмотці в цьому випадку дорівнює

$$I_{1o} = \frac{U_1}{R_1 + j\omega L_1} \neq 0. \quad (4.206)$$

Струм  $I_{10}$ , що споживається трансформатором від джерела в режимі холостого ходу на виході, називають *струмом намагнічування (струмом холостого ходу)*.

Повітряний трансформатор може бути представлений двокоотурною схемою заміщення (рис. 4.53). Ця схема утворюється зі схеми (рис. 4.51) після об'єднання в один вузол однойменних затисків і використання методу розв'язки індукційних зв'язків.

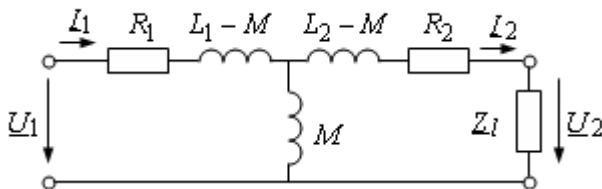


Рис. 4.53

Різниці  $L_1 - M$  й  $L_2 - M$ , що входять до складу схеми заміщення (рис. 4.53), мають фізичний сенс тільки при однаковій кількості витків первинної й вторинної обмоток (у цьому випадку вони являють собою індуктивності розсіювання первинної й вторинної обмоток трансформатора).

*Досконалим трансформатором* називають ідеалізований трансформатор без втрат ( $R_1 = R_2 = 0$ ), коефіцієнт зв'язку якого дорівнює одиниці ( $M = \sqrt{L_1 L_2}$ ).

У такому трансформаторі відсутні потоки розсіювання, і не відбувається перетворення електричної енергії в інші види енергії. Схема заміщення досконалого трансформатора представлена на рис. 4.54.

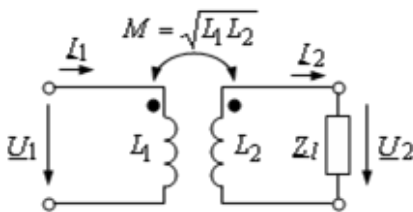


Рис. 4.54

Складемо рівняння за другим законом Кірхгофа для комплексів струмів і напруг первинного й вторинного кіл досконалого трансформатора

$$\begin{cases} U_1 = j\omega L_1 I_1 - j\omega \sqrt{L_1 L_2} I_2; \\ -U_2 = j\omega L_2 I_2 - j\omega \sqrt{L_1 L_2} I_1. \end{cases} \quad (4.207)$$

Розв'язавши отриману систему рівнянь щодо напруги й стру-

му первинної обмотки, отримаємо

$$\begin{cases} U_1 = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} U_2; \\ I_1 = \left( \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} + \frac{Z_H}{j\omega L_1} \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \right) I_2. \end{cases} \quad (4.208)$$

Коефіцієнт

$$k_{mp} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}. \quad (4.209)$$

називають *коефіцієнтом трансформації трансформатора*.

Тому що потоки розсіювання досконалого трансформатора дорівнюють нулю, то коефіцієнт трансформації дорівнює відношенню кількості витків первинної обмотки до кількості витків вторинної обмотки

$$k_{mp} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \frac{L_1}{M} = \frac{w_1 \Phi_{11}}{i_1} \cdot \frac{i_1}{w_2 \Phi_{21}} = \frac{w_1}{w_2} \cdot \frac{\Phi_{11}}{\Phi_{21}} = \frac{w_1}{w_2}. \quad (4.210)$$

Як видно з отриманих виразів відношення напруг первинної й вторинної обмоток не залежить від навантаження, а відношення струмів залежить

$$\begin{aligned} \frac{U_1}{U_2} &= k_{mp}; \\ \frac{I_1}{I_2} &= \frac{1}{k_{mp}} + \frac{Z_H}{j\omega L_1} k_{mp}. \end{aligned} \quad (4.211)$$

Останній вираз можна перетворити до наступного

$$I_1 = \frac{1}{k_{mp}} I_2 + I_{1o}. \quad (4.212)$$

Досконалий трансформатор, струм намагнічування якого дорівнює нулю, називають *ідеальним*. Індуктивності обмоток ідеального трансформатора нескінченно великі, а їхнє відношення дорівнює квадрату коефіцієнта трансформації. Струм намагнічування ідеального трансформатора прагне до нуля.

Тому в цьому випадку відношення не тільки напруг, але й струмів не залежить від навантаження й обумовлюється тільки ко-

ефіцієнтом трансформації

$$\frac{U_1}{U_2} = k_{mp};$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{k_{mp}}.$$
(4.213)

Коефіцієнт корисної дії ідеального трансформатора дорівнює одиниці.

Коефіцієнт трансформації є дійсним числом, тому з виразів (4.213) витікає, що напруга й струм первинної обмотки збігаються за фазою відповідно з напругою й струмом вторинної обмотки й відрізняються від них тільки амплітудами.

Якщо до затискачів вторинної обмотки ідеального трансформатора підімкнено навантаження, опір якого  $Z_2 = \frac{U_2}{I_2}$ , то його вхідний опір з боку первинної обмотки

$$Z'_1 = \frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2 k_{mp}^2}{I_2} = Z_2 k_{mp}^2.$$
(4.214)

Здатність трансформаторів перетворювати опір використовують в радіотехнічних пристроях для узгодження опорів джерел енергії й навантаження.

У реальному трансформаторі, на відміну від ідеального, відбуваються втрати енергії, індуктивність його обмоток має кінцеве значення, а потоки розсіювання не дорівнюють нулю. При розробці конструкції трансформатора вживають ряд заходів, що спрямовані на наближення його властивостей до властивостей ідеального трансформатора. Із цією метою обмотки трансформатора розміщують на феромагнітному осерді (магнітопроводі) з високим значенням магнітної проникності. Застосування феромагнітного осердя збільшує індуктивність обмоток і коефіцієнт зв'язку, а також призводить до зменшення струму намагнічування. У сучасних силових трансформаторах, які використовують на практиці, струм холостого ходу стосовно номінального значення струму первинної обмотки досить малий - приблизно 3...4 %. Рациональним вибором матеріалів і конструкції трансформатора досягають також зменшення міжвіткових і міжобмоткових ємностей і зменшення всіх видів втрат енергії.

### 4.31 Резонанс в індукційно-зв'язаних коливальних контурах

У радіоелектронних пристроях поряд з одиночними послідовними й коливальними контурами використовують індукційно-зв'язані коливальні контури з великою добротністю.

Схема заміщення такого контуру представлена на рис. 4.55.

У зв'язку з високою добротністю використовуваних контурів активним опором вторинного контуру можна знехатити.

Власні частоти контурів, при яких у них настає резонанс, при відсутності взаємної індукції

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}; \quad (4.215)$$

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}.$$

При наявності взаємної індукції ( $M \neq 0$ ) режим роботи розглянутого кола визначається двома рівняннями, які складені за другим законом Кірхгофа

$$\begin{cases} R_1 I_1 + j \left( \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) I_1 - j \omega M I_2 = \underline{U}_1; \\ j \left( \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) I_2 - j \omega M I_1 = 0. \end{cases} \quad (4.216)$$

Виразивши  $I_2$  із другого рівняння системи (4.216) через  $I_1$  і підставивши в перше рівняння, одержимо

$$R_1 I_1 + j \left( \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} - \frac{\omega^2 M^2}{\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}} \right) I_1 = \underline{U}_1, \quad (4.217)$$

або

$$R_1 I_1 + j X_{1eq} I_1 = \underline{U}. \quad (4.218)$$

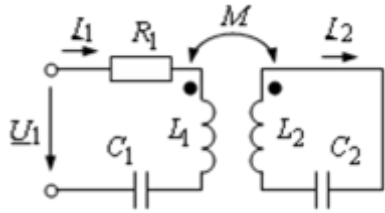


Рис. 4.55

Умовою резонансу напруг буде рівність нулю еквівалентного реактивного опору, тобто  $X_{1eq} = 0$ , звідки

$$\left( \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) \left( \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) = \omega^2 M^2. \quad (4.219)$$

Поділимо на  $\omega^2 L_1 L_2$  обидві частини рівняння (4.219)

$$\left( 1 - \frac{\omega_1^2}{\omega^2} \right) \left( 1 - \frac{\omega_2^2}{\omega^2} \right) = k^2, \quad (4.220)$$

де  $k = \sqrt{\frac{M}{L_1 L_2}}$  - коефіцієнт зв'язку,  $k \neq 1$ .

Розв'язавши це рівняння відносно  $\omega$ , знайдемо частоти, які відповідають резонансу напруг

$$\omega_p = \sqrt{\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 \pm \sqrt{(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 - 4(1-k^2)\omega_1^2\omega_2^2}}{2(1-k^2)}}, \quad (4.221)$$

де  $\omega_p$  може приймати два значення  $\omega_o'$  й  $\omega_o''$ .

Якщо обидва контури попередньо були настроєні так, що їхні власні частоти збігаються ( $\omega_1 = \omega_2 = \omega_o$ ), то резонансні частоти визначають із виразу

$$\omega_p = \omega_o \sqrt{\frac{(1 \pm k)}{(1 - k^2)}}, \quad (4.222)$$

тобто вони дорівнюють  $\omega_o' = \frac{\omega_o}{\sqrt{1+k}}$ ;  $\omega_o'' = \frac{\omega_o}{\sqrt{1-k}}$ .

При частотах  $\omega_o'$  й  $\omega_o''$  опір кола є мінімальним, він дорівнює  $R_1$ . Струм  $I_1$  навпаки є максимальним, він збігається з напругою  $U_1$  за фазою

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1}. \quad (4.223)$$

При частоті  $\omega_o$  еквівалентний реактивний опір  $X_{1eq} = \infty$ , а

струм  $I_1 = 0$ . Це пояснюється в такий спосіб: при даній частоті має місце резонанс у другому контурі (тобто  $X_2 = 0$ ) і за умови  $R_2 = 0$  маємо, що  $Z_2 = 0$ .

З рівняння для другого контуру видно, що при кінцевому значенні струму в другому контурі ЕРС взаємної індукції  $j\omega M I_1$  повинно дорівнювати нулю, тобто  $I_1 = 0$ . Струм  $I_2$  визначають з умови рівності ЕРС взаємної індукції  $j\omega M I_2$  й напруги, що прикладена до першого контуру  $U_1$

$$I_2 = \frac{U_1}{j\omega}. \quad (4.224)$$

Це видно з першого рівняння системи (4.216) при  $I_1 = 0$ . Цей випадок за своїм характером є аналогічним резонансу струмів у контурі без втрат.

На рис. 4.56, а представлена резонансна характеристика  $I_1(\omega)$  при  $U_1 = \text{const}$ , а на рис. 4.56, б - частотна характеристика  $X_{1eq}(\omega)$ . Штриховими лініями нанесені характеристики для випадку  $R_2 \neq 0$ .

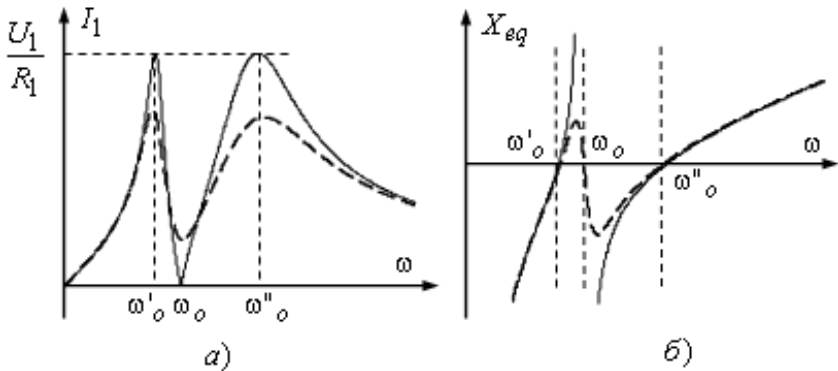


Рис. 4.56

Таким чином, резонансна характеристика  $I_1(\omega)$  кола, що складає із двох зв'язаних контурів з малим загасанням, має два максимуми й один мінімум.

### 4.32 Вимірювання електричних величин у однофазних колах синусоїдного струму

Для вимірювання періодичних змінних струмів і напруг застосовуються вимірювальні прилади, у яких сила, яка діє на рухливу систему, пропорційна квадрату миттєвого значення електричної величини, яку вимірюють. Такими приладами є прилади теплової, електродинамічної, електромагнітної й електростатичної систем. Зазначені типи приладів звичайно градуують в діючих значеннях струмів і напруг, завдяки чому в межах технічних частот при тому самому ефективному значенні змінного струму й еквівалентного йому постійного струму такі прилади дають однакові покази.

Для вимірювання електричного струму застосовують амперметри. Їх вмикають в електричне коло послідовно. При цьому струм, що протікає через амперметр, дорівнює струму, що протікає в вітці електричного кола. Щоб зменшити вплив амперметра на розподіл струмів його опір повинен бути значно менше опору вітки, у яку його вмикають.

Для вимірювання напруги застосовують вольтметри. Їх вмикають в електричне коло паралельно ділянці електричного кола. При цьому напруга на затискачах вольтметра дорівнює напрузі на цій ділянці електричного кола. Щоб зменшити вплив вольтметра на розподіл напруг його опір повинен бути значно більше опору ділянки електричного кола до якої його підмикають.

Вимірювання активної потужності виконують звичайно за допомогою ватметрів електродинамічної системи, у яких є дві котушки – нерухома й рухома. Нерухому котушку, що виготовлена з товстого проводу, називають *послідовною обмоткою*. Її, подібно амперметру, вмикають в коло послідовно. Рухому котушку, що виготовлена з тонкого проводу, називають *паралельною обмоткою*. Її, подібно вольтметру, підмикають паралельно ділянці кола. Жорстко з'єднана зі стрілкою, вона може обертатися в магнітному полі, що створює струм у нерухомій котушці. Початки котушок прийнято позначати зірочками.

Покази ватметра пропорційні активній потужності ділянки кола

$$W = UI \cos \varphi . \quad (4.225)$$

Одна з можливих схем вмикання вимірювальних приладів в електричне коло представлена на рис. 4.57.

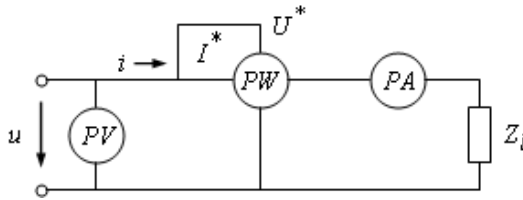


Рис. 4.57

### Питання для самоконтролю

1. Які електричні кола називають колами синусоїдного струму?
2. Які характеристики синусоїдних електричних величин Ви знаєте?
3. У чому полягає розрахунок однофазного електричного кола синусоїдного струму методом комплексних амплітуд?
4. Як виконується перехід від комплексного амплітудного (діючого) значення струму до його миттєвого значення?
5. Запишіть рівняння резистивного елемента. Який фазовий зсув вносить резистивний елемент між напругою й струмом?
6. Запишіть рівняння індуктивного елемента. Який фазовий зсув вносить індуктивний елемент між напругою й струмом?
7. Запишіть рівняння ємнісного елемента. Який фазовий зсув вносить ємнісний елемент між напругою й струмом?
8. Дайте визначення комплексного повного опору електричного кола?
9. Дайте визначення комплексної повної провідності електричного кола?
10. Сформулюйте закони Кірхгофа для електричного кола синусоїдного струму.
11. При яких умовах в електричному колі виникає резонанс напруг?
12. При яких умовах в електричному колі виникає резонанс струмів?
13. Дайте визначення повної комплексної потужності електричного кола синусоїдного струму.
14. Дайте визначення повної, активної й реактивної потужності кола синусоїдного струму. Укажіть їхні одиниці вимірювання.
15. Дайте визначення коефіцієнта потужності електричного кола?
16. Для електричного кола, схема якого представлена на рис. 4.9, задані параметри пасивних елементів:  $R = 10 \text{ Ом}$ ,  $L = 63,7 \text{ мГн}$ ,  $C = 106,2 \text{ мкФ}$ . Напруга джерела живлення  $u = 200 \sin 314t \text{ В}$ . Визначити діюче значення струму.

*Відповідь:* 10 А.

17. Для електричного кола, схема якого представлена на рис. 4.13, задані параметри пасивних елементів:  $R = 20 \text{ Ом}$ ,  $L = 63,7 \text{ мГн}$ ,  $C = 79,6 \text{ мкФ}$ . Напряга джерела живлення  $u = 200 \sin 314t \text{ В}$ . Визначити діюче значення струму у нерозгалуженій частині електричного кола.

*Відповідь:*  $10 \text{ А}$ .

18. Для електричного кола, схема якого представлена на рис. 4.20, задані параметри пасивних елементів:  $R = 20 \text{ Ом}$ ,  $L = 10 \text{ мГн}$ ,  $C = 100 \text{ мкФ}$ . Визначити кутову резонансну частоту та добротність послідовного коливального контуру.

*Відповідь:*  $\omega_o = 1000 \text{ с}^{-1}$ ,  $Q = 0,5$ .

19. Для електричного кола, схема якого представлена на рис. 4.25, задані параметри пасивних елементів:  $R_1 = 80 \text{ Ом}$ ,  $L = 10 \text{ мГн}$ ,  $R_2 = 60 \text{ Ом}$ ,  $C = 100 \text{ мкФ}$ . Визначити кутову резонансну частоту паралельного коливального контуру.

*Відповідь:*  $\omega_o = 750 \text{ с}^{-1}$ .

20. Для електричного кола, схема якого представлена на рис. 4.35, задані опори пасивних елементів:  $R_1 = 25 \text{ Ом}$ ;  $R_2 = 15 \text{ Ом}$ ;  $X_L = 15 \text{ Ом}$ ;  $X_C = 45 \text{ Ом}$ . Діюче значення напруги на вході електричного кола  $U = 100 \text{ В}$ . Визначити діюче значення струму в електричному колі.

*Відповідь:*  $I = 2 \text{ А}$ .

21. Для електричного кола, що було розглянуто в прикладах 4.6 і 4.7, внаслідок помилки затискачі одного з індуктивних елементів поміняли місцями. Визначити комплексні діючі значення струмів в усіх вітках електричного кола.

*Відповідь:*  $I_1 = 8,85e^{j32^\circ} \text{ А}$ ;  $I_1 = 4,12e^{j32^\circ} \text{ А}$ ;  $I_1 = 4,73e^{j32^\circ} \text{ А}$ .

22. Для електричного кола, схема якого представлена на рис. 4.13, задані покази вимірювальних приладів:  $I = 10 \text{ А}$ ,  $U = 200 \text{ В}$ ,  $P = 1000 \text{ Вт}$ . Визначити комплексний повний опір навантаження, вважаючи, що його характер активно-індуктивний.

*Відповідь:*  $Z_l = 20e^{j60^\circ} = (10 + j17,3) \text{ Ом}$ .

## Розділ п'ятий ТРИФАЗНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА

### 5.1 Основні поняття про багатофазні кола

Трифазні кола є основним видом електричних кіл, які використовують при виробництві, передачі й розподілу електричної енергії. Вони є окремим випадком симетричних багатофазних кіл.

*Багатофазне електричне коло* являє собою сукупність декількох однофазних електричних кіл (індуковані в одному джерелі енергії), у яких діють синусоїдні ЕРС однакової частоти, що відрізняються за фазою одна від іншої. Кожне з однофазних кіл, що входить до складу багатофазного, називають *фазою багатофазного кола*.

Таким чином в електротехніці термін "фаза" має два несхожі значення:

- аргумент, що характеризує стадію періодичного процесу;
- найменування однофазного кола, що є складовою частиною багатофазного електричного кола.

Кількість однофазних кіл, які входить до складу багатофазного, називають кількістю його фаз. Залежно від кількості фаз у електричному колі розрізняють двофазні, трифазні, шестифазні, дванадцятифазні кола й т.д.

Багатофазне електричне коло називають незв'язаним, якщо його фази не мають електричного зв'язку (кола такого типу практично не застосовуються внаслідок їхньої неекономічності, яка викликана великою кількістю проводів, що з'єднують джерело енергії й приймачі), і зв'язаним, якщо такий зв'язок існує.

Сукупність ЕРС, струмів і напруг у фазах багатофазного кола називають відповідно *багатофазною системою ЕРС, струмів і напруг*.

Таку систему ЕРС (струмів, напруг) називають *симетричною системою*, якщо амплітуди всіх ЕРС (струмів, напруг) й кути зсуву за фази між ними є однаковими

$$E_{m_k} = E_{m_{k+1}}; \quad (5.1)$$

$$\alpha = \psi_{k+1} - \psi_k = \frac{2\pi}{m},$$

де  $m$  - кількість фаз;  $E_{m_k}, E_{m_{k+1}}$  - амплітуди ЕРС  $e_k$  и  $e_{k+1}$ ;  $\psi_k, \psi_{k+1}$ , - початкові фази ЕРС  $e_k$  и  $e_{k+1}$ .

У силових випрямних установках використовують шести й дванадцятифазні електричні кола.

У системах контролю й автоматичного керування поширення дістала *двофазна система* ЕРС (напруг, струмів) при куті фазового зсуву між ними  $\alpha = \pi/2$ , що відповідає чверті періоду.

Хвильова діаграма для двофазної системи ЕРС представлена на рис. 5.1, а, векторна діаграма - на рис. 5.1, б. Така система є несиметричною навіть якщо амплітуди ЕРС однакові, тому що ЕРС  $e_2$  відстає за фазою від  $e_1$  на кут  $\pi/2$  (чверть періоду), але  $e_1$  відстає за фазою від  $e_2$  на кут  $3\pi/2$  (три чверті періоду).

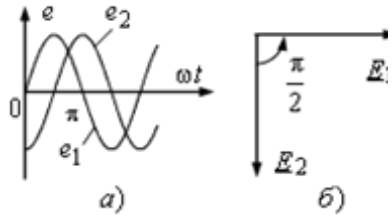


Рис. 5.1

Тим більше вона буде несиметричною, коли додатково порушується рівність амплітуд ЕРС або змінюється фазовий зсув між ними, що має місце, наприклад, при регулюванні швидкості двофазних електричних двигунів.

Але найбільше розповсюдження в сучасній електроенергетиці дістали трифазні електричні кола. Це пояснюється рядом їхніх переваг, як перед іншими багатофазними колами, так і перед однофазними колами синусоїдного струму. Серед цих переваг необхідно зазначити наступні:

- економічність виробництва й передачі енергії на дальні відстані трифазними електричними колами у порівнянні з електричними колами з іншою кількістю фаз та колами постійного струму;
- можливість порівняно простого одержання обертового магнітного поля, яке необхідно для перетворення електричної енергії в механічну в обертових машинах змінного струму;
- можливість одержання в одній електроустановці двох різних (за амплітудою) експлуатаційних напруг без додаткових перетворень;
- властивість незмінності значення миттєвої потужності за період синусоїдного струму, якщо навантаження у всіх трьох фазах генератора однакові;
- простота конструкції трифазних генераторів, двигунів і трансформаторів, що забезпечує їхню високу надійність.

## 5.2 Отримання трифазної синусоїдної системи ЕРС

Для створення трифазного електричного кола потрібні три джерела ЕРС із однаковими амплітудами й частотами, які зсунені за фазою на кути  $2\pi/3$ . Найпростішим технічним пристроєм, що забезпечує одночасне виконання всіх цих умов, є синхронний генератор. Найпростіший трифазний генератор має будову, що аналогічна будові однофазного генератора з тією лише різницею, що на його статорі розташована не одна, а три однакові обмотки (фази), які зсунені в просторі відносно одна одної на рівні кути  $\alpha = 2\pi/3 = 120^\circ$ . Початки обмоток прийнято позначати першими літерами латинського алфавіту  $A, B, C$ , а кінці - останніми літерами  $X, Y, Z$ . Ротор генератора являє собою постійний магніт або електромагніт постійного струму, обмотка якого живиться від окремого джерела постійного струму через два контактних кільця, що розташовані на валу. При обертанні ротора за допомогою додаткового двигуна в нерухомих обмотках статора, у результаті перетинання їх обертовим магнітним полем ротора, індукуються ЕРС. Частоти й амплітуди ЕРС обмоток обумовлюються частотою обертання ротора  $\omega$ , яку у промислових генераторах підтримують постійною. Рівність ЕРС обмоток забезпечується ідентичністю їхніх конструктивних параметрів, а фазовий зсув - зсувом обмоток у просторі відносно одна одної на рівні кути  $\alpha = 2\pi/3 = 120^\circ$ , або на  $1/3$  періоду. Отже, система трьох ЕРС буде симетричною.

Схематична будова найпростішого трифазного генератора представлено на рис. 5.2, а, хвильова діаграма й векторна діаграма симетричних ЕРС трифазного генератора - відповідно на рис. 5.2, б і рис. 5.2, в.

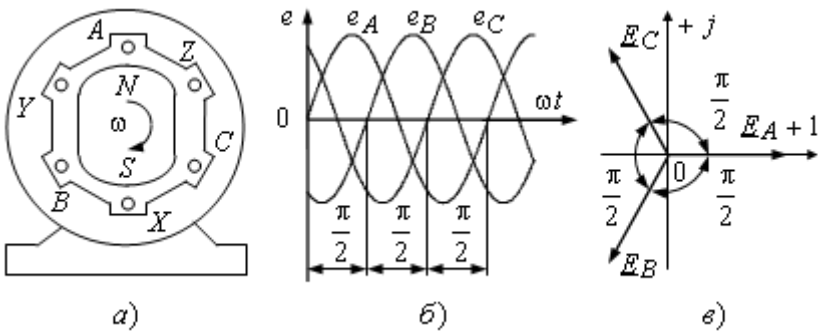


Рис. 5.2

Не має значення, яку із трьох фаз іменувати літерою  $A$ ,  $B$  або  $C$ , істотним є лише їхній порядок проходження одна за одною у часі. Послідовність проходження ЕРС через однакові стани (наприклад, через амплітудні значення або нульові значення) називають *послідовністю чергування фаз*.

Послідовність чергування фаз ЕРС, що представлена на рис. 5.2, б -  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $A$ . Її називають *прямою послідовністю чергування фаз*. У симетричній трифазній системі друга ЕРС (яку називають фаза  $B$ ) відстає за фазою від ЕРС фази  $A$  на  $1/3$  періоду, третя ЕРС (яку називають фаза  $C$ ) відстає за фазою від ЕРС фази  $B$  на  $1/3$  періоду або що теж саме випереджає за фазою ЕРС фази  $A$  на  $1/3$  періоду.

При побудові хвильової й векторної діаграм (рис. 5.2) прийнято за початок відліку часу початок періоду ЕРС у першій обмотці (у фазі  $A$ ).

З обліком цього миттєві значення ЕРС трифазного генератора

$$\begin{aligned} e_A &= E_m \sin \omega t; \\ e_B &= E_m \sin \left( \omega \left( t - \frac{T}{3} \right) \right) = E_m \sin \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right); \\ e_C &= E_m \sin \left( \omega \left( t + \frac{T}{3} \right) \right) = E_m \sin \left( \omega t + \frac{2\pi}{3} \right). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Якщо порядок проходження фаз через однакові стани буде зворотним ( $C$ ,  $B$ ,  $A$ ,  $C$ ), то дістанемо *зворотну послідовність чергування фаз*.

Послідовність чергування фаз визначає напрямок обертання трифазних двигунів, її також необхідно враховувати при вмиканні трифазних генераторів на паралельну роботу.

Для прямої послідовності ЕРС симетричної системи в комплексній формі мають вигляд

$$\begin{aligned} \underline{E}_A &= E e^{j0}; \\ \underline{E}_B &= \underline{E}_A e^{-j\frac{2\pi}{3}} = E e^{-j\frac{2\pi}{3}} = E e^{-j120^\circ}; \\ \underline{E}_C &= \underline{E}_A e^{+j\frac{2\pi}{3}} = E e^{+j\frac{2\pi}{3}} = E e^{+j120^\circ}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Для скорочення запису даної системи рівнянь можна викори-

стовувати так званий *оператор трифазної системи*  $a$

$$a = e^{j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0,5 + j0,866;$$

$$a^2 = e^{+j\frac{4\pi}{3}} = e^{-j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0,5 - j0,866; \quad (5.4)$$

$$a^3 = e^{j\frac{6\pi}{3}} = e^{j2\pi} = e^{j0} = 1 + j0 = 1.$$

Тоді

$$\underline{E}_A = \underline{E}; \quad \underline{E}_B = \underline{E}a^2; \quad \underline{E}_C = \underline{E}a. \quad (5.5)$$

Як впливає з векторної діаграми (рис. 5.2, *в*) для симетричної трифазної системи геометрична сума векторів ЕРС всіх фаз дорівнює нулю:

$$\begin{aligned} \underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C &= \underline{E} + \underline{E}a^2 + \underline{E}a = \underline{E}(1 + a^2 + a) = \\ &= \underline{E} + \underline{E}\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \underline{E}\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0. \end{aligned} \quad (5.6)$$

У нормально функціонуючих трифазних генераторах система ЕРС завжди є симетричною, оскільки виконуються всі умови симетрії (5.1). Забезпечення симетричності системи є необхідною умовою її ефективної роботи. Якщо хоча б одна із цих умов буде порушена (тобто ЕРС будуть різними за амплітудою або зсунені між собою за фазою на різні кути), система стане несиметричною. На рис. 5.3, як приклад, представлені векторні діаграми для трьох різних випадків несиметричних систем ЕРС:

- порушення рівності амплітуд ЕРС (рис. 5.3, *а*);
- порушення рівності фазових зсувів між ЕРС (рис. 5.3, *б*);
- загальний випадок асиметричної системи ЕРС (рис. 5.3, *в*).

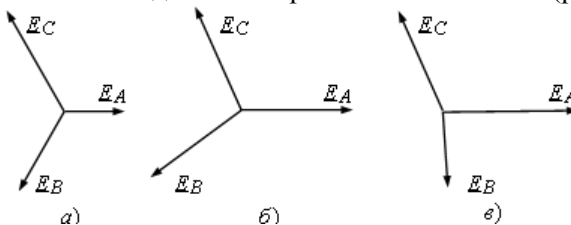


Рис. 5.3

У більшості випадків, якщо спеціально не обумовлено, при аналізі трифазних електричних кіл приймають пряму послідовність чергування фазних ЕРС трифазних джерел.

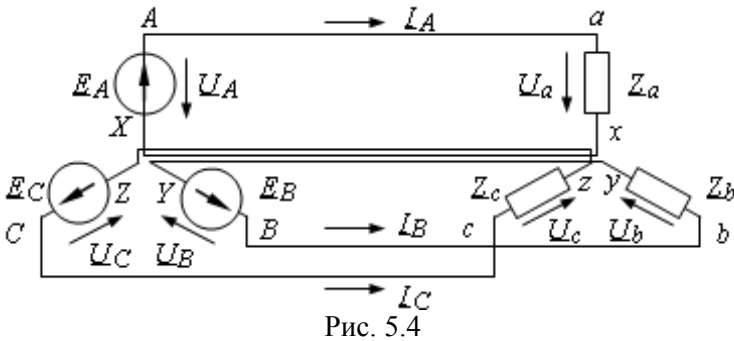
На практиці для визначення послідовності фаз застосовують спеціальні прилади – *фазопоказчики*.

### 5.3 Основні схеми з'єднання трифазних електричних кіл

#### 5.3.1 Незв'язана система трифазних електричних кіл

Приймачі, які вмикають у трифазне коло, можуть бути як однофазними, так і трифазними. Початки й кінці фаз приймачів позначають відповідно латинськими літерами  $a, b, c, x, y, z$ .

Кожну обмотку трифазного генератора можна з'єднати з окремим однофазним приймачем двома проводами, як представлено на рис. 5.4.



У цьому випадку утворюється незв'язана система трифазних кіл із шістьма проводами, що являє собою три незалежні однофазні електричні кола. У такому колі три фази з'єднані між собою тільки конструктивно трифазним джерелом і не мають між собою електричного зв'язку.

У цьому випадку розрахунок кожної фази виконують незалежно від інших з використанням методів розрахунку кіл однофазного синусоїдного струму.

Напругу між початками ( $A, B, C$ ) і кінцями ( $X, Y, Z$ ) обмоток генератора й напругу між початками ( $a, b, c$ ) і кінцями ( $x, y, z$ ) фаз навантаження називають *фазними напругами* відповідно генератора й навантаження.

Якщо внутрішніми опорами обмоток генератора й опорами

злучних проводів можна зневажити, то фазні напруги генератора й навантаження чисельно дорівнюють ЕРС

$$\underline{U}_A = \underline{U}_a = \underline{E}_A; \quad \underline{U}_B = \underline{U}_b = \underline{E}_B; \quad \underline{U}_C = \underline{U}_c = \underline{E}_C. \quad (5.7)$$

Струми в фазах електричного кола

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{E}_A}{\underline{Z}_A}; \quad \underline{I}_B = \frac{\underline{E}_B}{\underline{Z}_B}; \quad \underline{I}_C = \frac{\underline{E}_C}{\underline{Z}_C}. \quad (5.8)$$

*Симетричним* називають навантаження, комплексні повні опори фаз якого збігаються між собою

$$\underline{Z}_a = \underline{Z}_b = \underline{Z}_c = \underline{Z}e^{j\varphi}. \quad (5.9)$$

Якщо ця умова не виконується, то навантаження називають *несиметричним*. При цьому навантаження може бути *рівномірним*, якщо  $\underline{Z}_a = \underline{Z}_b = \underline{Z}_c = \underline{Z}$ , але  $\varphi_a \neq \varphi_b \neq \varphi_c$  або *однорідним*, якщо  $\varphi_a = \varphi_b = \varphi_c = \varphi$ , але  $\underline{Z}_a \neq \underline{Z}_b \neq \underline{Z}_c$ .

У загальному випадку несиметричної системи, коли навантаження й (або) генератор несиметричні, режим роботи трифазного кола можна проілюструвати векторною діаграмою, котра представлена на рис. 5.5, а, де різні за діючими значеннями струми  $I_A, I_B, I_C$ , які зсунені щодо відповідних ЕРС на різні кути  $\varphi_A, \varphi_B, \varphi_C$ , утворюють несиметричну систему.

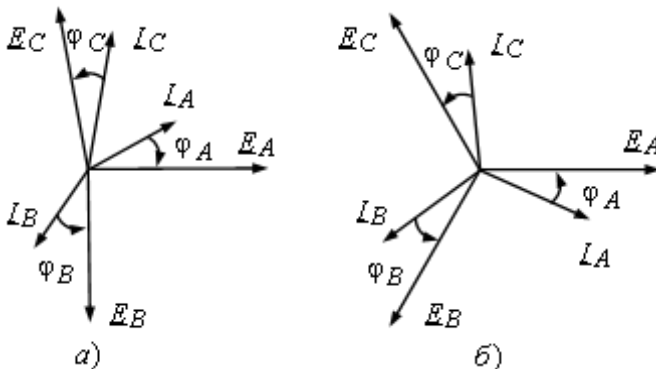


Рис. 5.5

Якщо система ЕРС генератора є симетричною й навантаження є симетричним, то фазні струми також утворюють симетричну систему. Дійсно, всі вони будуть однакові за амплітудою й зсунені щодо відповідних ЕРС на однакові кути. А тому що вектори ЕРС

зсунені відносно один одного на однакові кути  $2\pi/3$ , то й вектора струму також будуть зсунені друга щодо друга на однакові кути (рис. 5.5, а).

Режим, при якому як система ЕРС, так і навантаження є симетричними (а відповідно симетричними є системи фазних струмів й напруг) називають *симетричним режимом трифазного електричного кола*.

Незв'язані трифазні електричні кола не мають ніяких переваг перед однофазними (двопровідними). Вони неекономічні й тому їх практично не застосовують.

### 5.3.2 Основні схеми з'єднання обмоток генератора

Більш досконалыми й економічними є зв'язані кола, у яких обмотки генератора електрично з'єднані між собою. З'єднання обмоток генератора зіркою або трикутником дозволяє зменшити кількість проводів, які з'єднують генератор з навантаженням, із шести до чотирьох або до трьох.

При з'єднанні фаз обмотки генератора зіркою їхні кінці  $X, Y, Z$  з'єднують в один спільний вузол  $N$ , який називають *нейтральною точкою генератора* (або *нейтраллю генератора*). Схема трифазного генератора, обмотки якого з'єднані зіркою, представлена на рис. 5.6.

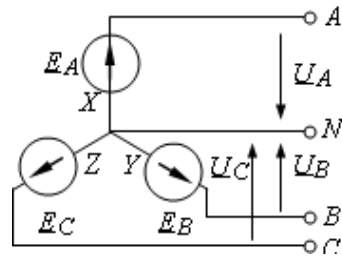


Рис. 5.6

До початків обмоток генератора  $A, B, C$  підмикають проводи, за допомогою яких генератор з'єднують із навантаженням. Ці проводи називають *лінійними*.

У чотирипровідних трифазних колах до нейтралі генератора підмикають *нейтральний провід*. У трипровідних він відсутній.

Напруги між однойменними затискачами генератора (між початками лінійних проводів) називають *лінійними напругами*  $u_{AB}, u_{BC}, u_{CA}$ . Додатний напрямок лінійних напруг указують порядком запису індексів.

Миттєві значення фазних напруг дорівнюють різницям миттєвих значень потенціалів початків і кінців відповідних обмоток

$$u_A = \varphi_A - \varphi_X; u_B = \varphi_B - \varphi_Y; u_C = \varphi_C - \varphi_Z. \quad (5.10)$$

Миттєві значення лінійних напруг дорівнюють різницям миттєвих значень потенціалів начал відповідних обмоток

$$u_{AB} = \varphi_A - \varphi_B; \quad u_{BC} = \varphi_B - \varphi_C; \quad u_{CA} = \varphi_C - \varphi_A. \quad (5.11)$$

Так як кінці обмоток з'єднані в один вузол, то їхні потенціали дорівнюють один одному  $\varphi_X = \varphi_Y = \varphi_Z = \varphi_N$ . Тоді миттєві значення лінійних напруг

$$\begin{aligned} u_{AB} &= \varphi_A - \varphi_B = (u_A + \varphi_X) - (u_B + \varphi_Y) = u_A - u_B; \\ u_{BC} &= \varphi_B - \varphi_C = (u_B + \varphi_Y) - (u_C + \varphi_Z) = u_B - u_C; \\ u_{CA} &= \varphi_C - \varphi_A = (u_C + \varphi_Z) - (u_A + \varphi_X) = u_C - u_A. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Комплекси лінійних напруг пов'язані з комплексами фазних напруг наступними співвідношеннями

$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_A - \underline{U}_B; \quad \underline{U}_{BC} = \underline{U}_B - \underline{U}_C; \quad \underline{U}_{CA} = \underline{U}_C - \underline{U}_A. \quad (5.13)$$

Якщо внутрішніми опорами обмоток генератора можна знехтувати, то фазні напруги генератора чисельно дорівнюють фазним ЕРС

$$\underline{U}_A = \underline{E}_A; \quad \underline{U}_B = \underline{E}_B; \quad \underline{U}_C = \underline{E}_C. \quad (5.14)$$

Відповідно до рівнянь (5.13) побудована векторна топографічна діаграма фазних і лінійних напруг, що представлена на рис. 5.7.

З векторної діаграми видно що, для симетричної системи напруг:

- діючі значення фазних напруг дорівнюють одне одному

$$U_A = U_B = U_C = U_\phi; \quad (5.15)$$

- діючі значення лінійних напруг дорівнюють одне одному

$$U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = U_L; \quad (5.16)$$

- лінійні напруги більше фазних напруг у  $\sqrt{3}$  разів

$$U_L = \sqrt{3}U_\phi; \quad (5.17)$$

- вектори лінійних напруг  $\underline{U}_{AB}$ ,  $\underline{U}_{BC}$ ,  $\underline{U}_{CA}$  зсунені за фазою відносно одне одного на кут  $2\pi/3$  і випереджають за фазою відповідні вектори фазних напруг  $\underline{U}_A$ ,  $\underline{U}_B$ ,  $\underline{U}_C$  на кути  $\pi/6$ ;

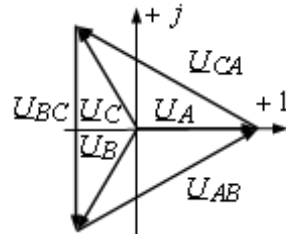


Рис. 5.7

- сума комплексних діючих значень лінійних напруг завжди дорівнює нулю

$$\underline{U}_{AB} + \underline{U}_{BC} + \underline{U}_{CA} = 0. \quad (5.18)$$

Якщо кінець першої обмотки трифазного генератора з'єднаний з початком другої обмотки, кінець другої обмотки з початком третьої й кінець третьої з початком першої, то обмотки генератора з'єднані трикутником (рис. 5.8).

Лінійні проводи приєднують до початків обмоток генератора  $A, B, C$  (або, що теж саме до кінців відповідних обмоток генератора  $Z, X, Y$ ). Фазні ЕРС генератора виявляються з'єднаними з початками фаз:  $A$  й  $B$ ,  $B$  й  $C$ ,  $C$  й  $A$ . Тому фазні ЕРС у цьому випадку позначають подвійними індексами:  $\underline{E}_{AB}$ ,  $\underline{E}_{BC}$ ,  $\underline{E}_{CA}$ .

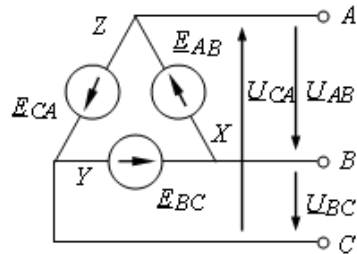


Рис. 5.8

Обмотки генератора, які з'єднані трикутником, утворюють замкнутий контур із малим опором, у якому діє сума трьох ЕРС  $\underline{E}_{AB}$ ,  $\underline{E}_{BC}$ ,  $\underline{E}_{CA}$ . Щоб у контурі при відсутності навантаження не виник струм, сума цих ЕРС у будь-який момент часу повинна дорівнювати нулю. Цій умові задовольняє симетрична система ЕРС

$$\underline{E}_{AB} + \underline{E}_{BC} + \underline{E}_{CA} = \underline{E} + \underline{E}a^2 + \underline{E}a = \underline{E}(1 + a^2 + a) = 0. \quad (5.19)$$

Як впливає зі схеми (рис. 5.8) для з'єднання трикутником лінійні напруги є одночасно й фазними.

Якщо внутрішніми опорами обмоток генератора можна знехтувати, то фазні напруги (лінійні) генератора чисельно дорівнюють фазним (лінійним) ЕРС

$$\underline{U}_{AB} = \underline{E}_{AB}; \quad \underline{U}_{BC} = \underline{E}_{BC}; \quad \underline{U}_{CA} = \underline{E}_{CA}. \quad (5.20)$$

Для симетричної системи напруг

$$U_l = U_\phi. \quad (5.21)$$

На практиці трифазні генератори переважно з'єднують зіркою. У цьому випадку зберігається можливість створити для живлення приймачів як трипровідну, так і чотирипровідну мережу, яка є більш універсальною, оскільки містить у своєму складі не тільки систему лінійних напруг, але й систему фазних.

### 5.3.3 Схеми з'єднання навантаження

Як уже були сказано приймачі, які приєднують до трифазного кола, можуть бути як однофазними, так і трифазними. Однофазні приймачі, як правило, малопотужні. До них належать освітлювальні прилади, однофазні двигуни, електроінструменти, малопотужні нагрівальні пристрої й мікродвигуни, блоки живлення керуючих автоматів, пристрої інформаційних технологій - персональні комп'ютери, і принтери, побутові прилади.

У паспорті однофазних приймачів указують номінальну напругу  $U_{nom}$ . У відповідності зі значенням цього параметра однофазні приймачі в трифазне електричне коло можна увімкнути двома способами:

- між двома лінійними проводами;
- між лінійним проводом і нейтральною точкою генератора.

Для трифазних мереж однофазні приймачі є несиметричним навантаженням.

До трифазних приймачів належать трифазні синхронні й асинхронні двигуни, індукційні печі й інші силові установки. Вони мають три фази, які повністю конструктивно ідентичні. Як правило, трифазні пристрої характеризуються досить великою потужністю. У паспорті трифазних приймачів указують номінальну лінійну напругу  $U_{nom}$ . У трифазній мережі трифазні приймачі підмикають до лінійних проводів  $U_{nom} = U_L$ . При цьому їхні фази можуть бути з'єднані як трикутником так і зіркою. Для трифазних мереж трифазні приймачі як правило є симетричним навантаженням.

В електроенергетиці діючі значення лінійні напруги низьковольтних трифазних кіл мають стандартні значення, що відрізняються друг від друга в  $\sqrt{3}$  разів: 127, 220, 380, 660 В. Це дозволяє той самий трифазний приймач експлуатувати на двох суміжних лінійних напругах.

Фази навантаження також можуть з'єднуватися як зіркою, так і трикутником.

Спосіб з'єднання фаз генератора не визначає способу з'єднання фаз трифазного навантаження.

При з'єднанні фаз навантаження зіркою їхні кінці  $x$ ,  $y$ ,  $z$  з'єднують в один спільний вузол  $n$ , що називають *нейтральною точкою навантаження* (або *нейтраллю навантаження*).

При з'єднанні фаз навантаження трикутником кінець першої фази навантаження з'єднаний з початком другої фази, кінець другої фази з початком третьої й кінець третьої з початком першої.

До початків фаз навантаження приєднують лінійні проводи. У чотирипровідних трифазних колах до нейтралей навантаження та генератора підмикають нейтральний провід. У трипровідних він відсутній.

Існує п'ять найпростіших способів з'єднання трифазного генератора із трифазним навантаженням: зірка - зірка з нейтральним проводом (чотирипровідна зірка), зірка - зірка без нейтрального проводу (трипровідна зірка), зірка - трикутник, трикутник - зірка, трикутник - трикутник.

#### 5.4 Несиметричний режим трифазного кола, що з'єднане за схемою зірка-зірка з нейтральним проводом, опором якого не можна зневажити

Чотирипровідна зірка утворюється після заміни трьох зворотних проводів незв'язаної системи трифазних кіл (рис. 5.4) одним спільним проводом. Цей провід, що з'єднує нейтральну точку генератора  $N$  і нейтральну точку навантаження  $n$  називають *нейтральним проводом* (рис. 5.9).

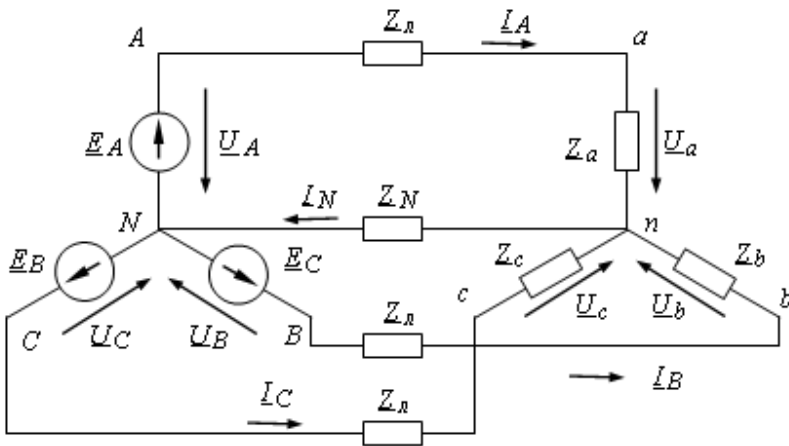


Рис. 5.9

За додатний напрямок струмів у лінійних проводах (їх називають *лінійні струми*)  $I_A$ ,  $I_B$ ,  $I_C$ , прийнято напрямок від генера-

тора до навантаження, а струму в нейтральному проводі  $I_N$  – від навантаження до генератора. Відповідно до першого закону Кірхгофа

$$I_N = I_A + I_B + I_C. \quad (5.22)$$

Тому що лінійні проводи з'єднані послідовно з фазами генератора й навантаження, лінійні струми при з'єднанні зірка-зірка дорівнюють відповідним фазним струмам.

Опори фаз генератора можуть бути враховані зміною відповідних опорів лінійних проводів.

Розрахунок трифазного кола при наявності в колі тільки статичного навантаження виконують звичайно в символічній формі тими ж методами, які застосовують для розрахунку розгалужених електричних кіл з декількома ЕРС.

Несиметричне трифазне коло, яке представлено на рис. 5.9, може розглядатися як триконтурне коло із трьома ЕРС. Таке коло може бути розрахована шляхом безпосереднього застосування законів Кірхгофа, методом контурних струмів й іншими. Оскільки в схемі є тільки два вузли, найбільш доцільно в цьому випадку застосувати метод вузлових потенціалів (або точніше метод двох вузлів). Уважаючи, що потенціал нейтральної точки генератора дорівнює нулю  $\varphi_N = 0$ , маємо

$$\varphi_n (Y_A + Y_B + Y_C + Y_N) = E_A Y_A + E_B Y_B + E_C Y_C, \quad (5.23)$$

де  $Y_A = \frac{1}{Z_a + Z_l}$ ;  $Y_B = \frac{1}{Z_b + Z_l}$ ;  $Y_C = \frac{1}{Z_c + Z_l}$  - комплекси провідностей фаз;  $Y_N = \frac{1}{Z_N}$  - провідність нейтрального проводу.

З рівняння (5.23) маємо

$$\varphi_n = \varphi_n - \varphi_N = U_{nN} = U_N = \frac{E_A Y_A + E_B Y_B + E_C Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C + Y_N}. \quad (5.24)$$

Напругу  $U_N$  називають *напругою зсуву нейтральної точки* (*напругою зсуву нейтралі*). Вона показує на скільки потенціал нейтральної точки навантаження відрізняється від потенціалу нейтральної точки джерела.

Якщо внутрішніми опорами обмоток генератора можна знехувати, то фазні напруги генератора чисельно дорівнюють фазним

ЕРС:  $\underline{U}_A = \underline{E}_A$ ;  $\underline{U}_B = \underline{E}_B$ ;  $\underline{U}_C = \underline{E}_C$  (5.14). Тоді

$$\underline{U}_N = \frac{\underline{U}_A \underline{Y}_A + \underline{U}_B \underline{Y}_B + \underline{U}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N}. \quad (5.25)$$

Лінійні струми у відповідності з законом Ома

$$\begin{aligned} \underline{I}_A &= (\underline{U}_A - \underline{U}_N) \underline{Y}_A = \underline{U}_{An} \underline{Y}_A; \\ \underline{I}_B &= (\underline{U}_B - \underline{U}_N) \underline{Y}_B = \underline{U}_{Bn} \underline{Y}_B; \\ \underline{I}_C &= (\underline{U}_C - \underline{U}_N) \underline{Y}_C = \underline{U}_{Cn} \underline{Y}_C. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Струм в нейтральному проводі можна визначити, використовуючи закон Ома або перший закон Кірхгофа

$$\underline{I}_N = \underline{U}_N \underline{Y}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C. \quad (5.27)$$

При відсутності нейтрального проводу або його розірві, електричне коло з'єднане трипровідною зіркою ( $\underline{Z}_N = \infty$  або  $\underline{Y}_N = 0$ ).

Тоді

$$\underline{U}_N = \frac{\underline{U}_A \underline{Y}_A + \underline{U}_B \underline{Y}_B + \underline{U}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}. \quad (5.28)$$

Формули для розрахунку фазних струмів залишаються без змін, але відповідно до першого закону Кірхгофа

$$\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0. \quad (5.29)$$

Фазні напруги навантаження

$$\begin{aligned} \underline{U}_a &= \underline{U}_{an} = \underline{I}_A \underline{Z}_a; \\ \underline{U}_b &= \underline{U}_{bn} = \underline{I}_B \underline{Z}_b; \\ \underline{U}_c &= \underline{U}_{cn} = \underline{I}_C \underline{Z}_c. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Якщо прийняти, що опори лінійних проводів і внутрішні опори генератора дорівнюють нулю, фазні напруги навантаження

$$\begin{aligned} \underline{U}_a &= \underline{U}_{An} = \underline{U}_A - \underline{U}_N = \underline{E}_A - \underline{U}_N; \\ \underline{U}_b &= \underline{U}_{Bn} = \underline{U}_B - \underline{U}_N = \underline{E}_B - \underline{U}_N; \\ \underline{U}_c &= \underline{U}_{Cn} = \underline{U}_C - \underline{U}_N = \underline{E}_C - \underline{U}_N. \end{aligned} \quad (5.31)$$

З отриманих співвідношень випливає, що не слід плутати фазні напруги генератора й фазні напруги навантаження.

Вирази для напруги зсуву й струмів показують, що  $\underline{U}_N$  буде змінюватися при зміні навантаження в будь-якій фазі, а, отже, бу-

дуть змінюватися й всі фазні струми й напруги навантаження.

Таким чином, трифазні електричні кола, що з'єднані за схемою зірка-зірка без нульового проводу, а також за схемою зірка-зірка з нульовим проводом, опором якого не можна зневажити, не забезпечують незалежність роботи фаз.

Топографічна векторна діаграма напруг для випадку наявності напруги зсуву нейтралі представлена на рис. 5.10.

Можна безпосередньо визначати напругу  $\underline{U}_{An}$ , без обчислення напруги зсуву нейтралі  $\underline{U}_N$ . Круговою заміною індексів (із прямим порядком проходження  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$  і т.д.) одержимо вирази для напруг  $\underline{U}_{Bn}$  й  $\underline{U}_{Cn}$ .

$$\begin{aligned} \underline{U}_{An} &= \underline{U}_A - \underline{U}_N = \underline{U}_A - \frac{\underline{U}_A \underline{Y}_A + \underline{U}_B \underline{Y}_B + \underline{U}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N} = \\ &= \frac{(\underline{U}_A - \underline{U}_B) \underline{Y}_B - (\underline{U}_C - \underline{U}_A) \underline{Y}_C + \underline{U}_A \underline{Y}_N}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N} = \\ &= \frac{\underline{U}_{AB} \underline{Y}_B - \underline{U}_{CA} \underline{Y}_C + \underline{U}_A \underline{Y}_N}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N}; \quad (5.32) \\ \underline{U}_{Bn} &= \frac{\underline{U}_{BC} \underline{Y}_C - \underline{U}_{AB} \underline{Y}_A + \underline{U}_B \underline{Y}_N}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N}; \\ \underline{U}_{Cn} &= \frac{\underline{U}_{CA} \underline{Y}_A - \underline{U}_{BC} \underline{Y}_B + \underline{U}_C \underline{Y}_N}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N}. \end{aligned}$$

Якщо нейтральний провід є відсутнім ( $\underline{Y}_N = 0$ ), то ці напруги можна визначити через лінійні напруги джерела

$$\begin{aligned} \underline{U}_{An} &= \frac{\underline{U}_{AB} \underline{Y}_B - \underline{U}_{CA} \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N}; \\ \underline{U}_{Bn} &= \frac{\underline{U}_{BC} \underline{Y}_C - \underline{U}_{AB} \underline{Y}_A}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N}; \quad (5.33) \\ \underline{U}_{Cn} &= \frac{\underline{U}_{CA} \underline{Y}_A - \underline{U}_{BC} \underline{Y}_B}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N}. \end{aligned}$$

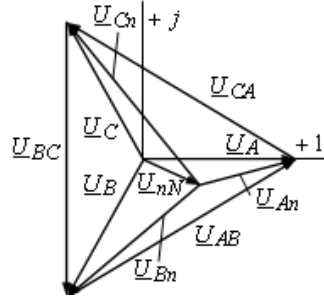


Рис. 5.10

### 5.5 Несиметричний режим трифазного кола, що з'єднане за схемою зірка-зірка з нейтральним проводом, опором якого можна зневажити

У більшості випадків опір нейтрального проводу значно менше опорів фаз, а отже його провідність значно більше провідностей фаз. Тому відповідно до формул (5.24) і (5.25) потенціал вузла  $n$  прагне до нуля, тобто практично дорівнює потенціалу вузла  $N$ . Тому при розрахунку вузли  $N$  й  $n$  можна об'єднати в один спільний вузол.

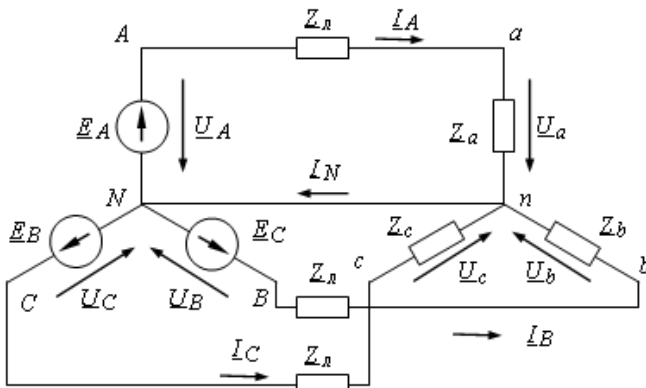


Рис. 5.11

При цьому в розрахунковій схемі утворюються три незалежні контури, струми в яких

$$\begin{aligned} I_A &= \frac{U_A}{Z_a + Z_{\text{л}}}; \\ I_B &= \frac{U_B}{Z_b + Z_{\text{л}}}; \\ I_C &= \frac{U_C}{Z_c + Z_{\text{л}}}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Струм у нейтральному проводі відповідно до першого закону Кірхгофа

$$I_N = I_A + I_B + I_C. \quad (5.35)$$

Трифазні електричні кола, що з'єднані за схемою зірка-зірка з нульовим проводом, опором якого можна зневажити, забезпечують незалежність роботи фаз.

### 5.6 Симетричний режим трифазного кола, що з'єднане за схемою зірка-зірка

Як говорилося раніше, при симетричному режимі фазні напруги джерела утворюють симетричну систему, а комплексні повні опори (провідності) всіх трьох фаз збігаються

$$\begin{aligned} \underline{Z}_a + \underline{Z}_l &= \underline{Z}_b + \underline{Z}_l = \underline{Z}_c + \underline{Z}_l = \underline{Z} = Ze^{j\varphi}; \\ \underline{Y}_A = \underline{Y}_B = \underline{Y}_C &= \frac{1}{\underline{Z}_A + \underline{Z}_l} = Ye^{-j\varphi}. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Тоді

$$\underline{U}_N = \frac{\underline{U}_A \underline{Y}_A + \underline{U}_B \underline{Y}_B + \underline{U}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N} = \frac{\underline{Y}_A (\underline{U}_A + \underline{U}_B + \underline{U}_C)}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N} = 0. \quad (5.37)$$

Таким чином, при симетричному режимі потенціали нейтральних точок генератора й навантаження однакові. Тому, не порушуючи режиму роботи, їх можна об'єднати в один вузол. При цьому в схемі утворюються три незалежних контури, струми в яких

$$I_A = \frac{U_A}{Z_a + Z_l}; \quad I_B = \frac{U_B}{Z_b + Z_l}; \quad I_C = \frac{U_C}{Z_c + Z_l}. \quad (5.38)$$

З урахуванням співвідношеннями між фазними напругами генератора і того, що комплексні повні опори фаз збігаються

$$\begin{aligned} I_A &= \frac{U_A}{Z_a + Z_l} = \frac{U_\phi}{Ze^{j\varphi}} = I_\phi e^{-j\varphi}; \\ I_B &= \frac{U_B}{Z_b + Z_l} = \frac{U_A e^{-j\frac{2\pi}{3}}}{Z_a + Z_l} = I_A e^{-j\frac{2\pi}{3}} = I_\phi e^{-j\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right)}; \\ I_C &= \frac{U_C}{Z_c + Z_l} = \frac{U_A e^{j\frac{2\pi}{3}}}{Z_a + Z_l} = I_A e^{j\frac{2\pi}{3}} = I_\phi e^{-j\left(\varphi - \frac{2\pi}{3}\right)}. \end{aligned} \quad (5.39)$$

де  $I_\phi = \frac{U_\phi}{Z}$  - фазний (лінійний) струм.

Таким чином, що діючі значення фазних (лінійних) струмів однакові, а самі струми зсунені відносно один одного за фазою на однакові кути  $\pm 2\pi/3$ . Як було показано раніше, сума трьох векто-

рів, які утворюють симетричну трійку дорівнює нулю. Тому струм у нейтральному проводі є відсутнім

$$I_N = I_A + I_B + I_C = 0. \quad (5.40)$$

Отже, при симетричному режимі в трифазному колі, що з'єднане за схемою "чотирипровідна зірка", нейтральний провід не впливає на роботу кола й може бути відімкненим. Тому чотирипровідну зірку можна замінити трипровідною без зміни режиму.

На рис. 5.12 представлена суміщена векторна діаграма струмів і напруг для симетричного режиму якщо характер навантаження активно-індуктивний ( $\varphi > 0$ ).

З діаграми видно, що в цьому режимі роботи досить розрахувати струми тільки в одній з фаз кола (наприклад, у фазі А). Діючі значення струмів інших фаз будуть такими самими, але самі струми зсунені за фазою щодо струму фази А на кути  $\pm 120^\circ$ .

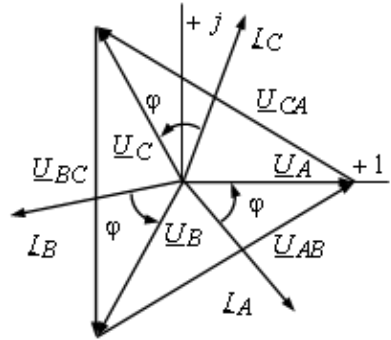


Рис. 5.12

### 5.7 Аварійні режими трифазного кола, що з'єднане за схемою зірка-зірка

У трифазних колах, як й у будь-яких електричних колах, у процесі роботи виникають різні аварійні режими, причинами яких є різні пошкодження: короткі замикання й розриви віток. У цьому підрозділі розглядаються деякі типові випадки, які можливі в трифазному колі при з'єднанні зірка-зірка. Для наочності аварійні режими зіставляються із симетричним режимом.

*Приклад 5.1.* Трифазне електричне коло (рис. 5.13) складається з генератора й трифазного навантаження, які з'єднані за схемою зірка-зірка з нейтральним проводом. Генератор виробляє симетричну систему ЕРС із діючим значенням  $E = 380 \text{ В}$ . Опір кожної фази симетричного навантаження  $Z_a = Z_b = Z_c = Z_\phi = 30 + j40 = 50e^{j53^\circ} \text{ Ом}$ . Вимикачі  $Q1$  й  $Q2$  замкнуті, вимикач  $Q3$  розімкнено. Потрібно розрахувати струми у всіх лінійних проводах й у нейтральному проводі, а також побудувати суміщену векторну діаграму струмів і напруг.

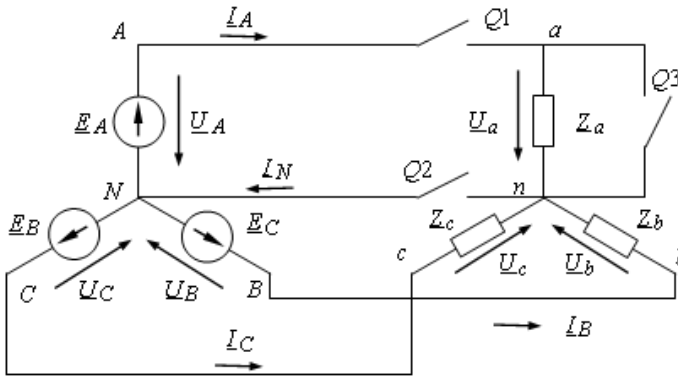


Рис.5.13

*Розв'язання.* Всі розрахунки виконуємо в символічному методі.

Визначаємо фазні ЕРС генератора. Приймаємо, що початкова фаза ЕРС фази А дорівнює нулю.

$$\underline{E}_A = 380e^{j0^\circ} = (380 + j0) \text{ В}; \quad \underline{E}_B = 380e^{-j120^\circ} = (-190 - j329) \text{ В};$$

$$\underline{E}_C = 220e^{j120^\circ} = (-190 + j329) \text{ В}.$$

Приймаємо, що опори обмоток генератора дорівнюють нулю. Тоді фазні напруги генератора

$$\underline{U}_A = \underline{E}_A = 380e^{j0^\circ} = (380 + j0) \text{ В};$$

$$\underline{U}_B = \underline{E}_B = 380e^{-j120^\circ} = (-190 - j329) \text{ В};$$

$$\underline{U}_C = \underline{E}_C = 380e^{j120^\circ} = (-190 + j329) \text{ В}.$$

Обчислюємо лінійні напруги генератора

$$\begin{aligned} \underline{U}_{AB} &= \underline{U}_A - \underline{U}_B = (380 + j0) - (-190 - j329) = \\ &= 570 + j329 = 658e^{j30^\circ} \text{ В}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_{BC} &= \underline{U}_B - \underline{U}_C = (-190 - j329) - (-190 + j329) = \\ &= 0 - j658 = 658e^{-j90^\circ} \text{ В}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_{CA} &= \underline{U}_C - \underline{U}_A = (-190 + j329) - (380 + j0) = \\ &= -570 + j190 = 658e^{j150^\circ} \text{ В}. \end{aligned}$$

Визначаємо напругу зсуву нейтралі. Відповідно до формул (5.24) і (5.25)  $\underline{U}_N \rightarrow 0$ , тому що в цьому випадку  $\underline{U}_A \underline{Y}_A + \underline{U}_B \underline{Y}_B + \underline{U}_C \underline{Y}_C = \underline{Y}_A (\underline{U}_A + \underline{U}_B + \underline{U}_C) = 0$ .

Визначаємо фазні (лінійні) струми навантаження, використовуючи формулу закону Ома

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_A}{\underline{Z}_a} = \frac{380e^{j30^\circ}}{50e^{j53^\circ}} = 7,60e^{-j23^\circ} = (7,00 - j2,97) \text{ A};$$

$$\underline{I}_B = \frac{\underline{U}_B}{\underline{Z}_b} = \frac{380e^{-j90^\circ}}{50e^{j53^\circ}} = 7,60e^{-j143^\circ} = (-6,07 - j4,57) \text{ A};$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}_C}{\underline{Z}_c} = \frac{380e^{j150^\circ}}{50e^{j53^\circ}} = 7,60e^{j97^\circ} = (-0,93 + j7,54) \text{ A}.$$

Діючі значення фазних струмів у всіх трьох фазах кола однакові й становлять  $I_\phi = 7,6 \text{ A}$ . Комплексні діючі значення цих струмів утворюють симетричну систему й тому струм у нейтральному проводі відповідно до формули (5.40) дорівнює нулю

$$\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = (7,00 - j2,97) + (-6,07 - j4,57) + (-0,93 + j7,54) = 0 \text{ A}.$$

Векторна діаграма досліджуваного трифазного кола представлена на рис. 5.14. Дана діаграма підтверджує формули (5.39) відповідно до яких досить розрахувати струм тільки в одній з фаз (наприклад, у фазі А). Струми у двох інших фазах будуть такими ж за діючим значенням, але зсуненими щодо фази А по фазі на кути  $\pm 120^\circ$ .

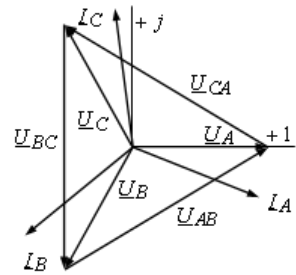


Рис.5.14

*Приклад 5.2.* У трифазному електричному колі (рис. 5.13) відбулася розірва лінійного проводу фази А. Вимикач  $Q2$  замкнений, вимикачі  $Q1$  й  $Q3$  розімкнуті. Параметри генератора й опори фаз залишилися без зміни (як у прикладі 5.1). Потрібно розрахувати струми у всіх лінійних проводах й у нейтральному проводі, а також побудувати суміщену векторну діаграму струмів і напруг.

*Розв'язання.* Фазні й лінійні напруги генератора залишилися без змін в порівнянні із прикладом 5.1.

Визначаємо напругу зсуву нейтралі. Відповідно до формул (5.24) і (5.25)  $\underline{U}_N \rightarrow 0$ , тому що в цьому випадку  $\underline{Z}_N \rightarrow 0$  (а, отже,  $\underline{Y}_N \rightarrow \infty$ ).

Опори лінійних проводів фаз *B* й *C* дорівнюють нулю, а через розрив опір лінійного проводу фази *A* прагне до нескінченності. Тому фазні напруги фаз *B* й *C* навантаження збігаються з відповідними фазними напругами генератора, але фазна напруга фази *A* навантаження дорівнює нулю (спад напруги припадає на розриву).

Визначаємо фазні (лінійні) струми навантаження, використовуючи формулу закону Ома

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_a}{\underline{Z}_a} = \frac{0}{50e^{j53^\circ}} = 0 \text{ A};$$

$$\underline{I}_B = \frac{\underline{U}_B}{\underline{Z}_b} = \frac{\underline{U}_b}{\underline{Z}_b} = \frac{380e^{-j90^\circ}}{50e^{j53^\circ}} = 7,60e^{-j143^\circ} = (-6,07 - j4,57) \text{ A};$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}_C}{\underline{Z}_c} = \frac{\underline{U}_c}{\underline{Z}_c} = \frac{380e^{j150^\circ}}{50e^{j53^\circ}} = 7,60e^{j97^\circ} = (-0,93 + j7,54) \text{ A}.$$

Струм в нейтральному проводі в відповідності з формулою (5.27) дорівнює нулю

$$\begin{aligned} \underline{I}_N &= \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = \\ &= 0 + (-6,07 - j4,57) + (-0,93 + j7,54) = \\ &= -7,00 + 2,97 = 7,60e^{j157^\circ} \text{ A}. \end{aligned}$$

Векторна діаграма досліджуваного трифазного кола представлена на рис. 5.15.

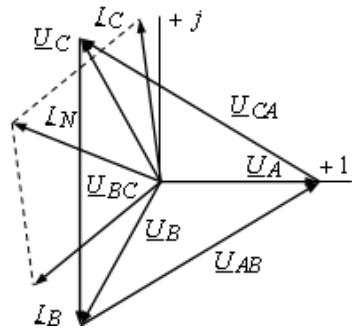


Рис. 5.15

*Приклад 5.3.* У трифазному електричному колі (рис. 5.13) при відсутності нейтрального проводу відбулася розрива лінійного проводу фази *A*. Вимикачі *Q1*, *Q2* й *Q3* розімкнуті. Параметри генератора й опори неушкоджених фаз залишилися без зміни (як у прикладі 5.1). Потрібно розрахувати струми у всіх лінійних проводах, а

також побудувати суміщену векторну діаграму струмів і напруг.

*Розв'язання.* Фазні й лінійні напруги генератора залишилися без зміни в порівнянні з прикладом 5.1.

Провідність фази *A* дорівнює нулю  $\underline{Y}_A = 0$  *Сим* (фаза *A* обірвана), провідності фаз *B* й *C* дорівнюють одна одній

$$\underline{Y}_B = \underline{Y}_C = \frac{1}{Z_\phi} = \frac{1}{30 + j40} = 0,012 - j0,016 = 0,02e^{-j53^\circ} \text{ Сим.}$$

Визначаємо напругу зсуву нейтралі

$$\begin{aligned} \underline{U}_N &= \frac{\underline{U}_B \underline{Y}_B + \underline{U}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_B + \underline{Y}_C} = \frac{\underline{Y}_B (\underline{U}_B + \underline{U}_C)}{2\underline{Y}_B} = \frac{\underline{U}_B + \underline{U}_C}{2} = \\ &= -\frac{\underline{U}_A}{2} = -\frac{380}{2} = -190 = 190e^{j180^\circ} \text{ Сим} \end{aligned}$$

Визначаємо фазні (лінійні) струми навантаження, використовуючи формулу закону Ома

$$\begin{aligned} \underline{I}_A &= (\underline{U}_A - \underline{U}_N) \underline{Y}_A = (380 - (-190)) \cdot 0 = 0 \text{ A}; \\ \underline{I}_B &= (\underline{U}_B - \underline{U}_N) \underline{Y}_B = (-190 - j329 - (-190))(0,012 - j0,016) = \\ &= -5,26 - j3,95 = 6,58e^{-j143^\circ} \text{ A}; \\ \underline{I}_C &= (\underline{U}_C - \underline{U}_N) \underline{Y}_B = (-190 + j329 - (-190))(0,012 - j0,016) = \\ &= 5,26 + j3,95 = 6,58e^{j37^\circ} \text{ A}. \end{aligned}$$

Із цих розрахунків випливає, що лінійні струми  $\underline{I}_B$  й  $\underline{I}_C$  це фактично той самий струм у контурі *NBbnсCN* (фаза *A* обірвана). Тому струм  $\underline{I}_C$  має знак протилежний до знаку струму  $\underline{I}_B$ .

Визначаємо фазні напруги навантаження в неушкоджених фазах *B* й *C*, використовуючи формулу закону Ома

$$\begin{aligned} \underline{U}_b &= \underline{I}_B \cdot Z_\phi = (-5,26 - j3,95)(30 + j40) = \\ &= 0,2 - j328,9 = 329e^{-j90^\circ} \text{ В}; \\ \underline{U}_c &= \underline{I}_C \cdot Z_\phi = (5,26 + j3,95)(30 + j40) = \\ &= -0,2 + j328,9 = 329e^{j90^\circ} \text{ В}. \end{aligned}$$

Так само як і струми, фазні напруги  $\underline{U}_b$  й  $\underline{U}_c$  навантаження спрямовані в протилежні сторони. Діючі значення цих напруг од-



*Розв'язання.* Фазні й лінійні напруги генератора залишилися без зміни.

Провідність фази  $A$  дорівнює нескінченності  $\underline{Y}_A = \infty$  Сум (у фазі  $A$  коротке замикання). Формула (5.28) для визначення в цьому випадку не підходить, тому що приводить до невизначеності виду  $\frac{\infty}{\infty}$ . Напругу зсуву нейтралі визначимо з розгляду контуру  $NAanN$  кола, для якого у відповідності із другим законом Кірхгофа маємо  $\underline{E}_A = \underline{U}_a + \underline{U}_N$ . Звідси з обліком того, що при короткому замиканні  $\underline{U}_a = 0$ , одержимо

$$\underline{U}_N = \underline{E}_A - \underline{U}_a = 380 - 0 = 380 + j0 = 380e^{j0^\circ} \text{ В.}$$

Визначаємо фазні (лінійні) струми навантаження в неушкоджених фазах  $B$  й  $C$ , використовуючи формулу закону Ома

$$\underline{I}_B = (\underline{U}_B - \underline{U}_N)\underline{Y}_B = (-190 - j329 - 380)(0,012 - j0,016) =$$

$$= -12,10 + j5,17 = 13,16e^{j157^\circ} \text{ А;}$$

$$\underline{I}_C = (\underline{U}_C - \underline{U}_N)\underline{Y}_B = (-190 + j329 - 380)(0,012 - j0,016) =$$

$$= -1,58 + j13,07 = 13,16e^{j97^\circ} \text{ А.}$$

Визначаємо фазний (лінійний) струм навантаження в ушкодженій фазі  $A$ , використовуючи перший закон Кірхгофа

$$\underline{I}_A = -(\underline{I}_B + \underline{I}_C) = -(-12,10 + j5,17 - 1,58 + j13,07) =$$

$$= 13,68 - j18,24 = 22,8e^{-j53^\circ} \text{ В.}$$

Визначаємо фазні напруги навантаження в неушкоджених фазах  $B$  й  $C$  (в ушкодженій фазі  $A$   $\underline{U}_a = 0$ ), використовуючи формулу закону Ома

$$\underline{U}_b = \underline{I}_B \cdot \underline{Z}_\phi = (-12,10 + j5,17)(30 + j40) =$$

$$= -569,8 - j328,9 = 658e^{-j150^\circ} \text{ В;}$$

$$\underline{U}_c = \underline{I}_C \cdot \underline{Z}_\phi = (-1,58 + j13,07)(30 + j40) =$$

$$= -570,2 + j328,9 = 658e^{j150^\circ} \text{ В.}$$

Суміщена векторна діаграма досліджуваного трифазного кола представлена на рис. 5.17.

Аналіз розрахунку й векторної діаграми показує, що при короткому замиканні однієї з фаз навантаження в трипровідному колі, що з'єднане за схемою зірка-зірка, діючі значення фазних напруг навантаження нешкоджені фаз дорівнюють діючому значенню лінійної напруги.

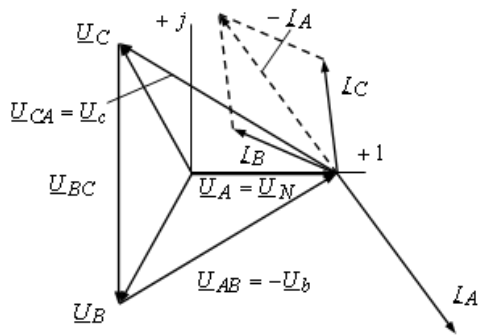


Рис. 5.17

Коротке замикання однієї з фаз навантаження в чотирипровідному колі, що з'єднане за схемою зірка-зірка, неприпустимо, тому що приводить до короткого замикання відповідної фазної обмотки генератора.

### 5.8 Принцип дії найпростішого показника послідовності чергування фаз

Прикладом несиметричного навантаження може служити показник послідовності чергування фаз. *Фазопоказчик* являє собою дві однакові жарні лампи й конденсатор, що з'єднані зіркою. Затискачі показника з'єднують з трьома затискачами трифазної системи напруг (конденсатор до фази А) як показано на рис. 5.18.

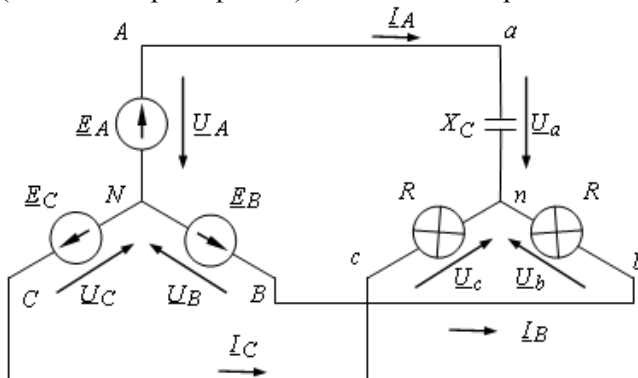


Рис. 5.18

Ємність конденсатора підбирають таким чином, щоб його ємнісний опір чисельно дорівнював резистивному опору кожної

лампи (опори ламп вважають лінійними)

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = R = \frac{U_{nom}^2}{P_{nom}}; \Rightarrow C = \frac{P_{nom}}{2\pi fU_{nom}^2},$$

де  $U_{nom}$ ,  $P_{nom}$  - відповідно номінальні напруга й потужність ламп.

З метою пояснення принципу роботи фазопоказчика виконаємо розрахунок його фазних струмів і напруг.

*Приклад 5.5.* Фазопоказчик підімкнено до трифазного генератора, обмотки якого з'єднані зіркою (рис. 5.18). Фазна напруга генератора  $U_\phi = 100 \text{ В}$ , опори ламп і конденсатора чисельно дорівнюють між собою  $R = 100 \text{ Ом}$ ,  $X_C = 100 \text{ Ом}$ . Визначити фазні напруги й струми фазопоказчика.

*Розв'язання.* Провідності фаз навантаження

$$\underline{Y}_A = \frac{1}{-jX_C} = \frac{1}{-j100} = j0,01 \text{ Ом};$$

$$\underline{Y}_B = \underline{Y}_C = \frac{1}{R} = \frac{1}{100} = 0,01 \text{ Ом}.$$

З урахуванням, що провідності фаз  $B$  и  $C$  однакові, напруга зсуву нейтралі

$$\begin{aligned} \underline{U}_N &= \frac{\underline{U}_A \underline{Y}_A + \underline{U}_B \underline{Y}_B + \underline{U}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C} = \frac{\underline{U}_A \underline{Y}_A + (\underline{U}_B + \underline{U}_C) \underline{Y}_B}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C} = \\ &= \frac{\underline{U}_A \underline{Y}_A + (-\underline{U}_A) \underline{Y}_B}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C} = \frac{\underline{U}_A (\underline{Y}_A - \underline{Y}_B)}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C} = \frac{U_\phi e^{j0^\circ} (\underline{Y}_A - \underline{Y}_B)}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C} = \\ &= \frac{100(j0,01 - 0,01)}{j0,01 + 0,01 + 0,01} = -20,0 + j60,0 = 63,2e^{j108^\circ} \text{ В}. \end{aligned}$$

Фазні напруги навантаження

$$\underline{U}_a = \underline{U}_A - \underline{U}_N = 100 + 20 - j60 = 120 - j60 = 134,2e^{-27^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{U}_b = \underline{U}_B - \underline{U}_N = -50 - j86,6 + 20 - j60 =$$

$$= -30 - j146,6 = 149,6e^{-j102^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{U}_c = \underline{U}_C - \underline{U}_N = -50 + j86,6 + 20 - j60 = -30 + j26,6 = 40,1e^{j139^\circ} \text{ В}.$$

## Фазні (лінійні) струми

$$I_A = \underline{U}_a \underline{Y}_A = (120 - j60) \cdot j0,01 = 0,60 + j1,20 = 1,342 e^{j63^\circ} \text{ A};$$

$$I_B = \underline{U}_b \underline{Y}_B = (-30 - j146,6) \cdot 0,01 = -0,30 - j1,466 = 1,496 e^{-j102^\circ} \text{ A};$$

$$I_C = \underline{U}_c \underline{Y}_C = (-30 + j26,6) \cdot 0,01 = -0,30 + j0,266 = 0,401 e^{j139^\circ} \text{ A}.$$

Відношення діючих значень напруг на лампах і фазної напруги джерела

$$\frac{U_b}{U_\phi} = \frac{149,6}{100} \approx 1,50; \quad \frac{U_c}{U_\phi} = \frac{40,1}{100} \approx 0,40; \quad \frac{U_b}{U_c} = \frac{149,6}{40,1} \approx 3,73.$$

Тому лампа, що з'єднана з фазою  $B$ , буде світитися яскравіше лампи, що з'єднана з фазою  $C$ . Отже, якщо фазу трифазної симетричної системи ЕРС, до якої підімкнений конденсатор, прийнята за фазу  $A$ , то яскраво світна лампа підімкнута до фази  $B$ , а тьмяно світна лампа – до фази  $C$ .

Векторна діаграма для даного режиму представлена на рис. 5.19.

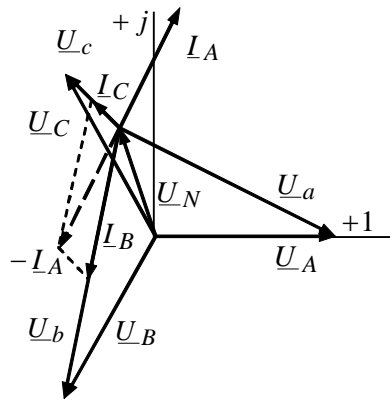


Рис. 5.19

Треба зауважити, що за допомогою такого фазопоказчика визначають не ті самі проводи, які позначені як фази  $A$ ,  $B$  и  $C$  безпосередньо на затискачах генератора. Такої можливості цей пристрій не дає. Визначають тільки те, що напруга, що прикладена до яскраво світної лампи, відстає за фазою від напруги, що прикладена до конденсатора, а напруга, що прикладена до тьмяно світної лампи, відстає від напруги, що прикладена до яскравій світної. Тобто фазопоказчик дозволяє тільки визначити порядок чергування фаз. Якщо за початок відліку прийняти напругу, що прикладена до яскраво світної лампи, то з таким же правом можна провід, що приєднаний до неї вважати проводом фази  $A$ . Тоді провід, що приєднаний до тьмяно світної лампи, доведеться вважати проводом фази  $B$ , а провід, що приєднаний до конденсатора – проводом фази  $C$ .

### 5.9 Вплив опору нейтрального проводу на несиметричний режим трифазного кола з'єднаного чотири провідною зіркою

Порівняємо результати розрахунку несиметричного режиму, які отримані для трифазного кола при з'єднанні зірка-зірка без нейтрального проводу (приклад 5.5), з результатами розрахунку того ж трифазного кола при наявності нейтрального проводу. Розглянемо два випадки, задаючи різні опори нейтрального проводу.

*Приклад 5.6.* Параметри генератора й опори фаз залишилися без зміни (як у прикладі 5.5). Опір нейтрального проводу  $\underline{Z}_N = R_N = 20 \text{ Ом}$ .

*Розв'язання.* Повна провідність нейтрального проводу

$$\underline{Y}_N = \frac{1}{R_N} = \frac{1}{20} = 0,05 \text{ Сим.}$$

Напруга зсуву нейтралі

$$\begin{aligned} \underline{U}_N &= \frac{U_\phi e^{j0^\circ} (\underline{Y}_A - \underline{Y}_B)}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N} = \frac{100 \cdot (j0,01 - 0,01)}{j0,01 + 0,01 + 0,01 + 0,05} = \\ &= -12 + j16 = 20e^{j127^\circ} \text{ В.} \end{aligned}$$

Фазні напруги навантаження

$$\underline{U}_a = \underline{U}_A - \underline{U}_N = 100 + 12 - j16 = 112 - j16 = 113,1e^{-8^\circ} \text{ В;}$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_b &= \underline{U}_B - \underline{U}_N = -50 - j86,6 + 12 - j16 = \\ &= -38 - j102,6 = 109,4e^{-j110^\circ} \text{ В;} \end{aligned}$$

$$\underline{U}_c = \underline{U}_C - \underline{U}_N = -50 + j86,6 + 12 - j16 = -38 + j70,6 = 80,2e^{j118^\circ} \text{ В.}$$

Фазні (лінійні) струми

$$\underline{I}_A = \underline{U}_a \underline{Y}_A = (112 - j16) \cdot j0,01 = 0,16 + j1,12 = 1,131e^{j82^\circ} \text{ А;}$$

$$\underline{I}_B = \underline{U}_b \underline{Y}_B = (-38 - j102,6) \cdot 0,01 = -0,38 - j1,026 = 1,094e^{-j110^\circ} \text{ А;}$$

$$\underline{I}_C = \underline{U}_c \underline{Y}_C = (-38 + j70,6) \cdot 0,01 = -0,38 + j0,706 = 0,802e^{j118^\circ} \text{ А.}$$

Струм у нейтральному проводі

$$\underline{I}_N = \underline{U}_N \underline{Y}_N = (-12 + j16) \cdot j0,05 = -0,6 + j0,8 = 1,0e^{j127^\circ} \text{ А,}$$

або в відповідності з першим законом Кірхгофа

$$\begin{aligned} \underline{I}_N &= \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0,16 + j1,12 - 0,38 - j1,026 - 0,38 + j0,706 = \\ &= -0,6 + j0,8 = 1,0e^{j127^\circ} \text{ А.} \end{aligned}$$

Векторна діаграма для даного режиму представлена на рис. 5.19.

Відношення діючих значень напруг на лампах і фазної напруги джерела

$$\frac{U_b}{U_\phi} = \frac{109,4}{100} \approx 1,09;$$

$$\frac{U_c}{U_\phi} = \frac{80,2}{100} \approx 0,80;$$

$$\frac{U_b}{U_c} = \frac{109,4}{80,2} \approx 1,37.$$

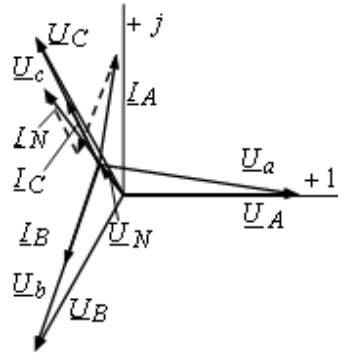


Рис. 5.20

*Приклад 5.7.* Параметри генератора й опори фаз залишилися без зміни (як у прикладі 5.5). Опір нейтрального проводу  $Z_N = 0 \text{ Ом}$ .

*Розв'язання.* Повна провідність нейтрального проводу  $\underline{Y}_N \rightarrow \infty$ . Тому відповідно до виразу (5.25) напруга зсуву нейтралі  $\underline{U}_N = 0$ . Тому при розрахунку, не порушуючи режиму роботи, вузли  $N$  й  $n$  можна об'єднати в один спільний вузол. При цьому в схемі утворяться три незалежних контури, струми в яких

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_A}{Z_a} = \frac{U_a}{Z_a} = \frac{100e^{j0^\circ}}{-j100} = 1,0j^{90^\circ} = 0 + j1,0 \text{ А;}$$

$$\underline{I}_B = \frac{\underline{U}_B}{Z_b} = \frac{U_b}{Z_b} = \frac{100e^{-j120^\circ}}{100} = 1,0e^{-j120^\circ} = -0,5 - j0,866 \text{ А;}$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}_C}{Z_c} = \frac{U_c}{Z_c} = \frac{100e^{j120^\circ}}{100} = 1,0e^{j120^\circ} = -0,5 + j0,866 \text{ А.}$$

Струм у нейтральному проводі відповідно до першого закону Кірхгофа

$$\begin{aligned} \underline{I}_N &= \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0 + j - 0,5 - j0,866 - 0,5 + j0,866 = \\ &= -1,0 + j1,0 = 1,414e^{j135^\circ} \text{ А.} \end{aligned}$$

Діючі значення фазних напруг у всіх фазах не залежать від опорів фаз навантаження й дорівнюють діючому значенню фазної напруги джерела

$$U_a = U_b = U_c = U_\phi = 100 \text{ В}.$$

Отже електричне коло, що з'єднано за схемою зірка-зірка з нульовим проводом, опором якого можна зневажити, забезпечує незалежність роботи фаз.

Векторна діаграма для даного режиму представлена на рис. 5.21.

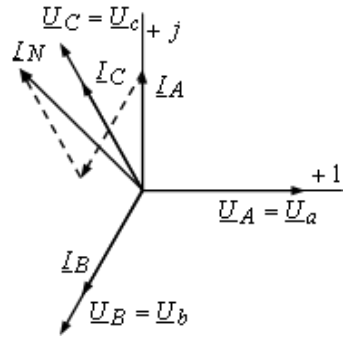


Рис. 5.21

### 5.10 Призначення нейтрального проводу

При симетричному режимі електричного кола, що з'єднано за схемою зіркою, нейтральний провід не впливає на роботу кола. Тому його можна видалити.

Несиметричне навантаження викликає напругу зсуву нейтралі й несиметрію фазних напруг навантаження. Значення напруги зсуву нейтралі і його початкова фаза залежить від характеру навантаження й послідовності чергування фаз. При вмиканні й вимиканні однофазних приймачів провідності фаз змінюються довільним чином. Це приводить до довільної зміни напруги зсуву нейтралі й всіх фазних напруг навантаження. Наявність нейтрального проводу дозволяє зменшити значення напруги зсуву при несиметричному режимі (в ідеалі до нуля) і вирівняти фазні напруги навантаження.

Практично струм у нейтральному проводі рідко досягає значення струмів у лінійних проводах, тому що навіть при відносно різко вираженій несиметрії фазних струмів, їхня геометрична сума, що дорівнює току в нейтральному проводі, значно менше струму в кожному з лінійних проводів. Тому в трифазних мережах нейтральний провід має площу поперечного перерізу в 2...3 рази менше, ніж площа поперечного перерізу лінійного проводу.

У нейтральному проводі заборонена установка запобіжників або вимикачів, тому що відімкнені нейтрального проводу при несиметричному навантаженні викличе зміну фазних напруг приймачів. Це призведе до порушення режимів роботи приймачів. Наприклад, при освітлювальним навантаженні зниження фазної напруги

викликає недостатнє розжарення ламп, підвищення фазної напруги приведе до перегару й швидкого виходу з ладу ламп.

Енергетики прагнуть вмикати однофазні приймачі енергії таким чином, щоб навантаження кожної з фаз було однаковою. При великій кількості приймачів, що статистично в "середньому" забезпечує приблизно симетричне навантаження фаз, незважаючи на вмикання або вимикання окремих приймачів, значення напруги зсуву нейтралі є незначним. Це дозволяє використовувати з'єднання зірка без нульового проводу для потужних ліній електропередачі. Можлива несиметрія в лініях електропередачі компенсується нейтральним проводом, у якості якого використовують землю (система із заземленою нейтраллю).

Ще одна причина застосування в низьковольтних мережах нейтрального проводу полягає в тім, що це дає можливість підмикати однофазні приймачі з номінальною напругою  $U_{nom}$  в  $\sqrt{3}$  разів менше номінальної лінійної напруги трифазного кола  $U_L$ .

### 5.11 Розрахунок трифазного кола при з'єднанні навантаження за схемою трикутник

При з'єднанні приймачів за схемою трикутник обмотки генератор можна з'єднувати як за схемою трикутник (рис. 5.22) так і за схемою зірка (рис. 5.23). В обох випадках нейтральний провід є відсутнім.

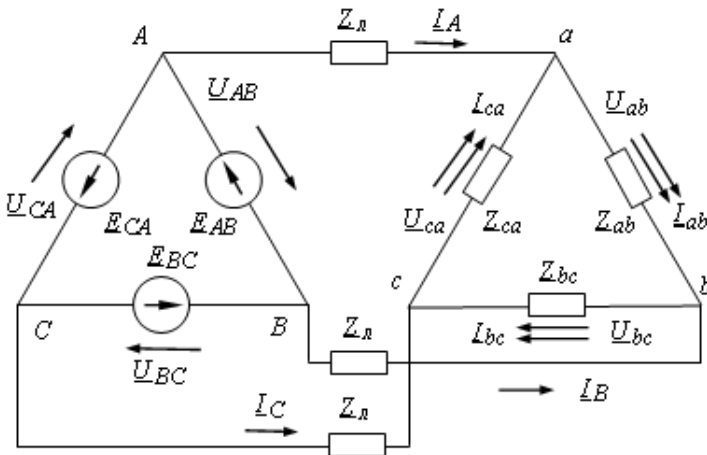


Рис. 5.22

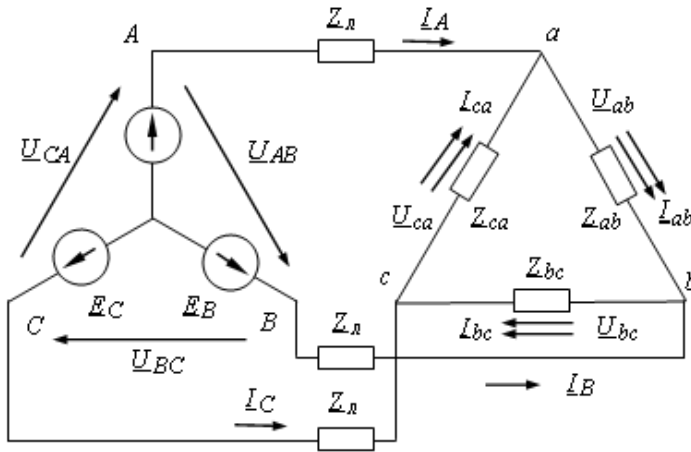


Рис. 5.23

При з'єднанні обмоток генератора за схемою трикутник і симетричній системі фазних ЕРС додаткового струму в обмотках не виникне (тому що алгебраїчна сума ЕРС у будь-який момент часу дорівнює нулю). Але якщо фазні ЕРС відрізняються від синусоїдних, то алгебраїчна сума ЕРС може й не дорівнювати нулю. Це призведе до появи додаткового струму в обмотках генератора. Це є однією із причин того, що обмотки генератора в основному з'єднують за схемою зірка.

За додатні напрямки лінійних струмів приймають напрямки від генератора до навантаження. За додатні напрямки фазних струмів у навантаженні приймають напрямки від вузла  $a$  до вузла  $b$ , від  $b$  до  $c$  і від  $c$  до  $a$ . Це вказують порядком літер в індексах, наприклад  $I_{ab}$  - це струм у фазі  $ab$ , що спрямований від вузла  $a$  до вузла  $b$ . У цьому випадку фазні струми відрізняються від лінійних. Фазні напруги навантаження одночасно є й лінійними напругами.

Трифазне коло при з'єднанні навантаження трикутником і будь-якій схемі з'єднання фаз генератора є розгалуженим багатоконтурним. Розрахунок такого кола виконують одним з відомих методів з урахуванням складу її елементів і схеми з'єднання.

Розрахунок такого кола значно спрощується, якщо опорами лінійних проводів можна зневажити. У цьому випадку лінійні напруги генератора  $U_{AB}$ ,  $U_{BC}$ ,  $U_{CA}$  дорівнюють відповідним лінійним (фазним) напругам навантаження  $U_{ab}$ ,  $U_{bc}$ ,  $U_{ca}$ . Тоді фазні

струми навантаження за законом Ома

$$\begin{aligned} I_{ab} &= \frac{U_{AB}}{Z_{ab}} = \frac{U_{ab}}{Z_{ab}}; \\ I_{bc} &= \frac{U_{BC}}{Z_{bc}} = \frac{U_{bc}}{Z_{bc}}; \\ I_{ca} &= \frac{U_{CA}}{Z_{ca}} = \frac{U_{ca}}{Z_{ca}}. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Лінійні струми розраховують на підставі першого закону Кірхгофа для відповідних вузлів навантаження

$$\begin{aligned} I_A &= I_{ab} - I_{ca}; \\ I_B &= I_{bc} - I_{ab}; \\ I_C &= I_{ca} - I_{bc}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Якщо генератор з'єднаний за схемою зірка й задані його фазні напруги  $\underline{U}_A$ ,  $\underline{U}_B$ ,  $\underline{U}_C$ , то лінійні напруги  $\underline{U}_{AB}$ ,  $\underline{U}_{BC}$ ,  $\underline{U}_{CA}$  обчислюють як різниці відповідних фазних напруг за формулою (5.13). У результаті задача зводиться до розглянутого раніше випадку.

Перевагою з'єднання навантаження за схемою трикутник у порівнянні зі з'єднанням навантаження за схемою зірка без нейтрального проводу є взаємна незалежність фазних струмів.

*Приклад 5.8.* Трифазне електричне коло (рис. 5.24) складається з генератора й трифазного навантаження, які з'єднані за схемою зірка-трикутник. Діюче значення напруги на обмотках симетричного генератора  $U_\phi = 220 \text{ В}$ . Навантаження рівномірне, неоднорідне.

Опори фаз навантаження  $Z_{ab} = R = 10 \text{ Ом}$ ,  $Z_{bc} = jX_L = j10 \text{ Ом}$ ,  $Z_{ca} = -X_C = -j10 \text{ Ом}$ .

*Розв'язання.* Приймаємо, що початкова фаза фазної напруги генератора фази  $A$  дорівнює нулю. Тоді комплексні діючі значення фазних напруг генератора

$$\begin{aligned} \underline{U}_A &= U_\phi e^{j0^\circ} = 220 e^{j0^\circ} \text{ В}; \\ \underline{U}_B &= U_\phi e^{-j120^\circ} = 220 e^{-j120^\circ} \text{ В}; \\ \underline{U}_C &= U_\phi e^{j120^\circ} = 220 e^{j120^\circ} \text{ В}. \end{aligned}$$

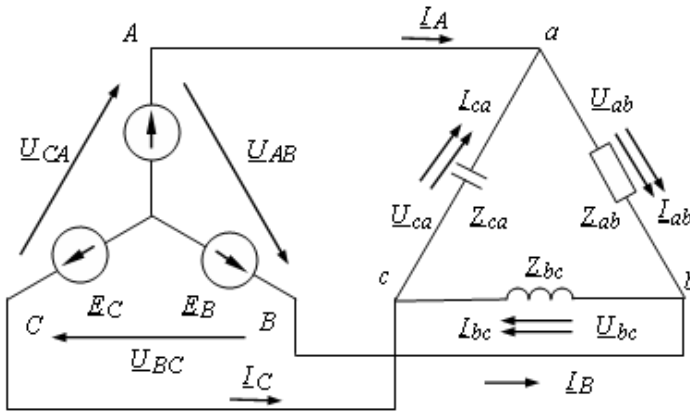


Рис. 5.24

Лінійна напруга генератора  $U_{\text{л}} = \sqrt{3}U_{\phi} = \sqrt{3} \cdot 220 \approx 380 \text{ В}$ .  
Тоді комплексні діючі значення лінійних напруг

$$\underline{U}_{AB} = U_{\text{л}} e^{j30^{\circ}} = 380 e^{j30^{\circ}} \text{ В};$$

$$\underline{U}_{BC} = U_{\text{л}} e^{-j90^{\circ}} = 380 e^{-j90^{\circ}} \text{ В};$$

$$\underline{U}_{CA} = U_{\text{л}} e^{j150^{\circ}} = 380 e^{j150^{\circ}} \text{ В}.$$

Фазні струми навантаження

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{AB}}{Z_{ab}} = \frac{380 e^{j30^{\circ}}}{10} = 38 e^{j30^{\circ}} = (32,9 + j19,0) \text{ А};$$

$$\underline{I}_{bc} = \frac{\underline{U}_{BC}}{Z_{bc}} = \frac{380 e^{-j90^{\circ}}}{j10} = 38 e^{-j180^{\circ}} = (-38,0 + j0,0) \text{ А};$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_{ca} &= \frac{\underline{U}_{CA}}{Z_{ca}} = \frac{380 e^{j150^{\circ}}}{-j10} = 38 e^{j240^{\circ}} = \\ &= 38 e^{-j120^{\circ}} = (-19,0 - j32,9) \text{ А} \end{aligned}$$

Лінійні струми

$$\begin{aligned} \underline{I}_A &= \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca} = (32,9 + j19,0) - (-19,0 - j32,9) = \\ &= 51,9 + j51,9 = 73,4 e^{j45^{\circ}} \text{ А}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_B &= \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ab} = (-38,0 + j0,0) - (32,9 + j19,0) = \\ &= -70,9 - j19,0 = 73,4 \cdot e^{-j165^\circ} \text{ A}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_C &= \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc} = (-19,0 - j32,9) - (-38,0 + j0,0) = \\ &= 19,0 - j32,9 = 38,0 \cdot e^{-j60^\circ} \text{ A}. \end{aligned}$$

Векторна діаграма для випадку з'єднання навантаження трикутником представлена на рис. 5.25 в двох рівноцінних варіантах

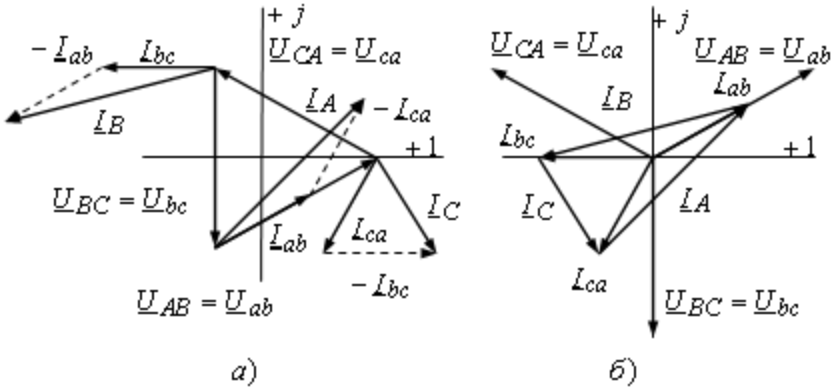


Рис. 5.25

У випадку симетричного режиму трифазного кола (тобто коли система лінійних напруг джерела є симетричною і комплекси опорів фаз навантаження однакові  $\underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_{bc} = \underline{Z}_{ca} = \underline{Z} = \underline{Z}e^{j\varphi}$ ) фазні струми

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}} = \frac{U_\Delta e^{j30^\circ}}{\underline{Z}e^{j\varphi}} = I_\phi e^{j(30^\circ - \varphi)};$$

$$\underline{I}_{bc} = \frac{\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}} = \frac{U_\Delta e^{-j90^\circ}}{\underline{Z}e^{j\varphi}} = I_\phi e^{j(-90^\circ - \varphi)} = I_{ab} e^{-j120^\circ}; \quad (5.43)$$

$$\underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{Z}} = \frac{U_\Delta e^{j150^\circ}}{\underline{Z}e^{j\varphi}} = I_\phi e^{j(150^\circ - \varphi)} = I_{ab} e^{j120^\circ}.$$

утворюють симетричну систему. Діючі значення струмів однакові, а за фазою струми зсунені друг щодо друга на кути  $120^\circ$ .

На рис. 5.26 представлена суміщена векторна діаграма струмів і напруг для випадку активно-емнісного навантаження ( $\varphi < 0$ ).

З діаграми видно, що вектори лінійних струмів при симетричному режимі утворюють рівносторонній трикутник. З геометричних міркувань дістаємо  $I_L = \sqrt{3}I_\phi$ .

З діаграми також видно, що кожний лінійний струм відстає за фазою від відповідного фазного струму на кут  $30^\circ$ .

Якщо опорами лінійних проводів знехтувати неможливо (рис. 5.23), то розрахунок доцільно здійснювати, попередньо виконавши перетворення трикутника опорів навантаження в еквівалентну зірку

$$\begin{aligned} Z_a &= \frac{Z_{ab} Z_{ca}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}}; \\ Z_b &= \frac{Z_{bc} Z_{ab}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}}; \\ Z_c &= \frac{Z_{ca} Z_{bc}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}} \end{aligned} \quad (5.44)$$

Використовуючи методи, які розглядалися в попередніх підрозділах, обчислюють струми в лінійних проводах  $I_A, I_B, I_C$ . Потім обчислюють фазні напруги на опорах еквівалентної зірки

$$\underline{U}_a = I_A Z_a; \quad \underline{U}_b = I_B Z_b; \quad \underline{U}_c = I_C Z_c, \quad (5.45)$$

після чого розраховують лінійні напруги на фазах навантаження

$$\underline{U}_{ab} = \underline{U}_a - \underline{U}_b; \quad \underline{U}_{bc} = \underline{U}_b - \underline{U}_c; \quad \underline{U}_{ca} = \underline{U}_c - \underline{U}_a. \quad (5.46)$$

и фазні струми навантаження, що з'єднано трикутником

$$I_{ab} = \frac{\underline{U}_{ab}}{Z_{ab}}; \quad I_{bc} = \frac{\underline{U}_{bc}}{Z_{bc}}; \quad I_{ca} = \frac{\underline{U}_{ca}}{Z_{ca}}. \quad (5.47)$$

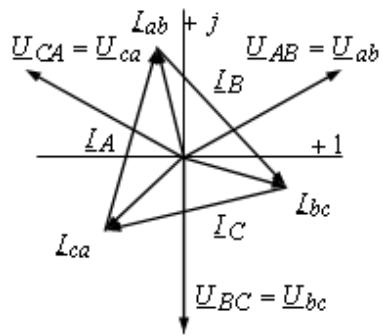


Рис. 5.26

### 5.12 Аварійні режими трифазного кола, що з'єднане за схемою зірка-трикутник

У цьому підрозділі розглядаються деякі типові випадки, які можливі в трифазному колі, що з'єднане за схемою зірка-трикутник. Для наочності аварійні режими зіставляються із симетричним режимом.

*Приклад 5.9.* Трифазне електричне коло (рис. 5.27) складається з генератора й трифазного навантаження, які з'єднані за схемою зірка-трикутник. Генератор виробляє симетричну систему ЕРС із діючим значенням  $E = 380 \text{ В}$ . Опір кожної фази симетричного навантаження  $Z_{ab} = Z_{bc} = Z_{ca} = Z_{\phi} = 30 + j40 = 50e^{j53^\circ} \text{ Ом}$ . Вимикачі  $Q1$  й  $Q2$  замкнуті. Потрібно розрахувати всі струми у лінійних проводах і фазні струми навантаження, а також побудувати суміщену векторну діаграму струмів і напруг.

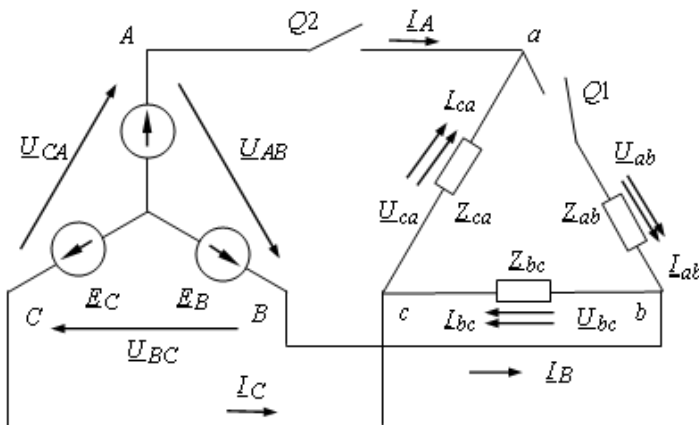


Рис. 5.27

*Розв'язання.* Приймаємо, що початкова фаза фазної напруги генератора фази A дорівнює нулю. Тоді комплекси фазних напруг генератора

$$\underline{U}_A = U_{\phi} e^{j0^\circ} = 380 e^{j0^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{U}_B = U_{\phi} e^{-j120^\circ} = 380 e^{-j120^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{U}_C = U_{\phi} e^{j120^\circ} = 380 e^{j120^\circ} \text{ В}.$$

Лінійна напруга генератора  $U_{\text{л}} = \sqrt{3}U_{\phi} = \sqrt{3} \cdot 380 \approx 660 \text{ В}$ .  
Тоді комплексні діючі значення лінійних напруг

$$\underline{U}_{AB} = U_{\text{л}} e^{j30^{\circ}} = 660 e^{j30^{\circ}} \text{ В};$$

$$\underline{U}_{BC} = U_{\text{л}} e^{-j90^{\circ}} = 660 e^{-j90^{\circ}} \text{ В};$$

$$\underline{U}_{CA} = U_{\text{л}} e^{j150^{\circ}} = 660 e^{j150^{\circ}} \text{ В}.$$

Фазні струми навантаження

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_{\phi}} = \frac{660 e^{j30^{\circ}}}{50 e^{j53^{\circ}}} = 13,2 e^{-j23^{\circ}} = (12,15 - j5,16) \text{ А};$$

$$\underline{I}_{bc} = \frac{\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}_{\phi}} = \frac{660 e^{-j90^{\circ}}}{50 e^{j53^{\circ}}} = 13,2 e^{-j143^{\circ}} = (-10,54 - j7,94) \text{ А};$$

$$\underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{Z}_{\phi}} = \frac{660 e^{j150^{\circ}}}{50 e^{j53^{\circ}}} = 13,2 e^{j97^{\circ}} = (-1,61 + j13,10) \text{ А}$$

Лінійні струми

$$\begin{aligned} \underline{I}_A &= \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca} = (12,15 - j5,16) - (-1,61 + j13,10) = \\ &= 13,76 - j18,26 = 22,9 e^{-j53^{\circ}} \text{ А}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_B &= \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ab} = (-10,54 - j7,94) - (12,15 - j5,16) = \\ &= -22,69 - j2,78 = 22,9 e^{-j173^{\circ}} \text{ А}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_C &= \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc} = (-1,61 + j13,10) - (-10,54 - j7,94) = \\ &= 8,93 + j21,04 = 22,9 e^{j67^{\circ}} \text{ А}. \end{aligned}$$

Векторна діаграма досліджуваного трифазного кола представлена на рис. 5.28.

З векторної діаграми випливає, що при симетричному режимі роботи достатньо розрахувати фазний струм тільки однієї з фаз (наприклад, фази  $ab$ ). Діючі значення фазних струмів інших фаз будуть дорівнювати діючому значенню цього струму, але самі струми зсунені щодо струму  $I_{ab}$  за фазою на третину періоду  $\pm \frac{2\pi}{3}$ .

З діаграми також випливає, що лінійні струми відстають за фазою від відповідних фазних струмів на кути  $30^\circ$ , а діючі значення лінійних струмів у  $\sqrt{3}$  разів більше діючих значень фазних.

Вектора лінійних і фазних струмів утворюють симетричні системи.

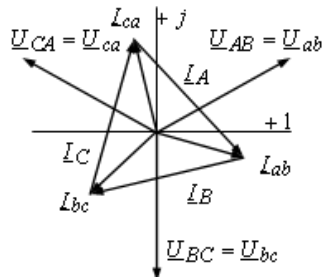


Рис. 5.28

*Приклад 5.10.* У трифазному електричному колі (рис. 5.27) відбулася розірва фази  $ab$ . Вимикач  $Q1$  розімкнений, вимикач  $Q2$  замкнений. Параметри генератора й опори неушкоджених фаз залишилися без зміни (як у прикладі 5.9). Потрібно розрахувати струми у всіх лінійних проводах і фазні струми навантаження, а також побудувати суміщену векторну діаграму струмів і напруг.

*Розв'язання.* Фазні й лінійні напруги генератора, фазні напруги навантаження й струми неушкоджених фаз навантаження залишилися без змін. Струм ушкодженої фази  $ab$  змінився до нуля  $I_{ab} = 0$  А. Струми в лінійних проводах

$$\begin{aligned} I_A &= I_{ab} - I_{ca} = 0,0 - (-1,61 + j13,10) = \\ &= 1,61 - j13,10 = 13,2e^{j83^\circ} \text{ А}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_B &= I_{bc} - I_{ab} = (-10,54 - j7,94) - 0,0 = \\ &= -10,54 - j7,94 = 22,9e^{-j143^\circ} \text{ А}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_C &= I_{ca} - I_{bc} = (-1,61 + j13,10) - (-10,54 - j7,94) = \\ &= 8,93 + j21,04 = 22,9e^{j67^\circ} \text{ А}. \end{aligned}$$

Векторна діаграма досліджуваного трифазного кола представлена на рис. 5.29.

З векторної діаграми видно, що для знаходження діючих значень фазних і лінійних струмів немає необхідності застосовувати символічний метод. Дійсно безпосередньо з розгляду схеми електричного кола (рис. 5.27) і векторної діаграми випливає, що  $I_{ab} = 0$  А,  $I_A = I_B = I_{bc} = I_{ca} = 13,2$  А,  $I_C = \sqrt{3}I_{bc} = \sqrt{3} \cdot 13,2 = 22,9$  А.

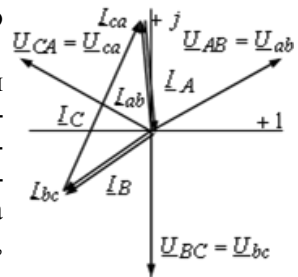


Рис. 5.29

*Приклад 5.11.* У трифазному електричному колі (рис. 5.27) відбулася розірва лінійного проводу  $Aa$ . Вимикач  $Q2$  розімкнутий, вимикач  $Q1$  замкнутий. Параметри генератора й опори неушкоджених фаз залишилися без зміни (як у прикладі 5.9). Потрібно розрахувати струми у лінійних проводах і фазні струми навантаження, а також побудувати суміщену векторну діаграму струмів і напруг.

*Розв'язання.* Фазні й лінійні напруги генератора залишилися без змін. Фазна напруга  $\underline{U}_{bc} = \underline{U}_{BC} = 660e^{-j90^\circ}$  В також залишилася без змін. Фазні напруги навантаження  $\underline{U}_{ab}$  й  $\underline{U}_{ca}$  змінилися.

Визначаємо фазні струми навантаження. Струм у фази  $bc$  залишився таким же, як і у симетричному режимі

$$\underline{I}_{bc} = \frac{\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}_\phi} = \frac{660e^{-j90^\circ}}{50e^{j53^\circ}} = 13,2e^{-j143^\circ} = (-10,54 - j7,94) \text{ А.}$$

При розриві лінійного проводу  $Aa$  опори  $\underline{Z}_{ab}$  й  $\underline{Z}_{ca}$  навантаження опиняються з'єднаними між собою послідовно. Тому фазні струми  $\underline{I}_{ab}$  й  $\underline{I}_{ca}$  однакові. З огляду на те, що напрямок цих струмів є протилежним до напрямку фазної напруги  $\underline{U}_{bc}$  дістанемо

$$\underline{I}_{ab} = \underline{I}_{ca} = -\frac{\underline{U}_{bc}}{2\underline{Z}_\phi} = -\frac{660e^{-j90^\circ}}{2 \cdot 50e^{j53^\circ}} = 6,6e^{j37^\circ} = (5,27 + j3,97) \text{ А.}$$

Тоді фазні напруги  $\underline{U}_{ab}$  и  $\underline{U}_{ca}$  навантаження

$$\underline{U}_{ab} = \underline{U}_{ca} = \underline{I}_{bc} \underline{Z}_\phi = 6,6e^{j37^\circ} \cdot 50e^{j53^\circ} = 330e^{j90^\circ} = (0 + j330) \text{ В.}$$

Лінійні струми

$$\underline{I}_A = 0 \text{ А;}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_B &= \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ab} = (-10,54 - j7,94) - (5,27 + j3,97) = \\ &= -15,81 - j11,91 = 19,8e^{-j143^\circ} \text{ А;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_C &= \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc} = (5,27 + j3,97) - (-10,54 - j7,94) = \\ &= +15,81 + j11,91 = 19,8e^{j37^\circ} \text{ А.} \end{aligned}$$

Суміщена векторна діаграма струмів і напруг досліджуваного трифазного кола представлена на рис. 5.30.

З векторної діаграми видно, що для знаходження діючих значень фазних і лінійних струмів немає необхідності застосовувати символічний метод.

Дійсно безпосередньо з розгляду схеми електричного кола (рис. 5.30) і векторної діаграми випливає, що  $I_A = 0$  А.

З урахуванням рівності опорів у фазах й властивостей послідовного й паралельного з'єднань

$$I_{bc} = 13,2 \text{ А},$$

$$I_{ab} = I_{ca} = 0,5 \cdot 13,2 = 6,6 \text{ А},$$

$$I_B = I_C = 1,5 \cdot 18,2 = 19,8 \text{ А}.$$

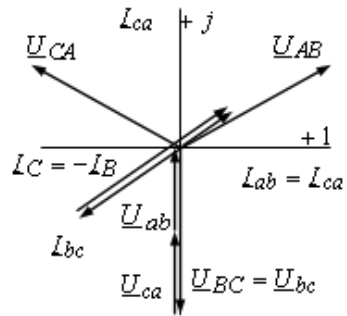


Рис.5.30

### 5.13 Потужність трифазного кола

Миттєва активна потужність трифазного електричного кола дорівнює сумі активних потужностей фаз генератора. У симетричному режимі фазовий зсув між відповідними фазними струмами та напругами однаковий ( $\varphi_A = \varphi_B = \varphi_C = \varphi$ )

$$\begin{aligned} p &= u_A i_A + u_B i_B + u_C i_C = U_{\phi m} \sin \omega t \cdot I_{\phi m} \sin(\omega t - \varphi) + \\ &+ U_{\phi m} \sin(\omega t - 120^\circ) \cdot I_{\phi m} \sin(\omega t - 120^\circ - \varphi) + \\ &+ U_{\phi m} \sin(\omega t + 120^\circ) \cdot I_{\phi m} \sin(\omega t + 120^\circ - \varphi) = \\ &= 0,5 U_{\phi m} I_{\phi m} (3 \cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi) - \cos(2\omega t - 240^\circ - \varphi) - \\ &- \cos(2\omega t + 240^\circ - \varphi)) = \frac{3}{2} U_{\phi m} I_{\phi m} \cos \varphi = \\ &= 3 U_{\phi} I_{\phi} \cos \varphi = P = const, \end{aligned} \quad (5.48)$$

де  $\cos \varphi$  - коефіцієнт потужності трифазного кола.

Таким чином, миттєва активна потужність трифазного кола в симетричному режимі не залежить від часу й дорівнює середньому значенню активної потужності. Систему, миттєва потужність якої є постійною, називають *врівноваженою*.

Однофазна система є *неврівноваженою*, тому що активна потужність однофазної системи змінюється в часі з подвійною часто-

тою в порівнянні із частотою джерела енергії (4.78).

До врівноважених систем належить двофазне електричне коло, яке було розглянуте раніше, у випадку симетричного навантаження

$$\begin{aligned}
 P &= u_A i_A + u_B i_B = U_{\phi m} \sin \omega t \cdot I_{\phi m} \sin(\omega t - \varphi) + \\
 &+ U_{\phi m} \sin(\omega t - 90^\circ) \cdot I_{\phi m} \sin(\omega t - 90^\circ - \varphi) = \\
 &= 0.5 U_{\phi m} I_{\phi m} (2 \cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi) - \cos(2\omega t - 180^\circ - \varphi)) = \quad (5.49) \\
 &= \frac{2}{2} U_{\phi m} I_{\phi m} \cos \varphi = 2 U_{\phi} I_{\phi} \cos \varphi = P = \text{const},
 \end{aligned}$$

де  $\cos \varphi$  - коефіцієнт потужності двофазного кола.

Через урівноваженість систем трифазні й двофазні двигуни мають постійний обертаючий момент, у той час як обертаючий момент однофазних двигунів пульсує з подвоєною частотою джерела енергії.

Активна потужність трифазного кола при симетричному режимі може бути виражена через лінійні струми й напруги. Тому що при з'єднанні за схемою зірка  $I_{\phi} = I_L$ ,  $U_{\phi} = \frac{U_L}{\sqrt{3}}$ , а при з'єднанні за схемою трикутник  $I_{\phi} = \frac{I_L}{\sqrt{3}}$ ,  $U_{\phi} = U_L$ , то

$$P = \sqrt{3} U_L I_L \cos \varphi. \quad (5.50)$$

Реактивна потужність трифазного кола у симетричному режимі

$$Q = 3 U_{\phi} I_{\phi} \sin \varphi = \sqrt{3} U_L I_L \sin \varphi. \quad (5.51)$$

Повна потужність трифазного кола у симетричному режимі

$$S = 3 U_{\phi} I_{\phi} = \sqrt{3} U_L I_L. \quad (5.52)$$

Співвідношення між активною, реактивною й повною потужностями трифазного електричного кола

$$\cos \varphi = \frac{P}{S}; \quad \sin \varphi = \frac{Q}{S}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{Q}{P}. \quad (5.53)$$

У несиметричному режимі миттєва потужність є функцією часу й трифазне коло є неуврівноваженим. Потужність кола дорів-

нює сумі потужностей всіх її елементів. Для трифазного кола, яке з'єднано за схемою чотирипровідна зірка, комплекс повної потужності у несиметричному режимі

$$\underline{S} = \underline{U}_a \underline{I}_A^* + \underline{U}_b \underline{I}_B^* + \underline{U}_c \underline{I}_C^* + \underline{U}_N \underline{I}_N^* . \quad (5.54)$$

З урахуванням того, що  $\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C$ , маємо

$$\begin{aligned} \underline{S} &= (\underline{U}_a + \underline{U}_N) \underline{I}_A^* + (\underline{U}_b + \underline{U}_N) \underline{I}_B^* + (\underline{U}_c + \underline{U}_N) \underline{I}_C^* = \\ &= \underline{U}_A \underline{I}_A^* + \underline{U}_B \underline{I}_B^* + \underline{U}_C \underline{I}_C^* . \end{aligned} \quad (5.55)$$

Формула (5.55) є справедливою й у випадку з'єднання трифазного кола за схемою трипровідна зірка при несиметричному режимі.

Середня активна потужність дорівнює сумі середніх активних потужностей окремих фаз

$$P = U_A I_A \cos \varphi_A + U_B I_B \cos \varphi_B + U_C I_C \cos \varphi_C . \quad (5.56)$$

де  $\varphi_A, \varphi_B, \varphi_C$  - кути фазового зсуву між відповідними фазними напругами і фазними струмами.

Аналогічно реактивна потужність

$$Q = U_A I_A \sin \varphi_A + U_B I_B \sin \varphi_B + U_C I_C \sin \varphi_C . \quad (5.57)$$

Комплексна повна потужність у випадку з'єднання трифазного кола за схемою трикутник при несиметричному режимі.

$$\underline{S} = \underline{U}_{ab} \underline{I}_{ab}^* + \underline{U}_{bc} \underline{I}_{bc}^* + \underline{U}_{ca} \underline{I}_{ca}^* + Z_{\text{л}} (\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C) . \quad (5.58)$$

Якщо не враховувати опори лінійних проводів і втрати електричної енергії в них

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{U}_{ab} \underline{I}_{ab}^* + \underline{U}_{bc} \underline{I}_{bc}^* + \underline{U}_{ca} \underline{I}_{ca}^* = \\ &= \underline{U}_{AB} \underline{I}_{ab}^* + \underline{U}_{BC} \underline{I}_{bc}^* + \underline{U}_{CA} \underline{I}_{ca}^* = \\ &= (\underline{U}_A - \underline{U}_B) \underline{I}_{ab}^* + (\underline{U}_B - \underline{U}_C) \underline{I}_{bc}^* + (\underline{U}_C - \underline{U}_A) \underline{I}_{ca}^* = \\ &= \underline{U}_A (\underline{I}_{ab}^* - \underline{I}_{bc}^*) + \underline{U}_B (\underline{I}_{bc}^* - \underline{I}_{ca}^*) + \underline{U}_C (\underline{I}_{ca}^* - \underline{I}_{ab}^*) = \\ &= \underline{U}_A \underline{I}_A^* + \underline{U}_B \underline{I}_B^* + \underline{U}_C \underline{I}_C^* . \end{aligned} \quad (5.59)$$

Таким чином, вираз (5.55), який був отриманий раніше для випадку з'єднання навантаження за схемою зірка є справедливим і для випадку з'єднання навантаження за схемою трикутник у будь-якому режимі роботи.

### 5.14 Вимірювання активної потужності трифазного кола

У випадку симетричного режиму трифазного електричного кола потужності всіх фаз однакові, тому для визначення активної потужності усього кола досить виміряти активну потужність однієї фази й потроїти її

$$P = 3P_{\phi}. \quad (5.60)$$

На рис. 5.31 представлені схеми вмикання однофазного ватметра для вимірювання активної потужності однієї фази для випадків з'єднання навантаження зіркою (рис. 5.31, а) і трикутником (рис. 5.31, б).

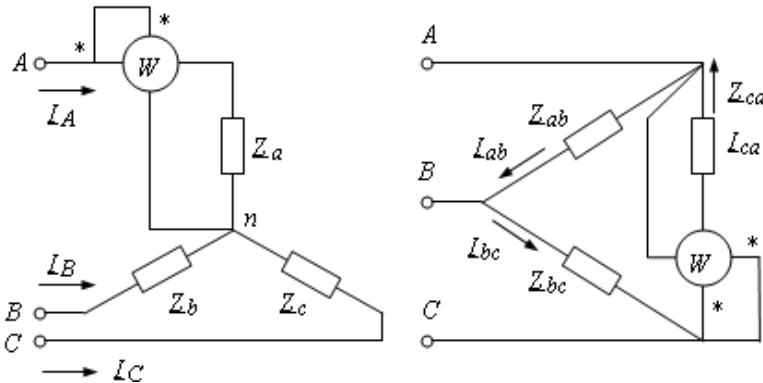


Рис. 5.31

Якщо фази симетричного навантаження недоступні, то необхідно створити штучну нейтральну точку. Це нейтральна точка кола за схемою зірка, що складається з обмотки напруги ватметра з опором  $R_{UW}$  і двох резисторів з опором  $R = R_{UW}$  (рис. 5.32). При такому з'єднанні обмотка напруги ватметра перебуває під фазною напругою, струм у його обмотці струму дорівнює лінійному струму навантаження. І у випадку з'єднання навантаження за схемою зірка й у випадку з'єднання навантаження за схемою трикутник ватметр вимірює третю частину потужності навантаження. Така схема вимірювання застосовна тільки при використанні ватметрів електродинамічної або феродинамічної систем, характер опору обмоток напруги яких є активним. При використанні індукційних ватметрів, опори обмоток напруги яких мають реактивний характер, для створення нейтральної точки потрібні додаткові реактивні опори. Заво-

ди-виробники випускають спеціальні ватметри зі штучною нейтральною точкою для вимірювання активної потужності в симетричних трифазних колах.

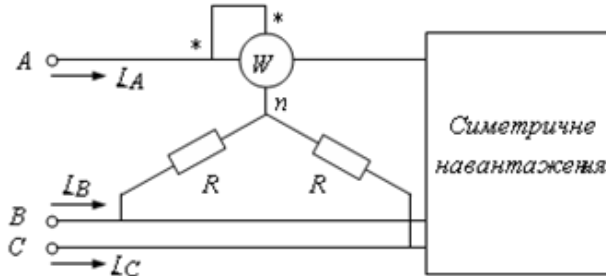


Рис. 5.32

Для вимірювання активної потужності чотирипровідного трифазного кола при несиметричному режимі використовують *метод трьох ватметрів*, які вмикнені на підведені до даного кола фазні напруги щодо нейтралі й однойменні з ними фазні струми. При такому з'єднанні кожний з ватметрів вимірює потужність однієї фази.

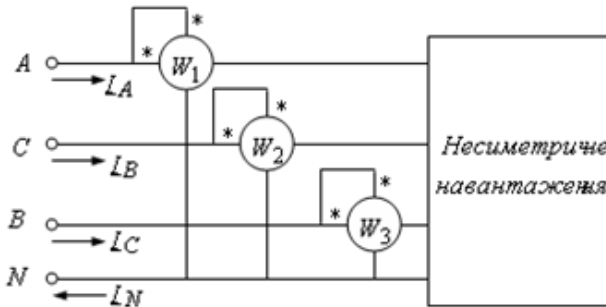


Рис. 5.33

Активна потужність трифазного кола дорівнює сумі показів трьох ватметрів

$$P = P_1 + P_2 + P_3. \quad (5.61)$$

Такий метод вимірювання застосовують при наявності нейтрального проводу або штучно створеної нейтральної точки.

Для вимірювання активної потужності трипровідного трифазного кола при несиметричному режимі використовують *метод двох ватметрів* (рис. 5.34).

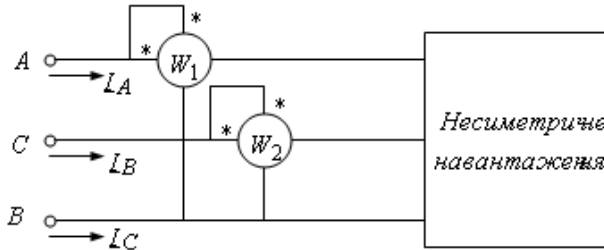


Рис. 5.34

Доведемо, що для вимірювання активної потужності в цьому випадку досить двох ватметрів. Для цього виразимо миттєву потужність системи через миттєві значення напруг і струмів. Миттєва потужність трифазного кола

$$p = u_A i_A + u_B i_B + u_C i_C. \quad (5.62)$$

При відсутності в трифазному колі нейтрального проводу відповідно до першого закону Кірхгофа  $i_A + i_B + i_C = 0$ . Отже

$$i_C = -i_A - i_B. \quad (5.63)$$

Підставивши отриманий вираз струму у формулу (5.62), одержимо

$$p = u_A i_A + u_B i_B + u_C (-i_A - i_B) = (u_A - u_C) i_A + (u_B - u_C) i_B. \quad (5.64)$$

Тому що різниця фазних напруг дорівнює відповідній лінійній напрузі  $u_{AC} = u_A - u_C$ ;  $u_{BC} = u_B - u_C$ , то миттєва потужність

$$p = u_{AC} i_A + u_{BC} i_B = p_1 + p_2, \quad (5.65)$$

тобто миттєва потужність трипровідного трифазного кола може бути представлена сумою двох доданків  $p_1$  й  $p_2$ .

Отже, сума середніх значень цих величин, що дорівнює середній за період потужності трифазного кола, може бути виміряна двома ватметрами

$$P = P_1 + P_2 = U_{AC} I_A \cos \varphi_1 + U_{BC} I_B \cos \varphi_2, \quad (5.66)$$

де  $\varphi_1 = \psi_{u_{AC}} - \psi_{i_A}$ ,  $\varphi_2 = \psi_{u_{BC}} - \psi_{i_B}$  - кути фазових зсувів між відповідними лінійними напругами й струмами.

Таким чином, алгебраїчно додаючи покази двох ватметрів, що вмкнені за схемою, яка представлена на рис. 5.34, отримуємо

активну потужність трипровідного трифазного кола. Кожна з величин  $P_1$  й  $P_2$  окремо ніякої реальної активної потужності не виражає.

Отримані висновки не залежать від схеми з'єднання навантаження, тому що при заданих значеннях лінійних напруг і струмів потужність не залежить від схеми з'єднання фаз навантаження (з'єднання трикутником можна замінити еквівалентною зіркою й навпаки з'єднання зіркою можна замінити еквівалентним трикутником).

Круговою заміною індексів  $A, B, C$  можна одержати вирази для інших способів вмикання двох ватметрів.

Розподіл вимірюваної потужності між показами двох ватметрів залежить від кутів фазового зсуву між лінійними напругами й струмами.

Розглянемо ці співвідношення для симетричного режиму трифазного кола, фази навантаження якого з'єднані зіркою. Векторна діаграма для такого режиму представлена на рис. 5.12. Кути фазового зсуву між відповідними фазними напругами й струмами однакові й дорівнюють аргументу  $\varphi$  комплексу опору фази навантаження. З векторної діаграми струмів і напруг витікає, що в цьому випадку кути фазового зсуву між векторами  $\underline{U}_{AC}$  й  $\underline{I}_A$ ,  $\underline{U}_{BC}$  і  $\underline{I}_B$  будуть відповідно дорівнюють  $(\varphi - 30^\circ)$  й  $(\varphi + 30^\circ)$ . Діючі значення напруг і струмів відповідно співпадають між собою  $U_{AC} = U_{BC} = U_\ell$ ,  $I_A = I_B = I_\ell$ .

При симетричному режимі покази ватметрів будуть наступні

$$\begin{aligned} P_1 &= U_{AC} I_A \cos(\varphi - 30^\circ) = U_\ell I_\ell \cos(\varphi - 30^\circ); \\ P_2 &= U_{BC} I_B \cos(\varphi + 30^\circ) = U_\ell I_\ell \cos(\varphi + 30^\circ). \end{aligned} \quad (5.67)$$

З отриманих співвідношень випливає, що при симетричному навантаженні показання ватметрів будуть однакові тільки якщо  $\varphi = 0$ . Якщо  $\varphi > 60^\circ$ , то покази другого ватметра будуть від'ємними.

При симетричному режимі на підставі показів приладів можна обчислити сумарну реактивну потужність кола

$$\begin{aligned} P_1 - P_2 &= U_\ell I_\ell \cos(\varphi - 30^\circ) - U_\ell I_\ell \cos(\varphi + 30^\circ) = \\ &= 2U_\ell I_\ell \sin\varphi \cdot \sin 30^\circ = U_\ell I_\ell \sin\varphi = \frac{Q}{\sqrt{3}}, \end{aligned} \quad (5.68)$$

або

$$Q = \sqrt{3}(P_1 - P_2). \quad (5.69)$$

В цьому випадку тангенс кута фазового зсуву

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{Q}{P} = \sqrt{3} \frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2}. \quad (5.70)$$

Ватметри, які встановлюють на розподільних щитах, являють собою двоелементні (для трипровідного трифазного кола) або триелементні (для чотирипровідного трифазного кола) вимірювальні механізми, що з'єднані спільною віссю й впливають на спільну стрілку. Схеми вмикання таких ватметрів нічим не відрізняється від схеми вмикання відповідно двох або трьох ватметрів.

*Приклад 5.12.* Несиметричне, рівномірне навантаження підімкнене до трифазного генератора, обмотки якого з'єднані зіркою (рис. 5.35). Фазна напруга генератора  $U_\phi = 100 \text{ В}$ , опори резистивних й ємнісного елементів чисельно однакові  $R = 100 \text{ Ом}$ ,  $X_C = 100 \text{ Ом}$ . Потрібно скласти баланс потужностей і обчислити покази ватметрів.

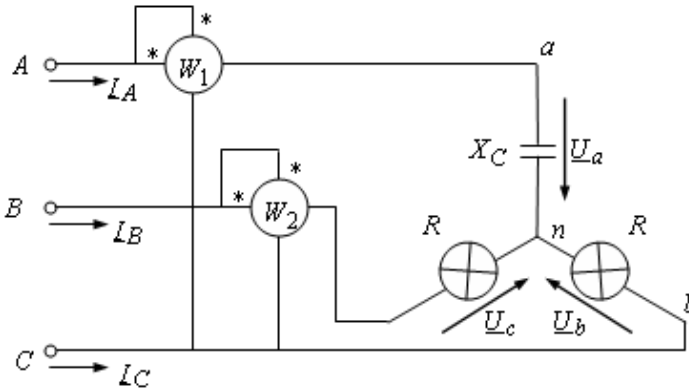


Рис. 5.35

*Розв'язання.* Скористаємося результатами розрахунку фазних (лінійних) струмів який виконаний у прикладі 5.5.

$$\underline{I}_A = 0,60 + j1,20 = 1,342e^{j63^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_B = -0,30 - j1,466 = 1,496e^{-j102^\circ} \text{ А};$$

$$I_C = -0,30 + j0,266 = 0,401e^{j139^\circ} \text{ А.}$$

Комплекс повної потужності генератора

$$\begin{aligned} \underline{S} &= P + jQ = \underline{U}_A I_A + \underline{U}_B I_B + \underline{U}_C I_C = 100e^{j0^\circ} \cdot 1,342e^{-j63^\circ} + \\ &+ 100e^{-j120^\circ} \cdot 1,496e^{j102^\circ} + 100e^{j120^\circ} \cdot 0,401e^{-j139^\circ} = \\ &= 241,1 - j178,9 = 300,2e^{-j37^\circ} \text{ ВА.} \end{aligned}$$

Комплекс повної потужності навантаження

$$\begin{aligned} \underline{S}_l &= P_l + jQ_l = I_A^2 \cdot (-jX_C) + I_B^2 \cdot R + I_C^2 \cdot R = 1,342^2 \cdot (-j100) + \\ &+ 1,496^2 \cdot 100 + 0,401^2 \cdot 100 = 239,9 - j180,1 = 300,0e^{j-37^\circ} \text{ ВА.} \end{aligned}$$

Баланс потужностей виконується  $\underline{S} \approx \underline{S}_l$ . Незначна похибка (відносна похибка менш 1%) пояснюється округленням при обчисленнях.

Активна потужність, що вимірюють ватметри

$$\begin{aligned} P_1 &= \text{Re}((\underline{U}_A - \underline{U}_C) \cdot \underline{I}_A^*) = \text{Re}((100e^{j0^\circ} - 100e^{j120^\circ}) \cdot 1,342e^{-j63^\circ}) = \\ &= \text{Re}(173,2e^{-j30^\circ} \cdot 1,342e^{-j63^\circ}) = 173,2 \cdot 1,342 \cos(-93^\circ) = -12,2 \text{ Вт}; \\ P_2 &= \text{Re}((\underline{U}_B - \underline{U}_C) \underline{I}_B^*) = \text{Re}((100e^{-j120^\circ} - 100e^{j120^\circ}) \cdot 1,496e^{j102^\circ}) = \\ &= \text{Re}(173,2e^{-j90^\circ} \cdot 1,496e^{j102^\circ}) = 173,2 \cdot 1,496 \cos(12^\circ) = 253,4 \text{ Вт}; \\ P_W &= P_1 + P_2 = -12,2 + 253,4 = 241,2 \text{ Вт.} \end{aligned}$$

Сума активних потужностей, що виміряні ватметрами збігається з активними потужностями генератора й навантаження  $P \approx P_l \approx P_W$ .

### 5.15 Пульсуючі й обертові магнітні поля

Найважливішою перевагою трифазного кола є можливість одержання кругового обертового магнітного поля за допомогою нерухомих обмоток. На цій основі в 1889 р. російський електротехнік М. Доліво-Добровольський сконструював асинхронний трифазний двигун з короткозамкненим ротором.

Розгляд цього питання почнемо з аналізу магнітного поля однієї обмотки (котушки) через яку протікає синусоїдний струм.

### 5.15.1 Магнітне поле однієї обмотки із синусоїдним струмом

Нехай через нерухому обмотку протікає синусоїдний струм  $i = I_m \sin \omega t$ . На рис. 5.36 обмотка умовно представлена у вигляді одного витка.

При протіканні по обмотці струм створює магнітне поле. Вектор індукції цього поля спрямований перпендикулярно до площини обмотки відповідно до напрямку струму в обмотці за правилом правоходового гвинта.

Якщо струм змінюється за синусоїдним законом, то індукція магнітного поля, що створюється ним, також змінюється за синусоїдним законом

$$B = B_m \sin \omega t. \quad (5.71)$$

де  $B_m$  - амплітудне (максимальне) значення магнітної індукції в центрі обмотки.

Магнітне поле змінюється в часі уздовж осі обмотки за синусоїдним законом (пульсує) і тому його називають *пульсуючим*.

Орієнтація вектора індукції в просторі не змінюється. Зміна знака струму на протилежний призведе до зміни знака індукції. Вектор магнітної індукції при цьому матиме протилежний напрямок.

### 5.15.2 Магнітне поле двох взаємно перпендикулярних у просторі обмоток

Електричні струми, що змінюються за синусоїдним законом, які протікають у двох нерухомих взаємно перпендикулярних обмотках, створюють два пульсуючих магнітних потоки. Вектори магнітних індукцій цих полів розташовані в просторі перпендикулярно один одному.

Результуючий вектор магнітної індукції, дорівнює векторній сумі індукцій магнітних полів цих двох обмоток (рис. 5.37).

Припустимо тепер, що через обмотки протікають струми однакової частоти, амплітуди й початкової фази. Кожний зі струмів буде створювати власне пульсуюче магнітне поле. Прийнятим додатним напрямкам синусоїдальних струмів  $i_1 = i_2 = I_m \sin \omega t$  відповідають магнітні потоки з індукціями в точці перетинання осей коатушок  $B_1 = B_2 = B_x = B_y = B_m \sin \omega t$ , вектора яких спрямовані за

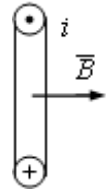


Рис. 5.36

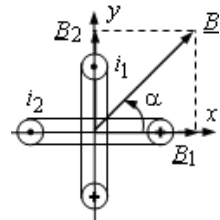


Рис.5.37

горизонтальною і вертикальною осях (уздовж осей відповідних котушок).

Вектор магнітної індукції результуючого магнітного поля має модуль  $B$  і спрямований під кутом  $\alpha$  до горизонтальної осі

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = B_m \sqrt{\sin^2 \omega t + \sin^2 \omega t} = \sqrt{2} B_m \sin \omega t;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{B_y}{B_x} = \frac{B_m \sin \omega t}{B_m \sin \omega t} = 1. \quad (5.72)$$

У цьому випадку результуюче магнітне поле також буде пульсуючим. Вектор індукції  $\vec{B}$  результуючого магнітного поля буде спрямований за бісектрисою кута між його складовими  $\vec{B}_1$  й  $\vec{B}_2$ .

*Круговим обертовим магнітним полем* називають поле, вектор магнітної індукції якого, не змінюючись за модулем, обертається в просторі з постійною кутовою частотою.

Припустимо, що через обмотки проходять струми однакових частоти й амплітуди, які зсунені за фазою відносно один одного на чверть періоду. Прийнятим додатним напрямкам синусоїдних струмів  $i_1 = I_m \sin(\omega t + \pi/2) = I_m \cos \omega t$  і  $i_2 = I_m \sin \omega t$  відповідають магнітні потоки з індукціями в точці перетинання осей котушок  $B_1 = B_x = B_m \cos \omega t$  й,  $B_2 = B_y = B_m \sin \omega t$ , які спрямовані, відповідно, за горизонтальною і вертикальною осях.

Тоді маємо

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = B_m \sqrt{\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t} = B_m;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{B_y}{B_x} = \frac{B_m \sin \omega t}{B_m \cos \omega t} = \operatorname{tg} \omega t. \quad (5.73)$$

Отримані вирази показують, що кут повороту вектора індукції результуючого магнітного поля прямо пропорційний часу, тобто результуюче магнітне поле рівномірно обертається з кутовою швидкістю  $\omega$ , що дорівнює круговій частоті синусоїдних струмів у обмотках. Модуль вектора індукції результуючого магнітного поля на осі поля залишається незмінний  $B = B_m = \text{const}$ .

Таким чином, у результаті накладення двох взаємно перпендикулярних пульсуючих магнітних полів, зсунених за фазою відносно один одного на чверть періоду, утвориться кругове магнітне поле, що обертається з постійною кутовою швидкістю убік відста-

ючого за фазою вектора індукції. Це поле поводитьсь так, ніби з такою же постійною швидкістю обертається постійний магніт.

У розглянутому випадку індукція  $B_1$  випереджає за фазою на кут  $\pi/2$  індукцію  $B_2$  й результуюче магнітне поле обертається в додатному напрямку (проти годинникової стрілки). Якщо змінити напрямок струму в одній з котушок, наприклад в обмотці 1 (або змінити фазу струму  $I_1$  на кут  $\pi$ ), то результуюче магнітне поле буде обертатися в від'ємному напрямку (за годинною стрілкою).

Описаний спосіб одержання кругового обертового магнітного поля за допомогою двох обмоток використовують в малопотужних однофазних двигунах. Струм в одній з обмоток для цього зсуюють за фазою відносно струму в інший на  $\pi/2$  за допомогою конденсатора.

### 5.15.3 Магнітне поле трьох обмоток

Кругове обертове магнітне поле можна одержати за допомогою трьох обмоток, осі яких зсунені в просторі на кути  $2\pi/3$ , якщо їхні затискачі підімкнуті до симетричного трифазного джерела (рис. 5.38).

Струми цих обмоток утворюють симетричну трифазну систему, тобто вони зсунені відносно один одного за фазою на третину періоду

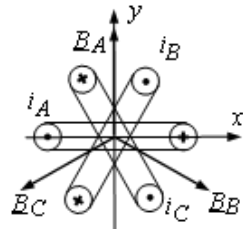


Рис. 5.38

$$i_A = I_m \sin \omega t;$$

$$i_B = I_m \sin \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right); \quad (5.74)$$

$$i_C = I_m \sin \left( \omega t + \frac{2\pi}{3} \right).$$

Відповідно індукції магнітних полів цих обмоток також зсунені відносно одна одної за фазою на третину періоду

$$B_A = B_m \sin \omega t;$$

$$B_B = B_m \sin \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right) = B_m \left( \cos \frac{2\pi}{3} \sin \omega t - \sin \frac{2\pi}{3} \cos \omega t \right); \quad (5.75)$$

$$B_C = B_m \sin \left( \omega t + \frac{2\pi}{3} \right) = B_m \left( \cos \frac{2\pi}{3} \sin \omega t + \sin \frac{2\pi}{3} \cos \omega t \right).$$

Для обчислення вектора індукції результуючого магнітного поля зпроецируємо вектора  $\overline{B}_A$ ,  $\overline{B}_B$  и  $\overline{B}_C$  на горизонтальну и вертикальну вісі.

Проекція на горизонтальну вісь

$$B_x = B_B \cos \frac{\pi}{6} - B_C \cos \frac{\pi}{6} = B_m \left( -\frac{1}{2} \sin \omega t - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \omega t \right) \frac{\sqrt{3}}{2} - \\ - B_m \left( -\frac{1}{2} \sin \omega t + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \omega t \right) \frac{\sqrt{3}}{2} = -1,5 B_m \cos \omega t. \quad (5.76)$$

Проекція на вертикальну вісь

$$B_y = B_A - B_B \sin \frac{\pi}{6} - B_C \sin \frac{\pi}{6} = B_m \sin \omega t - \\ - \frac{B_m}{2} \left( -\frac{1}{2} \sin \omega t + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \omega t \right) - \frac{B_m}{2} \left( -\frac{1}{2} \sin \omega t - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \omega t \right) = \quad (5.77) \\ = 1,5 B_m \sin \omega t.$$

Вектор магнітної індукції результуючого магнітного поля має модуль  $B$  і спрямован під кутом  $\alpha$  до горизонтальної осі

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = 1,5 B_m \sqrt{\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t} = 1,5 B_m; \quad (5.78) \\ tg \alpha = \frac{B_y}{B_x} = \frac{1,5 B_m \sin \omega t}{-1,5 B_m \cos \omega t} = -tg \omega t = tg(-\omega t).$$

З отриманих виразів випливає, що й у цьому випадку кут повороту вектора індукції результуючого магнітного поля прямо пропорційний часу, тобто результуюче магнітне поле рівномірно обертається з кутовою швидкістю  $\omega$ , що дорівнює круговій частоті синусоїдних струмів обмоток. Модуль вектора індукції результуючого магнітного поля на осі поля залишається незмінним  $B = 1,5 B_m = const$ .

Таким чином, у результаті накладення трьох пульсуючих магнітних полів, які зсунені за фазою відносно один одного на третину періоду, утвориться кругове магнітне поле, напрямком обертання якого збігається з напрямком чергування струму в обмотках. Результуюче магнітне поле буде обертатися у від'ємному напрямку (за годинною стрілкою).

Для зміни напрямку обертання магнітного поля необхідно й достатньо змінити порядок чергування фаз, тобто поміняти місцями підмикання будь-яких двох обмоток. Цю властивість широко використовують для зміни напрямку обертання двигунів змінного струму.

У такий спосіб, для створення кругового обертового магнітного поля, необхідне виконання двох умов:

- осі обмоток (котушок) повинні бути зсунені в просторі відносно один одного на однакові кути (для двофазної системи - на  $90^\circ$ , для трифазної - на  $120^\circ$ );
- синусоїдні струми, які протікають по обмотках, повинні бути зсунені за фазою відповідно до просторового зсуву обмоток.

### 5.16 Принцип дії асинхронного двигуна

Принцип дії трифазних електродвигунів ґрунтується на створенні кругового обертового магнітного поля. Найбільш дешевими, надійними й простими за будовою є асинхронні двигуни. Тому їх широко використовують в промисловості. Випускають асинхронні двигуни потужністю від десятків ватів до тисяч кіловатів.

Асинхронний трифазний двигун синусоїдного струму являє собою електричну машину, що призначені для перетворення енергії трифазного струму в механічну енергію у вигляді обертаючого моменту на валу машини, який передається виконуючому механізму.

В асинхронних трифазних двигунах є нерухома частина (*статор*), у пазах якої поміщені три обмотки, які, при підімкненні до трифазного джерела живлення, створюють кругове обертове магнітне поле, і рухома частина (*ротор*), у пазах якої знаходяться три замкнуті на себе (*короткозамкнений ротор*) або на зовнішні опори обмотки (*фазний ротор*), які не зв'язані із зовнішніми джерелами енергії.

Найбільше розповсюдження в наш час одержав асинхронний двигун з короткозамкненим ротором. У закритих пазах ротора такого двигуна рівномірно розміщені за окружністю струмонесучі мідні або алюмінієві стрижні. Кінці всіх стрижнів на торцях з'єднані мідними або алюмінієвими кільцями, які замикають собою стрижні накоротко ("*білчина клітка*"). Звідси й походження назви ротора цього типу.

На рис. 5.39 обмотки статора показані в розрізі, кожна з обмоток умовно займає тільки невелику частину окружності статора (ротора) і представлена одним витком. У дійсності кожна з обмоток займає близько  $1/3$  окружності статора (ротора).

За один період синусоїдного струму обертове магнітне поле, що створюється струмами обмоток статора, робить повний оберт навколо своєї осі.

Таким чином, при частоті струму  $f = 50 \text{ Гц}$  за одну секунду поле робить 50 обертів, а за одну хвилину 3000 обертів. Тому частота його обертання складає  $n = 3000 \text{ об/хв}$ .

Обертове магнітне поле, перетинаючи обмотки ротора, наводить у них ЕРС взаємоіндукції. Під дією ЕРС в обмотках ротора виникають вихрові струми, активні складові яких збігаються за напрямком з напрямком ЕРС. За законом Ленца ці струми прагнуть своїми магнітними полями компенсувати зміну обертового магнітного поля.

Механічна взаємодія струмів у роторі з обертовим магнітним полем на підставі закону Ампера (1.25) викликає сили, які створюють обертаючий момент. Напрямок сил, які діють на обмотки, визначають за правилом правоходового гвинта. Цей обертаючий момент змушує ротор обертатися в тім же напрямку, у якому обертається магнітне поле. Зі зростанням частоти обертання ротора відносна швидкість, з якою обертове магнітне поле перетинає обмотки ротора, зменшується. Отже, зменшуються індуквані в роторі ЕРС і струми, що призводить до зменшення обертового моменту. Якби ротор досяг тієї ж частоти обертання, що й частота обертання магнітного поля, то ЕРС і струми в роторі дорівнювали б нулю. Обертаючий момент також дорівнював би нулю. Внаслідок цього при наявності гальмівного моменту магнітне поле й ротор не можуть обертатися з однаковою частотою (синхронно), частота ротора трохи менше. Тому двигуни такого типу називають *асинхронними*.

Для оцінки швидкості обертання магнітного поля щодо рото-

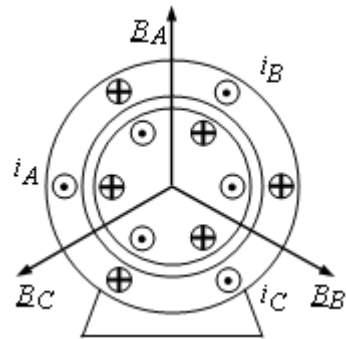


Рис. 5.39

ра вводять поняття *ковзання*

$$s = \frac{\omega_s - \omega_r}{\omega_s}, \quad (5.79)$$

де  $\omega_s$ ;  $\omega_r$  - відповідно кутова частота обертання магнітного поля статора й кутова частота обертання ротора,  $\text{с}^{-1}$ .

Ковзання є безрозмірною одиницею.

На практиці звичайно ковзання виражають через частоту обертання магнітного поля статора й частоту обертання ротора

$$s = \frac{n_s - n_r}{n_s}, \quad (5.80)$$

де  $n_s$ ;  $n_r$  - відповідно частота обертання магнітного поля статора й частота обертання ротора, об/хв.

У режимі пуску  $n_r = 0$ ,  $s = 1$ .

У режимі ідеального холостого ходу  $n_r = n_s$ ,  $s = 0$ .

У режимі двигуна частота обертання ротора знаходиться в межах  $0 < n_r < n_s$ , а ковзання в межах  $1 > s > 0$ .

У робочому режимі асинхронний двигун знаходиться в динамічній рівновазі (обертаючий момент, який створюється завдяки ковзанню, урівноважує гальмуючий момент навантаження на його валу). При збільшенні механічного навантаження гальмуючий момент стає більше обертаючого й ковзання збільшується. Внаслідок цього зростають індуквані в обмотках ротора ЕРС і струми, що викликає збільшення обертаючого моменту до нового стану динамічної рівноваги. Обертаючий момент може зростати до певного значення, яке називають *критичним моментом*. Відповідне ковзання називають *критичним ковзанням*. Якщо гальмуючий момент перевищить критичний момент, двигун зупиниться.

Для асинхронних двигунів нормального виконання при номінальному навантаженні ковзання становить  $s = 0,02 \dots 0,07$ .

Для зміни напрямку обертання ротора досить поміняти напрямок струмів у будь-яких двох обмотках статора.

Асинхронну машину звичайно використовують як двигун, але вона може працювати також у режимі генератора або гальма.

Коефіцієнт потужності  $\cos\phi$  асинхронних двигунів нормального виконання не перевищує  $0,8 \dots 0,85$ .

### 5.17 Принцип дії синхронного двигуна

*Синхронний двигун* також є машиною змінного струму. Будова її статора за конструкцією мало відрізняється від будови статора асинхронної машини, істотні відмінності є тільки в машинах великої потужності. Ротор синхронної машини являє собою магніт, що виконаний (при відносно невеликих потужностях) на базі постійного магніту або на основі електромагніта, обмотка якого живиться постійним струмом. Два кінці цієї обмотки виводяться на контактні кільця, що укріплені на валу машини й обертаються разом з ротором. Постійний струм підводять до ротора через нерухомі щітки, що сковзають по поверхні контактних кілець. Результатом взаємодії обертового магнітного поля статора й постійного магнітного поля ротора є виникнення обертаючого моменту на валу.

Якщо приєднати обмотку статора до трифазного джерела синусоїдного струму, а обмотку ротора (*обмотку збудження*) – до джерела постійного струму, то обертове магнітне поле статора буде періодично створювати на валу короточасні знакозмінні моменти з подвійною частотою джерела змінного струму. Наприклад, якщо до північного полюса ротора наближається південний полюс статорного поля, створюється момент, який діє проти напрямку обертання магнітного поля. При віддаленні південного полюса статора від північного полюса ротора виникає момент, що діє за напрямком обертання поля. Через механічну інерцію ротор не встигає повертатися. Він не почне обертатися, але буде вібрувати. Для пуску синхронного двигуна необхідно спочатку привести ротор в обертання до частоти обертання близької до синхронної. Обмотку збудження при пуску відмикають від джерела енергії. Для пуску синхронного двигуна використовують спеціальну пускову обмотку, що діє так само, як й обмотка ротора в асинхронному двигуні. Коли ковзання ротора досягає декількох сотих, обмотка збудження автоматично підмикається до джерела постійного струму. При цьому виникає постійне магнітне поле струму обмотки збудження й утворюється синхронний обертаючий момент. Тоді магнітні поля статора й ротора зчіплюються між собою різнойменними полюсами (подібно до двох постійних магнітів). Далі ротор обертається з тією же швидкістю, що й обертове магнітне поле статора (тобто синхронно). При синхронному обертанні ротора між осями магнітних полів статора й ротора є кутове зсув, що залежить від гальмівного моменту на валу двигуна. Зі збільшенням гальмівного моменту цей кут збільшується, завдяки чому збільшується обертаючий момент. Макси-

мальний обертаючий момент утворюється коли кут між ЕРС двигуна й напругою мережі близький до  $90^\circ$ . Подальше збільшення навантаження призводить до зупинки двигуна.

Істотною особливістю синхронних двигунів є можливість у широких межах змінювати реактивний струм і реактивну потужність, які споживаються із трифазної мережі, шляхом зміни струму збудження. При недозбудженні двигуна струм відстає від напруги за фазою (кут  $\varphi > 0$ ), при перезбудженні струм випереджає напругу за фазою (кут  $\varphi < 0$ ). Цю властивість синхронних двигунів широко використовують в промисловості для підвищення коефіцієнта потужності електроустановок.

Синхронні машини, як і всі електричні машини є оборотними, тобто вони можуть працювати як у режимі двигуна, так і генератора.

Якщо обмотку збудження синхронної машини підімкнути до джерела постійного струму, то внаслідок протікання струму виникне постійне магнітне поле. При обертанні ротора за допомогою первинного двигуна це магнітне поле також буде обертатися. Як результат цього в трьох фазах обмотки статора будуть індукуватися три ЕРС, однакові за амплітудою й частотою, але зсунені за фазою відносно одна одної на третину періоду.

Синхронні генератори є основним джерелом електричної енергії в промислових мережах електропостачання й на пересувних електроустановках.

Синхронні трифазні двигуни в силу своїх особливостей пуску не знайшли широкого застосування й використовуються в установках середньої й великої швидкості, у випадках рідких пусків, коли не потрібно електричне регулювання швидкості (наприклад, насоси, компресори, вентилятори). Крім того, їх, подібно конденсаторним батареям, використовують як компенсатори реактивної потужності.

### 5.18 Симетричні складові трифазних систем

Методи розрахунку несиметричних режимів трифазних кіл, які розглядалися раніше, належать до методів розрахунку окремих випадків таких режимів, коли між фазами не було взаємної індукції або вона могла бути врахована в еквівалентному опорі на фазу, не було обертових машин, були відсутні струми в землі, які призводять до індуктивного впливу на фазні обмотки й проводи. Справа в тому, що опори обмоток трифазних генераторів, двигунів і трансформаторів, у

силу їхніх конструктивних особливостей, складним образом залежать від несиметрії струмів і не можуть бути задані для кожного конкретного випадку. Вони легко визначаються тільки для симетричних режимів роботи й наводяться в паспортних даних машин.

Для розрахунку несиметричних режимів лінійних трифазних кіл у загальному випадку широко застосовують метод симетричних складових. Цей метод базується на заміні розрахунку струмів в одному несиметричному колі розрахунком струмів у трьох симетричних трифазних колах, у кожному з яких діють незалежні одна від одної симетричні системи ЕРС, напруг і струмів. Він зводить складну задачу при наявності несиметрії ЕРС, струмів і напруг до декількох більш простих задач розрахунку того ж кола при симетричних режимах. Це дозволяє застосувати до них принцип суперпозиції й обчислювати реальні струми несиметричної трифазної системи як суму струмів у трьох незалежних друг від друга симетричних трифазних колах. Особливо зручним цей метод стає коли опори кола залежать від характеру несиметрії струму.

Розроблено й застосовується цей метод головним чином для розрахунку струмів у різних аварійних режимах у трифазних колах, які містять обертові електричні машини. Найбільш різка несиметрія струмів у колах спостерігається під час коротких замиканнях (к.з.) у колі. Тому метод симетричних складових одержав найбільш широке поширення при розрахунку струмів к.з. в електричних системах. Але в силу своєї універсальності він може бути застосований при розрахунку будь-якого несиметричного режиму роботи трифазних кіл.

### 5.18.1 Основні поняття симетричної трифазної системи

Як уже говорилося в попередніх підрозділах симетрична трифазна система синусоїдних величин - це сукупність трьох величин, які змінюються за синусоїдним законом з однаковими частота, причому їхні амплітуди однакові, але за фазою зсунені відносно одна одної на третину періоду ( $\pm 120^\circ$ ). У більш загальному випадку говорять про зсув за фазою на рівні кути  $k \cdot 120^\circ$  (де  $k \in N$ ).

Якщо  $k = 3n - 2$  (де  $n \in N$ ), то черговість проходження окремих величин у часі відповідає прийнятому алфавітному порядку позначення цих величин (у цьому випадку маємо систему із прямою послідовністю чергування величин або *систему прямої по-*

слідовності). При літерному позначенні величин системи прямої послідовності застосовують додатковий цифровий індекс 1.

Якщо  $k = 3n - 1$ , то черговість проходження окремих величин у часі відповідає зворотному прийнятому алфавітному порядку позначення цих величин (у цьому випадку маємо систему зі зворотною послідовністю чергування величин або *систему зворотної послідовності*). При літерному позначенні величин системи зворотної послідовності застосовують додатковий цифровий індекс 2.

Якщо  $k = 3n$ , то окремі величини збігаються одна з одною за фазою фази. У цьому випадку маємо систему з нульовою послідовністю чергування величин або *систему нульової послідовності*. При літерному позначенні величин системи нульової послідовності застосовують додатковий цифровий індекс 0.

На рис. 5.40 представлені симетричні системи векторів  $A$ ,  $B$  й  $C$ : прямої послідовності на рис. 5.40, *а*, зворотної послідовності на рис. 5.40, *б*, нульової послідовності на рис. 5.40, *в*.

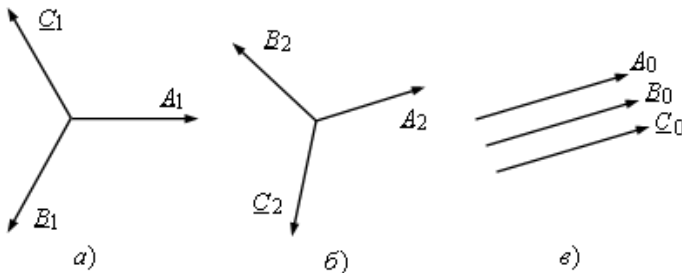


Рис. 5.40

Використовуючи оператор трифазної системи (5.4) для симетричних систем прямої, зворотної й нульової послідовності можна записати

$$\begin{aligned} \underline{B}_1 &= a^2 \underline{A}_1; \quad \underline{C}_1 = a \underline{A}_1; \\ \underline{B}_2 &= a \underline{A}_2; \quad \underline{C}_2 = a^2 \underline{A}_2; \\ \underline{A}_0 &= \underline{B}_0 = \underline{C}_0. \end{aligned} \quad (5.81)$$

Із системою зворотної послідовності доводиться зіштовхуватися при помилковому маркіруванні трифазних кіл, у яких у нормальних режимах повинна існувати система прямої послідовності напруг. Систему нульової послідовності використовують у випадку теоретичного аналізу трифазних кіл.

### 5.18.2 Розкладання трифазної несиметричної системи векторів на три трифазні симетричні системи векторів

Будь-яку систему трьох векторів (у тому числі трифазні системи струмів, ЕРС, напруг) можна представити у вигляді суми трьох симетричних систем векторів прямої, зворотної і нульової послідовностей.

Для доказу можливості розкладання будь-якої несиметричної системи на симетричні складові й одержання необхідних для такого розкладання формул припустимо, що розкладання вже виконане й три несиметричних вектори  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$  і  $\underline{C}$  виражені через свої симетричні складові в такий спосіб:

$$\begin{cases} \underline{A} = \underline{A}_1 + \underline{A}_2 + \underline{A}_0; \\ \underline{B} = \underline{B}_1 + \underline{B}_2 + \underline{B}_0; \\ \underline{C} = \underline{C}_1 + \underline{C}_2 + \underline{C}_0, \end{cases} \quad (5.82)$$

або

$$\begin{cases} \underline{A} = \underline{A}_1 + \underline{A}_2 + \underline{A}_0; \\ \underline{B} = a^2 \underline{A}_1 + a \underline{A}_2 + \underline{A}_0; \\ \underline{C} = a \underline{A}_1 + a^2 \underline{A}_2 + \underline{A}_0. \end{cases} \quad (5.83)$$

Тому що визначник цієї системи відмінний від нуля

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{vmatrix} = a + a + a^4 - a^2 - a^2 - a^2 = 3(a - a^2) = \\ &= 3 \left( -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = j \frac{3\sqrt{3}}{2} \neq 0. \end{aligned} \quad (5.84)$$

то отримана система рівнянь може бути однозначно розв'язана щодо невідомих векторів  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$  і  $\underline{C}$ .

Отже, система трьох несиметричних векторів  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$  і  $\underline{C}$  може бути розкладена на симетричні складові. У результаті розв'язання цієї системи рівнянь отримуємо формули, за допомогою яких можна здійснити розкладання. Підсумував ліві й праві частини рівнянь (5.83) і врахувавши, що  $1 + a + a^2 = 0$ , одержимо

$$\underline{A}_0 = \frac{1}{3}(\underline{A} + \underline{B} + \underline{C}). \quad (5.85)$$

Помноживши ліві й праві частини другого й третього рівнянь (5.83) відповідно на  $a$  й  $a^2$  й, урахувавши, що  $a^3 = 1$ ,  $a^4 = a$ , після підсумовування лівих і правих частин рівнянь, одержимо

$$\underline{A}_1 = \frac{1}{3}(\underline{A} + a\underline{B} + a^2\underline{C}). \quad (5.86)$$

Помноживши ліві й праві частини другого й третього рівнянь (5.83) відповідно на  $a^2$  й  $a$ , після підсумовування лівих і правих частин рівнянь, одержимо

$$\underline{A}_2 = \frac{1}{3}(\underline{A} + a^2\underline{B} + a\underline{C}). \quad (5.87)$$

Таким чином, розкладання заданої несиметричної системи векторів  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$  і  $\underline{C}$  можливо, і притім тільки єдиним способом, тобто кожна несиметрична система векторів може бути представлена тільки однією комбінацією трьох симетричних систем.

Обчисливши за формулами (5.85) - (5.87) симетричні складові несиметричної системи для фази  $A$ , які називають *головними симетричними складовими*, використовуючи формули (5.81) можна визначити симетричні складові для інших двох фаз.

Отримані співвідношення є загальними, вони можуть застосовуватися для розкладення трифазних систем напруг, струмів, магнітних потоків й інших величин.

Відповідно до формули (5.85) система нульовий симетричної складової несиметричної обумовлюється геометричною сумою  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$  і  $\underline{C}$ . Отже, якщо ця сума дорівнює нулю, то система нульової симетричної складової в розкладанні буде відсутньою.

Отже будь-яка несиметрична система лінійних напруг при розкладанні на складові ніколи не має нульової складової, тому що при будь-яких спотвореннях цієї системи її вектори завжди утворюють замкнутий трикутник (а, отже, їхня геометрична сума дорівнює нулю). З тієї ж причини завжди (за винятком коротких замикань на землю) відсутня нульова складова й у розкладанні лінійних струмів у трипровідних трифазних колах, оскільки при відсутності нейтрального проводу, відповідно до першого закону Кірхгофа геометрична сума цих струмів також дорівнює нулю.

Несиметрію трифазних систем величин прийнято оцінювати *коефіцієнтом несиметрії*, які дорівнює відношенню головних несиметричних складових зворотної й прямиї послідовності, що ви-

ражено у відсотках

$$\varepsilon = \frac{A_2}{A_1} \cdot 100\% . \quad (5.88)$$

Коефіцієнт несиметрії використовують тільки в тому випадку, коли в розкладанні несиметричної системи відсутня нульова складова (наприклад для оцінки несиметрії системи лінійних напруг або системи лінійних струмів у трипровідних трифазних колах). Для симетричних систем із прямим порядком чергування фаз коефіцієнт несиметрії дорівнює нулю

У реальних електричних колах абсолютно симетричні системи одержати неможливо. Тому на практиці використовують поняття практично симетричних систем. Систему лінійних напруг вважають практично симетричною, якщо для неї коефіцієнт несиметрії не перевищує 1%. Систему лінійних струмів вважають практично симетричною, якщо для неї коефіцієнт несиметрії не перевищує 5%.

*Приклад 5.13.* Задана несиметрична система трьох векторів:

$\underline{A} = 200e^{j0^\circ}$ ,  $\underline{B} = 60e^{-j135^\circ}$ ,  $\underline{C} = 60e^{j135^\circ}$ . Потрібно обчислити симетричні складові несиметричної системи векторів.

*Розв'язання.* Відповідно до формул (5.85), (5.86) і (5.87) обчислюємо складові

$$\begin{aligned} \underline{A}_0 &= \frac{1}{3}(\underline{A} + \underline{B} + \underline{C}) = \frac{1}{3}(200e^{j0^\circ} + 60e^{-j135^\circ} + 60e^{j135^\circ}) = \\ &= \frac{1}{3}(200 - 42,4 - j42,4 - 42,4 + j42,4) = 38,4 + j0 = 38,4e^{j0^\circ}; \\ \underline{A}_1 &= \frac{1}{3}(\underline{A} + a\underline{B} + a^2\underline{C}) = \frac{1}{3}(200e^{j0^\circ} + 60e^{-j15^\circ} + 60e^{j15^\circ}) = \\ &= (200 + 58,0 - j15,5 + 58,0 + j15,5) = 105,3 + j0 = 105,3e^{j0^\circ}; \\ \underline{A}_2 &= \frac{1}{3}(\underline{A} + a^2\underline{B} + a\underline{C}) = \frac{1}{3}(200e^{j0^\circ} + 60e^{-j255^\circ} + 60e^{j255^\circ}) = \\ &= \frac{1}{3}(200 - 15,5 + j58,0 - 15,5 - j58,0) = 56,3 + j0 = 56,3e^{j0^\circ}. \end{aligned}$$

Для перевірки правильності розрахунків виразимо ЕРС генератора через системи симетричних складових

$$\underline{A} = \underline{A}_1 + \underline{A}_2 + \underline{A}_0 = 105,3 + 56,3 + 38,4 = 200e^{j0^\circ};$$

$$\begin{aligned} \underline{B} &= a^2 \underline{A}_1 + a \underline{A}_2 + \underline{A}_0 = 105,3e^{-j120^\circ} + 56,3e^{j120^\circ} + 38,4e^{j0^\circ} = \\ &= -52,7 - j91,2 - 28,2 + j48,8 + 38,4 = -42,5 - j42,4 = 60e^{-j135^\circ}; \\ \underline{C} &= a \underline{A}_1 + a^2 \underline{A}_2 + \underline{A}_0 = 105,3e^{j120^\circ} + 56,3e^{-j120^\circ} + 38,4e^{j0^\circ} = \\ &= -52,7 + j91,2 - 28,2 - j48,8 + 38,4 = -42,5 + j42,4 = 60e^{j135^\circ}. \end{aligned}$$

На рис. 5.41, а представлені вектори складових, які обчислені, у вигляді трьох симетричних систем, а на рис. 5.41, б вектора ЕРС генератора як суми векторів симетричних складових.

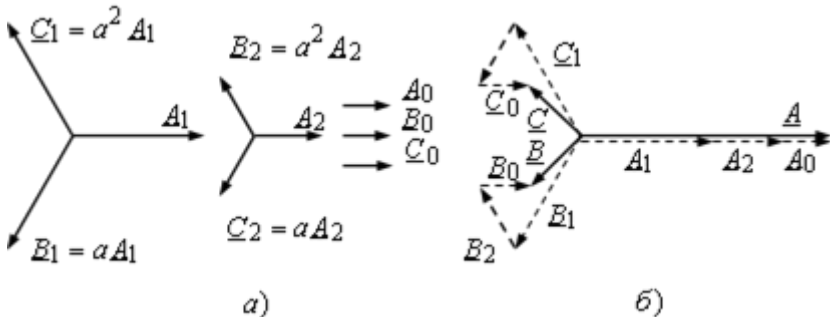


Рис. 5.41

### 5.18.3 Опори елементів трифазного кола для струмів різних послідовностей

Якщо до симетричного кола прикладена несиметрична система напруг, то після розкладання систем фазних напруг і струмів на симетричні складові можна на підставі закону Ома розрахувати комплекси повних опорів прямої, зворотної й нульової послідовностей

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 &= \frac{\underline{U}_{A1}}{\underline{I}_{A1}} = \frac{\underline{U}_{B1}}{\underline{I}_{B1}} = \frac{\underline{U}_{C1}}{\underline{I}_{C1}}; \\ \underline{Z}_2 &= \frac{\underline{U}_{A2}}{\underline{I}_{A2}} = \frac{\underline{U}_{B2}}{\underline{I}_{B2}} = \frac{\underline{U}_{C2}}{\underline{I}_{C2}}; \\ \underline{Z}_0 &= \frac{\underline{U}_{A0}}{\underline{I}_{A0}} = \frac{\underline{U}_{B0}}{\underline{I}_{B0}} = \frac{\underline{U}_{C0}}{\underline{I}_{C0}}. \end{aligned} \quad (5.89)$$

Незважаючи на те, що, всі симетричні напруги прикладені до

тієї самої ділянки електричного кола, опори цієї ділянки струмам різних послідовностей у загальному випадку виявляються різними.

Тільки у випадку трифазного статичного приймача, що не має магнітних зв'язків, з'єднаного зіркою з нейтральним проводом, опором якого можна зневажити, опори всіх послідовностей однакові й дорівнюють опорю фази навантаження

$$Z_1 = Z_2 = Z_0 = Z. \quad (5.90)$$

Розглянемо ділянку трифазного симетричного кола з'єднаного зіркою з нейтральним проводом, опором якого можна зневажити, при наявності магнітних зв'язків між фазами навантаження (рис. 5.42).

Для фази А цієї ділянки маємо

$$\underline{U}_{An} = (R + j\omega L)I_A + j\omega M I_B + j\omega M I_C \quad (5.91)$$

Тоді для симетричних складовій прямій послідовності з обліком того, що  $I_{A1} + I_{B1} + I_{C1} = 0$ , на підставі (5.91) маємо

$$\underline{U}_{An1} = (R + j\omega L - j\omega M)I_{A1}. \quad (5.92)$$

Аналогічні міркування можна виконати й для симетричних складових зворотної послідовності

$$\underline{U}_{An2} = (R + j\omega L - j\omega M)I_{A2}. \quad (5.93)$$

Тому з обліком (5.89) опори прямої й зворотної послідовностей у цьому випадку є однаковими

$$Z_1 = Z_2 = R + j\omega(L - M). \quad (5.94)$$

Для симетричних складових нульової послідовності з обліком того, що  $I_{A0} = I_{B0} = I_{C0}$ , на підставі (5.91) маємо

$$\underline{U}_{An0} = (R + j\omega L + j2\omega M)I_{A0}, \quad (5.95)$$

тому опір нульової послідовності в цьому випадку

$$Z_0 = R + j\omega(L + 2M). \quad (5.96)$$

Для ліній електропередач і трифазних трансформаторів

$$Z_1 = Z_2 \neq Z_0. \quad (5.97)$$

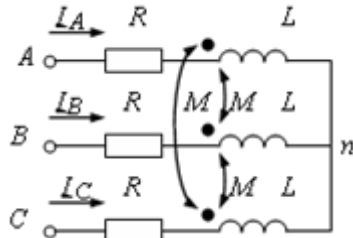


Рис. 5.42

В обертових трифазних машинах магнітне поле, що створюється системою струмів прямої послідовності, обертається в одному напрямку з ротором, а магнітне поле, яке викликається системою струмів зворотної послідовності, обертається в протилежному напрямку. Це приводить до того, що для обертових машин  $Z_1 \neq Z_2$  (звичайно  $Z_1 > Z_2$ ), тому що реакція ротора для прямої й зворотної послідовності є різною. Струми нульової послідовності не створюють обертового магнітного поля, і шляхи магнітних потоків, які викликаються цими струмами, істотно відрізняються від шляхів магнітних потоків, які викликані струмами прямої й зворотної послідовності. Потоки, які створені струмами нульової послідовності, одночасно у всіх трьох фазах спрямовані до ротора або від нього й змушені замикатися від ротора до статора в торцевих частинах машини. Тому опір нульової послідовності  $Z_0$  істотно відрізняється від опорів  $Z_1$  й  $Z_2$ . Таким чином, для конструктивно симетрично влаштованої обертової машини маємо

$$Z_1 \neq Z_2 \neq Z_0. \quad (5.98)$$

Якщо зневажити нелінійність кола, що виникає внаслідок насичення машини, то, використовуючи принцип суперпозиції, розрахунок кола можна використовуючи метод симетричних складових. Розрахунок опорів  $Z_1$ ,  $Z_2$  і  $Z_0$  за конструктивними параметрами машини не становить труднощів. Їх визначають для симетричних режимів, зокрема величини  $Z_1$  й  $Z_2$  розраховують при круговому обертовому магнітному полі. Розрахунок же опорів фаз машини при дійсній несиметрії струмів в обмотках виявляється складним, тому що обертове магнітне поле при цьому не є круговим й опори складним образом залежать від характеру несиметрії струмів.

## 5.19 Метод симетричних складових

### 5.19.1 Межі застосовності методу симетричних складових

Розрахунок трифазних кіл методом симетричних складових базується на принципі суперпозиції й тому метод можна застосовувати тільки до лінійних кіл.

Якщо симетричне трифазне коло живиться від джерела з несиметричною системою ЕРС (напруг), то, використовуючи формули (5.85) - (5.87), цю систему можна розкласти на три симетричні складові. У результаті, за допомогою методу суперпозиції, можна

звести розв'язання вихідної задачі до розв'язання трьох простих задач, у кожній з яких симетричне трифазне коло живиться від джерела із симетричною системою ЕРС (напруг). Розрахунок симетричних режимів роботи значно простіше розрахунків несиметричних.

Подібне спрощення можливо тільки для симетричних трифазних кіл, тобто кіл у яких параметри всіх трьох фаз однакові. Це впливає з того, що окремі симетричні складові діють незалежно друг від друга тільки в симетричних трифазних колах. У цьому випадку, якщо симетричне трифазне коло живиться від джерела із симетричною системою ЕРС прямої (зворотної або нульовий) послідовності, то всі струми й напруги теж будуть утворювати системи відповідно прямої (зворотної або нульовий) послідовності. При симетричному режимі, у трифазному колі не може виникнути інші послідовності ні струмів, ні напруги, крім тієї послідовності, до якого належить система ЕРС джерела.

Якщо ж коло буде несиметричне, то пряма (зворотна або нульова) послідовність ЕРС створить у колі несиметричну систему струмів, яка у розкладанні може містити всі три симетричні системи струмів. Тому в такому випадку метод симетричних складових не давав би переваг. На практиці трифазні кола в більшості випадків є симетричними, а несиметрія має локальний характер. Ця обставина, як буде показано далі, істотно спрощує аналіз. Удаючись до деяких штучних прийомів метод симетричних складових можна розширити й на ряд практично важливих задач розрахунку несиметричних трифазних кіл.

### 5.19.2 Застосування методу симетричних складових для симетричних кіл з несиметричною системою ЕРС генератора

Розглянемо трифазне коло з несиметричним генератором і симетричним навантаженням, схема якого представлена на рис. 5.43.

Опори фаз навантаження мають різні значення для різних складових, але для кожної симетричної складової опори фаз є однаковими.

Вихідними даними є: несиметрична система фазних ЕРС генератора  $E_A, E_B, E_C$ , опори фаз навантаження для різних послідовностей  $Z_1, Z_2, Z_0$ , опір нейтрального проводу  $Z_N$ .

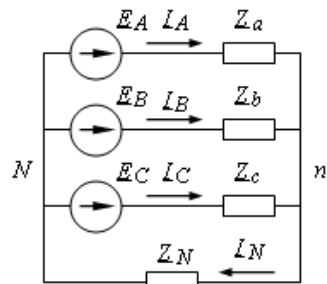


Рис. 5.43

Розкладемо несиметричну систему фазних ЕРС генератора  $\underline{E}_A, \underline{E}_B, \underline{E}_C$  на симетричні складові прямої, зворотної і нульової послідовностей

$$\begin{cases} \underline{E}_A = \underline{E}_{A1} + \underline{E}_{A2} + \underline{E}_{A0}; \\ \underline{E}_B = \underline{E}_{B1} + \underline{E}_{B2} + \underline{E}_{B0}; \\ \underline{E}_C = \underline{E}_{C1} + \underline{E}_{C2} + \underline{E}_{C0}, \end{cases} \quad (5.99)$$

або

$$\begin{cases} \underline{E}_A = \underline{E}_1 + \underline{E}_2 + \underline{E}_0; \\ \underline{E}_B = a^2 \underline{E}_1 + a \underline{E}_2 + \underline{E}_0; \\ \underline{E}_C = a \underline{E}_1 + a^2 \underline{E}_2 + \underline{E}_0. \end{cases} \quad (5.100)$$

Схема електричного кола, яке отримано в результаті такого перетворення, представлена на рис. 5.44.

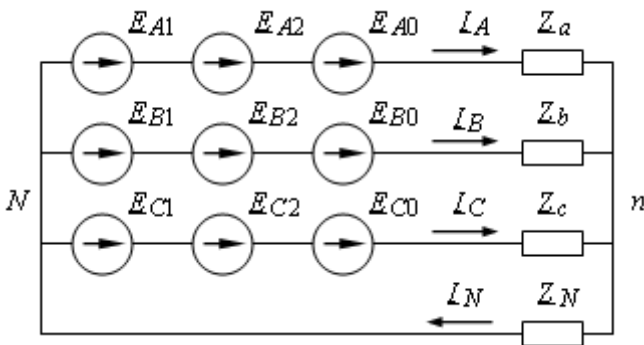


Рис. 5.44

Визначимо симетричні складові ЕРС використовуючи формули (5.85) - (5.87)

$$\begin{cases} \underline{E}_1 = \frac{1}{3}(\underline{E}_A + a \underline{E}_B + a^2 \underline{E}_C); \\ \underline{E}_2 = \frac{1}{3}(\underline{E}_A + a^2 \underline{E}_B + a \underline{E}_C); \\ \underline{E}_0 = \frac{1}{3}(\underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C). \end{cases} \quad (5.101)$$

Скористаємося методом суперпозиції й перейдемо до трьох еквівалентних схем заміщення для кожної із груп симетричних

складових (рис. 5.45, а, б, в).

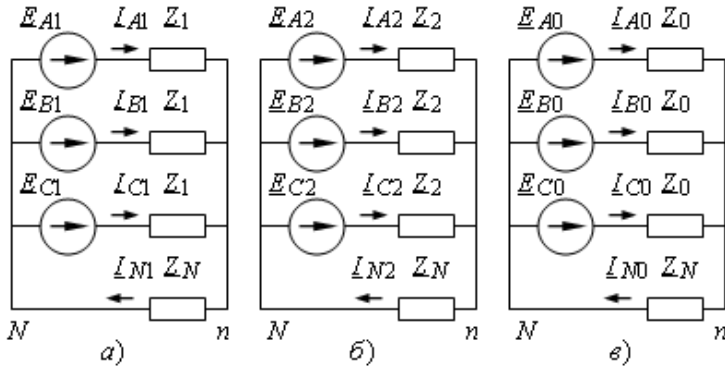


Рис. 5.45

Виконаємо розрахунок струмів для кожної симетричної складової ЕРС.

Тому що для кожної із симетричних складових трифазне коло є повністю симетричним, то при розрахунку зручніше перейти до однофазних схем заміщення й розрахунок вести для однієї фази яку називають основною (найчастіше за основну фазу приймають фазу А).

У симетричному режимі для прямої й зворотної послідовностей струм у нейтральному проводі дорівнює нулю й, отже, напруга  $\underline{U}_{nN1} = \underline{U}_{nN2} = 0$ . Тому опір у нейтральному проводі не впливає на симетричні фазні струми цих послідовностей і не повинен враховуватися в схемах заміщення цих послідовностей. Для розрахунку струмів основної фази досить розглянути наступні схеми заміщення (рис. 5.46, а, б). Для нульової послідовності потенціали початків лінійних проводів дорівнюють між собою (тому що  $\underline{E}_{0A} = \underline{E}_{0B} = \underline{E}_{0C} = \underline{E}_0$ ). Тому їх можна об'єднати в один спільний вузол. З урахуванням того, що комплексні опори навантаження однакові  $\underline{Z}_a = \underline{Z}_b = \underline{Z}_c = \underline{Z}_l$  одержимо еквівалентну схему заміщення яка представлена на рис. 5.46, в.

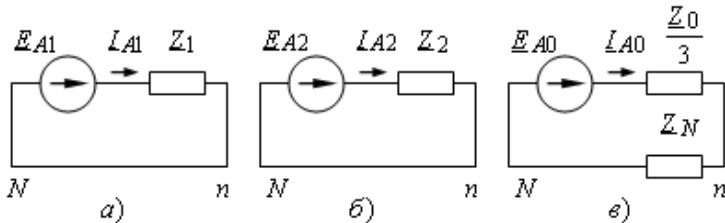


Рис.5.46

Для кожної зі схем заміщення, використовуючи закон Ома, визначасмо струми

$$\underline{I}_{A1} = \frac{\underline{E}_{A1}}{\underline{Z}_1}; \quad \underline{I}_{A2} = \frac{\underline{E}_{A2}}{\underline{Z}_2}; \quad \underline{I}_{N0} = \frac{3\underline{E}_0}{\underline{Z}_0 + 3\underline{Z}_N}. \quad (5.102)$$

Струми нульової послідовності у всіх фазах однакові й замикаються через нульовий провід

$$\underline{I}_{N0} = \underline{I}_{A0} + \underline{I}_{B0} + \underline{I}_{C0} = 3\underline{I}_{A0}. \quad (5.103)$$

Звідси складова нульової послідовності

$$\underline{I}_{A0} = \frac{\underline{E}_0}{\underline{Z}_0 + 3\underline{Z}_N}. \quad (5.104)$$

За знайденими симетричними складовими струмів визначасмо фактичні лінійні струми у вихідному трифазному колі:

$$\begin{aligned} \underline{I}_A &= \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_0 = \underline{I}_{A1} = \frac{\underline{E}_{A1}}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{E}_{A2}}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{E}_0}{\underline{Z}_0 + 3\underline{Z}_N}; \\ \underline{I}_B &= a^2 \cdot \underline{I}_1 + a \cdot \underline{I}_2 + \underline{I}_0 = \frac{a^2 \cdot \underline{E}_{A1}}{\underline{Z}_1} + \frac{a \cdot \underline{E}_{A2}}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{E}_0}{\underline{Z}_0 + 3\underline{Z}_N}; \\ \underline{I}_C &= a \cdot \underline{I}_1 + a^2 \cdot \underline{I}_2 + \underline{I}_0 = \frac{a \cdot \underline{E}_{A1}}{\underline{Z}_1} + \frac{a^2 \cdot \underline{E}_{A2}}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{E}_0}{\underline{Z}_0 + 3\underline{Z}_N}. \end{aligned} \quad (5.105)$$

Фактичний струм у нейтральному проводі не містить складових прямої і зворотної послідовностей. Тому

$$\underline{I}_N = \underline{I}_{N0} = \frac{3\underline{E}_0}{\underline{Z}_0 + 3\underline{Z}_N}. \quad (5.106)$$

Комплексні опори фаз статичних трифазних приймачів (освітлювальна навантаження, нагрівальні прилади та інше) не залежать від виду послідовності напруги живлення, для таких приймачів опори різних послідовностей однакові  $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_0$ . Розрахунок струмів таких приймачів простіше виконати звичайними методами. Для трифазних приймачів, для яких опори фаз для струмів різних послідовностей істотно відрізняються (у першу чергу, для обертових електричних машин), розрахунок струмів при несиметричній нарузі повинен виконуватися винятково методом симетричних складових.

### 5.19.3 Застосування методу симетричних складових для несиметричних кіл із симетричною системою ЕРС генератора

Більшість потужних електричних кіл працює в симетричних режимах. Різка несиметрія в симетричних трифазних колах носить аварійний характер і виникає, як правило, у якому-небудь одному перетині.

Використовуючи теорему компенсації несиметричну пасивну ділянку кола замінюють системою трьох несиметричних струмів і трьох напруг. Потім ці струми й напруги представляють у вигляді суми трьох поки невідомих симетричних струмів і трьох напруг. Таким чином, загальна кількість невідомих на першому етапі дорівнює шести.

Три розрахункові рівняння отримують на підставі схем на одну фазу, що складені для кожної із трьох послідовностей. Інші три рівняння записують на підставі конкретних співвідношень між струмами й напругами, що створилися в місці несиметрії.

Розрізняють два види несиметрії: поперечна несиметрія й поздовжня.

*Поперечна несиметрія* обумовлена відмінністю опорів, що вмикнені між фазами і нейтраллю (землею) або між окремими фазами. Така ситуація виникає, коли має місце несиметричне коротке замикання або до кола підмикнене несиметричне навантаження. Схема ділянки трифазного кола для загального випадку поперечної несиметрії представлена на рис. 5.47

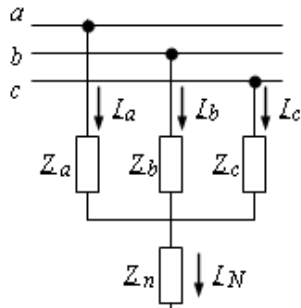


Рис. 5.47

Поперечна несиметрія в загальному випадку (рис. 5.47) характеризується наступними рівняннями

$$\begin{cases} \underline{U}_a = \underline{Z}_a \underline{I}_a + 3\underline{Z}_n \underline{I}_0; \\ \underline{U}_b = \underline{Z}_b \underline{I}_b + 3\underline{Z}_n \underline{I}_0; \\ \underline{U}_c = \underline{Z}_c \underline{I}_c + 3\underline{Z}_n \underline{I}_0. \end{cases} \quad (5.107)$$

У деяких окремих випадках додаткові рівняння мають вигляд:  
- при двофазному замиканні (наприклад, між фазами А й В)

$$\begin{cases} \underline{U}_a - \underline{U}_b = 0; \\ \underline{I}_a + \underline{I}_b = 0; \\ \underline{I}_c = 0, \end{cases} \quad (5.108)$$

- при двофазному замиканні на землю (наприклад, фази  $A$  і  $B$ )

$$\begin{cases} \underline{U}_a = 0; \\ \underline{U}_b = 0; \\ \underline{I}_c = 0. \end{cases} \quad (5.109)$$

- при однофазному замиканні на землю (наприклад, фази  $A$ )

$$\begin{cases} \underline{U}_a = 0; \\ \underline{I}_b = 0; \\ \underline{I}_c = 0, \end{cases} \quad (5.110)$$

Розрахунок струмів коротких замикань у різних точках енергосистем є важливою інженерною задачею. Як приклад розглянемо визначення струмів для випадку що найбільш часто зустрічається - однофазного короткого замикання на землю.

*Приклад 5.14.* Трифазний двигун з обмотками, які з'єднані зіркою отримує живлення трипровідною лінією передач з лінійною напругою 380 В. У схемі виникає аварійний режим (однофазне коротке замикання фази  $A$  на землю). Схема заміщення кола представлена на рис. 5.48. Опори елементів для різних послідовностей: генератора  $Z_{G1} = j3 \text{ Ом}$ ,  $Z_{G2} = j2 \text{ Ом}$ ,  $Z_{G0} = j0,5 \text{ Ом}$ , лінійних проводів  $Z_{L1} = Z_{L2} = 0,2 + j0,5 \text{ Ом}$ ,  $Z_{L0} = 0,5 + j1 \text{ Ом}$ , двигуна  $Z_1 = 5 + j8 \text{ Ом}$ ,  $Z_2 = 2 + j3 \text{ Ом}$ , опір заземлення нейтралі генератора  $Z_N = 2 \text{ Ом}$ . Необхідно розрахувати струм короткого замикання у місці пошкодження й фазні струми двигуна.

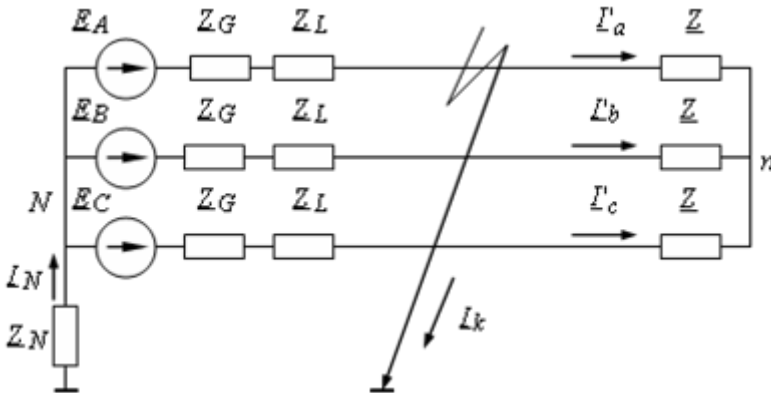


Рис. 5.48

Розв'язання. Фазна ЕРС генератора  $E_\phi = \frac{U_\lambda}{\sqrt{3}} = \frac{380}{\sqrt{3}} = 220 \text{ В}$ .

Відповідно до теореми компенсації подумки замінимо несиметричну ділянку в точці короткого замикання додатковим несиметричним трифазним генератором з фазними ЕРС  $\underline{E}_a, \underline{E}_b, \underline{E}_c$  (рис 5.49).

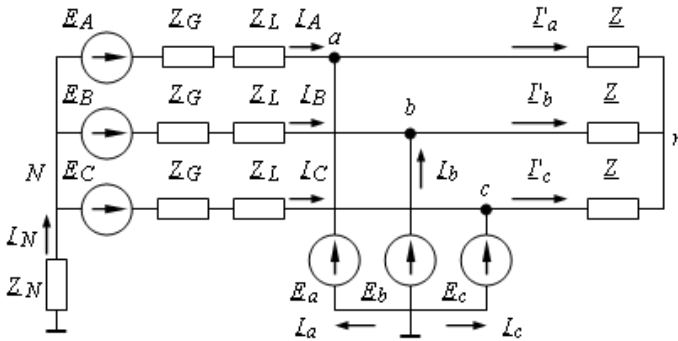


Рис. 5.49

Несиметричну систему фазних ЕРС  $\underline{E}_a, \underline{E}_b, \underline{E}_c$  розкладемо на симетричні складові  $\underline{E}_{a1}, \underline{E}_{a2}, \underline{E}_{a0}$ . Для кожної із симетричних складових схема кола цілком симетрична й, отже, може бути розрахована в однофазному вигляді. Складаємо однофазні схеми заміщення для кожної послідовності.

Однофазна схема прямої послідовності, що містить ЕРС генератора  $\underline{E}_A$ , ЕРС додаткового генератора прямої послідовності  $\underline{E}_{a1}$ , опори прямої послідовності генератора  $Z_{G1}$ , лінійного провуду  $Z_{L1}$  й двигуна  $Z_1$ , представлена на рис. 5.50, а. Однофазна схема зворотної послідовності, що не містить ЕРС генератора, але містить ЕРС додаткового генератора зворотної послідовності  $\underline{E}_{a2}$ , опори зворотної послідовності генератора  $Z_{G2}$ , лінійного провуду  $Z_{L2}$  й двигуна  $Z_2$ , представлена на рис. 5.50, б.

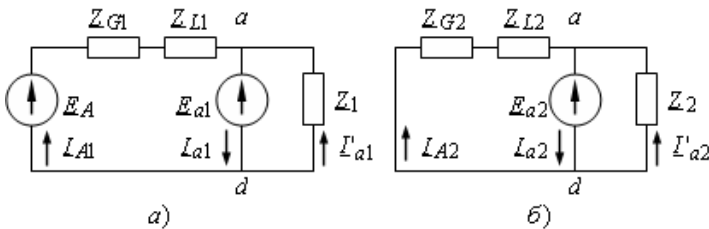


Рис. 5.50

Однофазна схема нульової послідовності, що не містить ЕРС генератора, але містить ЕРС додаткового генератора нульової послідовності  $E_{a0}$ , опори нульової послідовності генератора  $Z_{G0}$ , лінійного проводу  $Z_{L0}$  й двигуна  $Z_0$  й потроєний опір заземлення нейтралі генератора  $3Z_N$ , представлена на рис. 5.51.

В однофазну схему заміщення нульової послідовності вводимо потроєний опір нейтралі генератора  $3Z_N$ , тому що спад напруги на  $Z_N$  дорівнює  $3Z_N I_{A0}$ , де  $I_{A0}$  - струм у кожній із трьох фаз генератора. Двигун у схемі заміщення нульової послідовності не враховуємо, тому що його нейтральна точка не заземлена і струми нульової послідовності через нього не протікають.

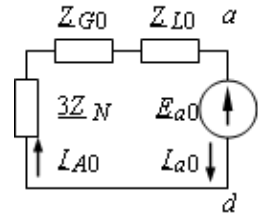


Рис. 5.51

У відповідності з теоремою об еквівалентному генераторі виконаємо згортку розрахункових схем для кожної з симетричних складових відносно затискачів несиметричної ділянки  $ad$  (рис. 5.50-5.51). За результатами згортки отримаємо найпростіші одноконтурні схеми заміщення (рис. 5.52,  $a$ ,  $b$ ,  $в$ ).

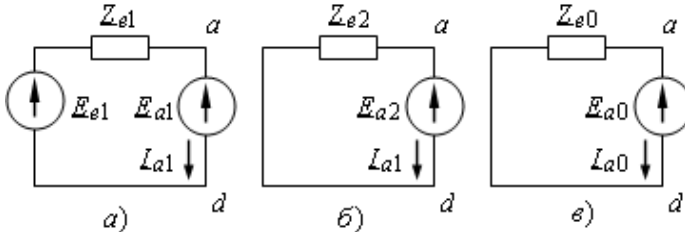


Рис. 5.52

Еквівалентна ЕРС генератора й еквівалентні опори кола щодо затискачів несиметричної ділянки  $ad$

$$\begin{aligned}
 E_{e1} &= \frac{E_A \cdot Z_1}{Z_{G1} + Z_{L1} + Z_1} = \frac{220 \cdot (5 + j8)}{j3 + 0,2 + j0,5 + 5 + j8} = \\
 &= 162,0 - j22,0 = 164,4 e^{-j8^\circ} \text{ В}; \\
 Z_{e1} &= \frac{(Z_{G1} + Z_{L1}) \cdot Z_1}{Z_{G1} + Z_{L1} + Z_1} = \frac{(j3 + 0,2 + j0,5)(5 + j8)}{j3 + 0,2 + j0,5 + 5 + j8} = \\
 &= 0,498 + j2,573 = 2,620 e^{j79^\circ} \text{ Ом};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{e2} &= \frac{(\underline{Z}_{G2} + \underline{Z}_{L2}) \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_{G2} + \underline{Z}_{L2} + \underline{Z}_2} = \frac{(j2 + 0,2 + j0,5)(2 + j3)}{j2 + 0,2 + j0,5 + 2 + j3} = \\ &= 0,433 + j1,464 = 1,527e^{j74^\circ} \text{ Ом}; \\ \underline{Z}_{e0} &= \underline{Z}_{G0} + \underline{Z}_{L0} + 3\underline{Z}_N = j1 + 0,5 + j1 + 3 \cdot 2 = \\ &= 6,5 + j2 = 3,202e^{j37^\circ} \text{ Ом}. \end{aligned}$$

Для кожної розрахункової схеми (рис. 5.51, а, б, в) складаємо рівняння за другим законом Кірхгофа.

$$\begin{cases} \underline{Z}_{e1} I_{a1} = \underline{E}_{e1} - \underline{E}_{a1}; \\ \underline{Z}_{e2} I_{a2} = -\underline{E}_{a2}; \\ \underline{Z}_{e0} I_{a0} = -\underline{E}_{a1}. \end{cases}$$

Отримана система рівнянь містить 6 невідомих величин ( $I_{a1}$ ,  $I_{a2}$ ,  $I_{a0}$ ,  $\underline{E}_{a1}$ ,  $\underline{E}_{a2}$ ,  $\underline{E}_{a0}$ ) і її безпосереднє розв'язання неможливо. Тому систему рівнянь, що складена за законами Кірхгофа, необхідно доповнити трьома додатковими рівняннями, які випливають із виду короткого замикання. Ці рівняння, які характеризують вид несиметрії, називають *граничними умовами*. За умовою у фазі А відбулося коротке замикання, тому в точці замикання напруга фази А дорівнює нулю ( $\underline{U}_a = 0$ ), також дорівнюють нулю струми короткого замикання неушкоджених фаз В й С ( $I_b = I_c = 0$ ). Додаткові рівняння мають вигляд

$$\begin{cases} \underline{U}_a = \underline{E}_{a1} + \underline{E}_{a2} + \underline{E}_{a0} = 0; \\ I_b = a^2 I_{a1} + a I_{a2} + I_{a0} = 0; \\ I_c = a I_{a1} + a^2 I_{a2} + I_{a0} = 0. \end{cases}$$

У результаті спільного розв'язання системи шести незалежних рівнянь із шістьма невідомими, одержимо

$$\begin{aligned} I_{a1} = I_{a2} = I_{a0} &= \frac{\underline{E}_{e1}}{\underline{Z}_{e1} + \underline{Z}_{e2} + \underline{Z}_{e0}} = \\ &= \frac{162,0 - j22,0}{0,498 + j2,573 + 0,433 + j1,464 + 2,5 + j2} = \\ &= 11,68 - j12,45 = 17,08e^{-j47^\circ} \text{ А}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{E}_{a1} &= \frac{\underline{E}_{e1}(\underline{Z}_{e2} + \underline{Z}_{e0})}{\underline{Z}_{e1} + \underline{Z}_{e2} + \underline{Z}_{e0}} = \\
 &= \frac{(162,0 - j22,0)(0,433 + j1,464 + 2,5 + j2)}{0,498 + j2,573 + 0,433 + j1,464 + 2,5 + j2} = \\
 &= 77,38 + j3,94 = 77,48e^{j3^\circ} \text{ В}; \\
 \underline{E}_{a2} &= -\frac{\underline{E}_{e1}\underline{Z}_{e2}}{\underline{Z}_{e1} + \underline{Z}_{e2} + \underline{Z}_{e0}} = \\
 &= -\frac{(162,0 - j22,0)(0,433 + j1,464)}{0,498 + j2,573 + 0,433 + j1,464 + 2,5 + j2} = \\
 &= -23,28 - j11,71 = 26,06e^{-j153^\circ} \text{ В}; \\
 \underline{E}_{a0} &= -\frac{\underline{E}_{e1}\underline{Z}_{e0}}{\underline{Z}_{e1} + \underline{Z}_{e2} + \underline{Z}_{e0}} = \\
 &= -\frac{(162,0 - j22,0)(2,5 + j2)}{0,498 + j2,573 + 0,433 + j1,464 + 2,5 + j2} = \\
 &= -54,10 + j7,77 = 54,65e^{j172^\circ} \text{ В}.
 \end{aligned}$$

Обчисливши симетричні складові, розрахуємо струм короткого замикання

$$\begin{aligned}
 \underline{I}_k = \underline{I}_a = \underline{I}_{a1} + \underline{I}_{a2} + \underline{I}_{a0} &= 3\underline{I}_{a1} = \frac{3\underline{E}_{e1}}{\underline{Z}_{e1} + \underline{Z}_{e2} + \underline{Z}_{e0}} = \\
 &= \frac{3 \cdot (162,0 - j22,0)}{0,498 + j2,573 + 0,433 + j1,464 + 2,5 + j2} = \\
 &= 35,05 - j37,36 = 51,23e^{-j47^\circ} \text{ А}
 \end{aligned}$$

і фазні струми двигуна

$$\begin{aligned}
 \underline{I}'_a = \underline{I}'_{a1} + \underline{I}'_{a2} &= \frac{\underline{E}_{a1}}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{E}_{a2}}{\underline{Z}_2} = \\
 &= \frac{77,38 + j3,94}{5 + j8} + \frac{-23,28 - j11,71}{2 + j3} = \\
 &= -1,583 - j3,163 = 3,537e^{-j117^\circ} \text{ А};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{I}'_b &= a^2 \underline{I}'_{a1} + a \underline{I}'_{a2} = a^2 \frac{\underline{E}_{a1}}{\underline{Z}_1} + a \frac{\underline{E}_{a2}}{\underline{Z}_2} = \\
 &= e^{-j120^\circ} \cdot \frac{77,38 + j3,94}{5 + j8} + e^{j120^\circ} \cdot \frac{-23,28 - j11,71}{2 + j3} = \\
 &= -8,132 - j7,931 = 11,359 e^{-j136^\circ} \text{ A}; \\
 \underline{I}'_c &= a \underline{I}'_{a1} + a^2 \underline{I}'_{a2} = a \frac{\underline{E}_{a1}}{\underline{Z}_1} + a^2 \frac{\underline{E}_{a2}}{\underline{Z}_2} = \\
 &= e^{j120^\circ} \cdot \frac{77,38 + j3,94}{5 + j8} + e^{-j120^\circ} \cdot \frac{-23,28 - j11,71}{2 + j3} = \\
 &= 9,715 + j11,094 = 14,746 e^{j49^\circ} \text{ A}.
 \end{aligned}$$

Методика, що розглянута в прикладі 5.14, може бути використана при розрахунку трифазних кіл для будь-якого випадку поперечної несиметрії.

*Поздовжня несиметрія* в трифазному колі виникає в тих випадках, коли в розсіч фаз вмикаються неоднакові опори. Така ситуація виникає, наприклад, коли має місце розрива одного з лінійних проводів. Схема ділянки трифазного кола для загального випадку поздовжньої несиметрії представлена на рис. 5.53.

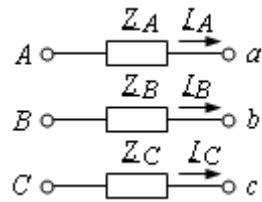


Рис.5.53

Поздовжня несиметрія в загальному випадку (рис. 5.53) характеризується наступними додатковими рівняннями

$$\begin{cases} \underline{U}_{Aa} = \underline{Z}_A \underline{I}_A; \\ \underline{U}_{Bb} = \underline{Z}_B \underline{I}_B; \\ \underline{U}_{Cc} = \underline{Z}_C \underline{I}_C. \end{cases} \quad (5.111)$$

Для деяких окремих випадків поздовжньої несиметрії, схеми заміщення яких представлені на рис. 5.54 додаткові рівняння мають вигляд:

- для схеми, що представлена на рис. 5.54, а

$$\begin{cases} \underline{I}_A = 0; \\ \underline{U}_{Bb} = 0; \\ \underline{U}_{Cc} = 0; \end{cases} \quad (5.112)$$

- для схеми, що представлена на рис. 5.54, б

$$\begin{cases} U_{Aa} = Z_A I_A; \\ U_{Bb} = 0; \\ U_{Cc} = 0; \end{cases} \quad (5.113)$$

- для схеми, що представлена на рис. 5.54, в

$$\begin{cases} U_{Aa} = 0; \\ U_{Bb} = Z_B I_B; \\ U_{Cc} = Z_C I_C. \end{cases} \quad (5.114)$$

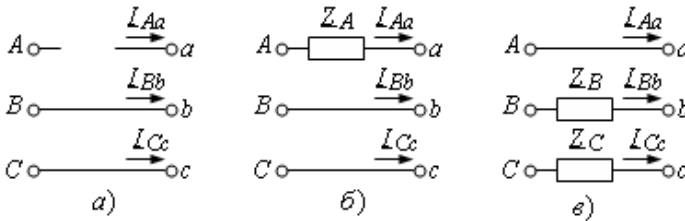


Рис. 5.54

*Приклад 5.15.* Трифазний двигун з обмотками, які з'єднані зіркою, одержує живлення трипровідною лінією передач з лінійною напругою 380 В. У схемі виникає аварійний режим (розрив у фазі А). Схема заміщення електричного кола представлена на рис. 5.55. Опори елементів кола для різних послідовностей: генератора  $Z_{G1} = j3 \text{ Ом}$ ,  $Z_{G2} = j2 \text{ Ом}$ , лінійних проводів  $Z_{L1} = Z_{L2} = 0,2 + j0,5 \text{ Ом}$ , двигуна  $Z_1 = 5 + j8 \text{ Ом}$ ,  $Z_2 = 2 + j3 \text{ Ом}$ . Двигун продовжує обертатися, одержуючи живлення двома фазами, що залишилися неушкодженими. Визначити фазні струми й напруги двигуна, напругу між нейтральними точками генератора й двигуна.

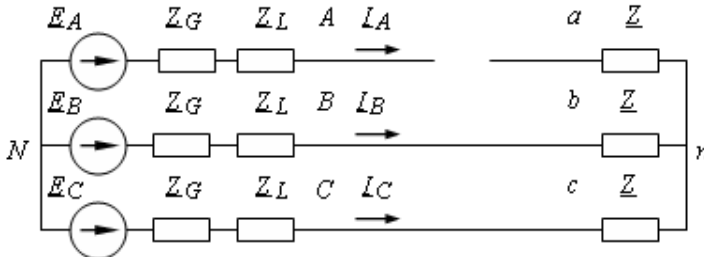


Рис. 5.55

*Розв'язання.* Відповідно до теореми компенсації подумки замінимо несиметричну ділянку в точці короткого замикання додатковим несиметричним трифазним генератором з фазними ЕРС  $\underline{E}'_A, \underline{E}'_B, \underline{E}'_C$  (рис 5.56).

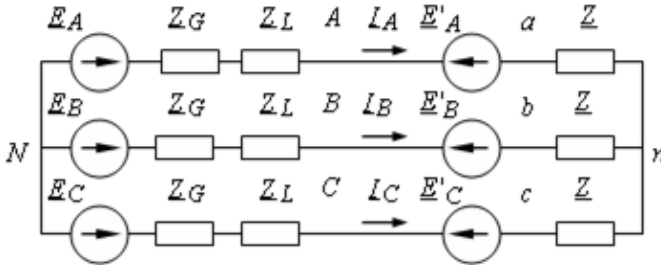


Рис. 5.56

Несиметричну систему фазних ЕРС  $\underline{E}'_A, \underline{E}'_B, \underline{E}'_C$  розкладемо на симетричні складові  $\underline{E}'_{A1}, \underline{E}'_{A2}, \underline{E}'_{A0}$ . Для кожної із симетричних складових схема кола цілком симетрична й, отже, може бути розрахована в однофазному виді. Складаємо однофазні схеми заміщення для кожної послідовності.

Однофазна схема прямої послідовності, що містить ЕРС генератора  $\underline{E}_A$ , ЕРС додаткового генератора прямої послідовності  $\underline{E}'_{A1}$ , опори прямої послідовності генератора  $\underline{Z}_{G1}$ , лінійного проводу  $\underline{Z}_{L1}$  й двигуна  $\underline{Z}_1$ , представлена на рис. 5.57, а. Однофазна схема зворотної послідовності, що не містить ЕРС генератора, але містить ЕРС додаткового генератора зворотної послідовності  $\underline{E}'_{A2}$ , опори зворотної послідовності генератора  $\underline{Z}_{G2}$ , лінійного проводу  $\underline{Z}_{L2}$  й двигуна  $\underline{Z}_2$ , представлена на рис. 5.57, б. Однофазну схему нульової послідовності не розглядаємо, тому що нейтральний провід і з'єднання із землею відсутні, а, отже, відсутні струми нульової послідовності  $I_0 = 0$ .

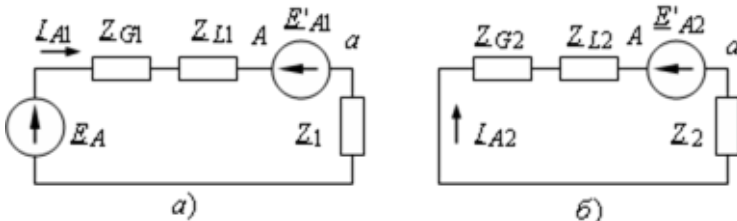


Рис. 5.57

Еквівалентні опори кола щодо затискачів несиметричної ділянки  $Aa$

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{e1} &= \underline{Z}_{G1} + \underline{Z}_{L1} + \underline{Z} = j3 + 0,2 + j0,5 + 5 + j8 = \\ &= 5,2 + j11,5 = 12,62e^{j66^\circ} \text{ Ом};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{e2} &= \underline{Z}_{G2} + \underline{Z}_{L2} + \underline{Z}_2 = j2 + 0,2 + j0,5 + 2 + j3 = \\ &= 2,2 + j5,5 = 5,92e^{j68^\circ} \text{ Ом}.\end{aligned}$$

Для кожної розрахункової схеми (рис. 5.57, *a, б*) складаємо рівняння за другим законом Кірхгофа, струм нульової послідовності дорівнює нулю (то нейтральний провід відсутній)

$$\begin{cases} \underline{Z}_{e1} I_{A1} = \underline{E}_{e1} - \underline{E}'_{A1}; \\ \underline{Z}_{e2} I_{A2} = -\underline{E}'_{A2}; \\ I_{A0} = 0. \end{cases}$$

Отримана система рівнянь містить 4 невідомі величини ( $I_{A1}$ ,  $I_{A2}$ ,  $\underline{E}'_{A1}$ ,  $\underline{E}'_{A2}$ ) і її безпосереднє розв'язання неможливо. Тому систему рівнянь, що складена за законами Кірхгофа, необхідно доповнити додатковими рівняннями, які випливають із виду поздовжньої несиметрії. За умовою відбулася розрива у фазі  $A$ , тому в точці розриву струм фази  $A$  дорівнює нулю ( $I_A = 0$ ), також дорівнюють нулю напруги на неушкоджених ділянках фаз  $B$  й  $C$  ( $\underline{U}_{Bb} = \underline{U}_{Cc} = 0$ ). Додаткові рівняння мають вигляд

$$\begin{aligned}I_A &= I_{A1} + I_{A2} + I_{A0} = 0; \\ \underline{U}_{Bb} &= a^2 \underline{E}'_{A1} + a \underline{E}'_{A2} + \underline{E}'_{A0} = 0; \\ \underline{U}_{Cc} &= a \underline{E}'_{A1} + a^2 \underline{E}'_{A2} + \underline{E}'_{A0} = 0.\end{aligned}$$

У результаті спільного розв'язання системи шести незалежних рівнянь із шістьма змінними, одержимо

$$\begin{aligned}\underline{E}'_{A1} = \underline{E}'_{A2} = \underline{E}'_{A0} &= -\frac{\underline{E}_A \underline{Z}_{e2}}{\underline{Z}_{e1} + \underline{Z}_{e2}} = -\frac{220(2,2 + j5,5)}{5,2 + j11,5 + 2,2 + j5,5} = \\ &= -70,26 - j2,11 = 70,29e^{-j178^\circ} \text{ В}; \\ I_{A1} &= \frac{\underline{E}_A}{\underline{Z}_{e1} + \underline{Z}_{e2}} = \frac{220}{5,2 + j11,5 + 2,2 + j5,5} = \\ &= 4,74 - j10,88 = 11,87e^{-j66^\circ} \text{ А};\end{aligned}$$

$$I_{A2} = -I_{A1} = -4,74 + j10,88 = 11,87e^{j114^\circ} \text{ A};$$

$$I_{A0} = 0 \text{ A.}$$

Фазні струми двигуна

$$I_a = 0 \text{ A};$$

$$I_b = a^2 I_{A1} + a I_{A2} = e^{-j120^\circ} (4,74 - j10,88) + \\ + e^{j120^\circ} (-4,74 + j10,88) = -11,84 - j8,21 = 20,55e^{-j156^\circ} \text{ A};$$

$$I_c = a I_{A1} + a^2 I_{A2} = e^{j120^\circ} (4,74 - j10,88) + \\ + e^{-j120^\circ} (-4,74 + j10,88) = 18,84 + j8,21 = 20,55e^{j34^\circ} \text{ A.}$$

Фазні напруги двигуна

$$\underline{U}_{an} = 0 \text{ A};$$

$$\underline{U}_{bn} = a^2 I_{A1} Z_1 + a I_{A2} Z_2 = e^{-j120^\circ} (4,74 - j10,88)(5 + j8) + \\ + e^{j120^\circ} (-4,74 + j10,88)(2 + j3) = \\ = -55,11 - j127,91 = 137,27e^{-j113^\circ} \text{ B};$$

$$\underline{U}_{cn} = a I_{A1} Z_1 + a^2 I_{A2} Z_2 = e^{j120^\circ} (4,74 - j10,88)(5 + j8) + \\ + e^{-j120^\circ} (-4,74 + j10,88)(2 + j3) = \\ = -13,51 + j136,85 = 137,51e^{j96^\circ} \text{ B.}$$

Напруга між нейтральними точками генератора й двигуна (напруга зсуву нейтралі) обумовлюється лише ЕРС нульової послідовності, оскільки струм нульової послідовності через відсутність нейтрального проводу дорівнює нулю, а для прямої та зворотної послідовностей режим роботи є симетричним

$$\underline{U}_{nN} = \underline{E}'_{A0} = -70,26 - j2,11 = 70,29e^{-j178^\circ} \text{ B.}$$

Методика, що розглянута в прикладі 5.15, може бути використана при розрахунку трифазних кіл для будь-якого випадку поздовжньої несиметрії.

## 5.20 Вираження потужності трифазного кола через симетричні складові

Відповідно до виразу (5.55) комплексна повна потужність трифазного кола

$$\underline{S} = \underline{U}_A \underline{I}_A^* + \underline{U}_B \underline{I}_B^* + \underline{U}_C \underline{I}_C^*. \quad (5.115)$$

Фазні напруги і струми виражені через симетричні складові

$$\begin{aligned} \underline{U}_A &= \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_0; \\ \underline{U}_B &= a^2 \underline{U}_1 + a \underline{U}_2 + \underline{U}_0; \\ \underline{U}_C &= a \underline{U}_1 + a^2 \underline{U}_2 + \underline{U}_0; \\ \underline{I}_A &= \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_0; \\ \underline{I}_B &= a^2 \underline{I}_1 + a \underline{I}_2 + \underline{I}_0; \\ \underline{I}_C &= a \underline{I}_1 + a^2 \underline{I}_2 + \underline{I}_0. \end{aligned} \quad (5.116)$$

Множники  $a$  і  $a^2$  є взаємоспряженими комплексними числами

$$\begin{aligned} (a)^* &= (e^{j120^\circ})^* = e^{-j120^\circ} = a^2; \\ (a^2)^* &= (e^{-j120^\circ})^* = e^{j120^\circ} = a. \end{aligned} \quad (5.117)$$

Виражаючи спряжені комплексні значення фазних струмів через симетричні складові, маємо

$$\begin{aligned} \underline{I}_A^* &= \underline{I}_1^* + \underline{I}_2^* + \underline{I}_0^*; \\ \underline{I}_B^* &= a \underline{I}_1^* + a^2 \underline{I}_2^* + \underline{I}_0^*; \\ \underline{I}_C^* &= a^2 \underline{I}_1^* + a \underline{I}_2^* + \underline{I}_0^*. \end{aligned} \quad (5.118)$$

Підставивши (5.117) і (5.118) в (5.115) і зробивши відповідні перетворення, одержимо

$$\underline{S} = 3(\underline{U}_1 \underline{I}_1^* + \underline{U}_2 \underline{I}_2^* + \underline{U}_0 \underline{I}_0^*). \quad (5.119)$$

Відповідно, активна потужність трифазного кола

$$P = 3(U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + U_0 I_0 \cos \varphi_0) \quad (5.120)$$

і реактивна потужність трифазного кола

$$Q = 3(U_1 I_1 \sin \varphi_1 + U_2 I_2 \sin \varphi_2 + U_0 I_0 \sin \varphi_0), \quad (5.121)$$

де  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_0$  - кути фазового зсуву між відповідними симетричними складовими напруг і струмів.

### 5.21 Фільтри симетричних складових

Фільтрами симетричних складових називають технічні пристрої, які призначені для виділення відповідних складових з несиметричної трифазної системи струмів або напруг.

На практиці напруги й струми, які виділені фільтрами симетричних складових, використовують як вхідні величини для пристроїв релейного захисту енергетичних установок (генераторів, трансформаторів, ліній електропередач) від несиметричних режимів або сигналізації про виникнення несиметричних режимів.

Найбільш простим фільтром симетричних складових є фільтр напруг нульової послідовності, схема якого представлена на рис. 5.58. Його виконують із трьох однакових трансформаторів, первинні обмотки яких вмикнені на фазні напруги  $\underline{U}_A, \underline{U}_B, \underline{U}_C$  за схемою зірка з виведеною нейтральною точкою, а вторинні обмотки з'єднані за схемою розімкнутий трикутник.

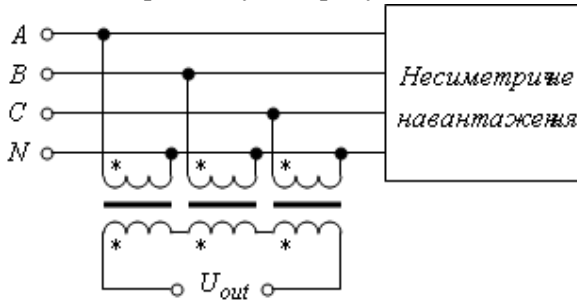


Рис. 5.58

Якщо коефіцієнти трансформації трансформаторів  $k = \frac{U_1}{U_2}$ , то комплексне діюче значення напруги на виході фільтра

$$\underline{U}_{out} = \frac{1}{k}(\underline{U}_A + \underline{U}_B + \underline{U}_C) \quad (5.122)$$

або, з урахуванням співвідношення  $\underline{U}_0 = \frac{1}{3}(\underline{U}_A + \underline{U}_B + \underline{U}_C)$ , маємо

$$\underline{U}_{out} = \frac{3}{k}\underline{U}_0 = k_{\phi U0}\underline{U}_0, \quad (5.123)$$

де  $k_{\phi U0} = \frac{3}{k}$  - коефіцієнт фільтра напруги нульової послідовності.

На рис. 5.59 представлено фільтр струмів нульової послідовності, в якому підсумовуються магнітні потоки, що створюються лінійними струмами. Реєструвальний прилад підмикають до затискачів обмотки, що намотана на магнітопровід, який охоплює три лінійні проводи. Комплексне діюче значення струму на виході фільтра

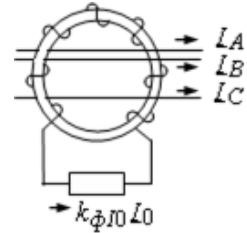


Рис. 5.59

$$I_{out} = k_{\phi} U_0 I_0, \quad (5.124)$$

де  $k_{\phi I_0}$  - коефіцієнт фільтра струмів нульової послідовності.

У фільтрах прямої й зворотної послідовностей підсумуються напруги, які перебувають у певних співвідношеннях з напругами на вхідних затискачах фільтрів. З метою усунення впливу напруг нульової послідовності фільтри напруг прямої і зворотної послідовностей підмикають звичайно на лінійні напруги.

Системи симетричних складових прямої й зворотної послідовностей відрізняються тільки порядком проходження фаз у часі через амплітудні значення.

Тому кожний з фільтрів напруги прямої або зворотної послідовності при зміні підмикання будь-яких двох фаз перетворюється в аналогічний фільтр напруги іншої послідовності.

На рис. 5.60 представлена одна з можливих схем фільтра напруг зворотної послідовності. Параметри фільтра вибирають таким чином, щоб виконувалися наступні співвідношення:  $R_1 = R_2$  і  $R_3 = \sqrt{3} X_C$ .

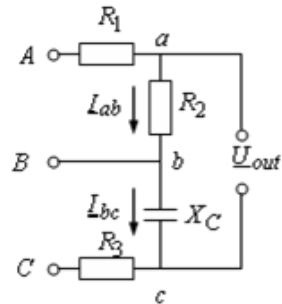


Рис.5.60

Напруга на виході такого фільтра

$$U_{out} = k_{\phi} U_2 U_2, \quad (5.125)$$

де  $k_{\phi U_2} = \frac{3}{2}$  - коефіцієнт фільтра напруги зворотної послідовності.

*Приклад 5.16.* Фільтр зворотної послідовності, схема якого представлена на рис. 5.60, підмикнений до трифазного кола. Параметри елементів фільтра задовольняють умовам  $R_1 = R_2$  і  $R_3 = \sqrt{3} X_C$ . Визначити коефіцієнт фільтра.

*Розв'язання.* Напряга на окремих ділянках фільтра з урахуванням заданих співвідношень між параметрами елементів

$$\begin{aligned}\underline{U}_{ab} &= I_{ab}R_2 = \frac{\underline{U}_{AB}}{R_1 + R_2} \cdot R_2 = \frac{\underline{U}_{AB}}{R_2 + R_2} \cdot R_2 = \frac{\underline{U}_{AB}}{2} . \\ \underline{U}_{bc} &= I_{bc}(-jX_C) = \frac{\underline{U}_{BC} \cdot (-jX_C)}{R_1 - jX_C} = \frac{\underline{U}_{BC} \cdot (-jX_C)}{\sqrt{3}X_C - jX_C} = \\ &= \frac{\underline{U}_{BC} \cdot X_C e^{-j90^\circ}}{2X_C e^{-j30^\circ}} = \frac{\underline{U}_{BC}}{2} e^{j60^\circ} .\end{aligned}$$

Напряга на виході фільтра

$$\underline{U}_{out} = \underline{U}_{ab} + \underline{U}_{bc} = \frac{\underline{U}_{AB} + \underline{U}_{BC} e^{j60^\circ}}{2} .$$

Фазна напряга зворотної послідовності

$$\underline{U}_2 = \frac{1}{3}(\underline{U}_A + a^2 \underline{U}_B + a \underline{U}_C) .$$

Перетворимо дану формулу шляхом додавання й віднімання члена  $a\underline{U}_B$

$$\begin{aligned}\underline{U}_2 &= \frac{1}{3}(\underline{U}_A + a^2 \underline{U}_B + a \underline{U}_B - a \underline{U}_B + a \underline{U}_C) = \\ &= \frac{1}{3}(\underline{U}_A + (a^2 + a)\underline{U}_B - a(\underline{U}_B - \underline{U}_C)) = \\ &= \frac{1}{3}(\underline{U}_A - \underline{U}_B + e^{j60^\circ} (\underline{U}_B - \underline{U}_C)) = \frac{\underline{U}_{AB} + \underline{U}_{BC} e^{j60^\circ}}{3} .\end{aligned}$$

Порівнюючи отриманий вираз для фазної напруги зворотної послідовності з виразом для напруги на виході фільтра, одержимо

$$\underline{U}_{out} = \frac{3}{2} \underline{U}_2 = k_{\phi U_2} \underline{U}_2 .$$

Такий чином коефіцієнт розглянутого фільтра напруги зворотної послідовності  $k_{\phi U_2} = \frac{3}{2}$ .

### *Питання для самоконтролю*

1. Дайте визначення трифазного кола й опишіть процес одержання трифазної системи ЕРС.
2. Які переваги мають трифазні кола для енергопостачання.
3. Як утворюються з'єднання обмоток трифазного генератора зірка й трикутник?
4. Що розуміють під фазою трифазного електричного кола?
5. Які напруги й струми називаються лінійними?
6. Які напруги й струми називаються фазними?
7. Як співвідносяться між собою лінійні й фазні напруги навантаження, що з'єднане за схемою зірка?
8. Як співвідносяться між собою і лінійні й фазні струми навантаження, що з'єднане за схемою зірка?
9. Як співвідносяться між собою і лінійні й фазні напруги навантаження, що з'єднане за схемою трикутник?
10. Як співвідносяться між собою лінійні й фазні струми навантаження, що з'єднане за схемою трикутник?
11. Дайте визначення симетричного, несиметричного, рівномірного й однорідного навантаження. Наведіть приклади.
12. Що таке порядок чергування фаз?
13. Як визначити порядок чергування фаз досвідченим шляхом?
14. Що таке симетрична система ЕРС (напруг, струмів)?
15. Що таке напруга зсуву нейтралі? Як її можна розрахувати теоретично?
16. Як розраховують фазні напруги при наявності напруги зсуву нейтралі?
17. Для чого в трифазному колі використовують нейтральний (нульовий) провід? Як теоретично можна знайти значення струму в нейтральному проводі?
18. При якій умові наявність або відсутність нейтрального проводу не впливає на режим роботи навантаження?
19. Чому перетин нейтрального проводу ліній електропередач менше перетину лінійного проводу?
20. До яких наслідків приводить коротке замикання однієї з фаз навантаження, що з'єднано за схемою зірка без нейтрального проводу при симетричному навантаженні?
21. До яких наслідків призводить коротке замикання однієї з фаз навантаження, що з'єднано за схемою зірка з нейтральним про-

водом при симетричному навантаженні?

22. До яких наслідків призводить розірва лінійного проводу електричного кола, що з'єднано за схемою зірка без нейтрального проводу?
23. До яких наслідків приводить розірва лінійного проводу електричного кола, що з'єднано за схемою трикутник при рівномірному навантаженні?
24. До яких наслідків приводить розірва фазного проводу навантаження, що з'єднано за схемою трикутник при рівномірному навантаженні?
25. У симетричному трипровідному електричному колі, що з'єднано за схемою зірка без нейтрального проводу, виникла розірва у лінійному проводі. Що покаже вольтметр, що підімкнений між нейтральними точками джерела й приймача?

*Відповідь:*  $0,5U_{\phi}$ .

26. Як визначити повну потужність кола при симетричному навантаженні?
27. У скільки разів повна потужність трифазного кола в прикладі 5.3 менше повної потужності трифазного кола в прикладі 5.1?  
*Відповідь:* в 2 рази.
28. У скільки разів повна потужність трифазного кола в прикладі 5.9 більше повної потужності трифазного кола в прикладі 5.10?  
*Відповідь:* в 1,5 рази.
29. Як визначається повна потужність кола при несиметричному навантаженні?
30. Яка умова виконується для активної й реактивної потужності трифазного електричного кола й не виконується для повної?
31. Якими величинами потрібно скористатися для обчислення потужності, щоб вирази не залежали від схеми з'єднання симетричного навантаження?

32. Як змінити напрямок обертання асинхронного двигуна?
33. Обмотки трифазного електродвигуна розраховані на роботу в номінальному режимі при напрузі  $U_{nom} = 380 \text{ В}$ . У колі з якими лінійними напругами цей двигун може працювати?

*Відповідь:* У трифазному колі з лінійною напругою  $U_{\Delta} = 380 \text{ В}$  при з'єднанні обмоток трикутником й у трифазному колі з лінійною напругою  $U_{\Delta} = 660 \text{ В}$  при з'єднанні обмоток зіркою.

34. Яке магнітне поле називають пульсуючим?
35. Яке магнітне поле називають обертовим круговим?
36. Які умови необхідні для створення кругового обертового магнітного поля?
37. Який принцип дії в асинхронного двигуна з короткозамкненим ротором?
38. Який принцип дії в синхронного двигуна?
39. Для чого несиметрична система векторів розкладається на симетричні складові?
40. Для яких трифазних кіл опори прямої та зворотної послідовностей є однаковими, а для яких різними?
41. У яких випадках відсутні складові нульової послідовності в лінійних струмах?
42. Для аналізу яких трифазних кіл можливо застосування метода симетричних складових?
43. Як при використанні методу симетричних складових урахується опір нейтрального проводу?
44. Трифазний генератор виробляє несиметричну систему фазних

$$\text{ЕРС } \underline{E}_A = 220e^{j0^\circ} \text{ В}; \quad \underline{E}_B = 220e^{-j90^\circ} \text{ В}; \quad \underline{E}_C = 220e^{j90^\circ} \text{ В}.$$

Потрібно обчислити симетричні складові ЕРС генератора прямої, зворотної та нульової послідовностей

$$\text{Відповідь: } \quad \underline{E}_{A1} = 200e^{j0^\circ} \text{ В}; \quad \underline{E}_{A2} = 53,3e^{j180^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{E}_{A0} = 73,3e^{j0^\circ} \text{ В}.$$

## Розділ шостий ПЕРІОДИЧНІ НЕСИНУСОЇДНІ СТРУМИ У ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ

### 6.1 Причини виникнення несинусоїдних струмів

У попередніх розділах розглядалися лінійні кола з незмінними параметрами при наявності в колі джерел постійних або синусоїдних ЕРС (струмів).

На практиці залежності ЕРС, напруг і струмів звичайно в більшому або меншому ступені відрізняються від постійних або синусоїдних. У загальному випадку залежності зміни цих величин від часу можуть бути періодичними, майже періодичними й неперіодичними.

*Періодичними несинусоїдними струмами (напругами)* називають струми й напруги, які змінюються в часі за періодичним несинусоїдним законом.

Періодичні несинусоїдні струми й напруги виникають у трьох різних режимах роботи електричних кіл (або при сполученні цих режимів):

- у випадку, коли джерело енергії генерує несинусоїдну ЕРС (несинусоїдний струм), а всі пасивні елементи кола - резистивні, індуктивні, ємнісні є лінійними, тобто не залежать від значення й напрямку струмів (напруг). Наприклад, у машинних генераторах змінного струму (синхронних генераторах) причинами спотворення форми кривої ЕРС є реакція якоря й несинусоїдний розподіл магнітної індукції в повітряному зазорі через наявність у якоря зубців і западин;

- у випадку, коли джерело енергії генерує синусоїдну ЕРС (синусоїдний струм), а один або кілька пасивних елементів кола є нелінійними. Наприклад, коли електричне коло містить у собі напівпровідниковий вентиль (діод), транзистор, електричну дугу, люмінесцентну лампа, котушку зі сталевим осердям або трансформатор з феромагнітним магнітопроводом (осердям);

- у випадку, коли джерело енергії генерує синусоїдну ЕРС (синусоїдний струм), а параметри одного або декількох пасивних елементів кола періодично змінюються в часі.

У даному розділі розглядаються лінійні електричні кола з періодичними струмами й напругами, форма яких відрізняється від гармонійної. Гармонійні (і постійні) струми й напруги, що вивчалися до цього часу, є лише окремим випадком загальних несинусоїдних процесів в електричних колах.

На практиці до несинусоїдності струмів (напруг) підхід двоякий.

З одного боку, у силевій енергетиці наявність несинусоїдних струмів призводить до додаткових втрат енергії, а в лініях зв'язку й каналах телемеханіки до створення великих перешкод. Особливо сильно несинусоїдність струмів впливає на роботу електричних машин, тому що призводить до зменшення обертового моменту і його пульсації на валу електродвигунів, підвищеного нагріву двигунів, генераторів і трансформаторів й, отже, до прискореного старіння ізоляції. Тому в таких колах необхідно підтримувати форму кривих струмів і напруг таким чином, щоб вона була близькою до синусоїдної (ця вимога регламентується відповідними нормативними документами й оцінюється за допомогою спеціальних коефіцієнтів, які будуть розглянуті в наступних підрозділах).

З іншого боку, принцип дії ряду електротехнічних і радіотехнічних пристроїв базується на використанні несинусоїдних струмів і напруг.

Наприклад, для живлення електролітичних ванн і зарядки акумуляторів синусоїдну напругу попередньо перетворюють у постійну за допомогою випрямлячів, у яких використовують нелінійні елементи - діоди. На рис. 6., а представлено функцію напруги (струму) у випадку однонапівперіодного випрямлення сигналу, на рис. 6., б - двонапівперіодного, на рис. 6., в - трифазного однонапівперіодного.

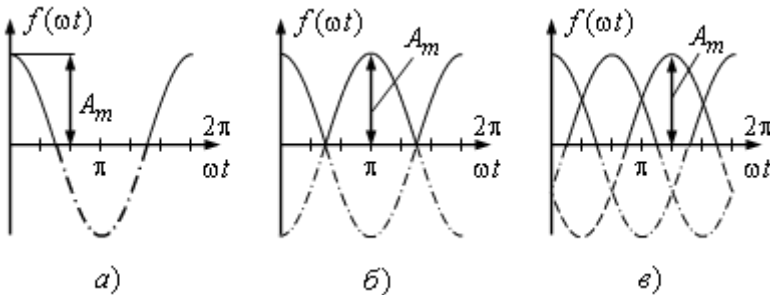


Рис. 6.1

Останнім часом набирає широке розповсюдження імпульсна техніка, тобто галузь радіоелектроніки, у якій для розв'язання певних задач використовують імпульсні пристрої. Ці пристрої застосовують у колах автоматики, телемеханіки, релейного захисту. Фо-

рми імпульсів напруги та струму в імпульсній техніці досить різноманітні. Найбільше поширення одержали імпульси прямокутної (рис. 6.2, *a*), пілкоподібної (рис. 6.2, *б*) або трапецієподібної форм (рис. 6.2, *в*).

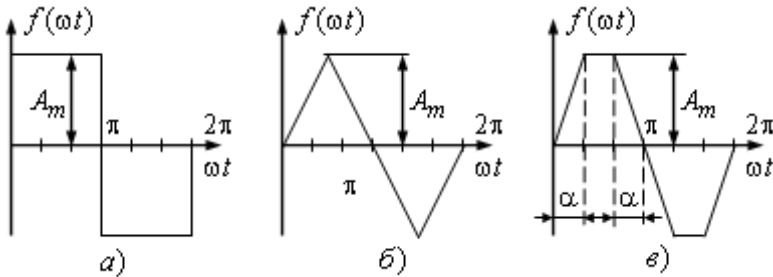


Рис.6.2

Мета даного розділу - розгляд методики розрахунку й аналізу особливостей роботи лінійних електричних кіл під впливом на них джерел періодичних несинусоїдних ЕРС і струмів. Основний метод аналізу - метод накладення.

## 6.2 Розкладання періодичної несинусоїдної кривої в тригонометричний ряд Фур'є

При розгляді процесів у лінійних електричних колах у випадку несинусоїдних періодичних ЕРС, струмів і напруг зручно скористатися теоремою Ейлера-Фур'є, відповідно до якої будь-яка функція, що періодично змінюється  $f(t) = f(t+T) = f(t-T)$  (де  $T$  - період функції) та задовольняє умовам Дирихле, може розглядатися як сума постійної (незалежної від часу) складової й ряду синусоїдних (гармонійних) складових із кратними частотами (*ряд Фур'є*).

Всі періодичні функції, з якими мають справу в електротехніці, умовам Дирихле задовольняють. Тому здійснювати перевірку на виконання цих умов непотрібно.

Наприклад, для несинусоїдної функції, що змінюється періодично

$$f(\omega t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (B_{(k)} \sin k\omega t + C_{(k)} \cos k\omega t), \quad (6.1)$$

де  $k$  - номер гармоніки;  $A_0$  - постійна складова функції, що дорів-

нює середньому значенню функції за період повторення  $T = 2\pi$

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) d(\omega t) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt; \quad (6.2)$$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$  - кутова частота основної (несучої, першої) гармоніки;  
 $B_{(k)}, C_{(k)}$  - коефіцієнти ряду Фур'є (амплітуди відповідно синусних і косинусних складових  $k$ -ої гармоніки), які визначають за формулами

$$B_{(k)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) \sin k\omega t \cdot d(\omega t) = \frac{2}{T} \int_0^T i(t) \sin k\omega t \cdot dt;$$

$$C_{(k)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} i(\omega t) \cos k\omega t \cdot d(\omega t) = \frac{2}{T} \int_0^T i(t) \cos k\omega t \cdot dt. \quad (6.3)$$

На практиці ряди синусоїд і косинусоїд з нульовими початковими фазами доцільно замінити одним рядом синусоїд з початковими фазами, що є відмінними від нуля

$$f(\omega t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{m(k)} \sin(k\omega t + \psi_{(k)}), \quad (6.4)$$

де  $A_{m(k)}$  - амплітуда  $k$ -ої гармоніки ряду Фур'є

$$I_{m(k)} = \sqrt{B_{(k)}^2 + C_{(k)}^2}; \quad (6.5)$$

$\psi_{(k)}$  - початкова фаза  $k$ -ої гармоніки ряду Фур'є

$$\psi_{(k)} = \arctg \frac{C_{(k)}}{B_{(k)}}. \quad (6.6)$$

При визначенні кута  $\psi_{(k)}$  варто мати на увазі, що кожному значенню  $\operatorname{tg}\psi_{(k)}$  відповідають два значення кута  $\psi_{(k)}$ , які відрізняються один від одного на  $180^\circ$ . Тому при визначенні  $\operatorname{tg}\psi_{(k)}$  необхідно враховувати знаки коефіцієнтів  $B_{(k)}$  й  $C_{(k)}$ , бо від них залежить значення кута. Наприклад, якщо  $B_{(k)} > 0$  й  $C_{(k)} > 0$ , їхнє

відношення додатне, а кут розташований у першій чверті, якщо  $B_{(k)} < 0$  й  $C_{(k)} < 0$ , їхнє відношення також додатне, але кут розташований у третій чверті.

Гармоніки, для яких  $k$  - непарне число, називають *непарними*, а для яких  $k$  - парне число, називають *парними*.

Для типових часових функцій у довідниках наведені готові розкладання в тригонометричні ряди. Деякі з таких функцій представлені на рис. 6.1 і рис. 6.2. а розкладання для них у таблиці 6.1.

Таблиця 6.1

| Рис. № | Разложение в ряд Фурье  |
|--------|---|
| 6.1, а | $f(\omega t) = \frac{2A_m}{\pi} \left( \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \cos \omega t + \frac{1}{1 \cdot 3} \cos 2\omega t - \frac{1}{3 \cdot 5} \cos 4\omega t + \dots \right)$                 |
| 6.1, б | $f(\omega t) = \frac{4A_m}{\pi} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{1 \cdot 3} \cos 2\omega t - \frac{1}{3 \cdot 5} \cos 4\omega t + \frac{1}{5 \cdot 7} \cos 6\omega t - \dots \right)$          |
| 6.1, в | $f(\omega t) = \frac{3\sqrt{3}A_m}{\pi} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 4} \cos 3\omega t - \frac{1}{5 \cdot 7} \cos 6\omega t + \frac{1}{8 \cdot 10} \cos 9\omega t - \dots \right)$ |
| 6.2, а | $f(\omega t) = \frac{4A_m}{\pi} \left( \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \frac{1}{7} \sin 7\omega t + \dots \right)$                                |
| 6.2, б | $f(\omega t) = \frac{8I_m}{\pi^2} \left( \sin \omega t - \frac{1}{3^2} \sin 3\omega t + \frac{1}{5^2} \sin 5\omega t - \frac{1}{7^2} \sin 7\omega t + \dots \right)$                        |
| 6.2, в | $f(\omega t) = \frac{4I_m}{\alpha\pi} \left( \sin \alpha \sin \omega t + \frac{1}{3^2} \sin 3\alpha \sin 3\omega t + \frac{1}{5^2} \sin 5\alpha \sin 5\omega t + \dots \right)$             |

У ряді випадків необхідно розкласти в ряд Фур'є функцію, зсувену на деякий кут  $\alpha$  щодо функції, розкладання якої є відомим. Нехай наприклад розкладання в ряд Фур'є задано у вигляді (6.1). Тоді розкладання зсувеної функції має вигляд

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (B_{(k)} \sin k(\omega t + \alpha) + C_{(k)} \cos k(\omega t + \alpha)), \quad (6.7)$$

де  $\alpha$  - кут зсуву початку координат вздовж осі абсцис  $\omega t$ .

Хоча теоретично тригонометричний ряд Фур'є містить нескінченну кількість доданків, звичайно він швидко збігається. Збіжний ряд може виражати задану функцію з будь-якою необхідною точністю. Тому в практичних розрахунках електричних кіл з несинусоїдними ЕРС, напругами й струмами їхні миттєві значення приблизно відображають кінцевою кількістю членів ряду Фур'є. Необхідна кількість членів ряду обумовлюється тільки необхідною точністю розрахунку (звичайно вона не перевищує 3...7 відмінних від нуля членів ряду Фур'є).

Сукупність гармонійних складових функції  $f(\omega t)$  називають *спектром*. Спектр являє собою ряд гармонік із частотами  $k\omega$ , де  $k = 0, 1, 2, \dots$ , з амплітудами  $A_{m(k)}$  й початковими фазами  $\psi(k)$  (постійна складова являє собою амплітуду нульової гармоніки якщо  $k = 0$ ). Такий спектр називають *дискретним* або *лінійчатим*. Його можна представити графічно за допомогою діаграм: амплітудно-частотного й фазочастотного спектрів. Дані діаграми характеризують форму несинусоїдних кривих, причому перша з них показує спектральний склад за амплітудами, а друга - за фазами. На діаграмі амплітудно-частотного спектра вздовж осі ординат відкладають значення постійної складової та амплітуди основної й вищих гармонік, вздовж осі абсцис - відносні значення частот (рис. 6.3, а). На діаграмі фазочастотного спектра вздовж осі ординат відкладають значення фаз основної й вищих гармонік, вздовж осі абсцис - відносні значення частот (рис. 6.3, б).

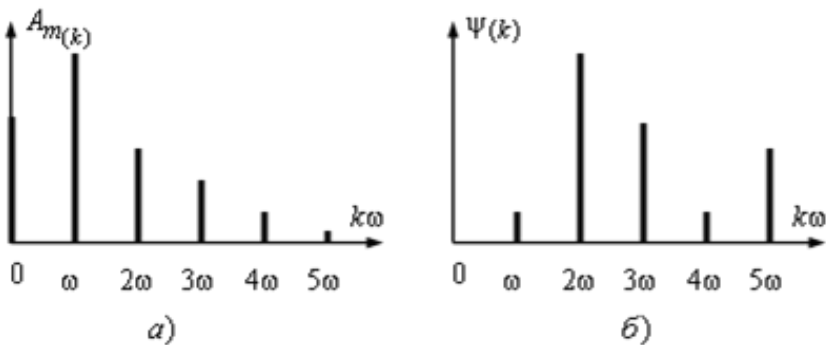


Рис. 6.3

### 6.3 Вплив симетрії форми періодичних кривих на вид тригонометричного ряду Фур'є

У випадку якщо періодична несинусоїдна крива має симетрію вигляд тригонометричного ряду Фур'є спрощується:

- якщо функція  $f(\omega t)$  непарна, тобто вона задовольняє умові  $f(\omega t) = -f(-\omega t)$ , а її графік симетричний відносно початку координат (рис. 6.4, а), то в її розкладанні в ряд Фур'є містяться тільки синусні складові, а постійна складова й косинусні складові відсутні

$$f(\omega t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_{m(k)} \sin k\omega t; \quad (6.8)$$

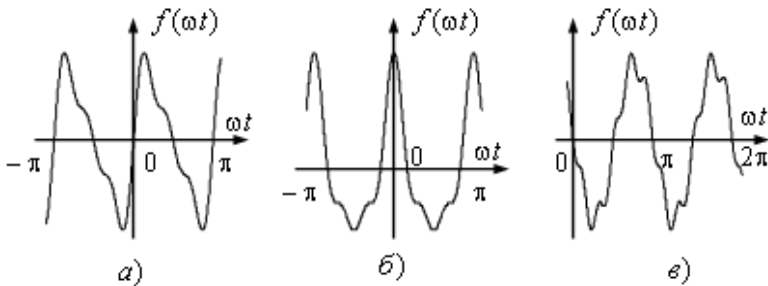


Рис. 6.4

- якщо функція  $f(\omega t)$  парна, тобто вона задовольняє умові  $f(\omega t) = f(-\omega t)$ , а її графік симетричний щодо осі ординат (рис. 6.4, б), то в її розкладанні в ряд Фур'є містяться тільки постійна складова й косинусні складові, а синусні складові відсутні

$$f(\omega t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_{m(k)} \cos k\omega t \quad (6.9)$$

- якщо функція  $f(\omega t)$  задовольняє умові  $f(\omega t) = -f(\omega t + \pi)$ , а її графік симетричний щодо осі абсцис (рис. 6.4, в), то в її розкладанні в ряд Фур'є містяться тільки синусні й косинусні складових непарних гармонік, а постійна складова й синусні й косинусні складових парних гармонік відсутні

$$f(\omega t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_{m(2k-1)} \sin((2k-1)\omega t) + C_{m(2k-1)} \cos((2k-1)\omega t) \quad (6.10)$$

*Приклад 6.1.* Визначити постійну складову й перші дві гармоніки розкладання в ряд Фур'є кривої двонапівперіодної випрямленої напруги, якщо амплітудне значення напруги  $U_m = 100 \text{ В}$ , а початкова фаза  $\psi_u = 90^\circ$ .

*Розв'язання.* Крива двонапівперіодної випрямленої напруги задається рівнянням  $u(\omega t) = |U_m \sin(\omega t + 90^\circ)|$ . Графік даної функції представлений на рис. 6.1, б. Використовуючи формули зведення даний графік можна задати рівнянням  $u(\omega t) = U_m \cos \omega t$ .

Функція  $u(\omega t)$  парна, її графік симетричний щодо осі ординат, тому в її розкладанні в ряд Фур'є містяться тільки постійна складова й косинусні складові, а синусні складові відсутні. Для розкладання в ряд Фур'є використовуємо формули (6.2) і (6.3).

Постійна складова напруги

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |U_m \cos \omega t| d(\omega t) = \frac{2}{\pi} U_m \int_0^{\pi/2} \cos \omega t d(\omega t) = \\ &= \frac{2}{\pi} U_m \sin \omega t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi} U_m (1 + 0) = \frac{2}{\pi} U_m \approx 0,6366 U_m. \end{aligned}$$

При інтегуванні було враховано, що крива напруги складається з чвертей косинусоїди (дзеркально симетричних відносно одна одної), які повторюються чотири рази за період, тому інтегування можна провести в межах чверті періоду. Після підстановки  $U_m = 100 \text{ В}$ , одержимо  $U_0 \approx 0,6366 \cdot 100 \approx 63,66 \text{ В}$ .

Амплітуда косинусної складової першої гармоніки

$$\begin{aligned} U_{m(1)} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |U_m \cos \omega t| \cos \omega t d(\omega t) = \\ &= \frac{1}{2\pi} U_m \left( \int_0^{\pi/2} \cos^2 \omega t d(\omega t) - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2 \omega t d(\omega t) \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi} U_m \left( \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2\omega t) d(\omega t) - \int_{\pi/2}^{\pi} (1 + \cos 2\omega t) d(\omega t) \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi} U_m \left( (\omega t + \sin 2\omega t) \Big|_0^{\pi/2} - (\omega t + \sin 2\omega t) \Big|_{\pi/2}^{\pi} \right) = 0. \end{aligned}$$

При інтегруванні було враховано, що крива напруги складається з повторюваних двічі за період кривих і косинусоїди  $\cos k\omega t$  також повторюються на цих ділянках, тому інтегрування в цьому й у наступних випадках можна провести в межах половини періоду.

Амплітуда косинусоїди складової другої гармоніки

$$\begin{aligned}
 U_{m(2)} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |U_m \cos \omega t| \cos 2\omega t d(\omega t) = \\
 &= \frac{U_m}{2\pi} \left( \int_0^{\pi/2} \cos \omega t \cos 2\omega t d(\omega t) - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos \omega t \cos \omega t d(\omega t) \right) = \\
 &= \frac{U_m}{4\pi} \left( \int_0^{\pi/2} (\cos 3\omega t + \cos \omega t) d(\omega t) - \int_{\pi/2}^{\pi} (\cos 3\omega t + \cos \omega t) d(\omega t) \right) = \\
 &= \frac{U_m}{4\pi} \left( \left( \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \sin \omega t \right) \Big|_0^{\pi/2} - \left( \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \sin \omega t \right) \Big|_{\pi/2}^{\pi} \right) = \\
 &= \frac{U_m}{4\pi} \left( \frac{1}{3} \cdot (-1) + 1 - \frac{1}{3} \cdot 0 - 0 - \left( \frac{1}{3} \cdot 0 + 0 - \frac{1}{3} \cdot (1) + 1 \right) \right) = \frac{4U_m}{3\pi}.
 \end{aligned}$$

Підставив  $U_m = 100 \text{ В}$ , одержимо  $U_{m(2)} = \frac{4 \cdot 100}{3 \cdot \pi} \approx 42,44 \text{ В}$ .

Таким чином у результаті розкладання в ряд Фур'є отримаємо  $u(\omega t) = 63,66 + 42,44 \cos 2\omega t$ .

На рис. 6.5 представлені графіки заданої періодичної несинусоїдної напруги, постійної складової, складової другої гармоніки й результату розкладання в тригонометричний ряд Фур'є.

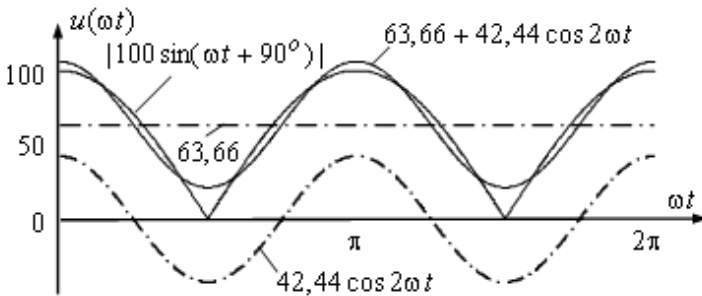


Рис. 6.5

#### 6.4 Чисельний метод визначення гармонійних складових ряду Фур'є

Гармонійний аналіз періодичних несинусоїдних функцій може бути виконаний у чисельній формі з використанням комп'ютерів. Алгоритм розрахунку коефіцієнтів базується на виразах (6.2) і (6.3), у яких обчислення визначеного інтеграла замінюють сумою кінцевого числа доданків.

Із цією метою період функції  $f(\omega t)$ , що дорівнює  $2\pi$ , розбивають на  $N$  рівних достатньо малих інтервалів й інтегрування ведуть чисельними методами з використанням відомих методів (наприклад, за формулами прямокутників або трапецій).

Розглянемо застосування методу прямокутників, який має найбільш простий розрахунковий алгоритм, але одночасно забезпечує необхідну точність.

Довжина кожного інтервалу

$$\Delta(\omega t) = h = \frac{2\pi}{N}. \quad (6.11)$$

Вираз (6.2) для обчислення постійної складової прийме вигляд

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) d(\omega t) \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^N f\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \frac{2\pi}{N} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f\left(\frac{2\pi n}{N}\right), \quad (6.12)$$

де  $n$  - поточний індекс;  $f\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$  - значення функції  $f(\omega t)$  якщо

$$\omega t = \frac{2\pi n}{N}, \text{ тобто в кінці } n\text{-го інтервалу.}$$

Вирази (6.3) для обчислення амплітуд відповідно синусних і косинусних складових  $k$ -ої гармоніки приймуть вигляд

$$B_{(k)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) \sin k\omega t \cdot d(\omega t) \approx \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N f\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \sin\left(\frac{2k\pi n}{N}\right); \quad (6.13)$$

$$C_{(k)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} i(\omega t) \cos k\omega t \cdot d(\omega t) \approx \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N f\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \cos\left(\frac{2k\pi n}{N}\right),$$

де  $\sin\left(\frac{2k\pi n}{N}\right)$  й  $\cos\left(\frac{2k\pi n}{N}\right)$  - відповідно значення функцій  $\sin k\omega t$  і

$\cos k\omega t$  якщо  $\omega t = \frac{2\pi n}{N}$ , тобто наприкінці  $n$ -го інтервалу.

При розрахунках за формулами (6.12) і (6.13) у більшості випадків з достатньою для практики точністю необхідно поділити період на 24 або навіть 18 інтервалів.

Перед тим як робити чисельне розкладання в ряд доцільно перевірити, чи не має задана функція одного з видів симетрії.

*Приклад 6.2.* Визначити постійну складову й перші дві гармоніки розкладання в ряд Фур'є кривою двонапівперіодної випрямленої напруги використовуючи чисельний метод обчислення гармонійних складових ряду Фур'є. Амплітудне значення напруги  $U_m = 100 \text{ В}$ , а початкова фаза -  $\psi_u = 90^\circ$ .

*Розв'язання.* Для визначення коефіцієнтів ряду Фур'є розіб'ємо період функції  $u(\omega t) = |100 \sin(\omega t + 90^\circ)|$  на  $N = 18$  інтервалів. Значення ординат заданої функції напруги  $u(\omega t)$  за перший півперіод у кінцях інтервалів розбивки представлені в таблиці 6.2.

$$\text{Довжина кожного інтервалу } h = \frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi}{18} = \frac{\pi}{9}.$$

Таблиця 6.2

| $n$   | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9     |
|---|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|
| $u(\omega t) = u\left(\frac{\pi}{18}n\right)$ | 94,0 | 76,6 | 50,0 | 17,4 | 17,4 | 50,0 | 76,6 | 94,0 | 100,0 |

Функція  $u(\omega t)$  парна, її графік симетричний щодо осі ординат, тому в її розкладанні в ряд Фур'є містяться тільки постійна складова й косинусні складові, а синусні складові відсутні. Для розкладання в ряд Фур'є використовуємо формули (6.12) і (6.13). При чисельному інтегруванні враховуємо, що крива напруги складається з повторюваних двічі за період кривих і косинусоїди  $\cos k\omega t$  також повторюються на цих ділянках, тому інтегрування можна виконати в межах половини періоду, а отримані результати подвоїти.

Постійна складова

$$A_0 = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^{N/2} f\left(\frac{\pi n}{N}\right) = \frac{2}{18} (94,0 + 76,6 + 50,0 + 17,4 + 17,4 + 50,0 + 76,6 + 94,0 + 100,0) = 64,0 \text{ В}$$

Амплітуда косинусної складової першої гармоніки

$$C_{(1)} = \frac{4}{N} \sum_{n=1}^{N/2} f\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \cos\left(\frac{2k\pi n}{N}\right) = \frac{4}{18} (94,0 \cos \frac{2\pi}{18} + 76,6 \cos \frac{4\pi}{18} + 50,0 \cos \frac{6\pi}{18} + 17,4 \cos \frac{8\pi}{18} + 17,4 \cos \frac{10\pi}{18} + 50,0 \cos \frac{12\pi}{18} + 76,6 \cos \frac{14\pi}{18} + 94,0 \cos \frac{16\pi}{18} + 100,0 \cos \frac{18\pi}{18}) \approx 1,39 \text{ В.}$$

Амплітуда косинусної складової другої гармоніки

$$C_{(2)} = \frac{4}{N} \sum_{n=1}^{N/2} f\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \cos\left(\frac{2k\pi n}{N}\right) = \frac{4}{18} (94,0 \cos \frac{4\pi}{18} + 76,6 \cos \frac{8\pi}{18} + 50,0 \cos \frac{12\pi}{18} + 17,4 \cos \frac{16\pi}{18} + 17,4 \cos \frac{20\pi}{18} + 50,0 \cos \frac{24\pi}{18} + 76,6 \cos \frac{28\pi}{18} + 94,0 \cos \frac{32\pi}{18} + 100,0 \cos \frac{36\pi}{18}) \approx 41,76 \text{ В.}$$

Таким чином, у результаті розкладання в ряд Фур'є одержимо

$$u(\omega t) = 64,0 + 1,39 \cos \omega t + 41,76 \cos 2\omega t \text{ .}$$

Зіставлення результатів чисельного розрахунку з обчисленнями за точними формулами, які були виконані в прикладі 6.1, показує, що в цьому випадку відносна погрішність розрахунку складає при обчисленні постійної складової 0,53%, а косинусної складової другої гармоніки 1,6%. Поява косинусної складової пояснюється погрішністю чисельного інтегрування, але її вплив на діюче значення напруги в порівнянні з постійної складової й складової другої гармоніки є незначним.

Зі збільшенням номера гармоніки відносна похибка розрахунку зростає. Для зменшення похибки варто збільшувати кількість розрахункових інтервалів  $N$ .

Чисельний гармонійний аналіз періодичних несинусоїдних функцій з використанням комп'ютерів найбільш доцільно виконувати у тих випадках коли функція задана у вигляді табличних значень або коли аналітичне інтегрування неможливо.

### 6.5 Діючі й середні значення періодичних несинусоїдних струмів, напруг й ЕРС

Періодичну несинусоїдну величину (наприклад, струм) звичайно характеризують наступними значеннями: максимальним  $I_m$ , діючим  $I$ , середнім  $I_0$  і середнім за модулем  $I_{av}$ .

Як уже говорилося раніше середньоквадратичне за період або діюче значення періодичного струму будь-якої форми

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i(t)^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} i(\omega t)^2 d\omega t}. \quad (6.14)$$

Нехай розкладання періодичного струму несинусоїдної форми  $i(\omega t)$  в ряд Фур'є є відомим

$$i(\omega t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{m(k)} \sin(k\omega t + \psi_{i(k)}). \quad (6.15)$$

Тоді квадрат цього струму можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} i^2(\omega t) = & I_0^2 + 2I_0 \sum_{k=1}^{\infty} I_{m(k)} \sin(k\omega t + \psi_{i(k)}) + \\ & + \sum_{k,n=1}^{\infty} I_{m(k)} I_{m(n)} \sin(k\omega t + \psi_{i(k)}) \sin(n\omega t + \psi_{i(n)}). \end{aligned} \quad (6.16)$$

Для того щоб проінтегрувати цей вираз за період відповідно до формули (6.14), доцільно, використовуючи тригонометричні перетворення, позбутися від добутків гармонійних складових.

Сума добутків синусних складові однієї частоти при перетворенні дає суму складових нульової частоти й суму косинусних складових подвійних частот

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} I_{m(k)}^2 \sin^2(k\omega t + \psi_{i(k)}) = \\ & = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_{m(k)}^2}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_{m(k)}^2}{2} \cos 2(k\omega t + \psi_{i(k)}). \end{aligned} \quad (6.17)$$

Сума добутків синусних складових різної частоти при перетворенні дасть суму косинусних складових сумарних частот  $(k+n)\omega$  і суму косинусних складових різницевих частот  $|k-n|\omega$

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{k,n=1; \\ k \neq n}}^{\infty} I_{m(k)} \sin(k\omega t + \psi_{i(k)}) I_{m(n)} \sin(n\omega t + \psi_{i(n)}) = \\ & = \sum_{\substack{k,n=1; \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{I_{m(k)} I_{m(n)}}{2} \cos((k-n)\omega t + \psi_{i(k)} - \psi_{i(n)}) - \\ & - \sum_{\substack{k,n=1; \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{I_{m(k)} I_{m(n)}}{2} \cos((k+n)\omega t + \psi_{i(k)} + \psi_{i(n)}). \end{aligned} \quad (6.18)$$

Підставивши розкладання періодичного струму несинусоїдної форми  $i(\omega t)$  в ряд Фур'є у формулу діючого значення (6.14) і врахувавши, що при інтегруванні за період всі косинусні складові (6.17) і (6.18) перетворяться в нуль, одержимо

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \left( I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{m(k)} \sin(k\omega t + \psi_{i(k)}) \right)^2 dt} = \\ &= \sqrt{I_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} I_{m(k)}^2} = \sqrt{I_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{(k)}^2}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

де  $I_{(k)} = \frac{I_{m(k)}}{\sqrt{2}}$  - діюче значення синусоїдної (гармонійної) складового струму  $k$ -ої гармоніки.

Отже, діюче значення періодичного несинусоїдного струму визначається як корінь квадратний із суми квадратів постійної складової й діючих значень складових всіх гармонік.

Аналогічно визначаються діючі значення напруги й ЕРС

$$U = \sqrt{U_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{(k)}^2}; \quad E = \sqrt{E_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} E_{(k)}^2}. \quad (6.20)$$

Діючі значення струмів, напруг й ЕРС не залежать від початкових фаз окремих гармонік.

Середнє значення струму за період з обліком того, що середнє значення будь-якої синусоїдної складової струму за період дорівнює нулю, визначається як постійна складова ряду Фур'є

$$I_0 = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \left( I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{m(k)} \sin(k\omega t + \psi_{i(k)}) \right)^2 dt}. \quad (6.21)$$

Аналогічно визначають середні значення напруги й ЕРС.

У деяких випадках (наприклад, при електричних вимірюваннях) для характеристики періодичного несинусоїдного струму (напруги) використовують середнє за модулем значення

$$I_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T |i(t)| dt. \quad (6.22)$$

Аналогічно визначаються середні за модулем значення напруги й ЕРС

$$U_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T |u(t)| dt; \quad E_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T |e(t)| dt. \quad (6.23)$$

Діючі значення періодичних несинусоїдних струмів і напруг вимірюють приладами електромагнітної системи, середні значення - приладами магнітоелектричної системи, а середні за модулем значення приладами магнітоелектричної системи з мостовими випрямлячами.

*Приклад 6.3.* Визначити діючі й середнє значення періодичної несинусоїдної напруги, що задана у вигляді розкладання в тригонометричний ряд Фур'є

$$u(t) = 50 + 100 \sin \omega t + 50 \sin(2\omega t - 60^\circ) + 20 \sin(3\omega t - 45^\circ) \text{ В}.$$

*Розв'язання.* Діюче значення напруги

$$U = \sqrt{U_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} U_{m(k)}^2} = \sqrt{50^2 + \frac{1}{2} (100^2 + 50^2 + 20^2)} = 94,6 \text{ В}.$$

Середнє значення напруги  $U_0 = 50 \text{ В}$ .

## 6.6 Потужність у колі періодичного несинусоїдного струму

У колах періодичного несинусоїдного струму класичний фізичний зміст має тільки активна потужність. Як й активна потужність синусоїдного струму, вона дорівнює середньому значенню миттєвої потужності за період

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)i(t) dt. \quad (6.24)$$

Якщо миттєві значення напруги й струму представити у вигляді тригонометричних рядів Фур'є

$$\begin{aligned} u(t) &= U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{m(k)} \sin(k\omega t + \psi_{u(k)}); \\ i(t) &= I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{m(k)} \sin(k\omega t + \psi_{i(k)}). \end{aligned} \quad (6.25)$$

то активна потужність кола

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T \left( U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{m(k)} \sin(k\omega t + \psi_{u(k)}) \right) \times \\ &\times \left( I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{m(k)} \sin(k\omega t + \psi_{i(k)}) \right) dt. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Після розкриття дужок одержимо

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T \left( U_0 I_0 + I_0 \sum_{k=1}^{\infty} U_{m(k)} \sin(k\omega t + \psi_{u(k)}) + \right. \\ &+ U_0 \sum_{k=1}^{\infty} I_{m(k)} \sin(k\omega t + \psi_{i(k)}) + \\ &+ \sum_{k,n=1}^{\infty} U_{m(k)} I_{m(n)} \sin(k\omega t + \psi_{u(k)}) \sin(n\omega t + \psi_{i(n)}) \left. \right). \end{aligned} \quad (6.27)$$

Для того щоб проінтегрувати цей вираз за період, доцільно,

використовуючи тригонометричні перетворення, позбутися від добутків гармонійних складових.

Сума добутків синусних складові напруги й струму однієї частоти при перетворенні дає суму складових нульової частоти й суму косинусних складових подвійних частот

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} U_{m(k)} I_{m(k)} \sin(k\omega t + \psi_{u(k)}) \sin(k\omega t + \psi_{i(k)}) = \\ & = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_{m(k)} I_{m(k)}}{2} \cos(\psi_{u(k)} - \psi_{i(k)}) - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_{m(k)} I_{m(k)}}{2} \cos 2(k\omega t + \psi_{u(k)} + \psi_{i(k)}). \end{aligned} \quad (6.28)$$

Ураховавши, що при інтегруванні за період всі косинусні складові (6.17) і (6.18) перетворюються в нуль, одержимо

$$\begin{aligned} P & = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_{m(k)} I_{m(k)}}{2} \cos(\psi_{u(k)} - \psi_{i(k)}) = \\ & = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{(k)} I_{(k)} \cos \varphi_{(k)}, \end{aligned} \quad (6.29)$$

де  $U_{(k)} = \frac{U_{m(k)}}{\sqrt{2}}$ ,  $I_{(k)} = \frac{I_{m(k)}}{\sqrt{2}}$  - відповідно діючі значення складових напруги й струму  $k$ -ої гармоніки;  $\varphi_{(k)} = \psi_{u(k)} - \psi_{i(k)}$  - кут фазового зсуву між складовими напруги й струму  $k$ -ої гармоніки.

Таким чином, активна потужність кола періодичного несинусоїдного струму дорівнює сумі активних потужностей всіх гармонік (включаючи постійну складову) окремо

$$P = P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} P_k = \sum_{k=0}^{\infty} P_k. \quad (6.30)$$

За аналогією з поняттям реактивної потужності синусоїдного струму вводять поняття реактивної потужності періодичного несинусоїдного струму. Реактивна потужність кола періодичного несинусоїдного струму дорівнює сумі реактивних потужностей всіх га-

рмонік окремо

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} U_{(k)} I_{(k)} \sin \varphi_{(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} Q_{(k)}. \quad (6.31)$$

За аналогією з поняттям повної потужності синусоїдного струму вводять поняття повної потужності періодичного несинусоїдного струму

$$S = UI = \sqrt{U_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{(k)}^2} \sqrt{I_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{(k)}^2}. \quad (6.32)$$

Якщо криві напруги й струму не повторюють одна одну, то на відміну від кола синусоїдного струму, де квадрат повної потужності дорівнює сумі квадратів активної й реактивної потужностей, у колах несинусоїдного струму маємо

$$S^2 \geq P^2 + Q^2. \quad (6.33)$$

У виразі (6.33) рівність лівої й правої частин можлива тільки якщо форми кривих напруги й струму збігаються.

Тому в колах несинусоїдного струму вводять додатково ще один вид потужності - потужність спотворення  $T$ . Потужність спотворення характеризує ступінь розходження у формах кривих напруги й струму

$$S^2 = P^2 + Q^2 + T^2, \quad (6.34)$$

де  $T$  – потужність спотворення.

Одиницею вимірювання потужності спотворення є *вольт-ампер (ВА)*.

Відношення активної потужності до повної потужності називають *коефіцієнтом потужності* й іноді дорівнюють косинусу деякого умовного кута

$$\chi = \frac{P}{S} = \cos \varphi. \quad (6.35)$$

Даний кут  $\varphi$  не має фізичного змісту, тому що для несинусоїдних струмів і напруг неможливо застосувати поняття фазового зсуву, яке використовують при розрахунках кіл синусоїдного струму.

На практиці іноді при розрахунках несинусоїдні струм і напругу, якщо вони не містять постійних складових, заміняють екви-

валентними синусоїдними. Це дає можливість використовувати для розрахунків символічний метод і будувати векторні діаграми. Заміну виконують таким чином, що діючі значення синусоїдних величин дорівнюють відповідним діючим значенням несинусоїдних. При такій заміні вважають, що еквівалентні синусоїдні напруга й струм зсунені одна щодо другого на кут  $\phi$ .

### 6.7 Коефіцієнти, які характеризують періодичні функції

Для оцінки періодичних струмів і напруг використовують різні коефіцієнти.

*Коефіцієнт форми* – відношення діючого значення несинусоїдного струму (напруги) до середнього за модулем значення

$$k_{\phi} = \frac{I}{I_{av}} = \frac{\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} I_{(k)}^2}}{\frac{1}{T} \int_0^T |i(t)| dt}. \quad (6.36)$$

Для синусоїдних струмів (напруг)  $k_{\phi} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1.11$ .

*Коефіцієнт амплітуди* – відношення максимального значення несинусоїдного струму (напруги) до діючого значення

$$k_a = \frac{I_{max}}{I} = \frac{I_{max}}{\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} I_{(k)}^2}}. \quad (6.37)$$

Для синусоїдних струмів (напруг)  $k_a = \sqrt{2} \approx 1.41$ .

*Коефіцієнт спотворення* – відношення діючого значення основної (першої) гармоніки несинусоїдного струму (напруги) до діючого значення всього несинусоїдного струму (напруги)

$$k_c = \frac{I_{(1)}}{I} = \frac{I_{(1)}}{\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} I_{(k)}^2}}. \quad (6.38)$$

Для синусоїдних струмів (напруг)  $k_c = 1$ .

*Коефіцієнт гармонік* - відношення діючого значення вищих гармонік несинусоїдного струму (напруги) до діючого значення основної (першої) гармоніки

$$k_2 = \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} I_{(k)}^2}}{I_{(1)}}. \quad (6.39)$$

Для синусоїдних струмів (напруг)  $k_2 = 0$ , оскільки у них складові вищих гармонік відсутні.

Якщо відсутня постійна складова, то

$$k_2 = \frac{1}{k_c} \sqrt{1 - k_c^2}. \quad (6.40)$$

На практиці частіше використовують *коефіцієнт несинусоїдності* - коефіцієнт гармонік, що виражений у відсотках

$$k_{нс} = k_2 \cdot 100\% = \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} I_{(k)}^2}}{I_{(1)}} \cdot 100\%. \quad (6.41)$$

Даний коефіцієнт характеризує частку вищих гармонік у негармонійній кривій напруги або струму. Він указує на якісні характеристики електричних сигналів. У промислових мережах гранично припустиме значення коефіцієнта несинусоїдності для напруги мережі не повинне перевищувати  $k_{нс} \leq 5\%$  (у цьому випадку крива напруги на екрані осцилографа візуально не відрізняється від синусоїди). Напруга, для якої ця умова виконується, довгостроково припустима на затискачах будь-якого приймача електричної енергії.

*Коефіцієнт пульсації* - відношення амплітуди основної (першої) гармоніки до постійної складової струму (напруги)

$$k_n = \frac{I_{m(1)}}{I_0} \quad (6.42)$$

Коефіцієнт пульсації використовують для оцінки складу змінних складових в кривих напруг і струмів для оцінки режимів роботи випрямлячів.

### 6.8 Загальна методика розрахунку лінійних електричних кіл несинусоїдного струму

До аналізу будь-якого лінійного електричного кола можна застосувати метод накладення. Можливість розкладання періодичних несинусоїдних величин у ряд Фур'є дозволяє звести розрахунок електричних кіл з лінійними елементами під впливом несинусоїдних ЕРС до незалежних розрахунків для постійної й кожної з гармонійних складових. Розрахунки постійних складових виконують за правилами розрахунку кіл постійного струму, гармонійних складових – за правилами розрахунку кіл синусоїдного струму. При цьому активний опір  $R$  є незмінним для постійної й будь-якої гармонійної складової, а значення реактивного опору залежить від частоти відповідної гармоніки

$$\underline{Z}_{(k)} = R + j\left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C}\right) = R + j\left(kX_{L(1)} - \frac{X_{C(1)}}{k}\right), \quad (6.43)$$

де  $X_{L(1)}$ ,  $X_{C(1)}$  - відповідно опори індуктивного і ємнісного елементів для основної (першої) гармоніки.

За принципом суперпозиції миттєві значення шуканих струмів і напруг дорівнюють сумам миттєвих значень відповідних струмів і напруг, які встановилися б у даному колі під впливом постійної й кожної з гармонійних складових джерел енергії окремо.

Слід спеціально зазначити, що через відмінність частот підсумовувати можна тільки миттєві значення складових струмів і напруг, у той час як підсумовувати комплексні значення гармонійних складових неприпустимо.

*Приклад 6.3.* До розгалуженого лінійного електричного кола прикладена періодична несинусоїдна напруга  $u(t)$ . Схема заміщення кола представлена на рис. 6.6.

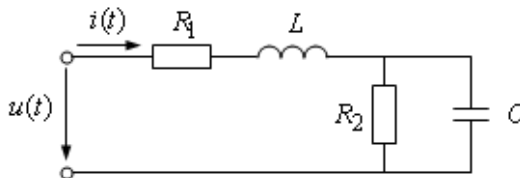


Рис. 6.6

Параметри електричного кола:  $R_1 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 20 \text{ Ом}$ ,

$L = 0,05 \text{ Гн}$ ,  $C = 100 \text{ мкФ}$ , напруга на вході електричного кола  $u(t) = 20 + 100 \sin \omega t + 50 \sin 3\omega t \text{ В}$ . Частота основної гармоніки  $f = 50 \text{ Гц}$ . Необхідно визначити миттєве й діюче значення вхідного струму кола, активну, реактивну й повну потужності, потужність спотворення. Обчислити коефіцієнт потужності, коефіцієнти спотворення та гармонік напруги й струму. Побудувати графіки залежностей  $u(t)$  й  $i(t)$ .

*Розв'язання.* Визначаємо вхідний струм під дією постійної та кожної з гармонійних складових напруги окремо.

Постійну складову струму розраховуємо з обліком того, що опір ємнісних елементів в електричному колі постійного струму дорівнює нескінченності, а індуктивних - нулю.

$$I_0 = \frac{U_0}{R_1 + R_2} = \frac{20}{10 + 20} = 0,667 \text{ А}.$$

Кутова частота основної гармоніки

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 = 314 \text{ с}^{-1}.$$

Розрахунок струмів для кожної гармоніки виконуємо символічним методом. Оскільки в остаточному підсумку нас цікавлять миттєві значення струмів розрахунок доцільно виконувати для комплексних амплітудних значень струмів і напруг.

Опори реактивних елементів для основної гармоніки

$$X_{L(1)} = \omega L = 314 \cdot 0,05 = 15,7 \text{ Ом};$$

$$X_{C(1)} = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} = 31,8 \text{ Ом}.$$

Опір електричного кола для основної гармоніки

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{(1)} &= R_1 + jX_{L(1)} + \frac{R_2(-jX_{C(1)})}{R_2 - jX_{C(1)}} = 10 + j15,7 + \frac{20(-j31,8)}{20 - j31,8} = \\ &= 24,33 + j6,69 = 25,23e^{j15^\circ} \text{ Ом}. \end{aligned}$$

Комплексне амплітудне значення струму першої гармоніки

$$\underline{I}_{m(1)} = \frac{\underline{U}_{m(1)}}{\underline{Z}_{(1)}} = \frac{100e^{j0^\circ}}{24,33 + j6,69} = 3,821 - j1,051 = 3,963e^{-j15^\circ} \text{ А}.$$

Опір електричного кола для третьої гармоніки

$$\underline{Z}_{(3)} = R_1 + j3 \cdot X_{L(1)} + \frac{R_2 \left( -j \frac{X_{C(1)}}{3} \right)}{R_2 - j \frac{X_{C(1)}}{3}} = 10 + j3 \cdot 15,7 + \frac{20 \left( -j \frac{31,8}{3} \right)}{20 - j \frac{31,8}{3}} =$$

$$= 14,39 + j38,82 = 41,40 e^{j70^\circ} \text{ Ом.}$$

Комплексне амплітудне значення струму третьої гармоніки

$$\underline{I}_{m(3)} = \frac{\underline{U}_{m(3)}}{\underline{Z}_{(3)}} = \frac{50 e^{j0^\circ}}{14,39 + j38,82} = 0,420 - j1,133 = 1,208 e^{-j70^\circ} \text{ А.}$$

Миттєве значення шуканого несинусоїдного струму

$$i(t) = I_0 + I_{m(1)} \sin(\omega t + \psi_{(1)}) + I_{m(3)} \sin(3\omega t + \psi_{(3)}) =$$

$$= 0,667 + 3,963 \sin(\omega t - 15^\circ) + 1,208 \sin(3\omega t - 70^\circ) \text{ А.}$$

Діюче значення напруги

$$U = \sqrt{U_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 U_{m(k)}^2} = \sqrt{20^2 + \frac{100^2 + 50^2}{2}} = 81,55 \text{ В.}$$

Діюче значення струму

$$I = \sqrt{I_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 I_{m(k)}^2} = \sqrt{0,667^2 + \frac{3,963^2 + 1,208^2}{2}} = 3,005 \text{ А.}$$

Повна потужність електричного кола

$$S = UI = 81,55 \cdot 3,005 = 245,1 \text{ ВА.}$$

Активна потужність електричного кола

$$P = U_0 I_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 U_{m(k)} I_{m(k)} \cos(\psi_{u(k)} - \psi_{i(k)}) =$$

$$= 20 \cdot 0,667 + \frac{1}{2} (100 \cdot 3,963 \cdot \cos(0^\circ - 15^\circ) +$$

$$+ 50 \cdot 1,208 \cdot \cos(0^\circ + 70^\circ)) = 215,1 \text{ Вт.}$$

Реактивна потужність електричного кола

$$Q = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 U_{m(k)} I_{m(k)} \sin(\psi_{u(k)} - \psi_{i(k)}) = \frac{1}{2} (100 \cdot 3,963 \cdot \sin(0^\circ + 15^\circ) + 50 \cdot 1,208 \cdot \sin(0^\circ + 70^\circ)) = 79,7 \text{ вар.}$$

Потужність спотворення електричного кола

$$T = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} = \sqrt{245,1^2 - 215,1^2 - 79,7^2} = 86,3 \text{ ВА.}$$

Коефіцієнт потужності електричного кола

$$\chi = \frac{P}{S} = \frac{215,1}{245,1} = 0,878.$$

Коефіцієнти спотворення напруги й струму

$$k_{uc} = \frac{U_{(1)}}{U} = \frac{U_{m(1)}}{\sqrt{2}U} = \frac{100}{\sqrt{2} \cdot 81,55} = 0,867;$$

$$k_{ic} = \frac{I_{(1)}}{I} = \frac{I_{m(1)}}{\sqrt{2}I} = \frac{3,963}{\sqrt{2} \cdot 3,003} = 0,933.$$

Коефіцієнти гармонік напруги й струму

$$k_{u_2} = \frac{U_{(3)}}{U_{(1)}} = \frac{U_{m(3)}}{U_{m(1)}} = \frac{50}{100} = 0,5;$$

$$k_{i_2} = \frac{I_{(3)}}{I_{(1)}} = \frac{I_{m(3)}}{I_{m(1)}} = \frac{1,208}{3,963} = 0,304.$$

На рис. 6.7, *а* представлено графік напруги джерела  $u(t)$ , а на рис. 6.9, *б* - графік струму  $i(t)$ .

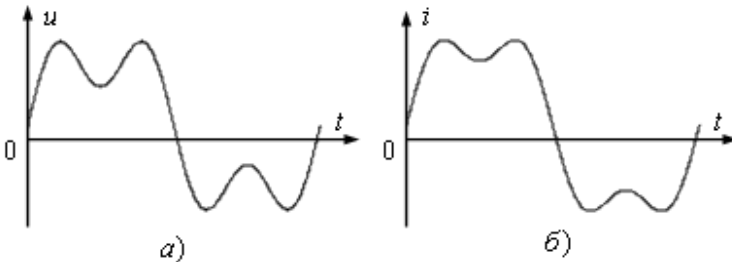


Рис. 6.7

### 6.9 Вплив резистивного, індуктивного і ємнісного елементів кола на форму кривої струму

У вітці електричного кола з резистивним елементом амплітуди струмів всіх гармонійних складових

$$I_{m(k)} = \frac{U_{m(k)}}{R}. \quad (6.44)$$

Тому що опір резистивного елемента зі збільшенням номера гармоніки напруги не змінюється, то форма кривої несинусоїдного струму повторює форму кривої напруги.

У вітці електричного кола з індуктивним елементом амплітуди струмів всіх гармонійних складових

$$I_{m(k)} = \frac{U_{m(k)}}{k\omega L}. \quad (6.45)$$

Тому що опір індуктивного елемента збільшується зі збільшенням номера гармоніки, то амплітуда кожної наступної гармоніки буде зменшуватися обернено пропорційно порядку гармоніки й вищі гармоніки струму будуть проявлятися в меншій мірі в загальній кривій струму. Таким чином, крива струму в цьому випадку буде менше відрізнятися від синусоїди, ніж крива напруги.

У вітці електричного кола з ємнісним елементом амплітуди струмів всіх гармонійних складових

$$I_{m(k)} = \frac{U_{m(k)}}{1/k\omega C} = k\omega C U_{m(k)}. \quad (6.46)$$

Тому що опір ємнісного елемента зменшується зі збільшенням номера гармоніки, то амплітуда струму кожної наступної гармоніки буде збільшуватися прямо пропорційно порядку гармоніки, і вищі гармоніки струмів будуть проявлятися в більшій мірі в загальній кривій струму. Таким чином, крива струму в цьому випадку буде більше відрізнятися від синусоїди, ніж крива напруги.

*Приклад 6.4.* До розгалуженого лінійного електричного кола з паралельним з'єднанням резистивного, індуктивного і ємнісного елементів, схема заміщення якого представлена на рис. 6.8, прикладена періодична несинусоїдна напруга  $u(t)$ . Миттєве значення напруги  $u(t) = 100 \sin \omega t + 50 \sin 3\omega t + 20 \sin(5\omega t + 45^\circ)$  В.

Частота основної гармоніки  $f = 50$  Гц. Параметри електричного кола:  $R = 10$  Ом,  $L = 31,8$  мГн,  $C = 318$  мкФ.

Необхідно визначити миттєві і діючі значення струмів і коефіцієнти гармонік струмів у всіх паралельних вітках. Побудувати амплітудно-частотні спектри струмів в паралельних вітках.

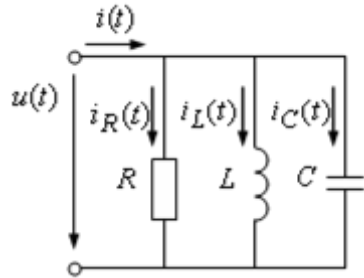


Рис. 6.8

*Розв'язання.* Кутова частота основної гармоніки

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 = 314 \text{ c}^{-1}.$$

Опори реактивних елементів для основної (першої) гармоніки (опір резистивного елемента не залежить від частоти гармонійних складових)

$$X_{L(1)} = \omega L = 314 \cdot 31,8 \cdot 10^{-3} = 10,0 \text{ Ом};$$

$$X_{C(1)} = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \cdot 318 \cdot 10^{-6}} = 10,0 \text{ Ом}.$$

Комплексні амплітуди струмів основної (першої) гармоніки в паралельних вітках

$$\underline{I}_{R_{m(1)}} = \frac{\underline{U}_{m(1)}}{R} = \frac{100e^{j0^\circ}}{10e^{j0^\circ}} = 10,0e^{j0^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{L_{m(1)}} = \frac{\underline{U}_{m(1)}}{jX_{L(1)}} = \frac{100e^{j0^\circ}}{10,0e^{j90^\circ}} = 10,0e^{-j90^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{C_{m(1)}} = \frac{\underline{U}_{m(1)}}{-jX_{C(1)}} = \frac{100e^{j0^\circ}}{10,0e^{-j90^\circ}} = 10,0e^{j90^\circ} \text{ А}.$$

Опори реактивних елементів для третьої гармоніки

$$X_{L(3)} = 3X_{L(1)} = 3 \cdot 10 = 30,0 \text{ Ом};$$

$$X_{C(3)} = \frac{X_{C(1)}}{3} = \frac{10}{3} = 3,33 \text{ Ом}.$$

Комплексні амплітуди струмів третьої гармоніки в паралельних вітках

$$\underline{I}_{R_{m(3)}} = \frac{\underline{U}_{m(3)}}{R} = \frac{50e^{j0^\circ}}{10e^{j0^\circ}} = 5,00e^{j0^\circ} \text{ A};$$

$$\underline{I}_{L_{m(3)}} = \frac{\underline{U}_{m(3)}}{jX_{L(3)}} = \frac{50e^{j0^\circ}}{30,0e^{j90^\circ}} = 1,67e^{-j90^\circ} \text{ A};$$

$$\underline{I}_{C_{m(3)}} = \frac{\underline{U}_{m(1)}}{-jX_{C(3)}} = \frac{50e^{j0^\circ}}{3,33e^{-j90^\circ}} = 15,00e^{j90^\circ} \text{ A}.$$

Опори реактивних елементів для п'ятої гармоніки

$$X_{L(3)} = 5X_{L(1)} = 5 \cdot 10 = 50,0 \text{ Ом};$$

$$X_{C(3)} = \frac{X_{C(1)}}{5} = \frac{10}{5} = 2,0 \text{ Ом}.$$

Комплексні амплітуди струмів п'ятої гармоніки в паралельних вітках

$$\underline{I}_{R_{m(5)}} = \frac{\underline{U}_{m(5)}}{R} = \frac{20e^{j0^\circ}}{10e^{j0^\circ}} = 2,0e^{j0^\circ} \text{ A};$$

$$\underline{I}_{L_{m(5)}} = \frac{\underline{U}_{m(5)}}{jX_{L(5)}} = \frac{20e^{j0^\circ}}{50,0e^{j90^\circ}} = 0,4e^{-j90^\circ} \text{ A};$$

$$\underline{I}_{C_{m(5)}} = \frac{\underline{U}_{m(5)}}{-jX_{C(5)}} = \frac{20e^{j0^\circ}}{2,0e^{-j90^\circ}} = 10,0e^{j90^\circ} \text{ A}.$$

Струми в паралельних вітках, що отримані як результат розрахунків, запишемо у вигляді суми миттєвих значень всіх гармонійних складових

$$i_R(t) = 10,0 \sin \omega t + 5,0 \sin \omega t + 2,0 \sin \omega t \text{ A};$$

$$i_L(t) = 10,0 \sin(\omega t + 90^\circ) + 1,67 \sin(\omega t + 90^\circ) + 0,4 \sin(\omega t + 90^\circ) \text{ A};$$

$$i_C(t) = 10,0 \sin(\omega t - 90^\circ) + 15,0 \sin(\omega t - 90^\circ) + 10,0 \sin(\omega t - 90^\circ) \text{ A}.$$

Коефіцієнти гармонік струмів в паралельних вітках

$$k_{R_{\Gamma_i}} = \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^5 I_{R_m(k)}^2}}{I_{R_m(1)}} = \frac{\sqrt{5,0^2 + 2,0^2}}{10,0} = 0,539;$$

$$k_{L_{\Gamma_i}} = \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^5 I_{L_m(k)}^2}}{I_{L_m(1)}} = \frac{\sqrt{1,67^2 + 0,40^2}}{10,0} = 0,172;$$

$$k_{C_{\Gamma_i}} = \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^5 I_{C_m(k)}^2}}{I_{C_m(1)}} = \frac{\sqrt{15,0^2 + 10,0^2}}{10} = 1,803.$$

Амплітудно-частотні спектри струмів в паралельних вітках представлені на рис. 6.9.

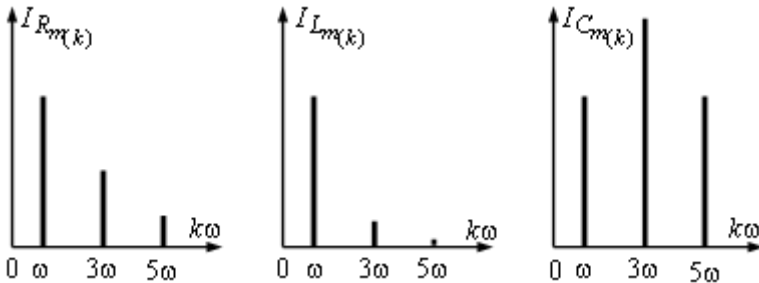


Рис. 6.9

### 6.10 Резонансні явища в електричних колах несинусоїдного струму

У підрозділі 4.12 зауважувалося, що існують два способи досягнення резонансних режимів: параметричний і частотний.

Відповідно в електричних колах несинусоїдного струму резонансні режими можуть виникати або в результаті зміни параметрів реактивних елементів, або в результаті збігу резонансних частот у частотах тієї або іншої гармоніки джерела енергії.

Розглянемо послідовний коливальний контур, що одержує

живлення від джерела несинусоїдної напруги. Схема контуру представлена на рис. 6.10. Параметри джерела напруги

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_{m(k)} \sin(k\omega t + \psi_{e(k)}). \quad (6.47)$$

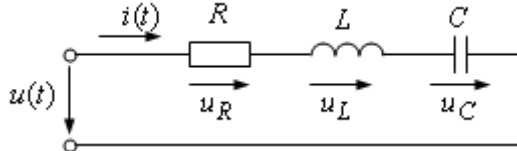


Рис.6.10

Діюче значення струму в колі під дією ЕРС  $k$ -ої гармоніки відповідно до закону Ома

$$I_{(k)} = \frac{U_{(k)}}{\sqrt{R^2 + \left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C}\right)^2}} = \frac{I_{0(k)}}{\sqrt{1 + \frac{1}{(k\omega RC)^2} \left((k\omega)^2 LC - 1\right)^2}}, \quad (6.48)$$

де  $I_{0(k)} = \frac{U_{(k)}}{R}$  - діюче значення струму  $k$ -ої гармоніки у резонансному режимі.

Діючі значення напруг на індуктивному и ємнісному елементах під дією ЕРС  $k$ -ої гармоніки

$$U_{L(k)} = I_{(k)} k\omega L = \frac{k\omega L U_{(k)}}{R \sqrt{1 + \frac{1}{(k\omega RC)^2} \left((k\omega)^2 LC - 1\right)^2}}; \quad (6.49)$$

$$U_{C(k)} = \frac{I_{(k)}}{k\omega C} = \frac{U_{(k)}}{k\omega RC \sqrt{1 + \frac{1}{(k\omega RC)^2} \left((k\omega)^2 LC - 1\right)^2}}.$$

Діюче значення струму в колі під дією несинусоїдної ЕРС

$$I = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_{(k)}^2}{R^2 \left(1 + \frac{1}{(k\omega RC)^2} \left((k\omega)^2 LC - 1\right)^2\right)}}. \quad (6.50)$$

Діючі значення напруг на індуктивному и ємнісному елементах під дією несинусоїдної ЕРС

$$U_L = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k\omega LU_{(k)})^2}{R^2 \left( 1 + \frac{1}{(k\omega RC)^2} \left( (k\omega)^2 LC - 1 \right)^2 \right)}}; \quad (6.51)$$

$$U_C = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_{(k)}^2}{(k\omega RC)^2 \left( 1 + \frac{1}{(k\omega RC)^2} \left( (k\omega)^2 LC - 1 \right)^2 \right)}}.$$

Припустимо, що параметри резистивного елемента  $R$  й індуктивного елемента  $L$  є постійними, а параметр ємнісного елемента  $C$  змінюється від 0 до  $\infty$ . При зміні ємності коло послідовно проходить резонансні режими на кожній з гармонік. Цим режимам відповідають значення ємності, які визначають із умови резонансу

$$\frac{1}{k\omega C_{(k)}} = k\omega L \quad (6.52)$$

Звідси

$$C_{(k)} = \frac{1}{k^2 \omega^2 L}. \quad (6.53)$$

Резонансу на основній гармоніці відповідає ємність

$$C_{(1)} = \frac{1}{\omega^2 L}. \quad (6.54)$$

При зміні значення ємності від  $C_{(1)}$  до 0 резонанс в електричному контурі відбувається спочатку на другій гармоніці, потім на третій і так далі.

Таким чином, при зміні значення ємності  $C$  діюче значення струму  $k$ -ої гармоніки буде змінюватися від нуля (якщо  $C = 0$ ) до

$$I_{\infty(k)} = \frac{U_{(k)}}{\sqrt{R^2 + (k\omega L)^2}} \quad (\text{якщо } C = \infty). \text{ Воно буде досягати макси-}$$

мумів  $I_{0(k)} = \frac{U_{(k)}}{R}$  при резонансах, які обумовлюються значеннями

ємності (6.53). При цьому незважаючи на те, що зі збільшенням номера гармоніки амплітуда гармонійних складових ЕРС у більшості випадків зменшується, у режимі резонансу для  $k$ -ої гармоніки значення резонансного струму  $I_{0(k)}$  може перевищувати значення струму першої гармоніки та струмів всі інших гармонік, а на ділянках електричного кола, як з ємнісним елементом, так і з індуктивним можуть виникнути перенапруги.

Діюче значення струму при резонансі більше, ніж впливає з виразу (6.48), тому що до резонансного струму даної гармоніки додаються струми інших, нерезонансних гармонік (6.50).

Діючі значення напруг на індуктивному і ємнісному елементах при резонансних значеннях ємності  $C_{(k)}$  у загальному випадку не дорівнюють одне одному, тому що резонанс напруг має місце тільки для напруг  $k$ -ої гармоніки, а діючі значення напруг залежать від всіх гармонійних складових напруг. При прагненні значення ємності до нуля сила струму, значення спадів напруг на резистивному й індуктивному елементах прагнуть до нуля, а значення спаду напруги на ємнісному елементі прагне до діючого значення ЕРС.

В електричних колах несинусоїдного струму при паралельному з'єднанні ємнісного й індуктивного елементів можливе виникнення резонансу струмів для однієї з гармонік із властивому даному резонансу явищами.

Резонансні явища використовують для виділення гармонік одних частот і придушення інших. Принцип роботи *LC-фільтрів* базується на використанні цих явищ. Більш докладно фільтри цього типу розглядаються в розділі сьомому.

*Приклад 6.5.* До нерозгалуженого лінійного електричного кола з послідовним з'єднанням резистивного, індуктивного і ємнісного елементів прикладена періодична несинусоїдна напруга  $u(t)$ . Схема заміщення кола представлена на рис. 6.10. Параметри електричного кола:  $R = 10 \text{ Ом}$ ,  $L = 0,0318 \text{ Гн}$ ,  $C = 79,6 \text{ мкФ}$ , напруга на входе електричного кола  $u(t) = 100 \sin \omega t + 50 \sin 2\omega t + 25 \sin 4\omega t \text{ В}$ . Частота основної гармоніки  $f = 50 \text{ Гц}$ . Необхідно визначити миттєво і діюче значення вхідного струму електричного кола.

*Розв'язання.* Кутова частота основної гармоніки

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 = 314 \text{ с}^{-1}.$$

Опори реактивних елементів для основної (першої) гармоніки

$$X_{L(1)} = \omega L = 314 \cdot 31,8 \cdot 10^{-3} = 10,0 \text{ Ом};$$

$$X_{C(1)} = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \cdot 79,6 \cdot 10^{-6}} = 40,0 \text{ Ом}.$$

Струм основної (першої) гармоніки

$$\begin{aligned} I_{m(1)} &= \frac{U_{m(1)}}{R + j(X_{L(1)} - X_{C(1)})} = \frac{100e^{j0^\circ}}{10 + j(10,0 - 40,0)} = \\ &= 1,0 + j3,0 = 3,162e^{j72^\circ} \text{ А.} \end{aligned}$$

Опори реактивних елементів для другої гармоніки

$$X_{L(2)} = 2 \cdot \omega L = 2 \cdot 314 \cdot 31,8 \cdot 10^{-3} = 20,0 \text{ Ом};$$

$$X_{C(2)} = \frac{1}{2 \cdot \omega C} = \frac{1}{2 \cdot 314 \cdot 79,6 \cdot 10^{-6}} = 20,0 \text{ Ом}.$$

Струм другої гармоніки

$$\begin{aligned} I_{m(2)} &= \frac{U_{m(2)}}{R + j(X_{L(2)} - X_{C(2)})} = \frac{50e^{j0^\circ}}{10 + j(20,0 - 20,0)} = \\ &= 5,0 + j0,0 = 5,0e^{j0^\circ} \text{ А.} \end{aligned}$$

Таким чином, для другої гармоніки має місце резонансний режим.

Опори реактивних елементів для четвертої гармоніки

$$X_{L(4)} = 4 \cdot \omega L = 2 \cdot 314 \cdot 31,8 \cdot 10^{-3} = 40,0 \text{ Ом};$$

$$X_{C(4)} = \frac{1}{4 \cdot \omega C} = \frac{1}{2 \cdot 314 \cdot 79,6 \cdot 10^{-6}} = 10,0 \text{ Ом}.$$

Струм четвертої гармоніки

$$\begin{aligned} I_{m(4)} &= \frac{U_{m(4)}}{R + j(X_{L(4)} - X_{C(4)})} = \frac{20e^{j0^\circ}}{10 + j(40,0 - 10,0)} = \\ &= 0,2 - j0,6 = 0,632e^{-j72^\circ} \text{ А.} \end{aligned}$$

Миттєве значення струму

$$i(t) = 3,162 \sin(\omega t + 72^\circ) + 5,0 \sin(2\omega t) + 0,632 \sin(\omega t - 72^\circ) \text{ A}.$$

Діюче значення струму

$$I = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 I_{m(k)}^2} = \sqrt{\frac{3,162^2 + 5,0^2 + 0,632^2}{2}} = 4,207 \text{ A}.$$

### 6.11 Вищі гармоніки в трифазних колах

При розрахунках несинусоїдних струмів і напруг у трифазних колах потрібно враховувати особливості фазових співвідношень гармонік струму й напруг у різних фазах кола. Ці особливості пов'язані з тим, що фазовий зсув між фазами *A*, *B*, *C* на одну третину періоду основної частоти призводить до фазового зсуву між складовими вищих гармонік, що залежить від номера гармоніки.

Припустимо, що фазні ЕРС симетричного влаштованого трифазного генератора містять вищі гармоніки. Криві ЕРС у всіх фазах за формою однакові, але зсунені відносно одна одної на третину періоду основної гармоніки. Тому що період *k*-ої гармоніки в *k* разів менше періоду першої гармоніки, то кут фазового зсуву *k*-ої гармоніки в наступній фазі стосовно попередньої фази збільшується в *k* разів.

Нехай фазні напруги першої гармоніки задані як

$$\begin{aligned} e_{A(1)} &= E_{m(1)} \sin(\omega t + \psi_{e(1)}); \\ e_{B(1)} &= E_{m(1)} \sin\left(\omega\left(t - \frac{T}{3}\right) + \psi_{e(1)}\right); \\ e_{C(1)} &= E_{m(1)} \sin\left(\omega\left(t + \frac{T}{3}\right) + \psi_{e(1)}\right). \end{aligned} \quad (6.55)$$

Тоді для *k*-ої гармоніки, врахувавши, що  $k\omega\left(t \pm \frac{T}{3}\right) = k\omega t \pm 2\pi \frac{k}{3}$

$$\begin{aligned} e_{A(k)} &= E_{m(k)} \sin(k\omega t + \psi_{e(k)}); \\ e_{B(k)} &= E_{m(k)} \sin\left(k\omega t - 2\pi \frac{k}{3} + \psi_{e(k)}\right); \\ e_{C(k)} &= E_{m(k)} \sin\left(k\omega t - 2\pi \frac{k}{3} + \psi_{e(k)}\right). \end{aligned} \quad (6.56)$$

Проаналізувавши отримані вирази можна прийти до висновку, що у всіх фазах ЕРС гармонік порядку, що кратний трьом ( $k = 3n$ , де  $n \in N$  - натуральне число), зсунені відносно одна одної на цілу кількість періодів, тобто в будь-який момент часу мають одне й теж значення й напрямок. Вони утворюють симетричні системи ЕРС нульової гармоніки.

$$\begin{aligned}
 e_{A(k)} &= E_{m(k)} \sin(k\omega t + \psi_{e(k)}); \\
 e_{B(k)} &= E_{m(k)} \sin\left(k\omega t - 2\pi \frac{3n}{3} + \psi_{e(k)}\right) = \\
 &= E_{m(k)} \sin(k\omega t + \psi_{e(k)}); \\
 e_{C(k)} &= E_{m(k)} \sin\left(k\omega t + 2\pi \frac{3n}{3} + \psi_{e(k)}\right) = \\
 &= E_{m(k)} \sin(k\omega t + \psi_{e(k)}).
 \end{aligned} \tag{6.57}$$

У співвідношеннях (6.57) врахована періодичність тригонометричних функцій  $\sin(k\omega t \mp 2\pi n + \psi_{e(k)}) = \sin(k\omega t + \psi_{e(k)})$ .

У всіх фазах ЕРС гармонік порядку  $k = 3n - 2$ ,  $n \in N$  утворюють симетричні системи ЕРС, послідовність яких збігається з послідовністю фаз основної гармоніки, тобто системи прямої послідовності.

$$\begin{aligned}
 e_{A(k)} &= E_{m(k)} \sin(k\omega t + \psi_{e(k)}); \\
 e_{B(k)} &= E_{m(k)} \sin\left(k\omega t - 2\pi \frac{3n-2}{3} + \psi_{e(k)}\right) = \\
 &= E_{m(k)} \sin\left(k\omega t - \frac{2\pi}{3} + \psi_{e(k)}\right); \\
 e_{C(k)} &= E_{m(k)} \sin\left(k\omega t + 2\pi \frac{3n-2}{3} + \psi_{e(k)}\right) = \\
 &= E_{m(k)} \sin\left(k\omega t + \frac{2\pi}{3} + \psi_{e(k)}\right).
 \end{aligned} \tag{6.58}$$

У співвідношеннях (6.58) враховані формули зведення  $\sin\left(k\omega t - 2\pi n \pm \frac{4\pi}{3} + \psi_{e(k)}\right) = \sin\left(k\omega t + \mp \frac{2\pi}{3} + \psi_{e(k)}\right)$ .

У всіх фазах ЕРС гармонік порядку  $k = 3n - 1$ ,  $n \in N$  утворюють симетричні системи ЕРС, послідовність яких є протилежною до послідовності фаз основної гармоніки, тобто системи зворотної послідовності

$$\begin{aligned}
 e_{A(k)} &= E_{m(k)} \sin(k\omega t + \psi_{e(k)}); \\
 e_{B(k)} &= E_{m(k)} \sin\left(k\omega t - 2\pi \frac{3n-1}{3} + \psi_{e(k)}\right) = \\
 &= E_{m(k)} \sin\left(k\omega t + \frac{2\pi}{3} + \psi_{e(k)}\right); \\
 e_{C(k)} &= E_{m(k)} \sin\left(k\omega t + 2\pi \frac{3n-1}{3} + \psi_{e(k)}\right) = \\
 &= E_{m(k)} \sin\left(k\omega t - \frac{2\pi}{3} + \psi_{e(k)}\right).
 \end{aligned} \tag{6.59}$$

При наявності постійної складової ЕРС у кожній з фаз вона може розглядатися як нульова гармоніка порядку, що кратно трьом ( $k = 0$ ), тобто постійні складові ЕРС також утворюють систему нульової послідовності.

На практиці в більшості випадків у трифазних колах ЕРС (напруги) джерел живлення не містять постійні складові і складові парних гармонік. Тому при подальшому розгляді обмежимося тільки дослідженням напруг, що містять у себе тільки складові непарних гармонік. Відповідно до формул (6.57-6.59) складові гармонік з номерами 1, 7, 13,.. - утворюють системи прямої послідовності, з номерами 3, 9, 15,.. - утворюють системи нульової послідовності, з номерами 5, 11, 17,.. - утворюють системи зворотної послідовності.

Слід зазначити деякі особливості складових струмів і напруг непарних гармонік, які впливають із властивостей симетричних складових. Облік цих особливостей спрощує розрахунки трифазних кіл синусоїдного струму.

Якщо обмотки генератора з'єднані за схемою "зірка", то при симетрії фазних ЕРС, лінійні напруги не містять гармонік, що кратні трьом. Це пояснюється тим, що лінійні напруги дорівнюють різницям відповідних фазних напруг. Але складові фазних напруг гармонік, що дорівнюють трьом, утворюють системи нульової послідовності, тому їхні різниці дорівнюють нулю.

Діючі значення фазних напруг

$$U_{\phi} = \sqrt{U_1^2 + U_3^2 + U_5^2 + U_7^2 + \dots} \quad (6.60)$$

Діючі значення лінійних напруг

$$U_{\text{л}} = \sqrt{3} \sqrt{U_1^2 + U_5^2 + U_7^2 + U_{11}^2 + \dots} \quad (6.61)$$

Отже, відношення лінійних напруг до фазних в цьому випадку менше  $\sqrt{3}$

$$\frac{U_{\text{л}}}{U_{\phi}} = \frac{\sqrt{3} \sqrt{U_1^2 + U_5^2 + U_7^2 + U_{11}^2 + \dots}}{\sqrt{U_1^2 + U_3^2 + U_5^2 + U_7^2 + \dots}} \leq \sqrt{3} \quad (6.62)$$

Рівність виконується тільки при відсутності у фазних напругах складових гармонік, що кратні трьом.

Якщо обмотки генератора з'єднані за схемою "трикутник", то суми складових фазних ЕРС непарних гармонік, які не кратні трьом, дорівнюють нулю, тому що вони утворюють симетричні системи прямої або зворотної послідовності. Суми складових фазних ЕРС гармонік, які кратні трьом, не дорівнюють нулю, тому що вони утворюють системи нульової послідовності. Відповідні сумарні ЕРС викликають в обмотках генератора струми навіть при відсутності навантаження генератора. Складові спадів напруги гармоніки, що кратні трьом у кожній обмотці генератора дорівнюють ЕРС цієї гармоніки. Отже, складові ЕРС гармонік, що кратні трьом урівноважуються відповідними спадами напруги на обмотках генератора й лінійні напруги, як і при з'єднанні зіркою, не будуть містити складових цих гармонік.

При відсутності нейтрального проводу в лінійних струмах і струмах приймача не буде складових гармонік, які кратні трьом, тому що складових цих гармонік немає в лінійних напругах. Відповідно немає цих складових й у фазних напругах навантаження, навіть якщо воно з'єднано зіркою. При з'єднанні кола за схемою трипровідна зірка між нейтральними точками генератора й навантаження з'являється напруга, що обумовлена складовими гармонік, які кратні трьом. Ця напруга може досягати небезпечного для життя значення.

При з'єднанні кола за схемою чотирипровідна зірка у нейтральному проводі й лінійних проводах навіть при симетричному на-

вантаженні будуть протікати складові струмів гармонік, які кратні трьом, оскільки вони утворюють системи струмів нульової послідовності

$$I_N = 3 \sqrt{\sum_{k=3n}^{\infty} I_{(k)}^2} = 3 \sqrt{I_{(3)}^2 + I_{(9)}^2 + I_{(15)}^2 + \dots} \quad (6.63)$$

*Приклад 6.6.* У трифазному електричному колі, що з'єднане за схемою чотирипровідна зірка, діє джерело трифазних несинусоїдних ЕРС. Схема заміщення кола представлена на рис. 6.11. Миттєве значення фазної напруги фази *A* симетричного трифазного генератора  $u_A = 100 \sin \omega t + 50 \sin 3\omega t + 20 \sin(5\omega t + 45^\circ)$  В. Характер опору симетричного навантаження активно-індуктивне:  $R = 30 \text{ Ом}$ ;  $X_{L(1)} = \omega L = 40 \text{ Ом}$  (для першої гармоніки). Характер опору нейтрального проводу активний  $Z_N = R_N = 10 \text{ Ом}$ . Визначити активну, реактивну й повну потужності електричного кола, потужність спотворення. Знайти покази вимірювальних приладів (всі прилади - електромагнітної системи).

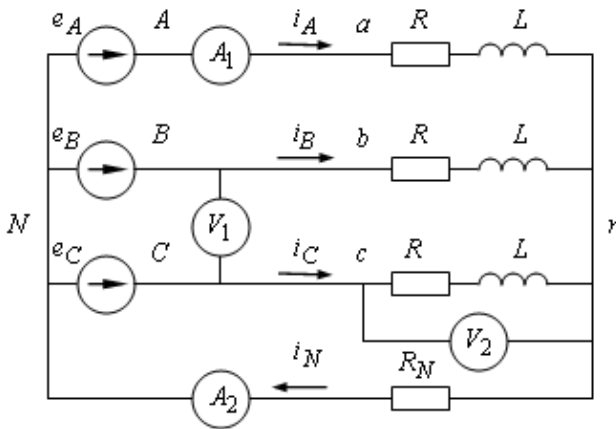


Рис. 6.11

*Розв'язання.* Розрахунки виконуємо для кожної гармоніки окремо з використанням символічного методу.

ЕРС першої гармоніки утворюють пряму послідовність чергування фаз. Струм у нейтральному проводі відсутній  $I_{N_{m(1)}} = 0 \text{ А}$  (тому що розрахунковий режим є симетричним).

Фазні напруги першої гармоніки

$$\underline{U}_{a_{m(1)}} = \underline{U}_{A_{m(1)}} = 100e^{j0^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{U}_{b_{m(1)}} = \underline{U}_{B_{m(1)}} = 100e^{-j120^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{U}_{c_{m(1)}} = \underline{U}_{C_{m(1)}} = 100e^{j120^\circ} \text{ В}.$$

Лінійна напруга першої гармоніки між вузлами В і С

$$\underline{U}_{BC_{m(1)}} = \underline{U}_{B_{m(1)}} - \underline{U}_{C_{m(1)}} = 100e^{-j120^\circ} - 100e^{j120^\circ} = 173,21e^{-j90^\circ} \text{ В}.$$

Фазні струми першої гармоніки

$$\underline{I}_{A_{m(1)}} = \frac{\underline{U}_{A_{m(1)}}}{R + j\omega L} = \frac{100e^{j0^\circ}}{30 + j40} = 1,20 - j1,60 = 2,0e^{-j53^\circ} \text{ А};$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_{B_{m(1)}} &= \underline{I}_{A_{m(1)}} e^{-j120^\circ} = 2,0e^{-j53^\circ} e^{-j120^\circ} = \\ &= -1,986 - j0,239 = 2,0e^{-j173^\circ} \text{ А}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_{C_{m(1)}} &= \underline{I}_{A_{m(1)}} e^{j120^\circ} = 2,0e^{-j53^\circ} e^{j120^\circ} = \\ &= 0,786 + j1,839 = 2,0e^{j67^\circ} \text{ А}. \end{aligned}$$

ЕРС п'ятої гармоніки утворюють зворотну послідовність чергування фаз. Струм у нейтральному проводі відсутній  $\underline{I}_{N_{m(5)}} = 0 \text{ А}$  (тому що розрахунковий режим й у цьому випадку є симетричним). Індуктивний опір навантаження збільшився в 5 разів у порівнянні з опором для першої гармоніки  $X_{L(5)} = 5X_{L(1)} = 5 \cdot 40 = 200 \text{ Ом}$ .

Фазні напруги п'ятої гармоніки

$$\underline{U}_{a_{m(5)}} = \underline{U}_{A_{m(5)}} = 20e^{j0^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{U}_{b_{m(5)}} = \underline{U}_{B_{m(5)}} = 20e^{j120^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{U}_{c_{m(5)}} = \underline{U}_{C_{m(5)}} = 20e^{-j120^\circ} \text{ В}.$$

Лінійна напруга п'ятої гармоніки між вузлами  $B$  і  $C$

$$\underline{U}_{BCm(5)} = \underline{U}_{Bm(5)} - \underline{U}_{Cm(5)} = 20e^{j120^\circ} - 20e^{-j120^\circ} = 34,64e^{j90^\circ} \text{ В.}$$

Фазні струми п'ятої гармоніки

$$\underline{I}_{Am(5)} = \frac{\underline{U}_{Am(5)}}{R + j5\omega L} = \frac{20e^{j45^\circ}}{30 + j200} = 0,080 - j0,059 = 0,099e^{-j36^\circ} \text{ А;}$$

$$\underline{I}_{Bm(5)} = \underline{I}_{Am(5)} e^{j120^\circ} = 0,099e^{-j36^\circ} e^{j120^\circ} =$$

$$= 0,011 + j0,098 = 0,099e^{-j156^\circ} \text{ А;}$$

$$\underline{I}_{Cm(5)} = \underline{I}_{Am(5)} e^{-j120^\circ} = 0,099e^{-j36^\circ} e^{-j120^\circ} =$$

$$= -0,091 - j0,039 = 0,099e^{-j156^\circ} \text{ А.}$$

ЕРС третьої гармоніки утворюють нульову послідовність чергування фаз. Індуктивний опір навантаження збільшився в 3 рази в порівнянні з опором для першої гармоніки  $X_{L(3)} = 3X_{L(1)} = 3 \cdot 40 = 120 \text{ Ом}$ .

При розрахунку третьої гармоніки необхідно врахувати, що  $\underline{U}_{Am(3)} = \underline{U}_{Bm(3)} = \underline{U}_{Cm(3)}$ , тобто потенціали вузлів  $A$ ,  $B$ ,  $C$  дорівнюють один одному. Отже, їх можна умовно об'єднати в один спільний вузол. Розрахункова схема заміщення при цьому спроститься.

Фазні напруги третьої гармоніки

$$\begin{aligned} \underline{U}_{am(3)} &= \underline{U}_{Am(3)} = \underline{U}_{bm(3)} = \underline{U}_{Bm(3)} = \\ &= \underline{U}_{cm(3)} = \underline{U}_{Cm(3)} = 50e^{j0^\circ} \text{ В.} \end{aligned}$$

Лінійна напруга третьої гармоніки між вузлами  $B$  і  $C$

$$\underline{U}_{BCm(5)} = \underline{U}_{Bm(5)} - \underline{U}_{Cm(5)} = 50e^{j0^\circ} - 50e^{j0^\circ} = 0 \text{ В.}$$

Струм у нейтральному проводі

$$\begin{aligned} \underline{I}_{Nm(3)} &= \frac{3\underline{U}_{Am(3)}}{R + j3\omega L + 3R_N} = \frac{3 \cdot 50e^{j0^\circ}}{30 + j3 \cdot 40 + 3 \cdot 10} = \\ &= 0,5 - j1,0 = 1,118e^{-j63^\circ} \text{ А.} \end{aligned}$$

Фазні струми третьої гармоніки

$$\begin{aligned} I_{A_{m(3)}} = I_{B_{m(3)}} = I_{C_{m(3)}} &= \frac{1}{3} I_{N_{m(3)}} = \frac{0,5 - j1,0}{3} = \\ &= 0,167 - 0,333j = 0,373e^{-j63^\circ} \text{ A.} \end{aligned}$$

Миттєві значення фазних струмів і струму в нейтральному проводі

$$\begin{aligned} i_A(t) &= 2,0 \sin(\omega t - 53^\circ) + 0,373 \sin(3\omega t - 63^\circ) \\ &\quad + 0,099 \sin(5\omega t - 36^\circ) \text{ A;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_B(t) &= 2,0 \sin(\omega t - 173^\circ) + 0,373 \sin(3\omega t - 63^\circ) \\ &\quad + 0,099 \sin(5\omega t + 84^\circ) \text{ A;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_C(t) &= 2,0 \sin(\omega t + 67^\circ) + 0,373 \sin(3\omega t - 63^\circ) \\ &\quad + 0,099 \sin(5\omega t - 156^\circ) \text{ A;} \end{aligned}$$

$$i_N(t) = 1,118 \sin(3\omega t - 63^\circ) \text{ A.}$$

Діючі значення лінійних струмів і струму в нейтральному проводі

$$\begin{aligned} I_A = I_B = I_C &= \sqrt{\frac{1}{2} \left( I_{A_{m(1)}}^2 + I_{A_{m(3)}}^2 + I_{A_{m(5)}}^2 \right)} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \left( 2,0^2 + 0,373^2 + 0,099^2 \right)} = 1,440 \text{ A.} \end{aligned}$$

$$I_N = \frac{I_{N_{m(3)}}}{\sqrt{2}} = \frac{1,118}{\sqrt{2}} = 0,791 \text{ A.}$$

Відповідно покази амперметрів

$$A_1 = 1,440 \text{ A; } A_2 = 0,791 \text{ A.}$$

Діючі значення фазних і лінійних напруг

$$\begin{aligned} U_A = U_B = U_C &= \sqrt{\frac{1}{2} \left( U_{A_{m(1)}}^2 + U_{A_{m(3)}}^2 + U_{A_{m(5)}}^2 \right)} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \left( 100^2 + 50^2 + 20^2 \right)} = 80,31 \text{ B.} \end{aligned}$$

Діючі значення фазних і лінійних напруг

$$U_{AB} = U_{BC} = U_{CF} = \sqrt{\frac{1}{2} \left( U_{AB_{m(1)}}^2 + U_{AB_{m(3)}}^2 + U_{AB_{m(5)}}^2 \right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} \left( 173,21^2 + 0^2 + 34,64^2 \right)} = 124,90 \text{ В.}$$

Відповідно покази вольтметрів

$$V_1 = 80,31 \text{ В}; \quad V_2 = 124,90 \text{ В.}$$

Відношення лінійної напруги до фазного

$$\frac{U_{\text{л}}}{U_{\text{ф}}} = \frac{U_{AB}}{U_A} = \frac{124,9}{80,31} = 1,56 < \sqrt{3}.$$

Повна потужність електричного кола

$$S = 3U_A I_A = 3 \cdot 80,31 \cdot 1,440 = 346,9 \text{ ВА.}$$

Активна потужність

$$P = 3I_A^2 R_A + I_N^2 R_N = 3 \cdot 1,440^2 \cdot 30 + 0,791^2 \cdot 10 = 192,9 \text{ Вт.}$$

Реактивна потужність

$$Q = \frac{3}{2} \left( I_{A_{m(1)}}^2 X_{L(1)} + I_{A_{m(3)}}^2 X_{L(3)} + I_{A_{m(5)}}^2 X_{L(5)} \right) =$$

$$= \frac{3}{2} \left( 2,0^2 \cdot 40 + 0,373^2 \cdot 120 + 0,099^2 \cdot 150 \right) = 267,2 \text{ вар.}$$

Потужність спотворення

$$T = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} = \sqrt{346,9^2 - 192,9^2 - 267,2^2} = 108,6 \text{ ВА.}$$

### Питання для самоконтролю

1. Що є причиною появи несинусоїдних струмів і напруг в електричних колах?
2. Які величини й коефіцієнти характеризують періодичні несинусоїдні струми й напруги?
3. Які гармонійні складові відсутні в спектрах кривих, які симетричні відносно: а) осі абсцис; б) осі ординат; в) початку координат?
4. Для яких електричних кіл несинусоїдного струму можна засто-

совувати методику розрахунку, що ґрунтується на розкладанні ЕРС і струмів джерел у тригонометричні ряди Фур'є?

5. При яких умовах для визначення значення повної потужності в колах несинусоїдного струму досить наявності інформації про значення активної й реактивної потужностей?
6. Визначити діюче значення напруги на затискачах ділянки електричного кола з послідовним з'єднанням резистивного й індуктивного елементів, якою протікає струм  $i(t) = 30\sin \omega t + 10\sin 3\omega t + 3\sin 5\omega t$  А, якщо основна частота  $f = 50$  Гц, а параметри елементів  $R = 10$  Ом і  $L = 20$  мГн.

*Відповідь:* 212 В.

7. Визначити діюче значення струму в вітті електричного кола з послідовним з'єднанням резистивного й індуктивного елементів, якщо до її затискачів прикладена несинусоїдна напруга  $u(t) = 100\sin \omega t + 50\sin 3\omega t$  В. Основна частота  $f = 50$  Гц, параметри елементів  $R = 10$  Ом і  $L = 25$  мГн.

*Відповідь:* 5,73 А.

8. Для електричного кола, яке розглянуто в прикладі 6.5, визначити діючі значення напруг на індуктивному і ємнісному елементах.

*Відповідь:*  $U_L = 76,3$  В;  $U_C = 114,1$  В.

9. Чим можна пояснити, що при симетричному режимі трифазного електричного кола для протікання струмів гармонік, які кратні трьом, необхідна наявність нейтрального проводу?
10. Які гармоніки і чому саме є відсутніми у лінійних струмах і напругах?

11. Трифазне електричне коло з'єднано за схемою трипровідна зірка. Фазна напруга джерела  $u(t) = 30\sin \omega t + 20\sin 3\omega t + 10\sin 5\omega t$  В. Визначити діючі значення лінійної напруги, фазних напруг джерела і навантаження та напруги зсуву нейтралі.

*Відповідь:*  $U_{\text{л}} = 38,7$  В;  $U_{\phi} = 26,5$  В;  $U_{\phi_l} = 22,4$  В;  $U_N = 14,1$  В.

12. Трифазне електричне коло з'єднано за схемою чотирипровідна зірка. Опір фази навантаження  $R = 10$  Ом. Фазна напруга джерела  $u(t) = 30\sin \omega t + 20\sin 3\omega t + 10\sin 5\omega t$  В. Визначити діюче значення струму у нейтральному проводу, якщо його опір дорівнює нулю.

*Відповідь:*  $I_N = 4,24$  А.

## Розділ сьомий ЧОТИРИПОЛЮСНИКИ

### 7.1 Загальні відомості про чотириполюсники

При аналізі електричних кіл у задачах дослідження взаємозв'язку між змінними (струмами, напругами, потужностями й т.п.) двох якихось віток електричного кола дуже часто буває зручним виділити ділянки кола, які мають дві пари затискачів. Такі ділянки називають *чотириполюсниками*. Оскільки процеси в електричних колах звичайно пов'язані з передачею енергії, ту одну пару затискачів, що приєднана до джерела електричної енергії, прийнято називати *вхідними (первинними)*, а другу, котра приєднана до приймача електричної енергії - *вихідними (вторинними)* (рис. 7.1).

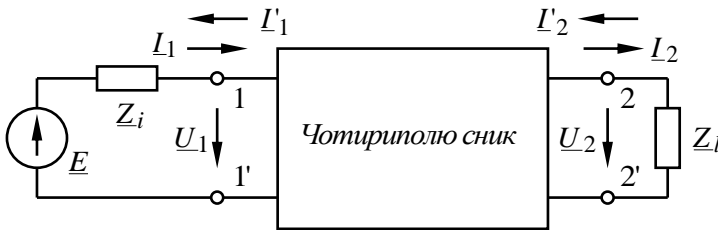


Рис. 7.1

До вхідних затискачів чотириполюсника (1-1') підімкнено джерело електричної енергії з ЕРС  $\underline{E}$  і внутрішнім опором  $\underline{Z}_i$ . До вихідних затискачів чотириполюсника (2-2') підімкнено навантаження з опором  $\underline{Z}_l$ .

Прикладами чотириполюсників є трансформатори, підсилювачі, електричні фільтри, потенціометри, стабілізатори напруги, лінії електропередачі, телефонні лінії й інші електротехнічні пристрої, у яких можна виділити дві пари затискачів (полюсів).

Подібно двополюсникам розрізняють *активні й пасивні* чотириполюсники. В активному чотириполюснику є некомпенсовані внутрішні джерела енергії, а в пасивному таких джерел енергії немає. Прикладами активних чотириполюсників є підсилювачі, каскади радіопередавачів і радіоприймачів й ін. Прикладами пасивних чотириполюсників є кабельні або повітряні лінії електропередачі, електричні фільтри й ін.

Чотириполюсники бувають *автономними й неавтономними*. На затискачах автономного чотириполюсника після відімкнення зовнішніх джерел енергії залишається напруга, що обумовлена на-

явністю некомпенсованих внутрішніх джерел, тобто такий чотириполюсник обов'язково є активним. У протилежному випадку чотириполюсник є неавтономним.

Чотириполюсники поділяють на *лінійні* й *нелінійні*. Чотириполюсник є лінійним, якщо напруга й струм на його вихідних зажимах лінійно залежать від напруги й струму на вхідних зажимах. Прикладами лінійних чотириполюсників є лінії зв'язку, фільтри, прикладами нелінійних - випрямлячі, інвертори, перетворювачі частоти.

Розрізняють чотириполюсники *симетричні* й *несиметричні*. Чотириполюсник є симетричним, якщо зміна місцями вхідних і вихідних зажимів не змінює струмів і напруг в електричному колі, з яким чотириполюсник з'єднаний. У протилежному випадку чотириполюсник є несиметричним.

Також чотириполюсники поділяють на *оборотні* й *необоротні* чотириполюсники. В оборотних чотириполюсниках відношення напруги на вході до струму на виході (*передаточний опір*) не залежить від того, яка пара зажимів є вхідною, а яка вихідною. У протилежному випадку чотириполюсник є необоротним. Пасивні лінійні чотириполюсники й симетричні чотириполюсники завжди є оборотними.

Залежно від схеми внутрішніх сполучень (або еквівалентної схеми заміщення) розрізняють: *T*-образний (рис. 7.2, *а*), *Π*-образний (рис. 7.2, *б*), *Г*-образний (рис. 7.2, *в*), мостовий (рис. 7.2, *г*) і інші типи чотириполюсників.

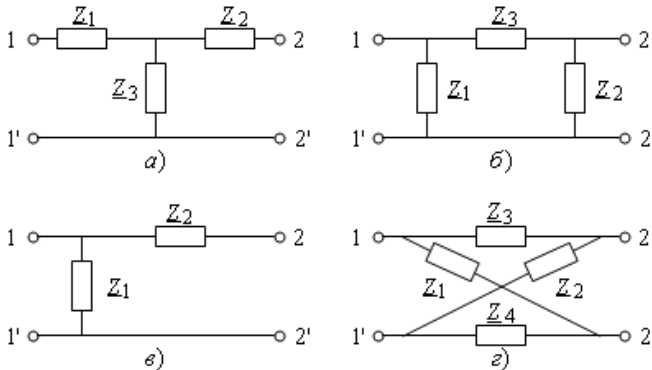


Рис. 7.2

У даному розділі, якщо це не обумовлено спеціально, розглядаються лінійні пасивні чотириполюсники.

## 7.2 Системи рівнянь чотириполюсників

Комплексні діючі значення струмів і напруг на вході й виході лінійного чотириполюсника зв'язані між собою системою із двох лінійних рівнянь, причому будь-які дві із цих чотирьох величин можна розглядати в якості початкових, а інші дві в якості обумовлених (у випадку нелінійних чотириполюсників ці залежності носять більш складний характер). Коефіцієнти при струмах і напругах у системі рівнянь являють собою комплексні числа, які залежать як від внутрішньої структури чотириполюсника та параметрів його елементів, так й від частоти джерела енергії, що підімкнено до чотириполюсника.

Оскільки лінійний чотириполюсник характеризується чотирма величинами, а кількість сполучень із чотирьох по два дорівнює шести, то є шість різних систем рівнянь, кожна з яких виражає різні пари величин через інші. Коефіцієнти цих шести систем рівнянь у випадку постійної частоти джерела енергії є незмінними й тому є параметрами чотириполюсника. Традиційно ці параметри називають *параметрами A-, B-, G-, H-, Y- і Z-форми* запису рівнянь чотириполюсника. Чотириполюсник є заданим, якщо його параметри є відомими.

Конкретну систему рівнянь вибирають залежно від типа розв'язуваної задачі з міркувань зручності використання залежно від того, які зі струмів (напруг) є початковими величинами, а які - шуканими.

Основний зміст теорії чотириполюсників полягає в тім, що, використовуючи параметри чотириполюсника, можна визначати вхідні й вихідні напруги й струми чотириполюсника, не досліджуючи процеси всередині нього.

Варіант зі струмами  $I_1$ ,  $I_2$  називають *прямою передачею*, а зі струмами  $I'_1$ ,  $I'_2$  - *зворотною*. Як впливає зі схеми чотириполюсника (рис. 7.1)  $I_1 = -I'_1$ ,  $I_2 = -I'_2$ .

У випадку, коли чотириполюсник виступає в ролі проміжної ланки між джерелом енергії й опором навантаження (джерело енергії підімкнено до затискачів 1-1', а навантаження - до затискачів 2-2'), заданими величинами є вихідні напруга  $U_2$  й струм  $I_2$ , а шуканими величинами, які характеризують режим роботи чотириполюсника на вході - вхідні напруга  $U_1$  й струм  $I_1$ . Зв'язок між ними

встановлює система параметрів прямої передачі

$$\begin{cases} U_1 = \underline{A}_{11} U_2 + \underline{A}_{12} I_2; \\ I_1 = \underline{A}_{21} U_2 + \underline{A}_{22} I_2, \end{cases} \quad (7.1)$$

де  $\underline{A}_{11}$ ,  $\underline{A}_{12}$ ,  $\underline{A}_{21}$ ,  $\underline{A}_{22}$  - параметри  $A$ -форми запису рівнянь чотириполюсника.

Для аналізу передачі, коли джерело енергії підімкнено до затискачів 2-2', а навантаження - до затискачів 1-1', використовують систему рівнянь зворотної передачі

$$\begin{cases} U_2 = \underline{B}_{11} U_1 + \underline{B}_{12} I_1; \\ I_2 = \underline{B}_{21} U_1 + \underline{B}_{22} I_1, \end{cases} \quad (7.2)$$

де  $\underline{B}_{11}$ ,  $\underline{B}_{12}$ ,  $\underline{B}_{21}$ ,  $\underline{B}_{22}$  - параметри  $B$ -форми запису рівнянь чотириполюсника.

У технічній літературі зустрічається й інше позначення параметрів  $A$ - і  $B$ -форми запису рівнянь чотириполюсника

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \underline{A}_{11} = \underline{B}_{22}; & \underline{B} &= \underline{A}_{12} = \underline{B}_{12}; \\ \underline{C} &= \underline{A}_{21} = \underline{B}_{21}; & \underline{D} &= \underline{A}_{22} = \underline{B}_{11}. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Параметри  $\underline{A}$  й  $\underline{D}$  є безрозмірними величинами. Одиницею вимірювання параметра  $\underline{B}$  є *ом* ( $Om$ ), параметра  $\underline{C}$  - *сименс* ( $Cим$ ).

Якщо заданими величинами є вхідна напруга й вихідний струм, а шуканими величинами - вихідна напруга й вхідний струм, то використовують систему рівнянь із параметрами  $G$ -форми

$$\begin{cases} I_1 = \underline{G}_{11} U_1 + \underline{G}_{12} I_2; \\ U_2 = \underline{G}_{21} U_1 + \underline{G}_{22} I_2, \end{cases} \quad (7.4)$$

де  $\underline{G}_{11}$ ,  $\underline{G}_{12}$ ,  $\underline{G}_{21}$ ,  $\underline{G}_{22}$  - параметри  $G$ -форми запису рівнянь чотириполюсника.

Якщо заданими величинами є вихідна напруга й вхідний струм, а шуканими величинами - вхідна напруга й вихідний струм, то використовують систему рівнянь із параметрами  $H$ -форми

$$\begin{cases} U_1 = \underline{H}_{11} I_1 + \underline{H}_{12} U_2; \\ I_2 = \underline{H}_{21} I_1 + \underline{H}_{22} U_2, \end{cases} \quad (7.5)$$

де  $\underline{H}_{11}$ ,  $\underline{H}_{12}$ ,  $\underline{H}_{21}$ ,  $\underline{H}_{22}$  - параметри  $H$ -форми запису рівнянь чо-

тириполюсника.

У випадку коли чотириполюсник є оборотним, виконуються рівності  $\underline{G}_{12} = \underline{G}_{21}$  й  $\underline{H}_{12} = \underline{H}_{21}$ . Якщо чотириполюсник є симетричним, то додатково виконуються рівності  $\underline{G}_{11} = \underline{G}_{22}$  й  $\underline{H}_{11} = \underline{H}_{22}$ . У цьому випадку властивості чотириполюсника визначаються тільки двома незалежними параметрами (наприклад,  $\underline{Z}_{11}$  і  $\underline{Z}_{12}$  або  $\underline{H}_{11}$  й  $\underline{H}_{12}$ ).

Параметри  $\underline{G}_{12}$ ,  $\underline{G}_{21}$ ,  $\underline{H}_{12}$  і  $\underline{H}_{21}$  є безрозмірними величинами. Одиницею вимірювання параметрів  $\underline{G}_{22}$  й  $\underline{H}_{11}$  є ом (Ом), параметрів  $\underline{G}_{11}$  й  $\underline{H}_{22}$  - сименс (Сим).

Якщо заданими величинами є вхідна й вихідна напруги, а шуканими величинами - вхідний і вихідний струми, то використають систему рівнянь із параметрами Y-форми

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{Y}_{11}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{12}\underline{U}_2; \\ \underline{I}'_2 = \underline{Y}_{21}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{U}_2, \end{cases} \quad (7.6)$$

де  $\underline{Y}_{11}$ ,  $\underline{Y}_{12}$ ,  $\underline{Y}_{21}$ ,  $\underline{Y}_{22}$  - параметри Y-форми запису рівнянь чотириполюсника.

Одиницею виміру параметрів Y-форми є сименс (Сим), тому що за своєю фізичною сутності ці параметри є комплексними провідностями.

$$\text{Дійсно, } \underline{Y}_{11} = \left. \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1} \right|_{\underline{U}_2=0} \quad - \text{ вхідна комплексна провідність у}$$

випадку короткого замикання вихідних затискачів 2-2',

$$\underline{Y}_{22} = \left. \frac{\underline{I}'_2}{\underline{U}_2} \right|_{\underline{U}_1=0} \quad - \text{ вхідна комплексна провідність із боку затискачів}$$

2-2' у випадку короткого замикання вхідних затискачів 1-1',

$$\underline{Y}_{12} = \left. \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2} \right|_{\underline{U}_1=0} \quad - \text{ передаточна (взаємна) комплексна провідність у}$$

випадку короткого замикання вхідних затискачів 1-1',

$$\underline{Y}_{21} = \left. \frac{\underline{I}'_2}{\underline{U}_1} \right|_{\underline{U}_2=0} \quad - \text{ передаточна (взаємна) комплексна провідність у}$$

випадку короткого замикання вихідних затискачів 2-2'.

У випадку коли чотириполюсник є оборотним, виконується рівність  $\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21}$ . Якщо чотириполюсник є симетричним, то додатково виконується рівність  $\underline{Y}_{11} = \underline{Y}_{22}$  і тому його властивості визначаються тільки двома незалежними параметрами (наприклад,  $\underline{Y}_{11}$  і  $\underline{Y}_{12}$ ).

Якщо заданими величинами є вхідний і вихідний струми, а шуканими величинами - вхідна й вихідна напруги, то використовують систему рівнянь із параметрами Z-форми

$$\begin{cases} U_1 = \underline{Z}_{11} I_1 + \underline{Z}_{12} I_2; \\ U_2 = \underline{Z}_{21} I_1 + \underline{Z}_{22} I_2, \end{cases} \quad (7.7)$$

Одиницею вимірювання параметрів Z-форми є ом ( $\Omega$ ), тому що за своєю фізичною сутністю ці параметри є комплексними опорами.

Дійсно  $\underline{Z}_{11} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{I_2=0}$  - *вхідний комплексний опір* з боку за-

тискачів 1-1' у випадку коли вихідних затискачі 2-2' є розімкнени-

ми,  $\underline{Z}_{12} = \left. \frac{U_1}{I_2} \right|_{I_1=0}$  - *передаточний (взаємний) комплексний опір* у

випадку коли затискачі 1-1' є розімкнутими,  $\underline{Z}_{21} = \left. \frac{U_2}{I_1} \right|_{I_2=0}$  - *пере-*

*датний (взаємний) комплексний опір* у випадку коли затискачі 2-2' є

розімкнутими,  $\underline{Z}_{22} = \left. \frac{U_2}{I_2} \right|_{I_1=0}$  - *вхідний комплексний опір* з боку за-

тискачів 2-2' у випадку коли затискачі 1-1' є розімкнутими.

У випадку якщо чотириполюсник є оборотним, то виконується рівність  $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}$ . Якщо чотириполюсник є симетричним, то додатково виконується рівність  $\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{22}$  і його властивості визначаються тільки двома незалежними параметрами (наприклад,  $\underline{Z}_{11}$  і  $\underline{Z}_{12}$ ).

Отримані рівняння дозволяють повною мірою відтворити режим роботи будь-якого чотириполюсника.

### 7.3 Взаємозв'язок параметрів різних форм запису

Якщо відомі параметри однієї із шести форм чотириполюсника, то можна визначити параметри будь-якої іншої форми. Перехід здійснюється шляхом розв'язання систем рівнянь чотириполюсника щодо шуканих величин.

Як приклад знайдемо взаємозв'язок між параметрами  $A$ - і  $Y$ -форми. Із другого рівняння системи (7.6) виражаємо, з урахуванням співвідношення  $I_2 = -I'_2$ , напругу  $\underline{U}_1$  й підставляємо її в перше рівняння системи

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = -\frac{Y_{22}}{Y_{21}}\underline{U}_2 - \frac{1}{Y_{21}}I_2; \\ I_1 = Y_{11}\left(-\frac{Y_{22}}{Y_{21}}\underline{U}_2 - \frac{1}{Y_{21}}I_2\right) + Y_{12}\underline{U}_2. \end{cases} \quad (7.8)$$

Остаточно одержуємо

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = -\frac{Y_{22}}{Y_{21}}\underline{U}_2 - \frac{1}{Y_{21}}I_2; \\ I_1 = \frac{Y_{12}Y_{21} - Y_{11}Y_{22}}{Y_{21}}\underline{U}_2 - \frac{Y_{11}}{Y_{21}}I_2. \end{cases} \quad (7.9)$$

Зіставляючи (7.1) і (7.9), дістаємо

$$\begin{aligned} \underline{A} = \underline{A}_{11} &= -\frac{Y_{22}}{Y_{21}}; & \underline{B} = \underline{A}_{12} &= -\frac{1}{Y_{21}}; \\ \underline{C} = \underline{A}_{21} &= -\frac{|Y|}{Y_{21}}; & \underline{D} = \underline{A}_{22} &= -\frac{Y_{11}}{Y_{21}}, \end{aligned} \quad (7.10)$$

де  $|Y| = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}$  - визначник, що складений з параметрів  $Y$ -форми.

З огляду на те, що відповідно до принципу взаємності  $Y_{12} = Y_{21}$ , видно, що параметри  $A$ -форми ( $B$ -форми) чотириполюсника зв'язані між собою співвідношенням

$$\underline{AD} - \underline{BC} = \underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21} = \frac{Y_{22}Y_{11}}{Y_{21}Y_{21}} - \frac{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}}{Y_{21}Y_{21}} = 1. \quad (7.11)$$

Аналогічним прийомом здійснюють перехід від довільних параметрів однієї форми до параметрів іншої форми.

Оскільки всі шість систем параметрів описують один чоти-

риполюсник, то вони зв'язані між собою формулами переходу. У табл. 7.1 представлені в матричній формі переходи від одних форм параметрів чотириполюсників до інших. З огляду на співвідношення (7.3) параметри  $B$ -форми в таблиці не приведені.

Таблиця 7.1

|                          |   | Від параметрів якої форми |                      |                         |                        |                        |                        |                         |                        |                        |                        |                        |
|--------------------------|---|---------------------------|----------------------|-------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|-------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
|                          |   | A                         |                      | H                       |                        | G                      |                        | Y                       |                        | Z                      |                        |                        |
| До параметрів якої форми | A | $\underline{A}_{11}$      | $\underline{A}_{12}$ | $-\underline{\Delta}_H$ | $\underline{H}_{11}$   | 1                      | $\underline{G}_{22}$   | $-\underline{Y}_{22}$   | -1                     | $\underline{Z}_{11}$   | $\underline{\Delta}_Z$ |                        |
|                          |   | $\underline{A}_{21}$      | $\underline{A}_{22}$ | $\underline{H}_{21}$    | $\underline{H}_{21}$   | $\underline{G}_{21}$   | $\underline{G}_{21}$   | $\underline{Y}_{21}$    | $\underline{Y}_{21}$   | $\underline{Z}_{21}$   | $\underline{Z}_{21}$   |                        |
|                          |   |                           |                      | $-\underline{H}_{22}$   | -1                     | $\underline{G}_{11}$   | $\underline{\Delta}_G$ | $-\underline{\Delta}_Y$ | $-\underline{Y}_{11}$  | 1                      | $\underline{Z}_{22}$   |                        |
|                          | H |                           | $\underline{A}_{12}$ | 1                       | $\underline{H}_{11}$   | $\underline{H}_{12}$   | $\underline{G}_{22}$   | $-\underline{G}_{12}$   | 1                      | $-\underline{Y}_{12}$  | $\underline{\Delta}_Z$ | $\underline{Z}_{12}$   |
|                          |   |                           | $\underline{A}_{22}$ | $\underline{A}_{22}$    | $\underline{H}_{21}$   | $\underline{H}_{22}$   | $\underline{\Delta}_G$ | $\underline{\Delta}_G$  | $\underline{Y}_{11}$   | $\underline{Y}_{11}$   | $\underline{Z}_{22}$   | $\underline{Z}_{22}$   |
|                          |   |                           | -1                   | $\underline{A}_{21}$    | $\underline{H}_{21}$   | $\underline{H}_{22}$   | $-\underline{G}_{21}$  | $\underline{G}_{11}$    | $\underline{Y}_{21}$   | $\underline{\Delta}_Y$ | $-\underline{Z}_{21}$  | 1                      |
|                          |   |                           | $\underline{A}_{22}$ | $\underline{A}_{22}$    |                        |                        | $\underline{\Delta}_G$ | $\underline{\Delta}_G$  | $\underline{Y}_{11}$   | $\underline{Y}_{11}$   | $\underline{Z}_{22}$   | $\underline{Z}_{22}$   |
|                          | G |                           | $\underline{A}_{21}$ | -1                      | $\underline{H}_{22}$   | $-\underline{H}_{12}$  | $\underline{G}_{11}$   | $\underline{G}_{12}$    | $\underline{\Delta}_Y$ | $\underline{Y}_{12}$   | 1                      | $-\underline{Z}_{12}$  |
|                          |   |                           | $\underline{A}_{11}$ | $\underline{A}_{11}$    | $\underline{\Delta}_H$ | $\underline{\Delta}_H$ | $\underline{G}_{21}$   | $\underline{G}_{22}$    | $\underline{Y}_{22}$   | $\underline{Y}_{22}$   | $\underline{Z}_{11}$   | $\underline{Z}_{11}$   |
|                          |   |                           | 1                    | $\underline{A}_{12}$    | $-\underline{H}_{21}$  | $\underline{H}_{11}$   | $\underline{G}_{21}$   | $\underline{G}_{22}$    | $-\underline{Y}_{21}$  | 1                      | $\underline{Z}_{21}$   | $\underline{\Delta}_Z$ |
|                          | Y |                           | $\underline{A}_{11}$ | $\underline{A}_{11}$    | $\underline{\Delta}_H$ | $\underline{\Delta}_H$ | $\underline{G}_{21}$   | $\underline{G}_{22}$    | $\underline{Y}_{22}$   | $\underline{Y}_{22}$   | $\underline{Z}_{11}$   | $\underline{Z}_{11}$   |
|                          |   |                           | $\underline{A}_{12}$ | $\underline{A}_{12}$    | $\underline{H}_{11}$   | $\underline{H}_{11}$   | $\underline{G}_{22}$   | $\underline{G}_{22}$    | $\underline{Y}_{11}$   | $\underline{Y}_{12}$   | $\underline{\Delta}_Z$ | $\underline{\Delta}_Z$ |
|                          |   | -1                        | $\underline{A}_{11}$ | $\underline{H}_{21}$    | $\underline{\Delta}_H$ | $-\underline{G}_{21}$  | 1                      | $\underline{Y}_{21}$    | $\underline{Y}_{22}$   | $-\underline{Z}_{21}$  | $\underline{Z}_{11}$   |                        |
|                          |   | $\underline{A}_{12}$      | $\underline{A}_{12}$ | $\underline{H}_{11}$    | $\underline{H}_{11}$   | $\underline{G}_{22}$   | $\underline{G}_{22}$   |                         |                        | $\underline{\Delta}_Z$ | $\underline{\Delta}_Z$ |                        |
| Z                        |   | $\underline{A}_{11}$      | 1                    | $\underline{\Delta}_H$  | $\underline{H}_{12}$   | 1                      | $-\underline{G}_{12}$  | $\underline{Y}_{22}$    | $-\underline{Y}_{12}$  | $\underline{Z}_{11}$   | $\underline{Z}_{12}$   |                        |
|                          |   | $\underline{A}_{21}$      | $\underline{A}_{21}$ | $\underline{H}_{22}$    | $\underline{H}_{22}$   | $\underline{G}_{11}$   | $\underline{G}_{11}$   | $\underline{\Delta}_Y$  | $\underline{\Delta}_Y$ | $\underline{Z}_{21}$   | $\underline{Z}_{22}$   |                        |
|                          |   | 1                         | $\underline{A}_{22}$ | $-\underline{H}_{21}$   | 1                      | $\underline{G}_{21}$   | $\underline{\Delta}_G$ | $-\underline{Y}_{21}$   | $\underline{Y}_{11}$   | $\underline{Z}_{21}$   | $\underline{Z}_{22}$   |                        |
|                          |   | $\underline{A}_{21}$      | $\underline{A}_{21}$ | $\underline{H}_{22}$    | $\underline{H}_{22}$   | $\underline{G}_{11}$   | $\underline{G}_{11}$   | $\underline{\Delta}_Y$  | $\underline{\Delta}_Y$ |                        |                        |                        |

У табл. 7.1 для наочності використані наступні позначення  $\underline{\Delta}_H = \underline{H}_{11}\underline{H}_{22} - \underline{H}_{12}\underline{H}_{21}$ ;  $\underline{\Delta}_Y = \underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}$ ;  $\underline{\Delta}_Z = \underline{Z}_{11}\underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21}$ ;  $\underline{\Delta}_G = \underline{G}_{11}\underline{G}_{22} - \underline{G}_{12}\underline{G}_{21}$ .

Аналіз співвідношень між параметрами чотириполюсників, які приведені в табл. 7.1, виявляє, що

$$\underline{H}_{12} = -\underline{H}_{21}; \underline{G}_{12} = -\underline{G}_{21}; \underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21}; \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}. \quad (7.12)$$

З формули (7.11) і виразів (7.12) випливає, що при використанні будь-якої форми запису рівнянь чотириполюсників незалежними є тільки три із чотирьох параметрів. Таким чином, будь-який

пасивний несиметричний чотириполюсник однозначно задається трьома будь-якими параметрами. Визначення параметрів виконують або розрахунковим шляхом, якщо відомі внутрішня структура чотириполюсника й параметри елементів, з яких він складається, або експериментальним шляхом за результатами досліджування трьох режимів.

*Приклад 7.1.* Параметрами несиметричного чотириполюсника є  $\underline{A}_{11} = -j10$ ,  $\underline{A}_{12} = 20 \text{ Ом}$ ,  $\underline{A}_{21} = j0,05 \text{ Сим}$ . Визначити  $\underline{A}_{22}$ .

*Розв'язання.* З формули (7.11) випливає

$$\underline{A}_{22} = \frac{1 + \underline{A}_{12} \underline{A}_{21}}{\underline{A}_{11}} = \frac{1 + 20 \cdot j0,05}{-j10} = -0,1 + 0,1 = 0,141e^{j135^\circ}.$$

#### 7.4 Схеми заміщення чотириполюсників

Тому що довільний пасивний чотириполюсник характеризується тільки трьома незалежними параметрами, то найпростіша еквівалентна схема заміщення чотириполюсника повинна містити три елементи. Використовують два різновиди схем заміщення: *T-образна еквівалентна схема заміщення чотириполюсника*, що представлена на рис. 7.3, а й *П-образна еквівалентна схема заміщення чотириполюсника*, що представлена на рис. 7.3, б. Комплексні величини  $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3$  є незалежними параметрами даних схем заміщення.

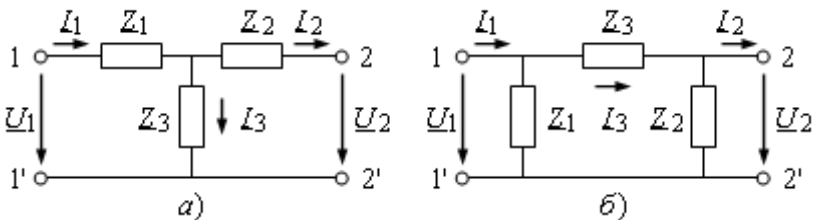


Рис. 7.3

Використовуючи закони Кірхгофа, виражаємо вхідні напругу  $\underline{U}_1$  й струм  $\underline{I}_1$  через вихідні напругу  $\underline{U}_2$  й струм  $\underline{I}_2$  для *T*-образної еквівалентної схеми заміщення

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 + \underline{Z}_2 \underline{I}_2 + \underline{U}_2; \\ \underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3. \end{cases} \quad (7.13)$$

Урахувавши, що за другим законом Кірхгофа

$\underline{Z}_3 I_3 = \underline{Z}_2 I_2 + \underline{U}_2$ , перетворюємо праві частини рівнянь

$$\begin{cases} U_1 = \left(1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_3}\right) U_2 + \left(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}\right) I_2; \\ I_1 = \frac{1}{\underline{Z}_3} U_2 + \left(1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}\right) I_2. \end{cases} \quad (7.14)$$

Зіставивши системи рівнянь (7.1) і (7.14) дістаємо зв'язок між параметрами А-форми запису рівнянь чотириполюсника і його Т-образної еквівалентної схеми заміщення

$$\begin{aligned} A_{11} &= 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_3}; & A_{12} &= \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}; \\ A_{21} &= \frac{1}{\underline{Z}_3}; & A_{22} &= 1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}, \end{aligned} \quad (7.15)$$

або

$$\underline{Z}_1 = \frac{A_{11} - 1}{A_{21}}; \quad \underline{Z}_2 = \frac{A_{22} - 1}{A_{21}}; \quad \underline{Z}_3 = \frac{1}{A_{21}}. \quad (7.16)$$

Аналогічного роду міркування можуть бути виконані й для П-образної еквівалентної схеми заміщення

$$\begin{cases} U_1 = \underline{Z}_3 I_3 + \underline{U}_2; \\ I_1 = \frac{U_1}{\underline{Z}_1} + I_3. \end{cases} \quad (7.17)$$

Ураховуючи, що  $I_3 = I_2 + \underline{U}_2 / \underline{Z}_2$ , перетворюємо праві частини рівнянь

$$\begin{cases} U_1 = \left(1 + \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2}\right) U_2 + \underline{Z}_3 I_2; \\ I_1 = \left(\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}\right) U_2 + \left(1 + \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1}\right) I_2. \end{cases} \quad (7.18)$$

Зіставляючи системи рівнянь (7.1) і (7.18) одержуємо зв'язок між параметрами А-форми запису рівнянь чотириполюсника і його П-образної еквівалентної схеми заміщення

$$\begin{aligned} A_{11} &= 1 + \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2}; & A_{12} &= \underline{Z}_3; \\ A_{21} &= \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}; & A_{22} &= 1 + \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1}, \end{aligned} \quad (7.19)$$

або

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22} - 1}; \quad \underline{Z}_2 = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{11} - 1}; \quad \underline{Z}_3 = \underline{A}_{12}. \quad (7.20)$$

З вищесказаного можна зробити висновок, що знаючи параметри  $A$ -форми запису рівнянь чотириполюсника (або будь-який іншої), завжди можна знайти параметри його  $T$ - і  $P$ -образних еквівалентних схем заміщення.

*Приклад 7.2.* Відомі комплексні опори елементів  $P$ -образної еквівалентної схеми заміщення чотириполюсника  $\underline{Z}_1 = 10 \text{ Ом}$ ;  $\underline{Z}_2 = j20 \text{ Ом}$  й  $\underline{Z}_3 = 20 \text{ Ом}$ . Визначити параметри  $A$ -форми запису рівнянь чотириполюсника.

*Розв'язання.* Скористаємося формулами (7.19) і одержимо

$$\underline{A}_{11} = 1 + \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2} = 1 + \frac{20}{j20} = 1 - j1 = 1,41e^{j45^\circ};$$

$$\underline{A}_{12} = \underline{Z}_3 = 20 + j0 = 20e^{j0^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{A}_{21} = \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2} = \frac{10 + j20 + 20}{10 \cdot j20} = 0,1 - j0,15 =$$

$$= 0,180e^{-j56^\circ} \text{ Сим};$$

$$\underline{A}_{22} = 1 + \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1} = 1 + \frac{20}{10} = 3.$$

*Приклад 7.3.* Відомі параметри  $A$ -форми запису рівнянь чотириполюсника  $\underline{A}_{11} = j1$ ;  $\underline{A}_{21} = j0,05 \text{ Сим}$  й  $\underline{A}_{22} = 6$ . Визначити комплексні опори елементів  $T$ -образної еквівалентної схеми заміщення чотириполюсника.

*Розв'язання.* Скористаємося формулами (7.19) і одержимо

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{A}_{11} - 1}{\underline{A}_{21}} = \frac{j1 - 1}{j0,05} = 20 + j20 = 28,3e^{j45^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{A}_{22} - 1}{\underline{A}_{21}} = \frac{6 - 1}{j0,05} = -j100 = 100e^{-j90^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_3 = \frac{1}{\underline{A}_{21}} = \frac{1}{j0,05} = -j20 = 20e^{-j90^\circ} \text{ Ом}.$$

### 7.5 Експериментальне визначення параметрів А-форми чотириполосника

Параметри чотириполосника  $A_{11}$ ;  $A_{12}$ ;  $A_{21}$ ;  $A_{22}$  можна визначити експериментально, досліджуючи режими холостого ходу й короткого замикання при живленні з боку первинних і вторинних затискачів. Одним з найбільш зручних експериментальних методів визначення коефіцієнтів чотириполосника ґрунтується на досліді холостого ходу й короткого замикання при живленні з боку вторинних затискачів і досліді холостого ходу при живленні з боку первинних затискачів.

Якщо джерело енергії підімкнено з боку вхідних затискачів, то у режимі холостого ходу  $Z_l = \infty$ ;  $I_2 = 0$ . Із рівнянь (7.1) і (7.3) маємо вхідний опір щодо затискачів 1-1' (рис. 7.1)

$$Z_{o1} = \frac{U_{o1}}{I_{o1}} = \frac{A_{11}}{A_{21}} = \frac{B_{22}}{B_{21}}. \quad (7.21)$$

Якщо джерело енергії підімкнено з боку вихідних затискачів, то у режимі холостого ходу  $Z_l = \infty$ ;  $I'_1 = 0$ . Із рівнянь (7.1) і (7.3) маємо вхідний опір щодо затискачів 2-2' (рис. 7.1)

$$Z_{o2} = \frac{U_{o2}}{I'_{o2}} = \frac{A_{22}}{A_{21}} = \frac{B_{11}}{B_{21}}. \quad (7.22)$$

Якщо джерело енергії підімкнено з боку вихідних затискачів, то у режимі короткого замикання  $Z_l = 0$ ;  $U_1 = 0$ . Із рівнянь (7.1) і (7.3) маємо вхідний опір щодо затискачів 2-2' (рис. 7.1)

$$Z_{k2} = \frac{U_{k2}}{I'_{k2}} = \frac{A_{12}}{A_{11}} = \frac{B_{12}}{B_{22}}. \quad (7.23)$$

Використовуючи рівняння (7.21-7.23), обчислюємо різницю  $1 - \frac{Z_{k1}}{Z_{o1}}$ , що може бути виражена через параметри А-форми й

спрощена за допомогою формули (7.11)  $1 - \frac{Z_{k2}}{Z_{o2}} = 1 - \frac{A_{12} A_{21}}{A_{11} A_{22}} = \frac{A_{11} A_{22} - A_{21} A_{12}}{A_{22} A_{11}} = \frac{1}{A_{22} A_{11}}$ . Помножуючи ліву й праву частину

цього рівняння на  $\frac{Z_{o2}}{Z_{o1}} = \frac{A_{22}}{A_{11}}$ , одержуємо  $\left(1 - \frac{Z_{k2}}{Z_{o2}}\right) \frac{Z_{o2}}{Z_{o1}} = \frac{1}{A_{11}^2}$ .

Звідси

$$\underline{A}_{11} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{o1}}{\underline{Z}_{o2} - \underline{Z}_{k2}}}. \quad (7.24)$$

З формули (7.23) маємо

$$\underline{A}_{12} = \underline{Z}_{k2} \underline{A}_{11} = \underline{Z}_{k2} \sqrt{\frac{\underline{Z}_{o1}}{\underline{Z}_{o2} - \underline{Z}_{k2}}}. \quad (7.25)$$

З формули (7.21) отримуємо

$$\underline{A}_{21} = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{Z}_{o1}} = \sqrt{\frac{1}{\underline{Z}_{o1}(\underline{Z}_{o2} - \underline{Z}_{k2})}}. \quad (7.26)$$

З формули (7.22) маємо

$$\underline{A}_{22} = \underline{Z}_{o2} \underline{A}_{21} = \frac{\underline{Z}_{o2}}{\sqrt{\underline{Z}_{o1}(\underline{Z}_{o2} - \underline{Z}_{k2})}}. \quad (7.27)$$

При експериментальному визначенні параметрів А-форми чотириполюсника через відповідні значення опору у режимах холостого ходу й короткого замикання можна скористатися відомими методами визначення комплексних опорів. Для цього необхідно виконати вимірювання напруги, струму і активної потужності з боку вхідних і вихідних затискачів. Потужність необхідно вимірювати для визначення кутів фазового зсуву між напругами й струмами. При роботі чотириполюсника в колі постійного струму вимірювання потужності не потрібно.

*Приклад 7.4.* Для визначення параметрів чотириполюсника з боку вхідних затискачів були виміряні діючі значення напруги та струму й активна потужність у режимі холостого ходу на вихідних затискачах. Потім аналогічні вимірювання були проведені з боку вихідних затискачів у режимах холостого ходу й короткого замикання на вхідних затискачах. Визначити параметри А-форми чотириполюсника, якщо він має активно-індуктивну структуру, а при вимірюваннях були отримані наступні результати

$$U_{o1} = 40 \text{ В}; \quad I_{o1} = 10 \text{ А}; \quad P_{o1} = 100 \text{ Вт};$$

$$U_{o2} = 40 \text{ В}; \quad I_{o2} = 8 \text{ А}; \quad P_{o1} = 150 \text{ Вт};$$

$$U_{k2} = 10 \text{ В}; \quad I_{k2} = 10 \text{ А}; \quad P_{o1} = 80 \text{ Вт}.$$

*Розв'язання.* Оскільки внутрішня структура чотириполюсника має активно-індуктивний характер, то значення кутів фазового зсуву між напругами й струмами у всіх дослідах є додатними.

Обчислюємо вхідний опір з боку вхідних затискачів у режимі холостого ходу з боку вихідних затискачів ( $I_2 = 0$ )

$$\underline{Z}_{o1} = Z_{o1} e^{j\varphi_{o1}} = 4e^{j76^\circ} = (0,968 + j3,881) \text{ Ом},$$

$$\text{де } Z_{o1} = \frac{U_{o1}}{I_{o1}} = \frac{40}{10} = 4 \text{ Ом}; \varphi_{o1} = \arccos \frac{P_{o1}}{U_{o1}I_{o1}} = \arccos \frac{100}{40 \cdot 10} = 76^\circ.$$

Обчислюємо вхідний опір з боку вихідних затискачів у режимі холостого ходу з боку вхідних затискачів ( $I_1 = 0$ )

$$\underline{Z}_{o2} = Z_{o2} e^{j\varphi_{o2}} = 5e^{j62^\circ} = (2,347 + j4,415) \text{ Ом},$$

$$\text{де } Z_{o2} = \frac{U_{o2}}{I_{o2}} = \frac{40}{8} = 5 \text{ Ом}; \varphi_{o2} = \arccos \frac{P_{o2}}{U_{o2}I_{o2}} = \arccos \frac{150}{40 \cdot 8} = 62^\circ.$$

Обчислюємо вхідний опір з боку вихідних затискачів у режимі короткого замикання з боку вхідних затискачів ( $U_1 = 0$ )

$$\underline{Z}_{k2} = Z_{k2} e^{j\varphi_{k2}} = 1e^{j37^\circ} = (0,799 + j0,602) \text{ Ом},$$

$$\text{де } Z_{k2} = \frac{U_{k2}}{I_{k2}} = \frac{10}{10} = 1 \text{ Ом}; \varphi_{k2} = \arccos \frac{P_{k2}}{U_{k2}I_{k2}} = \arccos \frac{80}{10 \cdot 10} = 37^\circ.$$

Обчислюємо параметри А-форми чотириполюсника, використовуючи формули (7.24-7.27)

$$\underline{A}_{11} = \sqrt{\frac{Z_{o1}}{Z_{o2} - Z_{k2}}} = \sqrt{\frac{0,968 + j3,881}{2,347 + j4,415 - 0,799 - j0,602}} =$$

$$= 0,983 + j0,070 = 0,986e^{j4^\circ};$$

$$\underline{A}_{12} = \underline{Z}_{k2} \underline{A}_{12} = (0,799 + j0,602)(0,983 + j0,070) =$$

$$= 0,744 + j0,648 = 0,986e^{j41^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{A}_{21} = \frac{\underline{A}_{11}}{Z_{o1}} = \frac{0,983 + j0,070}{0,968 + j3,881} = 0,076 - j0,234 = 0,246e^{-j72^\circ} \text{ Сим};$$

$$\underline{A}_{22} = \underline{Z}_{o2} \underline{A}_{21} = (2,347 + j4,415)(0,076 - j0,234) =$$

$$= 1,214 - j0,213 = 1,232e^{-j10^\circ}.$$

Правильність розрахунку перевіряємо за допомогою співвідношення (7.11)

$$\begin{aligned} \underline{A}_{11} \underline{A}_{22} - \underline{A}_{12} \underline{A}_{21} &= (0,983 + j0,070)(1,214 - j0,213) - \\ &- (0,744 + j0,648)(0,076 - j0,234) = 1. \end{aligned}$$

Перевірка показала, що розрахунок виконано вірно.

### 7.6 Вхідні опори чотириполюсника

У випадку, коли чотириполюсник підімкнено між джерелом живлення і навантаженням, режим роботи джерела буде істотно залежати від вхідного опору чотириполюсника. Вхідні опори можуть бути виражені через будь-яку систему параметрів чотириполюсника. Зручніше за все це зробити, скориставшись *A*- або *B*-формою параметрів.

*Вхідний опір чотириполюсника* з боку первинних затискачів можна обчислити, поділивши напругу  $\underline{U}_1$  на струм  $\underline{I}_1$ , тобто поділивши перше рівняння системи (7.1) на друге. Тоді, з урахуванням співвідношення між вторинними напругою й струмом  $\underline{U}_2 = \underline{Z}_{12} \underline{I}_2$ , одержимо

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{in1} &= \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{A}_{11} \underline{U}_2 + \underline{A}_{12} \underline{I}_2}{\underline{A}_{21} \underline{U}_2 + \underline{A}_{22} \underline{I}_2} = \frac{\underline{A}_{11} \underline{Z}_{12} \underline{I}_2 + \underline{A}_{12} \underline{I}_2}{\underline{A}_{21} \underline{Z}_{12} \underline{I}_2 + \underline{A}_{22} \underline{I}_2} = \\ &= \frac{\underline{A}_{11} \underline{Z}_{12} + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \underline{Z}_{12} + \underline{A}_{22}} = \frac{\underline{A} \underline{Z}_{12} + \underline{B}}{\underline{C} \underline{Z}_{12} + \underline{D}}. \end{aligned} \quad (7.28)$$

*Вхідний опір чотириполюсника* з боку вторинних затискачів можна обчислити, поділивши напругу  $\underline{U}_2$  на струм  $\underline{I}'_2$ , тобто поділивши перше рівняння системи (7.2) на друге. Тоді, з урахуванням співвідношення між вторинними напругою й струмом  $\underline{U}_1 = \underline{Z}_{12} \underline{I}'_1$ , одержимо

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{in2} &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}'_2} = \frac{\underline{B}_{11} \underline{U}_1 + \underline{B}_{12} \underline{I}'_1}{\underline{B}_{21} \underline{U}_2 + \underline{B}_{22} \underline{I}'_2} = \frac{\underline{B}_{11} \underline{Z}_{11} \underline{I}'_1 + \underline{B}_{12} \underline{I}'_1}{\underline{B}_{21} \underline{Z}_{11} \underline{I}'_1 + \underline{B}_{22} \underline{I}'_1} = \\ &= \frac{\underline{B}_{11} \underline{Z}_{11} + \underline{B}_{12}}{\underline{B}_{21} \underline{Z}_{11} + \underline{B}_{22}} = \frac{\underline{D} \underline{Z}_{11} + \underline{B}}{\underline{C} \underline{Z}_{11} + \underline{A}} = \frac{\underline{A}_{22} \underline{Z}_{11} + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \underline{Z}_{11} + \underline{A}_{11}}. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Зі співвідношень (7.28) і (7.29) випливає, що вхідні опори залежать як від параметрів чотириполюсника, так і від опорів навантаження. Але в окремих випадках при відключеному (режим холостого ходу) або закороченому навантаженні (режим короткого замикання) вхідні опори характеризують тільки чотириполюсник. Тому вхідні опори чотириполюсника в режимах холостого ходу й короткого замикання можна розглядати в якості його параметрів.

Дійсно, при підмиканні джерела живлення з боку первинних затискачів 1-1' відповідно до формули (7.28) маємо:

- вхідний опір у режимі холостого ходу на вторинних затис-

качах ( $I_2 = 0$ )

$$\underline{Z}_{o1} = \frac{A_{11}}{A_{21}}; \quad (7.30)$$

- вхідний опір у режимі короткого замикання на вторинних затискачах ( $U_2 = 0$ )

$$\underline{Z}_{k1} = \frac{A_{12}}{A_{22}}. \quad (7.31)$$

При підмиканні джерела живлення з боку вторинних затискачів 2-2' відповідно до формули (7.29) маємо:

- вхідний опір у режимі холостого ходу на первинних затискачах ( $I_1 = 0$ )

$$\underline{Z}_{o2} = \frac{A_{22}}{A_{21}}; \quad (7.32)$$

- вхідний опір у режимі короткого замикання на первинних затискачах ( $U_1 = 0$ )

$$\underline{Z}_{k2} = \frac{A_{12}}{A_{11}}. \quad (7.33)$$

Використовуючи співвідношення (7.30-7.33) вирази для вхідних опорів можуть бути представлені й в іншій формі. Дійсно, в цьому випадку

$$\underline{Z}_{in1} = \frac{A_{11}\underline{Z}_{l2} + A_{12}}{A_{21}\underline{Z}_{l2} + A_{22}} = \frac{A_{11}}{A_{21}} \cdot \frac{\underline{Z}_{l2} + \frac{A_{12}}{A_{11}}}{\underline{Z}_{l2} + \frac{A_{22}}{A_{21}}} = \underline{Z}_{o1} \cdot \frac{\underline{Z}_{l2} + \underline{Z}_{k2}}{\underline{Z}_{l2} + \underline{Z}_{o2}}; \quad (7.34)$$

$$\underline{Z}_{in2} = \frac{A_{22}\underline{Z}_{l1} + A_{12}}{A_{21}\underline{Z}_{l1} + A_{11}} = \frac{A_{22}}{A_{21}} \cdot \frac{\underline{Z}_{l1} + \frac{A_{12}}{A_{22}}}{\underline{Z}_{l1} + \frac{A_{11}}{A_{21}}} = \underline{Z}_{o2} \cdot \frac{\underline{Z}_{l1} + \underline{Z}_{k1}}{\underline{Z}_{l1} + \underline{Z}_{o1}}.$$

Таким чином, чотириполюсник трансформує опір навантаження в новий опір, що залежить як від значення навантаження, так і від параметрів чотириполюсника.

### 7.7 Характеристичні параметри чотириполюсника

Поряд з розглянутими вище первинними параметрами (коефіцієнтами в системах рівнянь) чотириполюсника, при розв'язанні багатьох задач використовують *характеристичні (вторинні) параметри* чотириполюсника. До них належать: *характеристичні опори, постійна передачі (міра передачі) і коефіцієнт трансформації*.

Відомо, що генератор із внутрішнім опором  $Z_i$  видає максимальну потужність у навантаження  $Z_L$  коли виконується умова  $Z_i = Z_L$ . Якщо між генератором і навантаженням перебуває чотириполюсник, то для передачі максимальної потужності від генератора до чотириполюсника необхідно узгодити вхідний опір чотириполюсника  $Z_{in1}$  із внутрішнім опором генератора, тобто виконати умову  $Z_i = Z_{in1}$ , а для передачі максимальної потужності від чотириполюсника до навантаження - узгодити вихідний опір чотириполюсника з опором навантаження, тобто виконати умову  $Z_{in2} = Z_L$ . Режим роботи чотириполюсника, коли  $Z_i = Z_{in1}$  й  $Z_{in2} = Z_L$ , називають режимом *узгодженого вмикання*.

Для будь-якого чотириполюсника існує така пара опорів, що задовольняє наступним умовам: вхідний опір з боку первинних затискачів чотириполюсника дорівнює  $Z_{C1}$ , якщо він навантажений опором  $Z_{C2}$ , вхідний опір з боку вторинних затискачів чотириполюсника дорівнює  $Z_{C2}$ , якщо він навантажений опором  $Z_{C1}$

$$\begin{aligned} Z_{in1} &= \frac{A_{11}Z_{C2} + A_{12}}{A_{21}Z_{C2} + A_{22}} = Z_{C1}; \\ Z_{in2} &= \frac{A_{22}Z_{C1} + A_{12}}{A_{21}Z_{C1} + A_{11}} = Z_{C2}. \end{aligned} \quad (7.35)$$

Ці опори називають *характеристичними опорами* чотириполюсника.

Спільне розв'язання цих рівнянь відносно  $Z_{C1}$  й  $Z_{C2}$  дає наступний результат

$$Z_{C1} = \sqrt{\frac{A_{11}A_{12}}{A_{21}A_{22}}}; \quad Z_{C2} = \sqrt{\frac{A_{22}A_{12}}{A_{21}A_{11}}}. \quad (7.36)$$

Характеристичні опори можна виразити через параметри холостого ходу й короткого замикання:

$$Z_{C1} = \sqrt{Z_{o1}Z_{k1}}; \quad Z_{C2} = \sqrt{Z_{o2}Z_{k2}}. \quad (7.37)$$

Якщо чотириполюсник узгоджений з навантаженням, тобто виконується умова  $\underline{Z}_{I1} = \frac{U_2}{I_2} = \underline{Z}_{C2} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{22} \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \underline{A}_{11}}}$ , то А-форма запису рівнянь приймає наступний вигляд:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{A}_{11} \underline{U}_2 + \underline{A}_{12} \frac{U_2}{\underline{Z}_{C2}} = \left( \underline{A}_{11} + \sqrt{\frac{\underline{A}_{11} \underline{A}_{12} \underline{A}_{21}}{\underline{A}_{22}}} \right) \underline{U}_2; \\ \underline{I}_1 = \underline{A}_{21} \underline{Z}_{C2} \underline{I}_2 + \underline{A}_{22} \underline{I}_2 = \left( \underline{A}_{22} + \sqrt{\frac{\underline{A}_{12} \underline{A}_{21} \underline{A}_{22}}{\underline{A}_{11}}} \right) \underline{I}_2. \end{cases} \quad (7.38)$$

Із системи рівнянь (7.38) можна отримати

$$\begin{cases} \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{22}}} \left( \sqrt{\underline{A}_{11} \underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12} \underline{A}_{21}} \right); \\ \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{11}}} \left( \sqrt{\underline{A}_{11} \underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12} \underline{A}_{21}} \right). \end{cases} \quad (7.39)$$

Величину

$$k_{mp} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{22}}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{C1}}{\underline{Z}_{C2}}} \quad (7.40)$$

називають *коефіцієнтом трансформації чотириполюсника*.

Вхідний опір узгодженого чотириполюсника

$$\underline{Z}_{in1} = \underline{Z}_{C1} = k_{mp}^2 \underline{Z}_{C2} = k_{mp}^2 \underline{Z}_{I2}, \quad (7.41)$$

тобто узгоджений чотириполюсник трансформує опір навантаження в  $k_{mp}^2$  разів.

Параметри  $\underline{Z}_{C1}$  й  $\underline{Z}_{C2}$  не дають можливості описати всі властивості несиметричного чотириполюсника. Для цього додатково використовують третій параметр, що зв'яже процеси на вході й виході чотириполюсника. Таким параметром є *постійна передачі (міра передачі)  $g$* , що задовольняє умові

$$e^g = k_{mp} \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = \frac{1}{k_{mp}} \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \sqrt{\underline{A}_{11} \underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12} \underline{A}_{21}}, \quad (7.42)$$

або

$$g = \ln \left( \sqrt{\underline{A}_{11} \underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12} \underline{A}_{21}} \right). \quad (7.43)$$

У загальному випадку постійна передачі - це комплексне число  $\underline{g} = a + jb$ . Його дійсну частину  $a$  називають *власним загасанням* чотириполіусника, а уявну частину  $b$  - *коефіцієнтом фази*. Власне загасанням  $a$  характеризує зміну амплітудного або діючого значення напруги або струму при проходженні сигналу через чотириполіусник, а коефіцієнт фази  $b$  - фазовий зсув між вхідними й вихідними напругами або струмами.

Тоді

$$\begin{aligned} e^{\underline{g}} &= e^{a+jb} = e^a \cdot e^{jb}; \\ a &= \ln \frac{|U_1|}{|U_2|} = \ln \frac{|I_1|}{|I_2|}; \\ b &= \psi_{U_1} - \psi_{U_2} = \psi_{I_1} - \psi_{I_2}, \end{aligned} \quad (7.44)$$

де  $\psi_{U_1}$ ;  $\psi_{U_2}$ ;  $\psi_{I_1}$ ;  $\psi_{I_2}$  - початкові фази вхідних і вихідних напруг і струмів.

Коефіцієнт трансформації та постійна передачі є безрозмірними величинами. Одиницею вимірювання власного загасання є *непер (Np)*, коефіцієнта фази - *радіан (rad)*.

Загасанням  $a = 1 \text{ Np}$  відповідає зменшення амплітудного або діючого значення напруги або струму в  $e \approx 2,718$  разу.

Постійну передачі можна виразити через параметри холостого ходу й короткого замикання

$$\text{th } \underline{g} = \sqrt{\frac{Z_{k1}}{Z_{o1}}} = \sqrt{\frac{Z_{k2}}{Z_{o2}}}. \quad (7.45)$$

У свою чергу параметри А-форми запису рівнянь чотириполіусника можуть бути виражені через його характеристичні параметри. Розв'язавши спільно рівняння (7.36) і (7.43), одержуємо

$$\begin{aligned} A_{11} &= \sqrt{\frac{Z_{C1}}{Z_{C2}}} \text{ch } \underline{g}; & A_{12} &= \sqrt{Z_{C1} Z_{C2}} \text{sh } \underline{g}; \\ A_{21} &= \frac{1}{\sqrt{Z_{C1} Z_{C2}}} \text{sh } \underline{g}; & A_{22} &= \sqrt{\frac{Z_{C2}}{Z_{C1}}} \text{ch } \underline{g}. \end{aligned} \quad (7.46)$$

Кожний з параметрів А-форми запису рівнянь чотириполіусника, що визначені за формулами (7.46), може мати як знак "+", так і знак "-".

Підставляючи знайдені коефіцієнти в А-форму запису рівнянь чотириполосника, одержуємо систему рівнянь у гіперболічних функціях

$$\begin{cases} U_1 = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{C1}}{\underline{Z}_{C2}}} (U_2 \operatorname{ch} \underline{g} + \underline{Z}_{C2} I_2 \operatorname{sh} \underline{g}); \\ I_1 = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{C2}}{\underline{Z}_{C1}}} \left( \frac{U_2}{\underline{Z}_{C2}} \operatorname{sh} \underline{g} + I_2 \operatorname{ch} \underline{g} \right). \end{cases} \quad (7.47)$$

При узгодженому навантаженні  $\underline{Z}_l = \underline{Z}_{C2}$  й напруга на вихідних затискачах  $\underline{U}_2 = \underline{Z}_{C2} I_2$ . Тому з обліком того, що  $\operatorname{sh} \underline{g} + \operatorname{ch} \underline{g} = e^{\underline{g}}$ , систему рівнянь (7.47) можна спростити:

$$\begin{cases} U_1 = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{C1}}{\underline{Z}_{C2}}} U_2 e^{\underline{g}}; \\ I_1 = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{C2}}{\underline{Z}_{C1}}} I_2 e^{\underline{g}}. \end{cases} \quad (7.48)$$

Рівняння чотириполосника в гіперболічній формі запису широко використовують у радіотехніці й автоматичі, у тому числі при описі електричних фільтрів.

*Приклад 7.5.* Відомі параметри А-форми запису рівнянь чотириполосника  $\underline{A}_{11} = j1$ ;  $\underline{A}_{12} = -j100 \text{ Ом}$ ;  $\underline{A}_{21} = j0,05 \text{ Ом}$  й  $\underline{A}_{22} = 5$ . Потрібно визначити характеристичні опори, постійну передачі й коефіцієнт трансформації.

*Розв'язання.* Використовуючи формули (7.29) визначимо характеристичні опори чотириполосника

$$\underline{Z}_{C1} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{11} \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \underline{A}_{22}}} = \sqrt{\frac{j1 \cdot (-j100)}{j0,05 \cdot 5}} = 14,1 - j14,1 = 20e^{-j45^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{C2} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{22} \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \underline{A}_{11}}} = \sqrt{\frac{5 \cdot (-j100)}{j0,05 \cdot j1}} = 70,7 + j70,7 = 100e^{j45^\circ} \text{ Ом}.$$

Використовуючи формулу (7.33) визначимо коефіцієнт трансформації чотириполосника

$$k_{mp} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{C1}}{\underline{Z}_{C2}}} = \sqrt{\frac{20e^{-j45^\circ}}{100e^{j45^\circ}}} = 0,316 - j0,316 = 0,447e^{-j45^\circ}.$$

Використовуючи формули (7.35) і (7.37) визначимо постійну передачі чотириполюсника

$$\begin{aligned} e^{\underline{g}} &= e^{a+jb} = \sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}} = \sqrt{j1 \cdot 5} + \sqrt{(-j100) \cdot j0,05} = \\ &= \sqrt{j5} + \sqrt{5} = 3,82 + j1,58 = 4,13e^{j0,392}. \end{aligned}$$

Отже,  $a = \ln 4,13 = 1,418 \text{ Нн}$ ;  $b = 0,392 \text{ рад}$ , а постійна передачі  $\underline{g} = 1,418 + j0,392$ .

## 7.8 Передатні функції чотириполюсника

*Передатною функцією* навантаженого чотириполюсника називають відношення комплексних амплітуд або комплексних діючих значень вихідного струму або напруги до комплексних амплітуд або комплексних діючих значень вхідного струму або напруги.

Якщо передатна функція являє собою відношення двох однойменних електричних величин (напруги або струму), то її називають коефіцієнтом передачі (відповідно напруги або струму).

Якщо відомі параметри чотириполюсника й опір навантаження, то коефіцієнти передачі можуть бути представлені в такий спосіб

$$\begin{aligned} k_U &= \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_2}{A_{11}U_2 + A_{12}I_2} = \frac{Z_I}{A_{11}Z_I + A_{12}}; \\ \underline{k}_I &= \frac{I_2}{I_1} = \frac{I_2}{A_{21}U_2 + A_{22}I_2} = \frac{1}{A_{21}Z_I + A_{22}}. \end{aligned} \quad (7.49)$$

Якщо передатна функція являє собою відношення двох різнойменних електричних величин, то вона є або передатним опором, або передатною провідністю

$$\begin{aligned} Z_{nep} &= \frac{U_2}{I_1} = \frac{U_2}{A_{21}U_2 + A_{22}I_2} = \frac{Z_I}{A_{21}Z_I + A_{22}}; \\ Y_{nep} &= \frac{I_2}{U_1} = \frac{I_2}{A_{11}U_2 + A_{12}I_2} = \frac{1}{A_{11}Z_I + A_{12}}. \end{aligned} \quad (7.50)$$

Коефіцієнтів передачі  $k_U$  і  $k_I$  є безрозмірними величинами. Одиницею вимірювання передатного опору  $Z_{nep}$  є *ом (Ом)*, передатної провідності  $Y_{nep}$  - *сименс (Сим)*.

У загальному випадку передатна функція - це комплексна ве-

личина, яка є функцією частоти. Модуль цієї величини називають *амплітудно-частотною характеристикою (АЧХ)* чотириполосника, а аргумент - *фазочастотною характеристикою (ФЧХ)* чотириполосника. Дані функції використовують для аналізу систем керування й автоматики.

## 7.9 Способи з'єднання пасивних чотириполосників

*Складним* називають чотириполосник, що може бути утворений у результаті з'єднання між собою декількох, зокрема двох, чотириполосників. Параметри складного чотириполосника можуть бути розраховані, якщо відомі параметри кожного зі складових чотириполосників. Залежно від схеми з'єднання чотириполосників розрахунок параметрів результуючого (еквівалентного) проводять, використовуючи відповідні форми рівняння в матричній формі. Критерієм вибору є зручність визначення параметрів складного чотириполосника.

Розрізняють каскадне, паралельне, послідовне, послідовно-паралельне й паралельно-послідовне з'єднання.

При всіх способах з'єднання чотириполосників необхідно виконувати *умову регулярності з'єднання*: як через первинні, так і через вторинні затискачі кожного чотириполосника повинні протікати рівні за значенням, але протилежні за знаком струми. Тоді матриця кожного чотириполосника залишиться такою, якою вона була до з'єднання чотириполосників між собою.

### 7.9.1 Каскадне з'єднання чотириполосників

Найбільш важливим і значимим з погляду практики, є *каскадне з'єднання* чотириполосників, тобто таке з'єднання, при якому вихідні затискачі першого чотириполосника з'єднані з відповідними вхідними затисками другого (рис. 7.4). За допомогою каскадної схеми з'єднання чотириполосників здійснюють реалізацію ліній затримки сигналів, у каскад збирають фільтри частот для зменшення амплітуд частотних складових сигналів у зоні загасання.

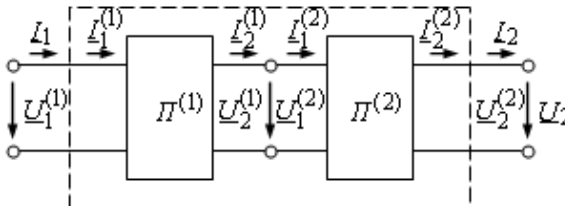


Рис. 7.4

Таке еквівалентне з'єднання двох простих чотириполюсників можна розглядати як новий більш складний чотириполюсник, параметри якого необхідно визначити. Як впливає зі схеми каскадного з'єднання вхідні напруга та струм другого чотириполюсника дорівнюють вихідним напрузі та струму першого чотириполюсника  $\underline{U}_2^{(1)} = \underline{U}_1^{(2)}$ ;  $\underline{I}_2^{(1)} = \underline{I}_1^{(2)}$ , тому зручно використовувати А-форму запису рівнянь чотириполюсника.

А-форма запису рівнянь чотириполюсників в матричній формі має наступний вигляд

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \underline{U}_1^{(1)} \\ \underline{I}_1^{(1)} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \underline{A}_{11}^{(1)} & \underline{A}_{12}^{(1)} \\ \underline{A}_{21}^{(1)} & \underline{A}_{22}^{(1)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \underline{U}_2^{(1)} \\ \underline{I}_2^{(1)} \end{vmatrix} = |\underline{A}|^{(1)} \cdot \begin{vmatrix} \underline{U}_2^{(1)} \\ \underline{I}_2^{(1)} \end{vmatrix}; \\ \begin{vmatrix} \underline{U}_1^{(2)} \\ \underline{I}_1^{(2)} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \underline{A}_{11}^{(2)} & \underline{A}_{12}^{(2)} \\ \underline{A}_{21}^{(2)} & \underline{A}_{22}^{(2)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \underline{U}_2^{(2)} \\ \underline{I}_2^{(2)} \end{vmatrix} = |\underline{A}|^{(2)} \cdot \begin{vmatrix} \underline{U}_2^{(2)} \\ \underline{I}_2^{(2)} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (7.51)$$

Тому що при каскадному з'єднанні  $\underline{U}_1 = \underline{U}_1^{(1)}$ ;  $\underline{I}_1 = \underline{I}_1^{(1)}$  й  $\underline{U}_2^{(2)} = \underline{U}_2$ ;  $\underline{I}_2^{(2)} = \underline{I}_2$ , то

$$\begin{vmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{vmatrix} = |\underline{A}|^{(1)} \cdot |\underline{A}|^{(2)} \cdot \begin{vmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{vmatrix} = |\underline{A}| \cdot \begin{vmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{vmatrix} \quad (7.52)$$

Отже, матриця параметрів А-форми запису рівнянь результуючого еквівалентного чотириполюсника дорівнює добутку матриць параметрів А-форми складових чотириполюсників

$$|\underline{A}| = |\underline{A}|^{(1)} \cdot |\underline{A}|^{(2)} = \begin{vmatrix} \underline{A}_{11}^{(1)} \cdot \underline{A}_{11}^{(2)} + \underline{A}_{12}^{(1)} \cdot \underline{A}_{21}^{(2)} & \underline{A}_{11}^{(1)} \cdot \underline{A}_{12}^{(2)} + \underline{A}_{12}^{(1)} \cdot \underline{A}_{22}^{(2)} \\ \underline{A}_{21}^{(1)} \cdot \underline{A}_{11}^{(2)} + \underline{A}_{22}^{(1)} \cdot \underline{A}_{21}^{(2)} & \underline{A}_{21}^{(1)} \cdot \underline{A}_{12}^{(2)} + \underline{A}_{22}^{(1)} \cdot \underline{A}_{22}^{(2)} \end{vmatrix} \quad (7.53)$$

У випадку каскадного з'єднання  $N$  чотириполюсників, матриця параметрів А-форми еквівалентного чотириполюсника утворюється послідовним перемножуванням матриць параметрів А-форми каскадів у порядку їхнього проходження

$$|\underline{A}| = |\underline{A}|^{(1)} \cdot |\underline{A}|^{(2)} \cdot \dots \cdot |\underline{A}|^{(N)} = \prod_{n=1}^N |\underline{A}|^{(n)} \quad (7.54)$$

Якщо забезпечити узгодження виходу першого чотириполю-

сника (каскаду) із входом другого  $\underline{Z}_{C2}^{(1)} = \underline{Z}_{C1}^{(2)}$ , а також узгодити опір навантаження з виходом другого каскаду  $\underline{Z}_{C2}^{(2)} = \underline{Z}_l$ , то вирази для напруг на затискачах чотириполіусників приймуть наступний вигляд

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_1^{(1)} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{C1}^{(1)}}{\underline{Z}_{C2}^{(1)}}} \underline{U}_2^{(1)} e^{\underline{g}^{(1)}}; \quad \underline{U}_2^{(1)} = \underline{U}_1^{(2)} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{C1}^{(2)}}{\underline{Z}_{C2}^{(2)}}} \underline{U}_2 e^{\underline{g}^{(2)}}; \quad (7.55)$$

$$\underline{U}_1 = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{C1}^{(1)}}{\underline{Z}_{C2}^{(2)}}} \underline{U}_2 e^{\underline{g}^{(1)} + \underline{g}^{(2)}}.$$

Аналогічні вирази утворюються і для струмів, що протікають через затискачі каскадів

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_1^{(1)} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{C2}^{(1)}}{\underline{Z}_{C1}^{(1)}}} \underline{I}_2^{(1)} e^{\underline{g}^{(1)}}; \quad \underline{I}_2^{(1)} = \underline{I}_1^{(2)} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{C2}^{(2)}}{\underline{Z}_{C1}^{(2)}}} \underline{I}_2 e^{\underline{g}^{(2)}}; \quad (7.56)$$

$$\underline{I}_1 = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{C2}^{(2)}}{\underline{Z}_{C1}^{(1)}}} \underline{I}_2 e^{\underline{g}^{(1)} + \underline{g}^{(2)}}.$$

Таким чином, каскадне угоджене з'єднання двох чотириполіусників можна замінити одним еквівалентним, характеристичні опори якого дорівнюють вхідному  $\underline{Z}_{C1}^{(1)}$  й вихідному  $\underline{Z}_{C2}^{(2)}$ , а постійна передачі дорівнює сумі постійні передачі чотириполіусників  $\underline{g} = \underline{g}^{(1)} + \underline{g}^{(2)}$ , тобто власне загасання  $a = a^{(1)} + a^{(2)}$  й коефіцієнт фази  $b = b^{(1)} + b^{(2)}$ .

У загальному випадку постійна передачі каскадної схеми, що укладена з  $N$  узгоджених лінійних чотириполіусників, дорівнює сумі постійних передачі чотириполіусників, з яких складається ця схема

$$\underline{g} = \underline{g}^{(1)} + \underline{g}^{(2)} + \dots + \underline{g}^{(N)} = \sum_{n=1}^N \underline{g}^{(n)}. \quad (7.57)$$

### 7.9.2 Паралельне з'єднання чотириполюсників

Паралельним з'єднанням чотириполюсників називають таке з'єднання, при якому як вхідні, так і вихідні затискачі чотириполюсників з'єднані паралельно (рис. 7.5).

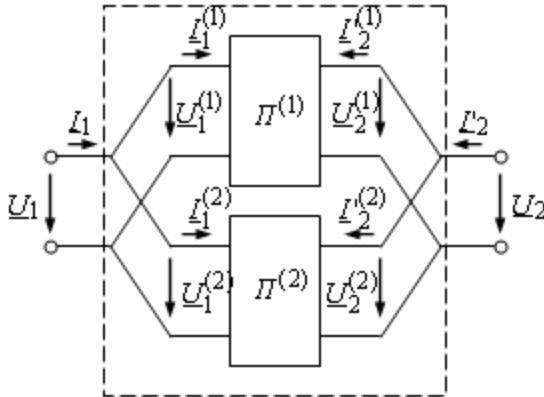


Рис. 7.5

Для визначення параметрів еквівалентного (щодо затискачів 1-1', 2-2') чотириполюсника зручно скористатися рівняннями з параметрами  $Y$ -форми, тому що вхідні й вихідні напруги чотириполюсників дорівнюють одна одній  $U_1 = U_1^{(1)} = U_1^{(2)}$  й  $U_2 = U_2^{(1)} = U_2^{(2)}$ .

$Y$ -форма запису рівнянь чотириполюсників в матричній формі має вигляд

$$\begin{vmatrix} I_1^{(1)} \\ I_2^{(1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y_{11}^{(1)} & Y_{12}^{(1)} \\ Y_{21}^{(1)} & Y_{22}^{(1)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} U_1^{(1)} \\ U_2^{(1)} \end{vmatrix} = |Y|^{(1)} \cdot \begin{vmatrix} U_1^{(1)} \\ U_2^{(1)} \end{vmatrix}; \quad (7.58)$$

$$\begin{vmatrix} I_1^{(2)} \\ I_2^{(2)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y_{11}^{(2)} & Y_{12}^{(2)} \\ Y_{21}^{(2)} & Y_{22}^{(2)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} U_1^{(2)} \\ U_2^{(2)} \end{vmatrix} = |Y|^{(2)} \cdot \begin{vmatrix} U_1^{(2)} \\ U_2^{(2)} \end{vmatrix}.$$

На підставі першого закону Кірхгофа для вузлів 1 й 2 маємо  $I_1 = I_1^{(1)} + I_1^{(2)}$  й  $I_2 = I_2^{(1)} + I_2^{(2)}$ . Тоді в матричному вигляді

$$\begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_1^{(1)} \\ I_2^{(1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} I_1^{(2)} \\ I_2^{(2)} \end{vmatrix} = \left( \begin{vmatrix} Y_{11}^{(1)} & Y_{12}^{(1)} \\ Y_{21}^{(1)} & Y_{22}^{(1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} Y_{11}^{(2)} & Y_{12}^{(2)} \\ Y_{21}^{(2)} & Y_{22}^{(2)} \end{vmatrix} \right) \cdot \begin{vmatrix} U_1 \\ U_2 \end{vmatrix} = |Y| \cdot \begin{vmatrix} U_1 \\ U_2 \end{vmatrix}. \quad (7.59)$$

Отже, матриця параметрів  $Y$ -форми запису рівнянь результуючого еквівалентного чотириполосника дорівнює сумі матриць параметрів  $Y$ -форми складових чотириполосників

$$|Y| = |Y|^{(1)} + |Y|^{(2)} = \begin{vmatrix} \underline{Y}_{11}^{(1)} + \underline{Y}_{11}^{(2)} & \underline{Y}_{12}^{(1)} + \underline{Y}_{12}^{(2)} \\ \underline{Y}_{21}^{(1)} + \underline{Y}_{21}^{(2)} & \underline{Y}_{22}^{(1)} + \underline{Y}_{22}^{(2)} \end{vmatrix}. \quad (7.60)$$

### 7.9.3 Послідовне з'єднання чотириполосників

*Послідовним з'єднанням* чотириполосників називають таке з'єднання, при якому як вхідні, так і вихідні затискачі чотириполосників з'єднані послідовно (рис. 7.6).

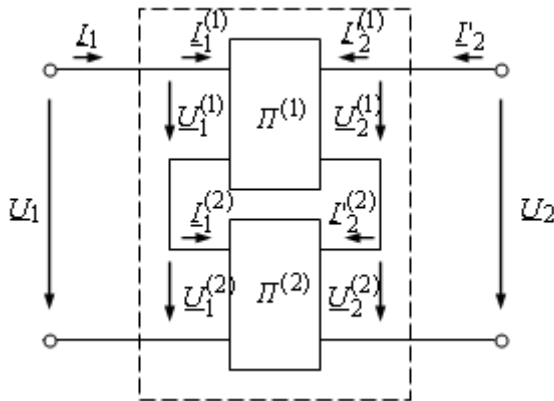


Рис. 7.6

Для визначення параметрів еквівалентного (щодо затискачів 1-1', 2-2') чотириполосника зручно скористатися рівняннями з параметрами  $Z$ -форми, тому що вхідні й вихідні струми чотириполосників дорівнюють один одному  $I_1 = I_1^{(1)} = I_1^{(2)}$  й  $I_2 = I_2^{(1)} = I_2^{(2)}$ .

$Z$ -форма запису рівнянь чотириполосників в матричній формі має вигляд

$$\begin{vmatrix} \underline{U}_1^{(1)} \\ \underline{U}_2^{(1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{Z}_{11}^{(1)} & \underline{Z}_{12}^{(1)} \\ \underline{Z}_{21}^{(1)} & \underline{Z}_{22}^{(1)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_1^{(1)} \\ I_2^{(1)} \end{vmatrix} = |Z|^{(1)} \cdot \begin{vmatrix} I_1^{(1)} \\ I_2^{(1)} \end{vmatrix}; \quad (7.61)$$

$$\begin{vmatrix} \underline{U}_1^{(2)} \\ \underline{U}_2^{(2)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{Z}_{11}^{(2)} & \underline{Z}_{12}^{(2)} \\ \underline{Z}_{21}^{(2)} & \underline{Z}_{22}^{(2)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_1^{(2)} \\ I_2^{(2)} \end{vmatrix} = |Z|^{(2)} \cdot \begin{vmatrix} I_1^{(2)} \\ I_2^{(2)} \end{vmatrix}.$$

На підставі другого закону Кірхгофа маємо  $\underline{U}_1 = \underline{U}_1^{(1)} + \underline{U}_1^{(2)}$  й  $\underline{U}_2 = \underline{U}_2^{(1)} + \underline{U}_2^{(2)}$ . Тоді в матричному вигляді

$$\begin{vmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{U}_1^{(1)} \\ \underline{U}_2^{(1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \underline{U}_1^{(2)} \\ \underline{U}_2^{(2)} \end{vmatrix} = \left( \begin{vmatrix} \underline{Z}_{11}^{(1)} & \underline{Z}_{12}^{(1)} \\ \underline{Z}_{21}^{(1)} & \underline{Z}_{22}^{(1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \underline{Z}_{11}^{(2)} & \underline{Z}_{12}^{(2)} \\ \underline{Z}_{21}^{(2)} & \underline{Z}_{22}^{(2)} \end{vmatrix} \right) \cdot \begin{vmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}'_2 \end{vmatrix} = |\underline{Z}| \cdot \begin{vmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}'_2 \end{vmatrix}. \quad (7.62)$$

Отже, матриця параметрів  $Z$ -форми запису рівнянь результуючого еквівалентного чотириполюсника дорівнює сумі матриць параметрів  $Z$ -форми складових чотириполюсників

$$|\underline{Z}| = |\underline{Z}|^{(1)} + |\underline{Z}|^{(2)} = \begin{vmatrix} \underline{Z}_{11}^{(1)} + \underline{Z}_{11}^{(2)} & \underline{Z}_{12}^{(1)} + \underline{Z}_{12}^{(2)} \\ \underline{Z}_{21}^{(1)} + \underline{Z}_{21}^{(2)} & \underline{Z}_{22}^{(1)} + \underline{Z}_{22}^{(2)} \end{vmatrix}. \quad (7.63)$$

#### 7.9.4 Послідовно-паралельне з'єднання чотириполюсників

*Послідовно-паралельним з'єднанням* чотириполюсників називають таке з'єднання, при якому вхідні затискачі чотириполюсників з'єднуються послідовно, а вихідні – паралельно (рис. 7.7).

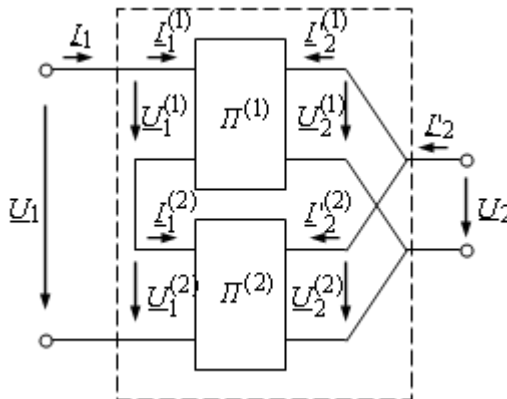


Рис. 7.7

Для визначення параметрів еквівалентного (щодо затискачів 1-1', 2-2') чотириполюсника зручно скористатися рівняннями з параметрами  $H$ -форми, тому що вхідні струми й вихідні напруги чотириполюсників дорівнюють між собою  $\underline{I}_1 = \underline{I}'_1 = \underline{I}'_1^{(2)}$  й  $\underline{U}_2 = \underline{U}_2^{(1)} = \underline{U}_2^{(2)}$ .

$H$ -форма запису рівнянь чотириполіусників в матричній формі має вигляд

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} U_1^{(1)} \\ I_2^{(1)} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} H_{11}^{(1)} & H_{12}^{(1)} \\ H_{21}^{(1)} & H_{22}^{(1)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_1^{(1)} \\ U_2^{(1)} \end{vmatrix} = |H|^{(1)} \cdot \begin{vmatrix} I_1^{(1)} \\ U_2^{(1)} \end{vmatrix}; \\ \begin{vmatrix} U_1^{(2)} \\ I_2^{(2)} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} H_{11}^{(2)} & H_{12}^{(2)} \\ H_{21}^{(2)} & H_{22}^{(2)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_1^{(2)} \\ U_2^{(2)} \end{vmatrix} = |H|^{(2)} \cdot \begin{vmatrix} I_1^{(2)} \\ U_2^{(2)} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (7.64)$$

На підставі першого й другого законів Кірхгофа маємо  $U_1 = U_1^{(1)} + U_1^{(2)}$  й  $I_2 = I_2^{(1)} + I_2^{(2)}$ . Тоді в матричному вигляді

$$\begin{vmatrix} U_1 \\ I_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U_1^{(1)} \\ I_2^{(1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} U_1^{(2)} \\ I_2^{(2)} \end{vmatrix} = \left( \begin{vmatrix} H_{11}^{(1)} & H_{12}^{(1)} \\ H_{21}^{(1)} & H_{22}^{(1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} H_{11}^{(2)} & H_{12}^{(2)} \\ H_{21}^{(2)} & H_{22}^{(2)} \end{vmatrix} \right) \cdot \begin{vmatrix} I_1 \\ U_2 \end{vmatrix} = |H| \cdot \begin{vmatrix} I_1 \\ U_2 \end{vmatrix} \quad (7.65)$$

Отже, матриця параметрів  $H$ -форми запису рівнянь результуючого еквівалентного чотириполіусника дорівнює сумі матриць параметрів  $H$ -форми складових чотириполіусників

$$|H| = |H|^{(1)} + |H|^{(2)} = \begin{vmatrix} H_{11}^{(1)} + H_{11}^{(2)} & H_{12}^{(1)} + H_{12}^{(2)} \\ H_{21}^{(1)} + H_{21}^{(2)} & H_{22}^{(1)} + H_{22}^{(2)} \end{vmatrix}. \quad (7.66)$$

### 7.9.5 Паралельно-послідовне з'єднання чотириполіусників

*Паралельно-послідовним з'єднанням* чотириполіусників називають таке з'єднання, при якому вхідні затиски чотириполіусників з'єднуються паралельно, а вихідні – послідовно (рис. 7.8).

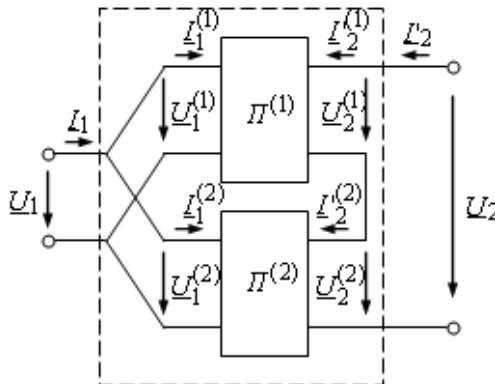


Рис. 7.8

Для визначення параметрів еквівалентного (щодо затискачів 1-1', 2-2') чотириполюсника зручно скористатися рівняннями з параметрами  $G$ -форми, тому що вхідні напруги й вихідні струми чотириполюсників дорівнюють між собою  $\underline{U}_1 = \underline{U}_1^{(1)} = \underline{U}_1^{(2)}$  й  $\underline{I}'_2 = \underline{I}'_2^{(1)} = \underline{I}'_2^{(2)}$ .

$G$ -форма запису рівнянь чотириполюсників в матричній формі має вигляд

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \underline{I}_1^{(1)} \\ \underline{U}_2^{(1)} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \underline{G}_{11}^{(1)} & \underline{G}_{12}^{(1)} \\ \underline{G}_{21}^{(1)} & \underline{G}_{22}^{(1)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \underline{U}_1^{(1)} \\ \underline{I}'_2^{(1)} \end{vmatrix} = |\underline{G}|^{(1)} \cdot \begin{vmatrix} \underline{U}_1^{(1)} \\ \underline{I}'_2^{(1)} \end{vmatrix}; \\ \begin{vmatrix} \underline{I}_1^{(2)} \\ \underline{U}_2^{(2)} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \underline{G}_{11}^{(2)} & \underline{G}_{12}^{(2)} \\ \underline{G}_{21}^{(2)} & \underline{G}_{22}^{(2)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \underline{U}_1^{(2)} \\ \underline{I}'_2^{(2)} \end{vmatrix} = |\underline{G}|^{(2)} \cdot \begin{vmatrix} \underline{U}_1^{(2)} \\ \underline{I}'_2^{(2)} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (7.67)$$

На підставі першого й другого закону Кірхгофа маємо  $\underline{I}_1 = \underline{I}_1^{(1)} + \underline{I}_1^{(2)}$  й  $\underline{U}_2 = \underline{U}_2^{(1)} + \underline{U}_2^{(2)}$ . Тоді в матричному вигляді

$$\begin{vmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{I}_1^{(1)} \\ \underline{U}_2^{(1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \underline{I}_1^{(2)} \\ \underline{U}_2^{(2)} \end{vmatrix} = \left( \begin{vmatrix} \underline{G}_{11}^{(1)} & \underline{G}_{12}^{(1)} \\ \underline{G}_{21}^{(1)} & \underline{G}_{22}^{(1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \underline{G}_{11}^{(2)} & \underline{G}_{12}^{(2)} \\ \underline{G}_{21}^{(2)} & \underline{G}_{22}^{(2)} \end{vmatrix} \right) \cdot \begin{vmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}'_2 \end{vmatrix} = |\underline{G}| \cdot \begin{vmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}'_2 \end{vmatrix} \quad (7.68)$$

Отже, матриця параметрів  $G$ -форми запису рівнянь результуючого еквівалентного чотириполюсника дорівнює сумі матриць параметрів  $G$ -форми складових чотириполюсників

$$|\underline{G}| = |\underline{G}|^{(1)} + |\underline{G}|^{(2)} = \begin{vmatrix} \underline{G}_{11}^{(1)} + \underline{G}_{11}^{(2)} & \underline{G}_{12}^{(1)} + \underline{G}_{12}^{(2)} \\ \underline{G}_{21}^{(1)} + \underline{G}_{21}^{(2)} & \underline{G}_{22}^{(1)} + \underline{G}_{22}^{(2)} \end{vmatrix}. \quad (7.69)$$

*Приклад 7.6.* Два однакових чотириполюсники з параметрами  $A$ -форми  $\underline{A}_{11} = j4$ ;  $\underline{A}_{12} = 100 - j20$  Ом;  $\underline{A}_{21} = j0,05$  Сим й  $\underline{A}_{22} = 5$  з'єднані каскадно таким чином, що вихідні затискачі першого чотириполюсника з'єднані із вхідними затискачами другого (рис. 7.4). Визначити параметри  $A$ -форми еквівалентного чотириполюсника.

*Розв'язання.* Для розв'язання скористаємося формулою (7.53). З обліком того, що чотириполюсники однакові маємо

$$|\underline{A}|_e = \begin{vmatrix} \underline{A}_{11} \cdot \underline{A}_{11} + \underline{A}_{12} \cdot \underline{A}_{21} & \underline{A}_{11} \cdot \underline{A}_{12} + \underline{A}_{12} \cdot \underline{A}_{22} \\ \underline{A}_{21} \cdot \underline{A}_{11} + \underline{A}_{22} \cdot \underline{A}_{21} & \underline{A}_{21} \cdot \underline{A}_{12} + \underline{A}_{22} \cdot \underline{A}_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{A}_{11e} & \underline{A}_{12e} \\ \underline{A}_{21e} & \underline{A}_{22e} \end{vmatrix}.$$

Тоді параметри  $A$ -форми еквівалентного чотириполосника

$$\begin{aligned}\underline{A}_{11_e} &= \underline{A}_{11} \cdot \underline{A}_{11} + \underline{A}_{12} \cdot \underline{A}_{21} = j1 \cdot j1 + (100 - j20) \cdot j0,05 = \\ &= j5 = 5e^{j90^\circ}; \\ \underline{A}_{12_e} &= \underline{A}_{11} \cdot \underline{A}_{12} + \underline{A}_{12} \cdot \underline{A}_{22} = j1 \cdot (100 - j20) + (100 - j20) \cdot 5 = \\ &= 520 = 520e^{j0^\circ} \text{ Ом}; \\ \underline{A}_{21_e} &= \underline{A}_{21} \cdot \underline{A}_{11} + \underline{A}_{22} \cdot \underline{A}_{21} = j0,05 \cdot j1 + 5 \cdot j0,05 = \\ &= -0,05 + j0,25 = 0,255e^{j101^\circ} \text{ Сим}; \\ \underline{A}_{22_e} &= \underline{A}_{21} \cdot \underline{A}_{12} + \underline{A}_{22} \cdot \underline{A}_{22} = j0,05 \cdot (100 - j20) + 5 \cdot 5 = \\ &= 26 + j5 = 26,48e^{j11^\circ}.\end{aligned}$$

Правильність розрахунку перевіримо за допомогою співвідношення (7.11)

$$\underline{A}_{11_e} \underline{A}_{22_e} - \underline{A}_{12_e} \underline{A}_{21_e} = j5 \cdot (26 + j5) - 520 \cdot (-0,05 + j0,25) = 1.$$

Перевірка показала, що розрахунок виконано вірно.

### 7.10 Симетричні чотириполосники

Як уже було сказано, чотириполосник називають симетричним, якщо зміна місцями вхідних і вихідних затискачів не змінює струмів і напруг в електричному колі, з яким чотириполосник є з'єднаним.

Для симетричного чотириполосника виконується умова

$$\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22} = \underline{B}_{11} = \underline{B}_{22} = \underline{A} = \underline{D}. \quad (7.70)$$

Тому рівняння (7.1) і (7.2) у цьому випадку стають ідентичними. Для такого чотириполосника кількість незалежних параметрів дорівнює двом. Усі раніше отримані співвідношення, які характеризують чотириполосник, залишаються справедливими й для симетричного чотириполосника, з урахуванням співвідношення (7.70).

Співвідношення між параметрами  $A$ -форми

$$\underline{A}_{11}^2 - \underline{A}_{12} \underline{A}_{21} = 1. \quad (7.71)$$

Системи рівнянь прямої і зворотної передачі

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{A}_{11} \underline{U}_2 + \underline{A}_{12} \underline{I}_2; \\ \underline{I}_1 = \underline{A}_{21} \underline{U}_2 + \underline{A}_{11} \underline{I}_2; \end{cases} \quad \begin{cases} \underline{U}_2 = \underline{A}_{11} \underline{U}_1 + \underline{A}_{12} \underline{I}'_1; \\ \underline{I}'_2 = \underline{A}_{21} \underline{U}_1 + \underline{A}_{11} \underline{I}'_1. \end{cases} \quad (7.72)$$

Вхідні опори

$$\underline{Z}_{in1} = \underline{Z}_{in2} = \underline{Z}_{in} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2}{I_2} = \frac{A_{11}Z_{l2} + A_{12}}{A_{21}Z_{l2} + A_{11}} = \frac{AZ_{l2} + B}{CZ_{l2} + D}. \quad (7.73)$$

Характеристичні опори

$$\underline{Z}_{C1} = \underline{Z}_{C2} = \underline{Z}_C = \sqrt{\frac{A_{12}}{A_{21}}}. \quad (7.74)$$

Коефіцієнт трансформації симетричного чотириполюсника з урахуванням співвідношення (7.74)  $k_{mp} = 1$ .

Постійна передачі

$$\underline{g} = \ln(A_{11} + \sqrt{A_{12}A_{21}}). \quad (7.75)$$

Система рівнянь у гіперболічних функціях у випадку довільного навантаження

$$\begin{cases} U_1 = U_2 \operatorname{ch} \underline{g} + Z_C I_2 \operatorname{sh} \underline{g}; \\ I_1 = \frac{U_2}{Z_C} \operatorname{sh} \underline{g} + I_2 \operatorname{ch} \underline{g}. \end{cases} \quad (7.76)$$

Система рівнянь у гіперболічних функціях у випадку узгодженого навантаження

$$\begin{cases} U_1 = U_2 e^{\underline{g}}; \\ I_1 = I_2 e^{\underline{g}}. \end{cases} \quad (7.77)$$

Передатні функції

$$\begin{aligned} k_U &= \frac{U_2}{U_1} = \frac{Z_l}{A_{11}Z_l + A_{12}}; \\ k_I &= \frac{I_2}{I_1} = \frac{1}{A_{21}Z_l + A_{11}}; \\ Z_{nep} &= \frac{U_2}{I_1} = \frac{Z_l}{A_{21}Z_l + A_{11}}; \\ Y_{nep} &= \frac{I_2}{U_1} = \frac{1}{A_{11}Z_l + A_{12}}. \end{aligned} \quad (7.78)$$

*Приклад 7.7.* Для симетричного чотириполюсника задані параметри  $A_{11} = 2$  й  $A_{12} = j5$  Ом. Визначити характеристичний опір і перехідні функції у випадку узгодженого навантаження.

*Розв'язання.* Використовуючи співвідношення (7.71) визначимо параметр  $\underline{A}_{21}$

$$\underline{A}_{21} = \frac{\underline{A}_{11}^2 + 1}{\underline{A}_{12}} = \frac{2^2 + 1}{j5} = -j1 = 1e^{-j90^\circ} \text{ Сим.}$$

Використовуючи формулу (7.74) обчислимо характеристичний опір

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}}} = \sqrt{\frac{j5}{-j1}} = 2,24j = 2,24e^{j90^\circ} \text{ Ом.}$$

Опір узгодженого навантаження

$$\underline{Z}_l = \underline{Z}_C = 2,24j = 2,24e^{j90^\circ} \text{ Ом.}$$

Коефіцієнт передачі за напругою

$$\underline{k}_U = \frac{\underline{Z}_l}{\underline{A}_{11}\underline{Z}_l + \underline{A}_{12}} = \frac{2,24j}{2 \cdot 2,24j + j5} = 0,236 = 0,236e^{j0^\circ}.$$

Коефіцієнт передачі за струмом

$$\underline{k}_I = \frac{1}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_l + \underline{A}_{11}} = \frac{1}{-j1 \cdot 2,24j + 2} = 0,236 = 0,236e^{j0^\circ}.$$

Передатний опір

$$\underline{Z}_{nep} = \frac{\underline{Z}_l}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_l + \underline{A}_{11}} = \frac{2,24j}{-j1 \cdot 2,24j + 2} = 0,528j = 0,528e^{j90^\circ} \text{ Ом.}$$

Передатна провідність

$$\underline{Y}_{nep} = \frac{1}{\underline{A}_{11}\underline{Z}_l + \underline{A}_{12}} = \frac{1}{2 \cdot 2,24j + j5} = -j0,105 = 0,105e^{-j90^\circ} \text{ Сим.}$$

### 7.11 Мостові чотириполюсники

При аналізі й синтезі пасивних симетричних чотириполюсників широко використовують *мостові чотириполюсники* (рис. 7.2, з).

Доведено, що для будь-якого пасивного симетричного чотириполюсника можна знайти еквівалентний симетричний мостовий (рис. 7.9, а).

Мостовий чотириполюсник можна представити, як паралельне з'єднання двох простих чотириполюсників (рис. 7.9, б). Складе-

мо на підставі законів Кірхгофа системи рівнянь  $A$ -форми кожного із цих чотириполюсників

$$\begin{cases} U_1^{(1)} = U_2^{(1)} - 2Z_1 I_2^{(1)}; \\ I_1^{(1)} = 0 \cdot U_2^{(1)} - I_2^{(1)}; \end{cases} \quad \begin{cases} U_1^{(2)} = -U_2^{(2)} + 2Z_2 I_2^{(2)}; \\ I_1^{(2)} = 0 \cdot U_2^{(2)} + I_2^{(2)}. \end{cases} \quad (7.79)$$

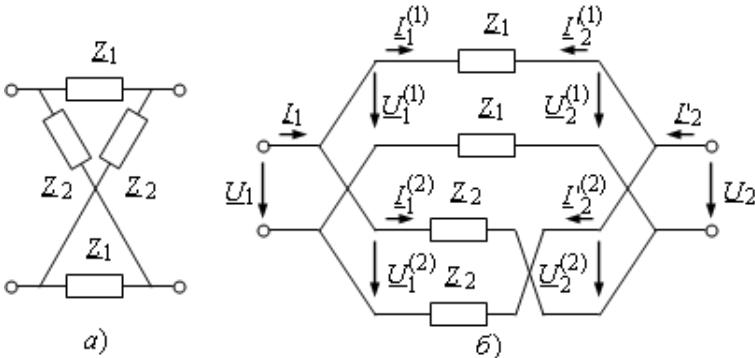


Рис. 7.9

З урахуванням систем рівнянь (7.79), перейдемо до систем рівнянь  $Y$ -форми для кожного з елементарних чотириполюсників

$$\begin{cases} I_1^{(1)} = \frac{1}{2Z_1} U_1^{(1)} - \frac{1}{2Z_1} U_2^{(1)}; \\ I_2^{(1)} = -\frac{1}{2Z_1} U_1^{(1)} + \frac{1}{2Z_1} U_2^{(1)}; \end{cases} \quad \begin{cases} I_1^{(2)} = \frac{1}{2Z_2} U_1^{(2)} + \frac{1}{2Z_2} U_2^{(2)}; \\ I_2^{(2)} = \frac{1}{2Z_2} U_1^{(2)} + \frac{1}{2Z_2} U_2^{(2)}. \end{cases} \quad (7.80)$$

Матриця параметрів  $Y$ -форми запису рівнянь еквівалентного мостового чотириполюсника відповідно до (7.60) має вигляд

$$|Y| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2Z_1} + \frac{1}{2Z_2} & -\frac{1}{2Z_1} + \frac{1}{2Z_2} \\ -\frac{1}{2Z_1} + \frac{1}{2Z_2} & \frac{1}{2Z_1} + \frac{1}{2Z_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{Z_1 + Z_2}{2Z_1 Z_2} & \frac{Z_1 - Z_2}{2Z_1 Z_2} \\ \frac{Z_1 - Z_2}{2Z_1 Z_2} & \frac{Z_1 + Z_2}{2Z_1 Z_2} \end{vmatrix}. \quad (7.81)$$

Використовуючи формули (7.10) перейдемо до матриці параметрів  $A$ -форми

$$|A| = \begin{vmatrix} \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2 - Z_1} & \frac{2Z_1 Z_2}{Z_2 - Z_1} \\ \frac{2}{Z_2 - Z_1} & \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2 - Z_1} \end{vmatrix}. \quad (7.82)$$

Характеристичний опір відповідно до формули (7.74)

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{A_{12}}{A_{21}}} = \sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}. \quad (7.83)$$

Постійна передачі відповідно до (7.75)

$$\underline{g} = \ln\left(\underline{A}_{11} + \sqrt{A_{12} A_{21}}\right) = \ln\left(\frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + 2\sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1}\right). \quad (7.84)$$

Коефіцієнт передачі за напругою мостового чотириполосника у разі узгодженого навантаження

$$\underline{k}_U = \frac{\sqrt{\underline{Z}_2} - \sqrt{\underline{Z}_1}}{\sqrt{\underline{Z}_2} + \sqrt{\underline{Z}_1}} = \frac{\underline{Z}_C - \underline{Z}_1}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_1}. \quad (7.85)$$

Мостовий чотириполосник у тому випадку, коли елементи  $\underline{Z}_1$  і  $\underline{Z}_2$  є ідеальними реактивними, але різнорідними (тобто мають різні знаки), має цікаві властивості. У цьому разі характеристичний опір суто активним

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2} = \sqrt{-jX_1 \cdot jX_2} = \sqrt{X_1 X_2} = R_C \quad (7.86)$$

Тоді коефіцієнт передачі за напругою реактивного мостового чотириполосника у разі узгодженого навантаження

$$\underline{k}_U = \frac{\underline{Z}_C - \underline{Z}_1}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_1} = \frac{R_C \mp jX_1}{R_C \pm jX_1}. \quad (7.87)$$

З (7.87) випливає, що модуль коефіцієнта передачі за напругою не залежить від частоти  $|\underline{k}_U| = \sqrt{\frac{R_C^2 + X_1^2}{R_C^2 + X_1^2}} = 1$ . Таким чином такий чотириполосник пропускає всі частоти без зміни їхніх амплітуд.

Кут фазового зсуву напруг на вході й виході визначаємо як аргумент коефіцієнта передачі за напругою

$$\varphi_U = \varphi_{U2} - \varphi_{U1} = \operatorname{arctg} \frac{2X_1 R_C}{X_1^2 - R_C^2} \quad (7.88)$$

і, отже він, як і реактивний опір, є функцією частоти.

Такі чотириполосники називають чотириполосниками *суто фазового зсуву*. Їх використовують у разі синтезу кіл за заданими частотними характеристиками.

### 7.12 Поняття про активний чотириполюсник

Активним чотириполюсником називають чотириполюсник, що містить усередині себе джерела енергії, причому дія цих джерел не компенсується взаємно усередині чотириполюсника. Прикладами активних чотириполюсників є підсилювачі й лінії передачі з додатковими джерелами енергії, які підключені між їхніми вхідними й вихідними затискачами.

Внутрішні некомпенсовані джерела викликають появу напруг на одній або обох парах розімкнутих затискачів (або струмів на одній або обох парах замкнутих затискачів), у випадку якщо чотириполюсник відімкнений від зовнішніх електричних кіл.

Активний чотириполюсник може бути еквівалентно замінений пасивним чотириполюсником до вхідних й вихідних затискачів якого підмикнені або послідовно деякі додаткові внутрішні джерела ЕРС (рис. 7.10, а), або паралельно деякі додаткові внутрішні джерела струму (рис. 7.10, б).

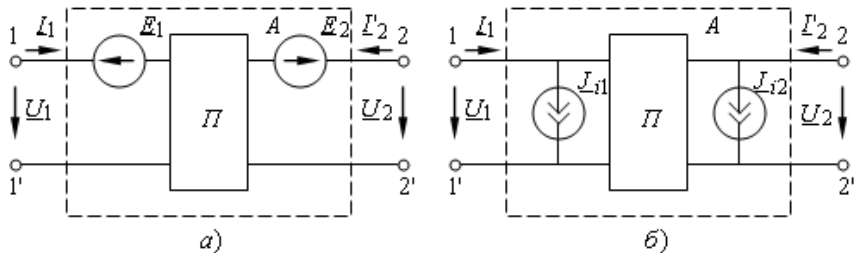


Рис. 7.10

Для опису активного чотириполюсника, схема заміщення якого представлена на рис. 7.10, а, зручно використовувати систему рівнянь із параметрами Z-форми

$$\begin{cases} U_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I'_2 + E_{i1}; \\ U_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I'_2 + E_{i2}, \end{cases} \quad (7.89)$$

а для опису активного чотириполюсника, схема заміщення якого представлена на рис. 7.10, б, зручно використовувати систему рівнянь із параметрами Y-форми

$$\begin{cases} I_1 = Y_{11} U_1 + Y_{12} U_2 + J_{i1}; \\ I'_2 = Y_{21} U_1 + Y_{22} U_2 + J_{i2}. \end{cases} \quad (7.90)$$

Несиметричний активний чотириполюсник характеризується п'ятьма незалежними параметрами. Параметри  $\underline{Z}_{11}, \underline{Z}_{12}, \underline{Z}_{21}, \underline{Z}_{22}$  (або  $\underline{Y}_{11}, \underline{Y}_{12}, \underline{Y}_{21}, \underline{Y}_{22}$ ) його пасивної частини відповідають параметрам пасивного чотириполюсника й не залежать від внутрішніх джерел енергії. Параметри внутрішніх джерел енергії  $\underline{E}_{i1}$  й  $\underline{E}_{i2}$  (або  $\underline{J}_{i1}$  й  $\underline{J}_{i2}$ ) залежать як від джерел енергії усередині чотириполюсника, так і від внутрішньої схеми з'єднання й параметрів пасивних елементів. Їхні значення визначають розрахунковим шляхом.

### 7.13 Поняття про зворотний зв'язок

У ряді електротехнічних пристроїв і пристроїв автоматики необхідно щоб передатна функція залежала від режиму кола на виході. Для цього в електричне коло додають зворотний зв'язок. *Зворотним зв'язком* називають передачу частини енергії вихідного сигналу на вхід пристрою.

Нехай є деякий пристрій, що представляє собою чотириполюсник, що для зручності будемо називати основним (рис. 7.11). Нехай при напрузі  $\underline{U}_1^{(1)}$  на вхідних затискачах цього пристрою на вихідних затискачах має місце напруга  $\underline{U}_2^{(1)}$ . Його коефіцієнт передачі за напругою відповідно до формули (7.49)

$$k_U^{(1)} = \frac{U_2^{(1)}}{U_1^{(1)}}. \quad (7.90)$$

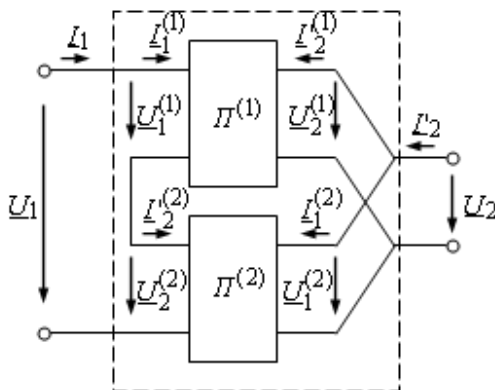


Рис. 7.11

Паралельно до вихідних затискачів основного чотириполюсника підмикаємо вхідні затискачі додаткового чотириполюсника (рис. 7.11). Вихідні затискачі додаткового чотириполюсника (чотириполюсника зворотного зв'язку) з'єднаємо послідовно із вхідними затискачами основного.

Коефіцієнт передачі за напругою чотириполюсника зворотного зв'язку

$$\underline{k}_U^{(2)} = \frac{U_2^{(2)}}{U_1^{(2)}}. \quad (7.90)$$

Напруга на вході всього пристрою

$$U_1 = U_1^{(1)} + U_2^{(2)}. \quad (7.91)$$

З урахуванням виразів (7.89) і (7.90) і того, що  $U_2^{(1)} = U_1^{(2)}$  останній вираз можна перетворити до вигляду

$$U_1 = U_1^{(1)} \left( 1 + \underline{k}_U^{(1)} \underline{k}_U^{(2)} \right). \quad (7.92)$$

Тоді коефіцієнт передачі за напругою всього пристрою

$$\underline{k}_U = \frac{1}{1 + \underline{k}_U^{(1)} \underline{k}_U^{(2)}}. \quad (7.93)$$

При такій схемі з'єднання весь пристрій називають пристроєм з *додатним зворотним зв'язком*.

Якщо змінити полярність підмикання вихідних затискачів додаткового чотириполюсника то в результаті зміни знаків у виразах (7.91) і (7.92) коефіцієнт передачі за напругою всього пристрою також зміниться

$$\underline{k}_U = \frac{1}{1 - \underline{k}_U^{(1)} \underline{k}_U^{(2)}}. \quad (7.94)$$

При такій схемі з'єднання весь пристрій називають пристроєм з *від'ємним зворотним зв'язком*.

У загальному випадку можна говорити про додатний зворотний зв'язок, якщо його наявність призводить до збільшення вихідної напруги всього пристрою, і про від'ємний зворотний зв'язок, якщо його наявність приводить до зменшення вихідної напруги.

Зворотний зв'язок, що представлений на рис. 7.11, являє собою так названий зворотний зв'язок за напругою, тому що додаткова напруга  $\underline{U}_2^{(2)}$  в первинному колі всього пристрою залежить від вихідної напруги  $\underline{U}_2$ .

### ***Питання для самоконтролю***

1. Що називають чотириполюсником?
2. Як класифікують чотириполюсники?
3. Записати шість форм запису рівнянь чотириполюсника, указати для них додатні напрямки струмів і напруг.
4. У яких випадках кожна форма запису систем рівнянь має переваги перед іншими?
5. Скільки коефіцієнтів несиметричного чотириполюсника є незалежними?
6. Як експериментально визначити параметри *A*-форми?
7. Як, знаючи коефіцієнти однієї форми запису, визначити коефіцієнти іншої форми?
8. Що розуміють під характеристичними параметрами чотириполюсника?
9. Як визначають характеристичні опори чотириполюсника?
10. Що називають вхідним опором чотириполюсника?
11. Що називають постійною передачею?
12. У яких одиницях вимірюють власне загасання?
13. Який чотириполюсник називають симетричним?
14. Що визначає коефіцієнт трансформації чотириполюсника?
15. Відомі параметри *A*-форми пасивного чотириполюсника  $\underline{A}_{11} = 1 - j$ ;  $\underline{A}_{12} = -j10 \text{ Ом}$ ;  $\underline{A}_{21} = -j0,1 \text{ Сим}$ . Визначити опори *T*-образної схеми заміщення.

*Відповідь:*  $\underline{Z}_1 = 10 \text{ Ом}$ ;  $\underline{Z}_2 = -j10 \text{ Ом}$ ;  $\underline{Z}_3 = j10 \text{ Ом}$ .

16. Відомі параметри *A*-форми пасивного чотириполюсника  $\underline{A}_{11} = 1 + j$ ;  $\underline{A}_{12} = 4 + j4 \text{ Ом}$ ;  $\underline{A}_{22} = 0,5$ . Визначити який опір треба підключити до вихідних затисків, щоб вхідний опір виявився суто активним.

*Відповідь:*  $\underline{Z}_l = R_l = 4 \text{ Ом}$ .

17. Параметри *T*-образної схеми заміщення симетричного чотириполюсника:  $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = 10 \text{ Ом}$ ;  $\underline{Z}_3 = -j10 \text{ Ом}$ . Визначити, характеристичні параметри чотириполюсника.

*Відповідь:*  $\underline{Z}_C = 14,95e^{j32^\circ} \text{ Ом}$ ,  $\alpha = 1,06 \text{ Нп}$ ,  $\beta = 0,9 \text{ рад}$ .

## Розділ восьмий ЕЛЕКТРИЧНІ ФІЛЬТРИ

### 8.1 Основні поняття про частотні електричні фільтри

*Електричним фільтром* називають чотириполюсник, що вмикають між джерелом енергії й навантаженням з метою безперешкодного (з малим загасанням) пропускання струмів одних частот і затримки (пропускання з великим загасанням) струмів інших частот.

Електричні фільтри застосовують як у радіотехніці й техніці зв'язку, так й у силовій електроніці й електротехніці де мають місце струми досить високих частот.

Правильно сконструйований фільтр повинен пропускати до навантаження вхідні сигнали практично без зміни їхньої амплітуди в деякому діапазоні частот, що називають *смугою пропускання* (*смугою прозорості*) і не пропускати сигнали, частоти яких не належать до смуги пропускання, а перебувають у так називаній *смугі загасання* (*смугі затримки* або *смугі непрозорості*). Частоту, що є межевою між смугою пропускання й смугою загасання, називають *частотою зрізу*  $f_c$ .

За видом смуги пропускання розрізняють:

- *фільтри нижніх частот ФНЧ (низькочастотні фільтри)*, смуга пропускання яких лежить у межах від  $\omega=0$  до *кутової частоти зрізу*  $\omega = \omega_c$ ;

- *фільтри вищих частот ФВЧ (високочастотні фільтри)*, смуга пропускання яких лежить у межах від  $\omega = \omega_c$  до  $\omega = \infty$ ;

- *смугові фільтри СФ (смуго-пропускні фільтри)*, смуга пропускання яких лежить у межах від  $\omega = \omega_{c1}$  до  $\omega = \omega_{c2}$ ;

- *загороджувальні фільтри, ЗФ (смуго-загороджувальні або режекторні фільтри)*, смуга пропускання яких лежить у межах від  $\omega=0$  до  $\omega = \omega_{c1}$  й від  $\omega = \omega_{c2}$  до  $\omega = \infty$ .

Для смуги пропускання фільтрів останніх двох типів виконується умова  $\omega_{c1} < \omega_{c2}$ .

Якість фільтра тим вище, чим яскравіше виражені його фільтруючі властивості, тобто чим сильніше зростає загасання в смугі загасання.

АЧХ ідеалізованих фільтрів представлені: для ФНЧ - на рис. 8.1, а, для ФВЧ - на рис. 8.1, б, для СФ - на рис. 8.1, в, для ЗФ - на рис. 8.1, г.

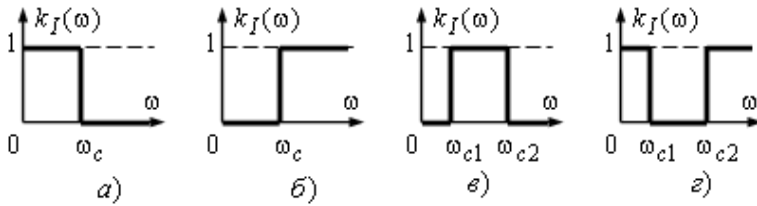


Рис. 8.1

Залежно від наявності у фільтрах підсилювальних елементів розрізняють *пасивні фільтри* й *активні фільтри*, тобто пристрої які складаються з підсилювальних елементів і пасивних фільтрів. У даному посібнику розглядаються тільки пасивні фільтри.

В залежності від елементів, що входять до складу пасивних фільтрів, розрізняють *реактивні фільтри (LC-фільтри)*, які складаються з котушок індуктивності й конденсаторів і *безіндукційні фільтри (RC-фільтри)*, які складаються з конденсаторів і резисторів. Якщо можна прийняти що активний опір реактивного фільтра дорівнює нулю, то такий *фільтр* називають *ідеальним*.

Фільтри звичайно виконують за симетричними *T*-образною (рис. 8.2, а) або *Π*-образною (рис. 8.2, б) схемами.

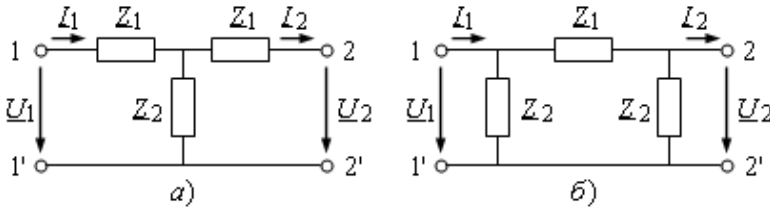


Рис. 8.2

Опори  $\underline{Z}_1$  називають *поздовжніми опорам*, а опори  $\underline{Z}_2$  - *поперечними*.

Фільтри, у яких добуток значення поздовжнього опору на значення відповідного поперечного опору являє собою постійне для даного фільтра дійсне число (число  $k$ ), що не залежить від частоти, називають *k-фільтрами*. Фільтри, для яких ця умова не виконується, називають *t-фільтрами*.

У деяких випадках фільтри виконують за  $\Gamma$ -образними схемами, які можна розглядати як окремі випадки *T*-образної схеми (якщо один з поздовжніх опорів дорівнює нулю  $\underline{Z}_1 = 0$ ) або  $\Pi$ -образної схеми (якщо один з поперечних опорів дорівнює нескінченності  $\underline{Z}_2 = \infty$ ).

## 8.2 Пасивні реактивні фільтри

Дія фільтрів базується на тім, що на нижніх частотах індуктивні опори є малими, а ємнісні - великими; на верхніх частотах навпаки - індуктивні опори є великими, а ємнісні - малими. Фільтруючі властивості смугових і реактивних фільтрів, що загороджують, обумовлені виникненням у них резонансу струмів або резонансу напруг.

### 8.2.1 Загальна теорія $k$ -фільтрів

Як уже говорилося в попередньому розділі для симетричного чотиріполюсника у випадку угодженого навантаження система рівнянь у гіперболічних функціях має вигляд (7.77)

$$\begin{cases} U_1 = U_2 e^{\underline{g}}; \\ I_1 = I_2 e^{\underline{g}}. \end{cases} \quad (8.1)$$

З обліком того, що постійна передачі є в загальному вигляді комплексним числом  $\underline{g} = a + jb$ , то, використовуючи співвідношення (7.44), останній вираз можна представити у вигляді

$$\begin{cases} U_2 = U_1 e^{-a} e^{-jb}; \\ I_2 = I_1 e^{-a} e^{-jb}. \end{cases} \quad (8.2)$$

Таким чином, множник  $e^{-a}$  визначає в скільки разів діюче значення напруги або струму на виході чотиріполюсника менше діючого значення відповідно напруги або струму на вході чотиріполюсника.

Якщо власне загасання чотиріполюсника  $a = 0$ , то  $e^{-a} = e^0 = 1$ , і чотиріполюсник пропускає вхідний сигнал без загасання. Отже, у смузі пропускання фільтра  $a = 0$ . У смузі загасання фільтра  $a > 0$ .

Модуль множника  $e^{-jb}$  дорівнює 1. Цей множник показує, що вихідні напруга  $\underline{U}_2$  й струм  $\underline{I}_2$  відстають від вхідних напруги  $\underline{U}_1$  й струму  $\underline{I}_1$  на кут, що дорівнює коефіцієнту фази  $b$ .

З першого рівняння системи (7.47) з урахуванням того, що для симетричного чотиріполюсника  $\underline{Z}_{C1} = \underline{Z}_{C2} = \underline{Z}_C$  маємо

$$\underline{A}_{11} = \operatorname{ch} \underline{g} = \operatorname{ch}(a + jb) = \operatorname{ch} a \cos b + j \operatorname{sh} a \sin b. \quad (8.3)$$

Відповідно до формул (7.15) та (7.19) для фільтрів що зібрані як за  $T$ -образною (рис. 8.2, а), так і за  $\Pi$ -образною (рис. 8.2, б) схемам

$$\underline{A}_{11} = 1 + \frac{Z_1}{Z_2}. \quad (8.4)$$

З яких би реактивних елементів не складався фільтр, параметр  $\underline{A}_{11}$  завжди буде дійсним числом.

Але вираз (8.3) є дійсним тільки якщо

$$\operatorname{sh} a \sin b = 0. \quad (8.5)$$

Тоді

$$A_{11} = |\underline{A}_{11}| = \operatorname{ch} a \cos b. \quad (8.6)$$

Умови (8.5) і (8.6) використовують для визначення меж смуги пропускання, характеру зміни кута  $b$  у смузі пропускання й характеру зміни власного загасання  $a$  у смузі загасання.

Умова (8.5) виконується для смуги пропускання, коли  $a = 0$ , тому що в цьому випадку  $\operatorname{sh} a = \operatorname{sh} 0 = 0$ . Але тоді  $\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} 0 = 1$  й рівність (8.6) спрощується

$$A_{11} = \cos b. \quad (8.7)$$

Тому що область значень  $\cos b$  належить інтервалу від -1 до +1, то й область значень параметра  $\underline{A}_{11}$  теж належить цьому інтервалу

$$-1 \leq \underline{A}_{11} = 1 + \frac{Z_1}{Z_2} \leq +1. \quad (8.8)$$

Із цієї умови випливає, що опори  $Z_1$  й  $Z_2$  повинні бути суто реактивними, причому якщо поздовжній опір має індуктивний характер, то поперечний повинен носити ємнісний характер, і навпаки. Реактивні опори є функціями частоти. Тому в смузі пропускання повинна виконуватися умова

$$-1 \leq 1 + \frac{X_1(\omega)}{X_2(\omega)} \leq 1, \quad (8.9)$$

або

$$-1 \leq \frac{X_1(\omega)}{2X_2(\omega)} \leq 0. \quad (8.10)$$

Нерівність (8.10) дає можливість визначити частоти зрізу.

Якщо відомо який вигляд мають функцій  $\underline{X}_1(\omega)$  і  $\underline{X}_2(\omega)$ , то частоти зрізу можна визначити із сукупності рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\underline{X}_1(\omega)}{2\underline{X}_2(\omega)} = -1; \\ \frac{\underline{X}_1(\omega)}{2\underline{X}_2(\omega)} = 0. \end{cases} \quad (8.11)$$

Характер зміни коефіцієнта фази в смузі пропускання відповідно до рівняння (8.7)

$$b = \arccos A_{11} = 1 + \arccos \left| 1 + \frac{\underline{X}_1(\omega)}{\underline{X}_2(\omega)} \right|. \quad (8.12)$$

У смузі загасання фільтра  $a > 0$ . Рівняння (8.5) задовольняється за умови

$$\sin a = 0. \quad (8.13)$$

Ця умова виконується, якщо  $b = 0$  або  $b = \pm\pi$ . Отже, у смузі загасання вихідні напруга  $\underline{U}_2$  й струм  $\underline{I}_2$  або збігаються із вхідними напругою  $\underline{U}_1$  й струмом  $\underline{I}_1$  за фазою (якщо  $b = 0$ ), або перебувають із ними в протифазі (якщо  $b = \pm\pi$ ).

Відповідно до рівняння (8.6) якщо  $b = 0$ , то

$$\operatorname{ch} a = A_{11} = 1 + \frac{\underline{X}_1(\omega)}{\underline{X}_2(\omega)}, \quad (8.14)$$

а якщо  $b = \pm\pi$ , то

$$\operatorname{ch} a = A_{11} = -\left( 1 + \frac{\underline{X}_1(\omega)}{\underline{X}_2(\omega)} \right). \quad (8.15)$$

Рівняння (8.14) і (8.15) дають можливість знайти  $\operatorname{ch} a$  в смузі загасання, а потім обчислити  $a$  і побудувати графік функції  $a = f(\omega)$ .

Слід зазначити дві істотні особливості реактивних фільтрів:

- зі зміною частоти змінюється характеристичний опір фільтра, тому для виконання умови узгодженості навантаження (а вся викладена теорія реактивних фільтрів справедлива тільки при виконанні цієї умови) при зміні частоти необхідно змінювати опір навантаження;

- у смузі пропускання характеристичний опір фільтра завжди суто активний, а в смузі загасання - суто реактивний (індуктивний або ємнісний).

### 8.2.2 Фільтр нижніх частот ФНЧ

Фільтр нижніх частот ФНЧ постійний струм і всі сигнали із частотами нижче частоти зрізу повинен пропускати практично без зміни їхньої амплітуди, а всі сигнали із частотами вище частоти зрізу повинен пригашати.

Тому поздовжні опори фільтра повинні бути малими для постійного струму й струмів низьких частот, але зі збільшення частоти вони повинні збільшуватися. Цій вимозі задовольняють індуктивні елементи. Поперечні опори фільтра навпаки повинні бути великими для постійного струму й струмів низьких частот, але зі збільшення частоти вони повинні зменшуватися. Цій вимозі задовольняють ємнісні елементи.

Тому ФНЧ виконують в більшості випадків за симетричними  $T$ -образною (рис. 8.3, *а*) або  $\Pi$ -образною (рис. 8.3, *б*) схемами, у яких роль поздовжніх опорів виконують індуктивні елементи, а поперечних - ємнісні.

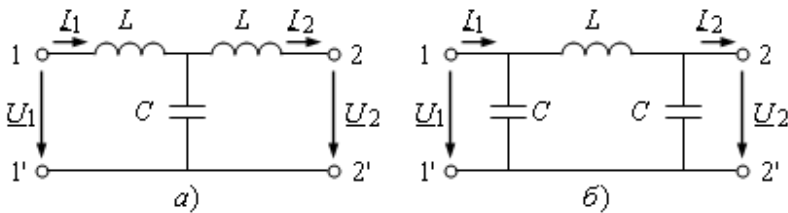


Рис. 8.3

Таким чином, у ФНЧ поздовжні й поперечні опори відповідно мають вигляд

$$\underline{Z}_1 = \underline{X}_1 = j\omega L; \quad \underline{Z}_2 = \underline{X}_2 = \frac{1}{j\omega C}. \quad (8.16)$$

Тому що за будь-якою частотою виконується умова  $\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 = \frac{j\omega L}{j\omega C} = \frac{L}{C} = \rho^2 = \text{const}$ , фільтри даного типу належать до  $k$ -фільтрів.

Розглянемо докладніше роботу ФНЧ, що виконаний за симетричною  $T$ -образною схемою (рис. 8.3, *а*).

Для визначення частоти зрізу скористаємося умовою (8.10)

$$-1 \leq \frac{j\omega L}{2(1/j\omega C)} = -\frac{\omega^2 LC}{2} \leq 0. \quad (8.17)$$

Звідси впливає що однією із частот зрізу є кутова частота  $\omega=0$ , а іншою - кутова частота

$$\omega_c = \sqrt{\frac{2}{LC}}. \quad (8.18)$$

Таким чином смузі пропускання ФНЧ задовольняють кутові частоти, які належать до діапазону

$$0 \leq \omega \leq \sqrt{\frac{2}{LC}}. \quad (8.19)$$

Зв'язок параметрів чотириполосника з параметрами елементів Т-образної схеми заміщення обумовлюється співвідношеннями (7.15), які для ФНЧ, схема якого представлена на рис. 8.3, а, мають вигляд

$$\begin{aligned} \underline{A}_{11} = \underline{A}_{22} &= 1 + \frac{j\omega L}{1/j\omega C} = 1 - \omega^2 LC; \\ \underline{A}_{12} &= 2j\omega L + \frac{(j\omega L)^2}{1/j\omega C} = j\omega L(2 - \omega^2 LC); \\ \underline{A}_{21} &= \frac{1}{1/j\omega C} = j\omega C. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Характеристичний опір фільтра на підставі (7.74)

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}}} = \sqrt{\frac{j\omega L(2 - \omega^2 LC)}{j\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C}(2 - \omega^2 LC)}. \quad (8.21)$$

Аналіз співвідношення (8.21) показує, що зі зростанням частоти  $\omega$  у межах, які визначені нерівністю (8.19), характеристичний опір фільтра зменшується до нуля, залишаючись суто активним. Оскільки, при узгодженому навантаженні фільтра його вхідний опір буде дорівнює характеристичному, то, на підставі того, що опір  $\underline{Z}_C$  є активним, можна зробити висновок про те, що фільтр працює в режимі резонансу, як це було відзначено раніше. При частотах, які перевищують  $\sqrt{\frac{2}{LC}}$ , характеристичний опір здобуває

індуктивний характер, тому що в цьому випадку  $\omega L \gg \frac{1}{\omega C}$ .

У смузі загасання коефіцієнт загасання  $a$  визначаємо з рівняння (8.15) при  $b = \pi$

$$a = \operatorname{arch}(\omega^2 LC - 1). \quad (8.22)$$

У смузі пропускання коефіцієнт фази з рівняння (8.7)

$$b = \arccos(1 - \omega^2 LC). \quad (8.23)$$

З метою одержання узагальнених частотних характеристик виражаємо кутову частоту у відносних одиницях, використовуючи, частоту зрізу, як базисне значення,  $\omega^* = \frac{\omega}{\omega_c}$ .

На рис. 8.4, *a* представлена якісна залежність  $a(\omega^*)$ , на рис. 8.4, *б* -  $b(\omega^*)$ , а на рис. 8.4, *в* -  $Z_C(\omega^*)$ .

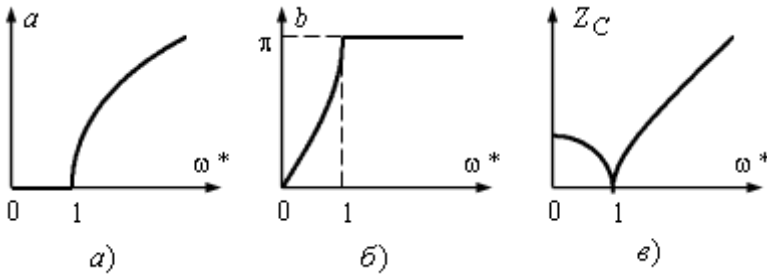


Рис. 8.4

Аналіз виразу (8.22) показує, що в смузі загасання власне загасання  $a$  наростає поступово, тобто в смузі загасання фільтр не є ідеальним.

Аналогічний висновок про неідеальність реального фільтра можна зробити й для смуги пропускання, оскільки забезпечити узгоджений режим роботи фільтра у всій смузі пропускання практично неможливо. Дійсно характеристичний опір фільтра відповідно до (8.21) збільшується з ростом частоти, що унеможливує узгодження навантаження для всіх частот. Отже, у смузі пропускання коефіцієнт загасання  $a$  буде відмінний від нуля.

Аналогічні результати можна одержати й для ФНЧ, що виконаний за симетричній  $\Pi$ -образною схемою (рис. 8.3, *б*).

*Приклад 8.1.* Визначити смугу пропускання фільтра нижніх частот, що виконаний за симетричній  $\Pi$ -образною схемою (рис. 8.3, *б*), обчислити характеристичний опір, коефіцієнт загасан-

ня й коефіцієнт фази якщо кутова частота  $\omega = 2 \cdot 10^4 \text{ c}^{-1}$ ,  $L = 5 \text{ мГн}$ ,  $C = 0,25 \text{ мкФ}$ .

*Розв'язання.* Фільтр нижніх частот характеризується смугою пропускання від  $\omega = 0$  до  $\omega = \omega_c$

$$\omega_c = \sqrt{\frac{2}{LC}} = \sqrt{\frac{2}{5 \cdot 10^{-3} \cdot 0,25 \cdot 10^{-6}}} = 4 \cdot 10^4 \text{ c}^{-1}.$$

Характеристичний опір якщо частота  $\omega = 2 \cdot 10^4 \text{ c}^{-1}$

$$\begin{aligned} Z_C &= \sqrt{\frac{A_{12}}{A_{21}}} = \sqrt{\frac{L}{C(2 - \omega^2 LC)}} = \\ &= \sqrt{\frac{5 \cdot 10^{-3}}{0,25 \cdot 10^{-6} \left( 2 - (2 \cdot 10^4)^2 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 0,25 \cdot 10^{-6} \right)}} = 115 \text{ Ом}. \end{aligned}$$

Тому що частота  $\omega = 2 \cdot 10^4 \text{ c}^{-1}$  належить смузі пропускання, то коефіцієнт загасання дорівнює нулю,  $a = 0$ .

Коефіцієнт фази  $b$  якщо частота  $\omega = 2 \cdot 10^4 \text{ c}^{-1}$

$$\begin{aligned} b &= \arccos(1 - \omega^2 LC) = \\ &= \arccos\left(1 - (2 \cdot 10^4)^2 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 0,25 \cdot 10^{-6}\right) = \frac{\pi}{3} \approx 1,047 \text{ рад}. \end{aligned}$$

### 8.2.3 Фільтр вищих частот ФВЧ

Фільтр вищих частот ФВЧ постійний струм і всі сигнали із частотами нижче частоти зрізу повинен пригашати, а всі сигнали із частотами вище частоти зрізу повинен пропускати практично без зміни їхньої амплітуди.

Тому поздовжні опори фільтра повинні бути великими для постійного струму й струмів низьких частот, але зі збільшення частоти вони повинні зменшуватися. Цій вимозі задовольняють ємнісні елементи. Поперечні опори фільтра навпаки повинні бути малими для постійного струму й струмів низьких частот, але зі збільшення частоти вони повинні збільшуватися. Цій вимозі задовольняють індуктивні елементи.

Тому ФВЧ виконують в більшості випадків за симетричними  $T$ -образною (рис. 8.5, *а*) або  $\Pi$ -образною (рис. 8.5, *б*) схемами, у яких роль поздовжніх опорів виконують ємнісні елементи, а поперечних - індуктивні.

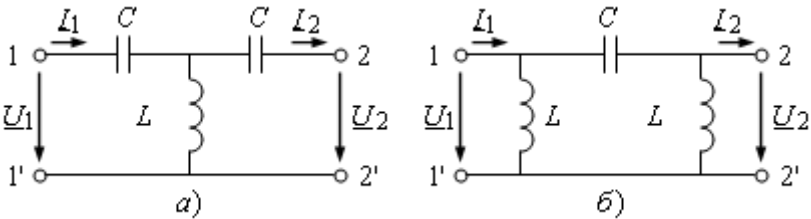


Рис. 8.5

Таким чином, у ФВЧ поздовжні й поперечні опори відповідно мають вигляд

$$\underline{Z}_1 = \underline{X}_1 = \frac{1}{j\omega C}; \quad \underline{Z}_2 = \underline{X}_2 = j\omega L. \quad (8.24)$$

Тому що за будь-якою частотою виконується умова  $\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 = \frac{j\omega L}{j\omega C} = \frac{L}{C} = \rho^2 = const$ , то фільтри даного типу також належать до  $k$ -фільтрів.

Розглянемо докладніше роботу ФВЧ, що виконаний за симетричною  $T$ -образною схемою (рис. 8.5, *а*).

Для визначення частоти зрізу скористаємося умовою (8.10)

$$-1 \leq \frac{1/j\omega C}{2j\omega L} = -\frac{1}{2\omega^2 LC} \leq 0. \quad (8.25)$$

Звідси знайдемо, що однією із частот зрізу є кутова частота  $\omega = \infty$ , а іншою - кутова частота

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{2LC}}. \quad (8.26)$$

Таким чином, смузі пропущення задовольняю кутові частоти, які належать до діапазону

$$\frac{1}{\sqrt{2LC}} \leq \omega < \infty. \quad (8.27)$$

Зв'язок параметрів чотириполюсника з параметрами елемен-

тів Т-образної схеми заміщення обумовлюється співвідношеннями (7.15), які для ФВЧ, схема якого представлена на рис. 8.5, а, мають вигляд

$$\begin{aligned} \underline{A}_{11} = \underline{A}_{22} &= 1 + \frac{1/j\omega C}{j\omega L} = 1 - \frac{1}{\omega^2 LC}; \\ \underline{A}_{12} &= \frac{2}{j\omega C} + \frac{(1/j\omega C)^2}{j\omega L} = \frac{1}{j\omega C} \left( 2 - \frac{1}{\omega^2 LC} \right); \\ \underline{A}_{21} &= \frac{1}{j\omega L}. \end{aligned} \quad (8.28)$$

Характеристичний опір фільтра на підставі (7.74)

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{j\omega C} \left( 2 - \frac{1}{\omega^2 LC} \right)}{\frac{1}{j\omega L}}} = \sqrt{\frac{L}{C} \left( 2 - \frac{1}{\omega^2 LC} \right)}. \quad (8.29)$$

Він змінюється зі зростанням частоти в межах від нуля до  $\sqrt{\frac{2L}{C}}$  й залишається суто активним. Як вже відзначалось, це робить практично неможливим узгодження навантаження у всій смузі пропускання. Тому фактично фільтр працює з коефіцієнт загасання  $\alpha = 0$  в обмеженому діапазоні частот. При частотах, які не перевищують  $\sqrt{\frac{2}{LC}}$ , характеристичний опір має ємнісної характер, тому що в цьому випадку  $\omega L \ll \frac{1}{\omega C}$ .

У смузі загасання коефіцієнт загасання  $\alpha$  визначають з рівняння (8.15) при  $b = -\pi$

$$\alpha = \operatorname{arch} \left( 1 - \frac{1}{\omega^2 LC} \right). \quad (8.30)$$

У смузі пропускання коефіцієнт фази ФВЧ із рівняння (8.7)

$$b = -\arccos \left( 1 - \frac{1}{\omega^2 LC} \right). \quad (8.31)$$

Значення коефіцієнта фази  $b$  є від'ємним, тобто напруга (струм) на виході фільтра випереджає напругу (струм) на вході.

Так само як і для ФНЧ, з метою одержання узагальнених частотних характеристик виражаємо кутову частоту у відносних одиницях, використовуючи частоту зрізу, як базисне значення,  $\omega^* = \frac{\omega}{\omega_c}$ .

На рис. 8.6, *a* представлена якісна залежність  $a(\omega^*)$ , на рис. 8.6, *б* -  $b(\omega^*)$ , а на рис. 8.6, *в* -  $Z_C(\omega^*)$ .

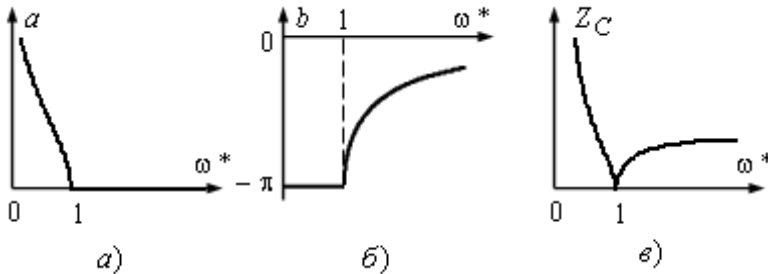


Рис. 8.6

Плавна зміна коефіцієнта загасання відповідно до (8.30) і рис. 8.6, *a* показує, що в смузі загасання фільтр не є ідеальним.

Аналогічні результати можна одержати й для ФВЧ, що виконаний за симетричній П-образною схемою (рис. 8.5, *б*).

*Приклад 8.2.* Для фільтра вищих частот, що виконаний за симетричній П-образною схемою (рис. 8.5, *б*), потрібно обчислити напругу  $U_1$  й струм  $I_1$  на вході фільтра, струм  $I_2$  на виході фільтра, якщо кутова частота джерела енергії  $\omega = 5000 \text{ c}^{-1}$ ,  $L = 40 \text{ мГн}$ ,  $C = 8 \text{ мкФ}$ ,  $U_2 = 50 \text{ В}$ . Режим роботи фільтра узгоджений.

*Розв'язання.* Характеристичний опір фільтра, якщо кутова частота  $\omega = 5000 \text{ c}^{-1}$

$$\begin{aligned} Z_C &= \sqrt{\frac{A_{12}}{A_{21}}} = \sqrt{\frac{L}{C \left( 2 - \frac{1}{\omega^2 LC} \right)}} = \\ &= \sqrt{\frac{0,04}{8 \cdot 10^{-6} \left( 2 - \frac{1}{5000^2 \cdot 0,04 \cdot 8 \cdot 10^{-6}} \right)}} = 51,6 \text{ Ом}. \end{aligned}$$

Отже, відповідно опір узгодженого навантаження дорівнює  
 $Z_L = Z_C = R = 51,6e^{j0^\circ} \text{ Ом}$ .

Приймаємо, що початкова фаза напруги на виході фільтра дорівнює нулю  $\underline{U}_2 = 50e^{j0^\circ} \text{ В}$ .

Струм на виході фільтра

$$I_2 = \frac{U_2}{Z_L} = \frac{50e^{j0^\circ}}{51,6e^{j0^\circ}} = 0,969e^{j0^\circ} \text{ А}.$$

Використовуючи вирази (7.19) і з огляду на те, що фільтр зібраний за симетричною схемою, знайдемо параметри А-форми

$$A_{11} = 1 + \frac{1}{\frac{j\omega C}{j\omega L}} = 1 - \frac{1}{\omega^2 LC} = 1 - \frac{1}{(5 \cdot 10^3)^2 \cdot 40 \cdot 10^{-3} \cdot 8 \cdot 10^{-6}} =$$

$$= 0,875 = 0,875e^{j0^\circ};$$

$$A_{12} = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot 8 \cdot 10^{-6}} = -j25 = 25e^{-j90^\circ} \text{ Ом};$$

$$A_{21} = \frac{2j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}{(j\omega L)^2} = \frac{2 \cdot j \cdot 5000 \cdot 0,04 + \frac{1}{j5000 \cdot 8 \cdot 10^{-6}}}{(j \cdot 5000 \cdot 0,04)^2} =$$

$$= -j9,375 \cdot 10^{-3} = 9,375 \cdot 10^{-3} e^{-j90^\circ} \text{ Сим};$$

$$A_{22} = A_{11} = 0,875 = 0,875e^{j0^\circ}.$$

Коефіцієнти передачі фільтра за напругою й струмом в режимі узгодженого навантаження відповідно до виразів (7.78)

$$k_U = \frac{U_2}{U_1} = \frac{Z_C}{A_{11}Z_C + A_{12}} = \frac{51,6}{0,875 \cdot 51,6 - j25} =$$

$$= 0,875 + j0,484 = 1e^{j29^\circ};$$

$$k_I = \frac{I_2}{I_1} = \frac{1}{A_{21}Z_C + A_{22}} = \frac{1}{-j9,375 \cdot 10^{-3} \cdot 51,6 + 0,875} =$$

$$= 0,875 + j0,484 = 1e^{j29^\circ}.$$

Напряга  $U_1$  й струм  $I_1$  на вході фільтра

$$\underline{U}_1 = \frac{\underline{U}_2}{k_U} = \frac{50e^{j0^\circ}}{1e^{j29^\circ}} = 50e^{-j29^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{I}_2}{k_I} = \frac{0,969e^{j0^\circ}}{1e^{j29^\circ}} = 0,969e^{-j29^\circ} \text{ А}.$$

### 8.2.4 Смуговий фільтр СФ

Смуговий фільтр (СФ) формально може бути отриманий шляхом каскадного з'єднання фільтра нижніх частот зі смугою пропускання  $\omega \leq \omega_{c2}$  й фільтра вищих частот зі смугою пропускання  $\omega \geq \omega_{c1}$ , причому  $\omega_{c1} < \omega_{c2}$ . У результаті утворюється фільтруюча система, що здатна пропускати сигнали із частотами від  $\omega_{c1}$  до  $\omega_{c2}$ .

Аналогічну задачу виконують спеціальні смугові фільтри. Схема Т-образного смугового фільтра представлена на рис. 8.7, а, а П-образного - на рис. 8.7, б.

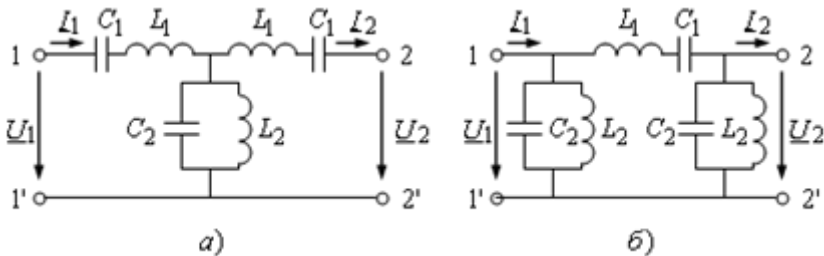


Рис. 8.7

Розглянемо більш докладно смуговий фільтр, що виконано за симетричною Т-образною схемою (рис. 8.7, а). Параметри елементів фільтра підбирають таким чином, щоб резонансні частоти послідовних і паралельних контурів збіглися між собою

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}. \quad (8.32)$$

Це можливо, якщо виконується умова

$$L_1 C_1 = L_2 C_2. \quad (8.33)$$

Таким чином, у СФ поздовжні й поперечні опори відповідно мають вигляд

$$\begin{aligned} Z_1 &= j \left( \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) = j \rho_1 \left( \frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega} \right); \\ Z_2 &= \frac{j \omega L_2 \frac{1}{j \omega C_2}}{j \left( \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right)} = \rho_2 \frac{1}{j \left( \frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega} \right)}. \end{aligned} \quad (8.34)$$

де  $\rho_1 = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}$ ,  $\rho_2 = \sqrt{\frac{L_2}{C_2}}$  - хвильові опори, відповідно, послідовного й паралельного контурів.

Тому що добуток

$$Z_1 Z_2 = \rho_1 \rho_2 = \text{const}, \quad (8.35)$$

то смуговий фільтр даного типу належить до  $k$ -фільтрів.

Відповідно до (8.4) і (8.34) маємо

$$A_{11} = 1 + \frac{j \left( \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) j \left( \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right)}{j \omega L_2 \frac{1}{j \omega C_2}} = 1 - \frac{\left( \frac{\omega^2}{\omega_o^2} - 1 \right)^2}{\omega^2 C_1 L_2}. \quad (8.36)$$

Межі смуги пропускання визначаємо з умови (8.8)

$$-1 \leq 1 - \frac{\left( \frac{\omega^2}{\omega_o^2} - 1 \right)^2}{\omega^2 C_1 L_2} \leq 1. \quad (8.37)$$

З розгляду верхньої межі нерівності  $+1$  одержуємо, що  $\omega = \omega_o$ , тобто резонансна частота належить смузі пропускання. З розгляду нижньої межі нерівності, маємо

$$\frac{\left( \frac{\omega^2}{\omega_o^2} - 1 \right)^2}{\omega^2 C_1 L_2} = 2, \quad (8.38)$$

або після добування квадратного кореня з обох частин рівняння й

приведення подібних

$$\omega^2 \pm \omega_o^2 \sqrt{2C_1 L_2} \omega - \omega_o^2 = 0. \quad (8.39)$$

Квадратне рівняння (8.39) має чотири дійсних корені, але від'ємні корені відкидаємо тому що вони не мають фізичного змісту

$$\omega_{c1} = \sqrt{\frac{1}{L_1 C_1} + \frac{1}{2L_1 C_2}} - \frac{1}{\sqrt{2L_1 C_2}}; \quad (8.40)$$

$$\omega_{c2} = \sqrt{\frac{1}{L_1 C_1} + \frac{1}{2L_1 C_2}} + \frac{1}{\sqrt{2L_1 C_2}};$$

Перемножуючи рівності (8.40), одержуємо, що

$$\omega_{c1} \omega_{c2} = \frac{1}{L_1 C_1} = \omega_o^2, \quad (8.41)$$

отже, резонансна частота кожного з контурів дорівнює середньому геометричному межових частот.

Характеристичний опір фільтра на підставі (7.15), (7.74) і (8.34)

$$Z_C = \sqrt{2Z_1 Z_2 + Z_1^2} = \sqrt{\frac{L_2}{C_1}} \sqrt{2 - \frac{C_2}{C_1} \left( \frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega} \right)^2}. \quad (8.42)$$

У смузі загасання коефіцієнт загасання визначемо з рівняння (8.15)

$$\operatorname{ch} a = 1 - \rho_1 \rho_2 \left( \frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega} \right)^2. \quad (8.43)$$

У смузі пропускання коефіцієнт фази СФ із рівняння (8.7)

$$\cos b = 1 - \rho_1 \rho_2 \left( \frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega} \right)^2. \quad (8.44)$$

На рис. 8.8, *a* наведена якісна залежність  $a(\omega)$ , на рис. 8.8, *б* -  $b(\omega)$ , а на рис. 8.8, *в* -  $Z_C(\omega)$ .

Як видно з рис. 8.8, *б* у зоні частот від  $\omega_{c1}$  до  $\omega_o$  коефіцієнт фази СФ змінюється від  $-\pi$  до 0, так само як у ФВЧ. В зоні частот від  $\omega_o$  до  $\omega_{c2}$  коефіцієнт фази СФ змінюється від 0 до  $\pi$ , так само як у ФНЧ. У смугах загасання коефіцієнт фази дорівнює  $\pm \pi$ .

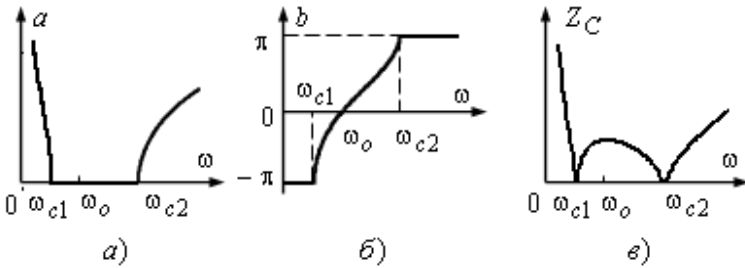


Рис. 8.8

В зоні низьких частот ( $\omega < \omega_{c1}$ ) характеристикний опір має емнісної характер. У смузі пропускання ( $\omega_{c1} \leq \omega \leq \omega_{c2}$ ) характеристикний опір СФ залишається суто активним, причому в зоні частот, що примикає до частоти  $\omega_o$ , його значення мало залежить від частоти й приблизно дорівнює  $\sqrt{\frac{2L_2}{C_1}}$ . Тому хорошим наближенням до режиму узгодженого навантаження є виконання умови  $Z_l = R_l = \sqrt{\frac{2L_2}{C_1}}$ . В зоні високих частот ( $\omega > \omega_{c2}$ ) характеристикний опір має індуктивний характер.

Смуговий фільтр, що виконано за симетричною П-образною схемою, працює аналогічно.

### 8.2.5 Загороджувальний фільтр ЗФ

Якщо в схемі смугового фільтра поміняти місцями паралельні й послідовні контури, то він перетвориться у загороджувальний фільтр (ЗФ).

Схема Т-образного загороджувального фільтра представлена на рис. 8.9, а, а П-образного - на рис. 8.9, б.

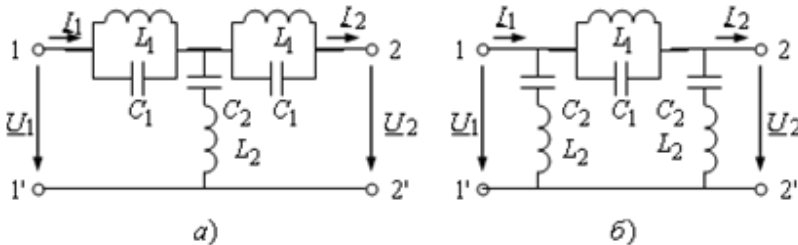


Рис. 8.9

Параметри елементів загороджувального фільтра підбирають таким чином, щоб резонансні частоти послідовних і паралельних контурів збігалися між собою

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}. \quad (8.45)$$

У ЗФ поздовжні й поперечні опори відповідно мають вигляд

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{j\omega L_1 \frac{1}{j\omega C_1}}{j\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right)} = \rho_1 \frac{1}{j\left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega}\right)}; \\ Z_2 &= j\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right) = j\rho_2 \left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega}\right). \end{aligned} \quad (8.46)$$

де  $\rho_1 = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}$ ,  $\rho_2 = \sqrt{\frac{L_2}{C_2}}$  - хвильові опори, відповідно, паралельного й послідовного контурів.

Тому що добуток

$$Z_1 Z_2 = \rho_1 \rho_2 = \text{const}, \quad (8.47)$$

то загороджувальний фільтр даного типу також належить до  $k$ -фільтрів.

Оскільки теорія й розрахунок ЗФ є аналогічними до теорії й розрахунку ПФ, обмежимося приведенням основних формул для загороджувального фільтра, що виконано за Т-образною схемою.

У загороджувального фільтра, смуга пропускання розділена на дві частини смугою загасання. Межові частоти смуги пропускання

$$\begin{aligned} \omega_{c1} &= \sqrt{\frac{1}{C_1 L_1} + \frac{1}{8C_1 L_2}} - \frac{1}{\sqrt{8C_1 L_2}}; \\ \omega_{c2} &= \sqrt{\frac{1}{C_1 L_1} + \frac{1}{8C_1 L_2}} + \frac{1}{\sqrt{8C_1 L_2}}; \end{aligned} \quad (8.48)$$

Характеристичний опір загороджувального фільтра

$$\underline{Z}_C = \sqrt{2Z_1 Z_2 + Z_1^2} = \sqrt{\frac{L_2}{C_1}} \sqrt{2 - \frac{C_2}{C_1 \left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega}\right)^2}} \quad (8.49)$$

У смузі загасання коефіцієнт загасання

$$\operatorname{ch} a = 1 - \frac{\rho_1 \rho_2}{\left( \frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega} \right)^2}. \quad (8.50)$$

У смузі пропускання коефіцієнт фази з рівняння (8.7)

$$\cos b = 1 - \frac{\rho_1 \rho_2}{\left( \frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega} \right)^2}. \quad (8.51)$$

На рис. 8.10, *a* представлена якісна залежність  $a(\omega)$ , на рис. 8.10, *б* -  $b(\omega)$ , а на рис. 8.10, *в* -  $Z_C(\omega)$ .

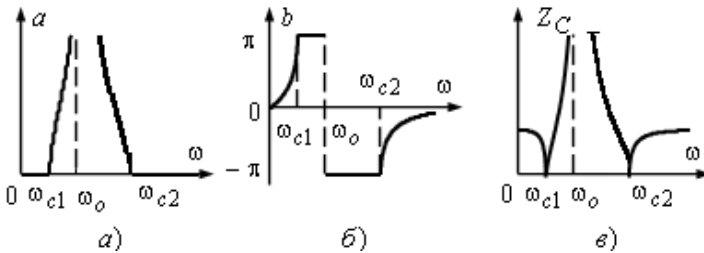


Рис. 8.10

На закінчення необхідно відзначити, що загасання, що забезпечують  $k$ -фільтри в смузі загасання є недостатньо великим, особливо в зонах частот, які примикають до межових частот, внаслідок чого смуги пропускання й загасання поділяються недостатньо різко. Для поліпшення характеристик фільтрів їх можна з'єднувати каскадно. При забезпеченні узгодженого режиму роботи всіх  $n$  ланок схеми коефіцієнт загасання  $a_e$  еквівалентного фільтра зростає відповідно до виразу

$$a_e = na, \quad (8.52)$$

що наближає такий фільтр до ідеального. Але застосування багатоланкового фільтра є складним й неекономічним.

Крім того, як було показано раніше, характеристичні опори  $k$ -фільтрів сильно змінюються в смузі пропускання, що призводить до ускладнення умов узгодження, а при узгодженні навантаження й джерела енергії тільки для фіксованої частоти (наприклад, для  $\omega = \omega_o$ ) до появи загасання й у смузі пропускання.

Для усунення цих недоліків застосовують реактивні  $m$ -фільтри. У даному посібнику фільтри цього типу не розглядаються.

### 8.3 Пасивні RC-фільтри

Пасивні реактивні фільтри через наявність у них котушок індуктивності мають для зони низьких частот великі габарити. Але навіть для зони високих частот фільтри цього типу не відповідають за габаритами вимогам мініатюризації пристроїв, які виконані на інтегральних мікросхемах. Крім того, LC-фільтри не завжди можна вважати суто реактивними, тому що втрати енергії в котушках індуктивності досить істотні. А низька добротність неминуче призводить до помітного погіршення характеристик фільтра.

Цих недоліків не мають безіндуктивні фільтри (RC-фільтри), які не містять котушок індуктивності. Найпростішими фільтрами цього типу є фільтр нижніх частот, схема якого представлена на рис. 8.11, а й фільтр вищих частот, схема якого представлена на рис. 8.11, б.

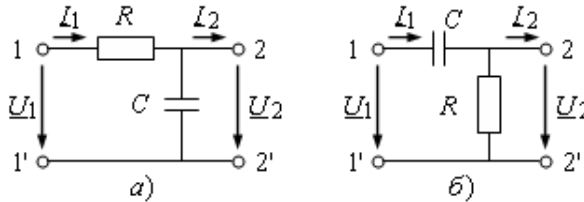


Рис. 8.11

Кожний з таких фільтрів являє собою подільник напруги, для якого коефіцієнт передачі за напругою дорівнює

$$\underline{k}_U = \frac{U_2}{U_1} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = k_U e^{j\varphi_U}. \quad (8.53)$$

У ФНЧ поздовжні й поперечні опори відповідно мають вигляд

$$Z_1 = R; \quad Z_2 = X_2 = \frac{1}{j\omega C}. \quad (8.54)$$

Коефіцієнт передачі ФНЧ

$$\underline{k}_U = \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega CR}. \quad (8.55)$$

Амплітудно-частотна й фазочастотна характеристики ФНЧ

$$k_U = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}}; \quad \varphi_U = -\arctg(\omega CR). \quad (8.56)$$

Поклавши, що на межі смуги пропускання  $k_U = 1/\sqrt{2}$  одержуємо вираз для кутової частоти зрізу

$$\omega_C = \frac{1}{CR}. \quad (8.57)$$

На рис. 8.12, *а* представлена АЧХ, а на рис. 8.12, *б* - ФЧХ фільтра нижніх частот.

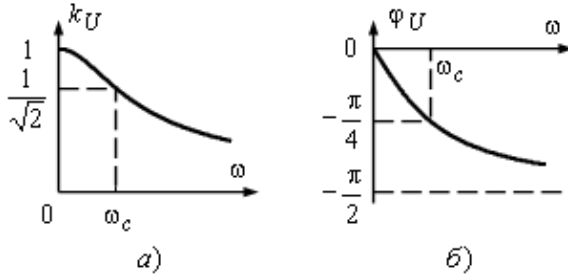


Рис. 8.12

У діапазоні частот  $\omega \ll \omega_c$  маємо  $k_U \approx 1$ . У діапазоні частот  $\omega \gg \omega_c$  відповідно до виразу (8.56)  $k_U = \frac{1}{\omega CR}$ , тобто модуль коефіцієнта передачі обернено пропорційний частоті.

Фазове зсув на кутовій частоті зрізу складає  $-\frac{\pi}{4}$ .

Для більш швидкого зменшення модуля коефіцієнта передачі можна з'єднати касадно декілька ФНЧ. При з'єднанні  $n$  ФНЧ із різними частотами зрізу  $\omega_c$  для еквівалентного фільтра кутова частота зрізу приблизно дорівнює

$$\omega_{ce} = \frac{\omega_c}{\sqrt{n}}. \quad (8.58)$$

У ФВЧ поздовжні й поперечні опори відповідно мають вигляд

$$Z_1 = X_1 = \frac{1}{j\omega C}; \quad Z_2 = R. \quad (8.59)$$

Коефіцієнт передачі ФВЧ

$$k_U = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega CR}{1 + j\omega CR}. \quad (8.60)$$

Амплітудно-частотна й фазочастотна характеристики ФВЧ

$$k_U = \frac{\omega CR}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}}; \quad \varphi_U = \arctg\left(\frac{1}{\omega CR}\right). \quad (8.61)$$

Частоту зрізу ФВЧ визначаємо так само як і частоту зрізу ФНЧ

$$\omega_c = \frac{1}{CR}. \quad (8.62)$$

На рис. 8.13, *a* представлена АЧХ, а на рис. 8.13, *б* - ФЧХ фільтра вищих частот.

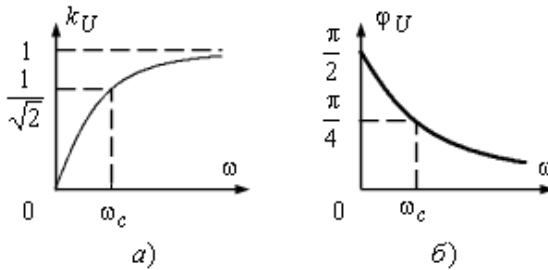


Рис. 8.12

У діапазоні частот  $\omega \gg \omega_c$  маємо  $k_U \approx 1$ . У діапазоні частот  $\omega \ll \omega_c$  відповідно до виразу (8.61)  $k_U = \omega CR$ , тобто модуль коефіцієнта передачі прямо пропорційний частоті.

Фазовий зсув на частоті зрізу складає  $\pi/4$ .

При з'єднанні  $n$  ФВЧ із рівними частотами зрізу  $\omega_c$  для еквівалентного фільтра частота зрізу приблизно дорівнює

$$\omega_{c_e} = \omega_c \sqrt{n}. \quad (8.63)$$

### Питання для самоконтролю

1. Що називають електричним фільтром?
2. Що таке смуги прозорості й загасання?
3. Як класифікуються фільтри залежно від діапазону частот, які вони пропускають?
4. У якому режимі працюють фільтри в смузі пропущення частот?
5. Чому фільтр повинен працювати в режимі узгодженого навантаження?
6. Чому розглянуті фільтри не можна вважати ідеальними?
7. Як можна поліпшити характеристики фільтра?
8. Як визначити граничні частоти при заданих параметрах фільтра?

## Розділ дев'ятий ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

### 9.1 Загальні положення

У попередніх розділах при аналізі електричних кіл, приймаючись, що електричне коло являє собою сукупність деяких самостійно існуючих елементів, геометричні розміри яких, як і розміри самого електричного кола не впливають на режим роботи кола. При цьому вважалося, що перетворення електричної енергії в неелектромагнітні види енергії зосереджено в резистивних елементах, в енергію магнітного поля - в індуктивних елементах, в енергію електричного поля - у ємнісних елементах. Напруги й струми цих елементів зв'язані між собою співвідношеннями.

$$u_R = Ri_R; \quad u_L = L \frac{di_L}{dt}; \quad i_C = C \frac{du_C}{dt}. \quad (9.1)$$

Вирази (9.1) базуються на припущенні, що струм, що входить у кожний із цих елементів, дорівнює струму, що з нього виходить.

Як уже говорилися раніше, електричні кола, які з хорошим ступенем точності можна описати моделями, що являють собою сукупність деяких самостійно існуючих елементів, які зосереджені в різних точках кола, називають колами із *зосередженими параметрами*.

Однак є електротехнічні й радіотехнічні пристрої, які представити у вигляді кіл із зосередженими параметрами не представляється можливим. Наприклад, при аналізі електромагнітних процесів, які відбуваються в лініях електропередачі варто мати на увазі, що виникнення магнітного й електричного полів й перетворення електричної енергії в теплову відбувається по всій довжині лінії. У результаті цього струми на різних ділянках навіть нерозгалуженого кола відрізняються друг від друга, і є функціями двох незалежних змінних: часу  $t$  і просторової координати  $x$ .

Електричні кола, у яких всі ці процеси відбуваються одночасно на всіх ділянках, називають *колами з розподіленими параметрами (лінії з розподіленими параметрами, довгими лініями)*.

До кіл такого типу крім ліній електропередачі відносяться лінії телефонного зв'язку, телекерування й телевимірювань, обмотки електричних машин і т.п.

Для оцінки, до якого типу електричних кіл належить лінія - із зосередженими або з розподіленими параметрами варто порівняти

її довжину  $l$  з довжиною електромагнітної хвилі

$$\lambda = \frac{c}{f}, \quad (9.2)$$

де  $c$  - швидкість поширення електромагнітних хвиль у вакуумі,  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с,  $f$  - частота коливань сигналу, що передається, Гц.

Якщо  $l > (0,05 \dots 0,1)\lambda$ , то лінію варто розглядати як електричне коло з розподіленими параметрами. Наприклад, для електричних кіл промислової частоти  $f = 50$  Гц, довжина електромагнітної хвилі  $\lambda = 6 \cdot 10^6$  м. Тому при довжині  $l > 300 \dots 600$  км лінію електропередачі варто розглядати як лінію з розподіленими параметрами. Але для радіотехнічного кола частоти  $f = 10^8$  Гц, довжина електромагнітної хвилі  $\lambda = 3$  м. Тому вже при довжині  $l > 0,15 \dots 0,3$  м його варто розглядати як коло з розподіленими параметрами.

Якщо подумки виділити яка-небудь кінцеву ділянку кола з розподіленими параметрами, то струми на кінцях цієї ділянки виявляться неоднаковими внаслідок наявності струмів зсуву, які обумовлені наявністю ємнісного взаємозв'язку між струмоведучими елементами й струмів витоку через недосконалу ізоляцію. Тільки при нескінченному зменшенні ділянок кола можна прийняти, що струми на кінцях ділянок дорівнюють один одному.

Відповідно рівняння (9.1) не можуть бути застосовані для всього кола в цілому або його кінцевих ділянках, але можуть бути застосовані до ділянок з нескінченно малою довжиною.

Кожна така ділянка характеризується своїми параметрами: активним опором, індуктивністю, ємністю й активною провідністю.

Теплові втрати з урахуванням поверхневого ефекту й ефекту близькості визначають позовжній активний опір ділянки  $R$ .

Магнітний потік, що зчіплюється з контуром струму, який утворюють струмоведучі провідники, визначає позовжню індуктивність ділянки  $L$ .

Ємність між провідниками елемента, а також ємності цих провідників стосовно землі (або заземленого корпусу електричної машини) і іншим сусіднім провідникам обумовлює поперечну ємність ділянки  $C$ .

Недосконалість ізоляції (провідність ізоляції й діелектричні втрати, які виникають у ній) обумовлюють поперечну активну про-

відність ділянки  $G$ .

Варто звернути увагу на те, що поздовжній активний опір і поперечна активна провідність ділянки не зв'язані один з одним, тобто в цьому випадку  $G \neq \frac{1}{R}$ .

Якщо активний опір, індуктивність, ємність й активна провідність рівномірно розподілені уздовж лінії з розподіленими параметрами, то таку лінію називають *однорідною*. Довгу лінію з нерівномірним розподілом параметрів у багатьох випадках можна розбити на ділянки, кожна з яких можна розглядати як однорідну лінію.

## 9.2 Рівняння однорідної двопровідної лінії

Як приклад кола з розподіленими параметрами розглянемо однорідну двопровідну лінію. Під первинними параметрами лінії будемо розуміти активний опір  $R_0$ , індуктивність  $L_0$ , ємність  $C_0$  й активну провідність  $G_0$ , що віднесені до одиниці довжини лінії. Первинні параметри лінії залежать як від її конструкції й так і від частоти. Обчислення первинних параметрів лінії належить до задач теорії електромагнітного поля.

Нехай довжина однорідної лінії дорівнює  $l$ . Для одержання рівняння однорідної двопровідної лінії розіб'ємо її на окремі ділянки нескінченно малої довжини  $dx$  зі структурою, що представлена на рис. 9.1. Верхній провід назвемо прямим, а нижній - зворотним. Кожна така ділянка може бути замінений еквівалентною схемою з поздовжніми параметрами  $L_0 dx$  й  $R_0 dx$  і поперечними  $C_0 dx$  й  $G_0 dx$ .

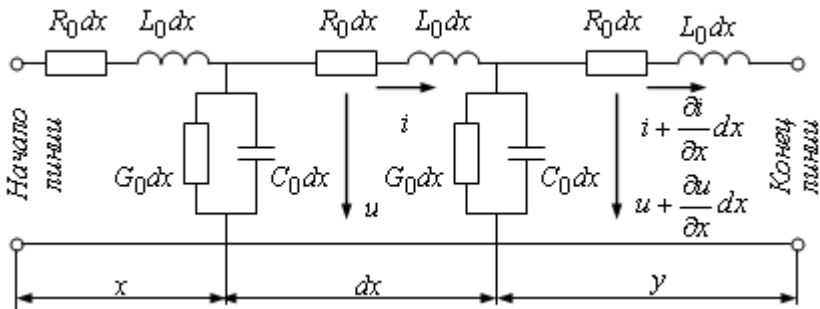


Рис. 9.1

Нехай напруга й струм на початку такої ділянки, яку можна розглядати як чотириполюсник, дорівнюють відповідно  $u$  й  $i$ .

У середині ділянки  $dx$  відбуваються спад напруги  $\frac{\partial u}{\partial x} dx$  на резистивному й індуктивному елементах і зміна струму  $\frac{\partial i}{\partial x} dx$ , що дорівнює сумі струму витоку й струму зсуву через резистивний й ємнісний елементи.

Тому в кожній точці лінії напругу й струм будуть функціями не тільки часу  $t$ , але й координати  $x$ , тобто відстані від початку лінії (або координати  $y$ , тобто відстані від кінця лінії).

У загальному випадку змінного струму для елемента, що розташований на відстані  $x$  від початку лінії (як показано на рис. 9.1), на підставі законів Кірхгофа можна скласти систему рівнянь

$$\begin{cases} u = \left( u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) + R_0 dx i + L_0 dx \frac{\partial i}{\partial t}; \\ i = \left( i + \frac{\partial i}{\partial x} dx \right) + \left( u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) G_0 dx + C_0 dx \frac{\partial}{\partial t} \left( u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right), \end{cases} \quad (9.3)$$

де  $R_0$  - активний опір прямого й зворотного проводів, що віднесений до одиниці довжини лінії,  $Ом/м$ ;  $L_0$  - індуктивність контуру, який утворений прямим й зворотним проводами, що віднесена до одиниці довжини лінії,  $Гн/м$ ;  $C_0$  - ємність між прямим і зворотним проводами, що віднесена до одиниці довжини лінії,  $Ф/м$ ;  $G_0$  - активна провідність між прямим і зворотним проводами, що віднесена до одиниці довжини лінії,  $Сим/м$ .

Після розкриття дужок, приведення подібних, скорочення на  $dx$  одержуємо систему рівнянь у частинних похідних для миттєвих значень напруги й струму (величинами другого порядку малості зневажаємо)

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial x} = R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}; \\ -\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}. \end{cases} \quad (9.4)$$

Рівняння, які утворюють систему (9.4), в електротехнічній літературі прийнято називати *телеграфними рівняннями*.

При відліку відстані від кінця лінії аналогічним способом одержуємо

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} = R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}; \\ \frac{\partial i}{\partial y} = G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}. \end{cases} \quad (9.5)$$

Системи рівняння (9.4)-(9.5) записані в частинних похідних, оскільки напруга  $u$  й струм  $i$  є функціями двох незалежних змінних: часу  $t$  і відстані  $x$  (або  $y$ ).

Розв'язання систем рівнянь (9.4) і (9.5) при заданих початкових і граничних умовах дозволяє визначити напругу  $u$  й струм  $i$  у функції часу й відстані від початку лінії (або від кінця лінії).

Теорію кіл з розподіленими параметрами, які працюють у сталих режимах, будемо розглядати для випадку кіл синусоїдного струму. Це дає можливість, прийнявши, що  $f = 0$  Гц поширити отримані співвідношення на кола постійного струму, а з використанням розкладання в тригонометричний ряд Фур'є - на кола несинусоїдного струму. Крім того, у багатьох випадках трифазна лінія також може бути замінена однофазної двопровідною лінією. Це можливо при синусоїдних процесах, якщо всі проводи перебувають в однакових умовах. При цьому для симетричних трифазних систем напруг прямої і зворотної послідовностей струми в проводах також утворять симетричні системи прямої й зворотної послідовностей. У цьому випадку досить розглянути процеси тільки в одній з фаз, замінюючи трифазну лінію еквівалентної їй однофазною двопровідною лінією. Для напруг і струмів нульової послідовності трифазну чотирипровідну лінію також можна замінити еквівалентною двопровідною, причому зворотним проводом є провід, що еквівалентний нейтральному для трифазної лінії.

### 9.3 Розв'язання рівнянь однорідної лінії постійного струму в усталеному режимі

Розгляд кіл з розподіленими параметрами почнемо з аналізу однорідної лінії постійного струму.

Якщо до початку лінії прикладена постійна напруга  $U_1$ , то в усталеному режимі напруги й струми у всіх перетинах лінії так само будуть постійними.

При підстановці в рівняння (9.5) замість миттєвих значень  $u$  й  $i$  постійних в часі напруги  $U$  й струму  $I$  у будь-якій точці лінії похідні за часом  $t$  перетворюються в нулі й рівняння в частинних похідних стануть звичайними диференціальними рівняннями, у яких незалежною змінною є відстань від кінця лінії  $y$ . Таким чином, система рівнянь набуде вигляду

$$\begin{cases} \frac{dU}{dy} = R_0 I; \\ \frac{dI}{dy} = G_0 U. \end{cases} \quad (9.6)$$

Для одержання із системи (9.6) одного рівняння з одним невідомим  $U_0$  треба взяти похідну за  $y$  від обох частин першого рівняння

$$\frac{d^2 U}{dy^2} = R_0 \frac{dI}{dy}, \quad (9.7)$$

і підставити в (9.7) значення  $\frac{dI}{dy}$  із другого рівняння системи (9.6)

$$\frac{d^2 U}{dy^2} = R_0 G_0 U. \quad (9.8)$$

Якщо покласти, що  $R_0 G_0 = \alpha^2$ , то отримаємо диференціальне неоднорідне рівняння другого ступеня

$$\frac{d^2 U}{dy^2} - \alpha^2 U = 0. \quad (9.9)$$

Характеристичне рівняння

$$p^2 - \alpha^2 = 0. \quad (9.10)$$

Коріння характеристичного рівняння мають вигляд

$$p_{1,2} = \pm \alpha. \quad (9.11)$$

Тоді загальне розв'язання для напруги на відстані  $y$  від кінця лінії

$$U = A_1 e^{\alpha y} + A_2 e^{-\alpha y}, \quad (9.12)$$

а струм у цій точці

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{R_0} \frac{dU}{dy} = \frac{\alpha}{R_0} (A_1 e^{\alpha y} - A_2 e^{-\alpha y}) = \\ &= \sqrt{\frac{G_0}{R_0}} (A_1 e^{\alpha y} - A_2 e^{-\alpha y}) = \frac{1}{\rho} (A_1 e^{\alpha y} - A_2 e^{-\alpha y}). \end{aligned} \quad (9.13)$$

Звідси випливає, що однорідну лінію характеризують два параметри: *хвильовий (характеристичний) опір*  $\rho$  і *коефіцієнт розповсюдження*  $\alpha$

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{\frac{R_0}{G_0}}; \\ \alpha &= \sqrt{R_0 G_0}. \end{aligned} \quad (9.14)$$

Одиницею вимірювання хвильового опору  $\rho$  є *ом (Ом)*, а коефіцієнта розповсюдження  $\alpha$  - *1/метр* ( $m^{-1}$ ).

Постійні інтегрування  $A_1$  й  $A_2$  визначаємо на підставі граничних умов, у якості яких можна використати значення напруги й струму в будь-якій точці лінії.

Нехай напруга  $U_2$  й струм  $I_2$  наприкінці лінії, тобто якщо  $y=0$ , є заданими.

Отже, опір навантаження

$$R_l = \frac{U_2}{I_2}. \quad (9.15)$$

Рівняння (9.12) і (9.13), якщо  $y=0$ , з урахуванням того, що  $e^0 = 1$ , мають вигляд

$$\begin{cases} U_2 = A_1 + A_2; \\ \rho I_2 = A_1 - A_2. \end{cases} \quad (9.16)$$

Звідси

$$\begin{cases} A_1 = \frac{U_2 + \rho I_2}{2}; \\ A_2 = \frac{U_2 - \rho I_2}{2}. \end{cases} \quad (9.17)$$

Отже, напруга й струм у будь-якій точці лінії на відстані  $y$  від її кінця

$$\begin{cases} U = \frac{1}{2}(U_2 + \rho I_2)e^{\alpha y} + \frac{1}{2}(U_2 - \rho I_2)e^{-\alpha y}; \\ I = \frac{1}{2}\left(I_2 + \frac{U_2}{\rho}\right)e^{\alpha y} + \frac{1}{2}\left(I_2 - \frac{U_2}{\rho}\right)e^{-\alpha y}. \end{cases} \quad (9.18)$$

Таким чином, напругу й струм у будь-якій точці лінії визначають як суму ординат двох експонентних функцій. Причому ординати функції, до складу якої входить співмножник  $e^{\alpha y}$ , зменшуються від початку лінії до її кінця, а ординати функції, до складу якої входить співмножник  $e^{-\alpha y}$ , зменшуються від кінця лінії до її початку.

На рис. 9.2 представлені графіки розподілу складових і сумарних значень напруги й струму для випадку  $R_l > \rho$ .

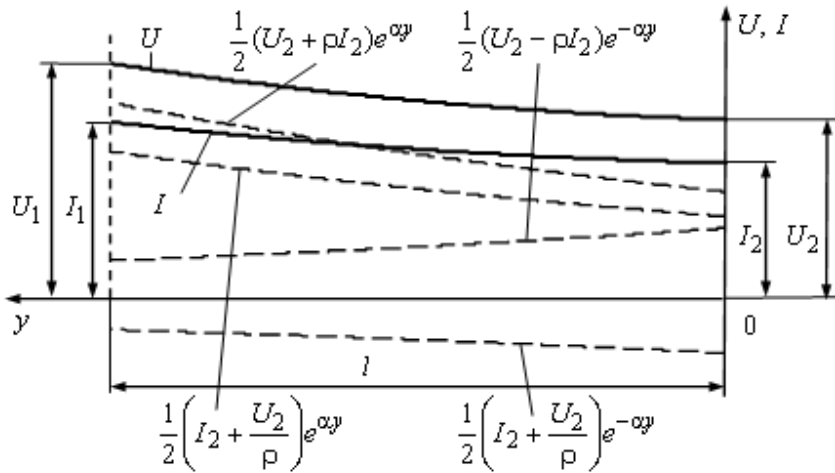


Рис. 9.2

Якщо опір навантаження дорівнює хвильовому, тобто  $R_l = \rho$ , то другі складові у рівняннях системи (9.18) перетворюються в нулі, тому графіки розподілу напруги й струму будуть являти собою експоненти.

### 9.4 Розв'язання рівнянь однорідної лінії синусоїдного струму в усталеному режимі

Якщо до початку однорідної лінії прикладена синусоїдна напруга з постійною кутовою частотою  $\omega$ , то в усталеному режимі, в силу лінійності параметрів, напруга й струм у будь-якому перетині лінії також є синусоїдними функціями.

Для розв'язання задачі застосовуємо символічний метод, заміняючи в рівняннях миттєві значення напруги  $u$  й струму  $i$ , комплексними значеннями напруги  $\sqrt{2}Ue^{j\omega t}$  й струму  $\sqrt{2}Ie^{j\omega t}$ . Після підстановки цих значень у систему рівнянь (9.4) і скорочення на  $\sqrt{2}e^{j\omega t}$  одержуємо

$$\begin{cases} -\frac{dU}{dx} = R_0 I + j\omega L_0 I; \\ -\frac{dI}{dx} = G_0 U + j\omega C_0 U, \end{cases} \quad (9.19)$$

або

$$\begin{cases} -\frac{dU}{dx} = Z_0 I; \\ -\frac{dI}{dx} = Y_0 U, \end{cases} \quad (9.20)$$

де  $\underline{U}$  - комплекс діючого значення напруги,  $\underline{I}$  - комплекс діючого значення струму,  $\underline{Z}_0 = R_0 + j\omega L_0$  - комплексний позовжній опір, що віднесений до одиниці довжини однорідної лінії, Ом/м;  $\underline{Y}_0 = G_0 + j\omega C_0$  - комплексна поперечна провідність між прямим і зворотним проводами, що віднесена до одиниці довжини лінії, Сим/м.

Комплекси напруги  $\underline{U}$  і струму  $\underline{I}$  є функціями відстані від початку лінії  $x$ , але не залежать від часу  $t$ , а множники  $e^{j\omega t}$  навпаки є функціями часу  $t$ , але не залежать від відстані  $x$ , тому система рівнянь в часткових похідних для миттєвих значень  $u$  й  $i$  (9.4) перетворена в системи звичайних диференціальних рівнянь (9.19) і (9.20).

Диференціюючи обидві частини першого рівняння системи (9.20) за відстанню  $x$  й підставляючи вираз  $\frac{dI}{dx}$  із другого рівнян-

ня системи, одержуємо

$$\frac{d^2 \underline{U}}{dx^2} = Z_0 \underline{Y}_0 \underline{U}. \quad (9.21)$$

Позначаємо

$$\underline{\gamma} = \sqrt{Z_0 \underline{Y}_0} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)}. \quad (9.22)$$

Величину  $\underline{\gamma}$  називають *коефіцієнтом поширення*. У загальному випадку це комплексне число  $\underline{\gamma} = \alpha + j\beta$ . Дійсну частину  $\alpha$  коефіцієнта поширення називають *коефіцієнтом загасання*, а уявну частину  $\beta$  - *коефіцієнтом фази*. Значення цих коефіцієнтів завжди є ненегативними  $\alpha \geq 0$  й  $\beta \geq 0$ .

Одиницею вимірювання коефіцієнта поширення є 1/метр ( $m^{-1}$ ), коефіцієнта загасання - *непер/метр* (Нп/м), а коефіцієнта фази - *радіан/метр* (рад/м).

Тоді рівняння (9.21) приймає вигляд

$$\frac{d^2 \underline{U}}{dx^2} - \underline{\gamma}^2 = 0. \quad (9.23)$$

Його характеристичне рівняння

$$p^2 - \underline{\gamma}^2 = 0. \quad (9.24)$$

Корені характеристичного рівняння

$$p_{1,2} = \pm \underline{\gamma}. \quad (9.25)$$

Загальне розв'язання для напруги на відстані  $x$  від початку лінії

$$\underline{U} = \underline{A}_1 e^{\underline{\gamma}x} + \underline{A}_2 e^{-\underline{\gamma}x}. \quad (9.26)$$

Струм у цій точці знайдемо підставляючи вираз (9.26) у перше рівняння системи (9.20)

$$\begin{aligned} \underline{I} &= -\frac{1}{Z_0} \frac{d\underline{U}}{dx} = \frac{\underline{\gamma}}{Z_0} \left( \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma}x} - \underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} \right) = \\ &= \sqrt{\frac{\underline{Y}_0}{Z_0}} \left( \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma}x} - \underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} \right) = \frac{1}{Z_C} \left( \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma}x} - \underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} \right). \end{aligned} \quad (9.27)$$

Величину  $\underline{Z}_C$  називають *хвильовим (характеристичним) опором лінії*

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = Z_C e^{j\theta}, \quad (9.28)$$

де  $Z_C$  - модуль хвильового опору, Ом;  $\theta$  - показник фази хвильового опору, рад.

Хвильовий опір  $Z_C$  і коефіцієнт поширення  $\underline{\gamma}$  називають *вторинними (характеристичними) параметрами лінії*, тому що вони характеризують властивості однорідної лінії, що підімкнена до джерела синусоїдного струму, як пристрій для передачі енергії.

Якщо прийняти що у виразах (9.22) і (9.28) кутова частота дорівнює нулю  $\omega=0$ , то одержимо результати що аналогічні до тих, які були отримані для однорідної лінії, що підключена до джерела постійного струму (9.14).

Коефіцієнт загасання  $\alpha$  й коефіцієнт фази  $\beta$  пов'язані з первинними параметрами  $R_0, L_0, G_0, C_0$  й кутовою частотою джерела енергії  $\omega$  наступними співвідношеннями

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ R_0 G_0 - \omega^2 L_0 C_0 + \sqrt{(R_0^2 + \omega^2 L_0^2)(G_0^2 + \omega^2 C_0^2)} \right]}; \quad (9.29)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \omega^2 L_0 C_0 - R_0 G_0 + \sqrt{(R_0^2 + \omega^2 L_0^2)(G_0^2 + \omega^2 C_0^2)} \right]}.$$

Вирази (9.29) незручні для практичного використання через їхню громіздкість. Існує ряд спрощених формул, які враховують, що в діапазоні високих частот (1 МГц і вище) опір  $R_0$  і провідність  $G_0$  зневажливо малі в порівнянні, відповідно, з  $\omega L_0$  й  $\omega C_0$ . Якщо  $R_0 \ll \omega L_0$  й  $G_0 \ll \omega C_0$ , то можна приблизно вважати, що

$$\alpha \approx \frac{R_2}{2} \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} + \frac{G_2}{2} \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}; \quad (9.30)$$

$$\beta \approx \omega \sqrt{L_0 C_0}.$$

Постійні інтегрування  $A_1$  й  $A_2$ , які входять у рівняння (9.26) і (9.27), визначаємо використовуючи граничні умови: напругу  $\underline{U}_1$  й

струм  $I_1$  на початку лінії й напругу  $U_2$  й струм  $I_2$  наприкінці лінії. Для визначення постійних  $A_1$  і  $A_2$  цілком досить знати будь-які дві із цих величин.

Якщо задані напруга  $U_1$  й струм  $I_1$  на початку лінії, то прийнявши, що  $x = 0$ , маємо

$$\begin{cases} U_1 = A_1 + A_2; \\ I_1 = \frac{1}{Z_C}(A_2 - A_1). \end{cases} \quad (9.31)$$

Розв'язавши систему рівнянь (9.31) щодо постійних інтегрування, маємо

$$\begin{cases} A_1 = \frac{1}{2}(U_1 - Z_C I_1); \\ A_2 = \frac{1}{2}(U_1 + Z_C I_1). \end{cases} \quad (9.32)$$

Отже, напруга й струм на відстані  $x$  від початку лінії

$$\begin{cases} U = \frac{1}{2}(U_1 - Z_C I_1)e^{\gamma x} + \frac{1}{2}(U_1 + Z_C I_1)e^{-\gamma x}; \\ I = \frac{1}{2}\left(I_1 - \frac{U_1}{Z_C}\right)e^{\gamma x} + \frac{1}{2}\left(I_1 + \frac{U_1}{Z_C}\right)e^{-\gamma x}. \end{cases} \quad (9.33)$$

Таким чином, напругу й струм у будь-якій точці лінії можна представити як алгебраїчну суму ординат двох експонентних кривих. Ординати функції, до складу якої входить множник  $e^{\gamma x}$ , зменшуються від початку до кінця лінії, а ординати функції, до складу якої входить множник  $e^{-\gamma x}$ , зменшується від кінця лінії до її початку.

Якщо задана напруга  $U_2$  й струм  $I_2$  наприкінці лінії, то відстань до розглянутої точки зручніше відряховувати від кінця лінії. Після нескладних перетворень одержуємо систему рівнянь для напруги й струму на відстані  $y$  від кінця лінії

$$\begin{cases} U = \frac{1}{2}(U_2 + Z_C I_2)e^{\gamma y} + \frac{1}{2}(U_2 - Z_C I_2)e^{-\gamma y}; \\ I = \frac{1}{2}\left(I_2 + \frac{U_2}{Z_C}\right)e^{\gamma y} + \frac{1}{2}\left(I_2 - \frac{U_2}{Z_C}\right)e^{-\gamma y}. \end{cases} \quad (9.34)$$

*Приклад 9.1.* Відомі первинні параметри лінії без втрат:  $R_0 = 3 \text{ Ом/м}$ ,  $L_0 = 2 \text{ мГн/м}$ ,  $G_0 = 1 \text{ мкСим/м}$ ,  $C_0 = 6 \text{ нФ/м}$ . Визначити хвильовий опір і коефіцієнт поширення, якщо частота джерела енергії  $f = 500 \text{ Гц}$ .

*Розв'язання.* Кутова частота джерела енергії

$$\omega = 2\pi f = 2 \cdot 3,14 \cdot 500 = 3140 \text{ с}^{-1}.$$

Хвильовий опір на підставі (9.28)

$$\begin{aligned} \underline{Z}_C &= \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{3 + j3140 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 10^{-6} + j3140 \cdot 6 \cdot 10^{-9}}} = \\ &= 596 - j118 = 607 e^{-j11^\circ} \text{ Ом}. \end{aligned}$$

Коефіцієнт поширення на підставі (9.22)

$$\begin{aligned} \underline{\gamma} &= \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \\ &= \sqrt{(3 + j3140 \cdot 2 \cdot 10^{-3})(1 \cdot 10^{-6} + j3140 \cdot 6 \cdot 10^{-9})} = \\ &= (2,83 + j11,11) \cdot 10^{-3} = 11,46 \cdot 10^{-3} e^{76^\circ} \text{ м}^{-1}. \end{aligned}$$

При витягу квадратного кореня з комплексного числа можливі два результати, які відрізняються знаком. Тому що активний опір і коефіцієнт загасання не можуть приймати негативних значень, то серед отриманих результатів вибираємо ті, у яких дійсна частина ненегативна.

Відповідно коефіцієнт загасання й коефіцієнт фази дорівнюють

$$\alpha = 2,83 \cdot 10^{-3} \text{ Нп/м};$$

$$\beta = 11,11 \cdot 10^{-3} \text{ рад/м}.$$

## 9.5 Однорідна лінія як чотириполюсник

У багатьох випадках рівняння однорідної лінії зручно перетворити, використовуючи гіперболічні функції

$$\begin{cases} \text{ch } \underline{\gamma}x = \frac{1}{2}(e^{\underline{\gamma}x} + e^{-\underline{\gamma}x}); \\ \text{sh } \underline{\gamma}x = \frac{1}{2}(e^{\underline{\gamma}x} - e^{-\underline{\gamma}x}). \end{cases} \quad (9.35)$$

На підставі співвідношення (9.35) можна визначити напругу

й струм у будь-якій точці однорідної лінії. Для цього в системах рівнянь (9.33) і (9.33) розкриваємо дужки й групуємо члени рівнянь щодо напруги й струму, значення яких є заданими.

Якщо заданими є напруга  $\underline{U}_1$  й струм  $\underline{I}_1$  на початку лінії, то маємо

$$\begin{cases} \underline{U} = \underline{U}_1 \operatorname{ch} \underline{\gamma}x - \underline{Z}_C \underline{I}_1 \operatorname{sh} \underline{\gamma}x; \\ \underline{I} = \underline{I}_1 \operatorname{ch} \underline{\gamma}x - \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_C} \operatorname{sh} \underline{\gamma}x. \end{cases} \quad (9.36)$$

Якщо навпаки відомими є напруга  $\underline{U}_2$  й струм  $\underline{I}_2$  наприкінці лінії, то маємо

$$\begin{cases} \underline{U} = \underline{U}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma}y + \underline{Z}_C \underline{I}_2 \operatorname{sh} \underline{\gamma}y; \\ \underline{I} = \underline{I}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma}y + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_C} \operatorname{sh} \underline{\gamma}y. \end{cases} \quad (9.37)$$

Зокрема, якщо в системі рівнянь (9.37) прийняти  $y=l$ , то одержимо систему рівнянь, що зв'яже напругу  $\underline{U}_1$  й струм  $\underline{I}_1$  на початку лінії з напругою  $\underline{U}_2$  й струмом  $\underline{I}_2$  наприкінці лінії

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{U}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma}l + \underline{Z}_C \underline{I}_2 \operatorname{sh} \underline{\gamma}l; \\ \underline{I}_1 = \underline{I}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma}l + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_C} \operatorname{sh} \underline{\gamma}l. \end{cases} \quad (9.38)$$

Система рівнянь (9.38) є аналогічною до системи рівнянь (7.76) симетричного чотириполюсника. Параметри  $A$ -форми цього чотириполюсника

$$\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22} = \operatorname{ch} \underline{\gamma}l; \quad \underline{A}_{12} = \underline{Z}_C \operatorname{sh} \underline{\gamma}l; \quad \underline{A}_{12} = \frac{\operatorname{sh} \underline{\gamma}l}{\underline{Z}_C} \quad (9.39)$$

задовольняють співвідношенню (7.11)

$$\underline{A}_{11} \underline{A}_{22} - \underline{A}_{12} \underline{A}_{21} = (\operatorname{ch} \underline{\gamma}l)^2 - (\operatorname{sh} \underline{\gamma}l)^2 = 1. \quad (9.40)$$

Однорідна лінія, як і будь-який симетричний чотириполюсник може бути замінена  $T$ - або  $\Pi$ -образною еквівалентними симетричними схемами заміщення, параметри яких обчислюються через параметри  $A$ -форми за формулами (7.16) і (7.20)

*Приклад 9.2.* Лінія з розподіленими параметрами працює в режимі холостого ходу. Частота джерела енергії  $f = 500$  кГц. Хвильовий опір лінії  $\underline{Z}_C = 500e^{-j10^\circ}$  Ом, коефіцієнт поширення

$\underline{\gamma} = (2 + j15) \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1}$ . Напряга наприкінці лінії  $U_2 = 10 \text{ В}$ . Довжина лінії  $l = 300 \text{ м}$ . Визначити напругу й силу струму на початку лінії.

*Розв'язання.* Приймаємо  $\underline{U}_2 = U_2 = 10e^{j0^\circ} \text{ В}$ .

В режимі холостого ходу струм наприкінці лінії дорівнює нулю  $I_2 = 0 \text{ А}$ . Тому рівняння (9.38) спрощуються

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{U}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} l; \\ \underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_C} \operatorname{sh} \underline{\gamma} l. \end{cases}$$

Виконуємо проміжні обчислення

$$\alpha l = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 300 = 0,6 \text{ Нп},$$

$$\beta l = 15 \cdot 10^{-3} \cdot 300 = 4,5 \text{ рад}.$$

Розкриємо гіперболічні функції комплексного аргументу

$$\operatorname{ch}(\alpha l + j\beta l) = \operatorname{ch} \alpha l \cos \beta l + j \operatorname{sh} \alpha l \sin \beta l;$$

$$\operatorname{sh}(\alpha l + j\beta l) = \operatorname{sh} \alpha l \cos \beta l + j \operatorname{ch} \alpha l \sin \beta l.$$

Використовуючи таблиці математичних функцій, маємо

$$\operatorname{ch}(\alpha l) = \operatorname{ch}(0,6) = 1,185;$$

$$\operatorname{sh}(\alpha l) = \operatorname{sh}(0,6) = 0,637;$$

$$\cos(\beta l) = \cos(4,5) = -0,211;$$

$$\sin(\beta l) = \sin(4,5) = -0,978.$$

Тоді гіперболічні функції

$$\operatorname{ch} \underline{\gamma} l = 1,185 \cdot (-0,211) + j0,637 \cdot (-0,978) =$$

$$= -0,250 - j0,623 = 0,671e^{-j112^\circ};$$

$$\operatorname{sh} \underline{\gamma} l = 1,185 \cdot (-0,978) + j0,637 \cdot (-0,211) =$$

$$= -1,159 - j0,134 = 1,167e^{-j173^\circ}.$$

Напряга на початку лінії

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} l = 10e^{j0^\circ} \cdot 0,671e^{-j112^\circ} = 6,71e^{-j112^\circ} \text{ В}.$$

Сила струму на початку лінії

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_C} \operatorname{sh} \underline{\gamma} l = \frac{10e^{j0^\circ}}{500 - j10} \cdot 1,167e^{-j173^\circ} = 0,0233e^{-j163^\circ} \text{ А}.$$

## 9.6 Біжні хвилі в однорідній лінії

Запишемо комплекси  $\underline{A}_1$  й  $\underline{A}_2$  (9.32) у показовій формі

$$\begin{cases} \underline{A}_1 = \frac{1}{2}(\underline{U}_1 - \underline{Z}_C \underline{I}_1) = A_1 e^{j\psi_1}; \\ \underline{A}_2 = \frac{1}{2}(\underline{U}_1 + \underline{Z}_C \underline{I}_1) = A_2 e^{j\psi_2}. \end{cases} \quad (9.41)$$

Тоді система рівнянь (9.33) з урахуванням того, що  $\underline{\gamma} = \alpha + j\beta$  прийме вигляд

$$\begin{cases} \underline{U} = A_2 e^{j\psi_2} e^{-\alpha} e^{-j\beta} + A_1 e^{j\psi_1} e^{\alpha} e^{j\beta}; \\ \underline{I} = \frac{1}{Z_C} e^{-j\theta} (A_2 e^{j\psi_2} e^{-\alpha} e^{-j\beta} - A_1 e^{j\psi_1} e^{\alpha} e^{j\beta}). \end{cases} \quad (9.42)$$

Для з'ясування фізичного змісту доданків перейдемо від комплексів до миттєвих значень напруги й струму

$$\begin{cases} u = \sqrt{2} A_2 e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \psi_2 - \beta x) + \sqrt{2} A_1 e^{\alpha x} \sin(\omega t + \psi_1 - \beta x); \\ i = \sqrt{2} \frac{A_2}{Z_C} e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \psi_2 - \theta - \beta x) - \\ - \sqrt{2} \frac{A_1}{Z_C} e^{\alpha x} \sin(\omega t + \psi_1 - \theta - \beta x). \end{cases} \quad (9.43)$$

Кожний з доданків у правій частині цих рівнянь є функцією не тільки відстані  $x$  від початку лінії, але функцією часу  $t$ .

Розглянемо докладніше перший доданок першого рівняння системи (9.43). При будь-якому фіксованому значенні координати  $x = const$  (тобто в будь-якій довільній точці лінії) цей доданок являє собою синусоїдну функцію часу з постійною амплітудою й початковою фазою  $(\psi_2 - \beta x)$ .

Коефіцієнт  $\beta$  характеризує швидкість зміни початкової фази напруги уздовж лінії на одиницю довжини й тому, як вже було зауважено, його називають коефіцієнтом фази. Множник  $e^{-\alpha x}$  указує на те, що в міру збільшення відстані від початку лінії амплітуда синусоїди зменшується, тому що значення коефіцієнта  $\alpha$  завжди є ненегативним. Швидкість зменшення амплітуди залежить від значення цього коефіцієнта й саме тому його називають коефіцієнтом загасання.

При будь-якому фіксованому значенні часу  $t = const$  (тобто в будь-який довільний момент часу) напруга уздовж лінії змінюється за синусоїдним законом. Початкова фаза цієї синусоїди ( $\omega t + \psi_2$ ). Відстань між двома найближчими точками, протягом якої фаза напруги змінюється на  $2\pi$ , називають довжиною хвилі  $\lambda$ . Отже,  $\beta\lambda = 2\pi$ . Звідси маємо

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}. \quad (9.44)$$

Зміну напруги уздовж лінії в часі можна наочно представити у вигляді *біжної хвилі*, що рухається в напрямку зростання координати  $x$  й загасає в напрямку руху за експонентним законом. Оскільки ця хвиля переміщається від початку лінії до кінця, те її називають *прямою (падаючою) хвилею*.

Швидкість поширення падаючої хвилі напруги уздовж лінії обумовлюється швидкістю переміщення лінією незмінного фазового стану, тобто швидкість із якою необхідно переміститися уздовж лінії, щоб спостерігати ту саму фазу хвилі

$$\omega t + \psi_2 - \beta x = const. \quad (9.45)$$

Знайдемо похідну від виразу (9.45) за часом та одержимо швидкість зміни координати  $x$  при заданих умовах

$$V_\phi = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta}. \quad (9.46)$$

Цю швидкість  $V_\phi$  називають *фазовою*, тому що при русі з такою швидкістю уздовж лінії фаза коливання напруги залишається незмінною.

На підставі (9.44) маємо

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\omega T}{\beta} = V_\phi T, \quad (9.47)$$

тобто за час одного періоду падаюча хвиля поширюється на відстань, що дорівнює довжині хвилі  $\lambda$ .

Аналогічним способом можна дослідити другий доданок напруги, зміну якого уздовж лінії в часі також можна представити у вигляді біжної хвилі, що рухається в напрямку убування координати  $x$  й загасає в напрямку руху за експонентним законом. Оскільки

ця хвиля переміщається від кінця лінії до початку, її називають *зворотною (відбитою) хвилею*.

Фазова швидкість зворотної хвилі і її довжина збігаються з відповідними величинами прямої хвилі.

Таким чином, миттєве значення напруги в будь-якій точці однорідної лінії є результат накладення двох біжних хвиль - прямої й зворотної

$$u = u_{np} + u_{zv}. \quad (9.48)$$

На рис. 9.3, *а* представлені графіки зміни прямої хвилі  $u_{np}$  уздовж лінії для моментів часу  $t_1$  й  $t_2$  ( $t_2 > t_1$ ), а на рис. 9.3, *б* - графіки зміни зворотної хвилі  $u_{zv}$  уздовж лінії для тих же моментів часу.

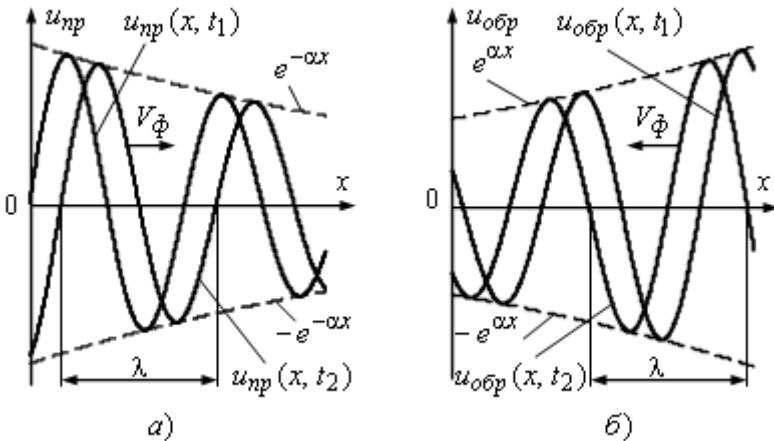


Рис. 9.3

Міркування, які проведені для напруги, є справедливими й для струму

$$i = i_{np} - i_{zv}. \quad (9.49)$$

Переходячи від миттєвих значень до комплексів напруги й струму, маємо

$$\begin{cases} \underline{U} = \underline{U}_{np} + \underline{U}_{zv}; \\ \underline{I} = \underline{I}_{np} - \underline{I}_{zv}. \end{cases} \quad (9.50)$$

Причому в будь-якій точці лінії відношення напруги  $\underline{U}_{np}$  прямої хвилі до струму  $\underline{I}_{np}$  прямої хвилі й відношення напруга  $\underline{U}_{zв}$  зворотної хвилі до струму  $\underline{I}_{zв}$  зворотної хвилі дорівнює хвильовому опору  $\underline{Z}_C$

$$\frac{\underline{U}_{np}}{\underline{I}_{np}} = \frac{\underline{U}_{zв}}{\underline{I}_{zв}} = \underline{Z}_C. \quad (9.51)$$

Варто мати на увазі, що фізично в однорідній лінії існують тільки результуючі напруга  $\underline{U}$  й струм  $\underline{I}$ , а подання їх у вигляді алгебраїчної суми прямої і зворотної хвиль всього лише зручний для аналізу процесів прийом.

### 9.7 Неузгоджене й узгоджене навантаження довгої лінії

Наявність або відсутність зворотної хвилі залежить від характеру й значення опору навантаження. Для розрахунку зворотної хвилі часто використовують поняття коефіцієнта відбиття. *Коефіцієнтом відбиття* називають відношення напруги (струму) зворотної хвилі до напруги (струму) прямої хвилі наприкінці лінії (якщо  $y = 0$ ).

Використовуючи рівняння системи (9.34) і з огляду на, що перший алгебраїчний доданок у них являє собою пряму хвилю, а другий - зворотну, маємо

$$k_{від} = \frac{\underline{U}_{zв}}{\underline{U}_{np}} = \frac{\underline{I}_{zв}}{\underline{I}_{np}} = \frac{\underline{U}_2 - \underline{Z}_C \underline{I}_2}{\underline{U}_2 + \underline{Z}_C \underline{I}_2} \cdot \frac{1/\underline{I}_2}{1/\underline{I}_2} = \frac{\underline{Z}_l - \underline{Z}_C}{\underline{Z}_l + \underline{Z}_C}, \quad (9.52)$$

де  $\underline{Z}_l = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}$  - комплекс опору навантаження, яке підімкнено до кінця лінії.

Коефіцієнт відбиття є безрозмірною величиною.

Як випливає з співвідношення (9.52) зворотну хвилю можна розглядати як результат відбиття прямої хвилі від кінця лінії. Саме тому пряму хвилю часто називають падаючою, а зворотну хвилю - відбитою.

Деякі окремі випадки режимів роботи однорідної лінії становлять особливий інтерес:

- режим короткого замикання лінії ( $\underline{Z}_l = 0$ ,  $\underline{U}_2 = 0$ ). У цьому режимі коефіцієнт відбиття  $k_{від} = -1$ . Наприкінці закороченої лінії

напруги прямої та зворотної хвиль однакові за модулем, але проти-лежні за знаком. Тому їхня алгебраїчна сума дорівнює нулю. Зво-ротна хвиля напруги являє собою інвертоване дзеркальне відобра-ження щодо кінця лінії продовження прямої хвилі;

- режим холостого ходу лінії ( $\underline{Z}_l \rightarrow \infty, \underline{I}_2 = 0$ ). У цьому ре-жимі коефіцієнт відбиття  $\underline{k}_{\text{від}} = -1$ . Наприкінці розімкнутої лінії напруги прямої та зворотної хвиль дорівнюють одна одній. Зворот-на хвиля напруги являє собою дзеркальне відображення щодо кінця лінії продовження прямої хвилі;

- режим узгодженого навантаження ( $\underline{Z}_l = \underline{Z}_C$ ). У цьому ре-жимі коефіцієнт відбиття  $\underline{k}_{\text{від}} = 0$ . Отже, зворотні хвилі відсутні. При узгодженому навантаженні вся потужність прямої хвилі, що досягає кінця однорідної лінії, повністю споживається навантажен-ням.

При відсутності узгодження виникає зворотна хвиля. При цьому частина потужності прямої хвилі повертається зворотною хвилею до джерела. Зворотна хвиля досягнувши початку лінії може знову відбитися (від внутрішнього опору джерела енергії), що може призвести до появи помилкових сигналів у приймальній апарату-рі (навантаженні), тобто призвести до перекручування основного сигналу.

Тому в лініях зв'язку завжди прагнуть узгодити опір наван-таження (приймальної апаратури) із хвильовим опором лінії.

### 9.8 Лінія без спотворювань

З рівнянь однорідної лінії видно, що напруга  $\underline{U}$  й струм  $\underline{I}$  у будь-якій точці лінії є функціями не тільки часу й відстані від початку (кінця) лінії, але й функціями кутової частоти джерела енергії, тому що від неї залежать хвильовий опір  $\underline{Z}_C$ , коефіцієнт поши-рення  $\underline{\gamma}$  і його складові: коефіцієнт загасання  $\alpha$  й коефіцієнт фази  $\beta$ , а також швидкість поширення біжних хвиль  $V_\phi$ .

Це приводить до того, що у випадку, коли вхідним сигналом є напруга або струм складної форми, із цілим спектром частот (на-приклад, як це має місце в телефонних і телеграфних лініях) окремі гармоніки будуть передаватися з різними коефіцієнтами загасання, що викликає небажані спотворення сигналу.

Щоб уникнути спотворення, використовують лінії, параметри яких з'єднані умовою

$$\frac{R_0}{L_0} = \frac{G_0}{C_0} \text{ або } R_0 C_0 = G_0 L_0. \quad (9.53)$$

При дотриманні умови (9.53) коефіцієнт поширення

$$\begin{aligned} \underline{\gamma} &= \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \sqrt{L_0 C_0 \left( \frac{R_0}{L_0} + j\omega \right) \left( \frac{G_0}{C_0} + j\omega \right)} = \\ &= \sqrt{L_0 C_0} \left( \frac{G_0}{C_0} + j\omega \right) = \sqrt{R_0 G_0} + j\omega \sqrt{L_0 C_0}. \end{aligned} \quad (9.54)$$

Отже, коефіцієнт загасання такої лінії не залежить від кутової частоти джерела енергії, а коефіцієнт фази залежить лінійно

$$\alpha = \sqrt{R_0 G_0}; \quad \beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}. \quad (9.55)$$

Лінію, що задовольняє умовам (9.55) називають *лінією без спотворювань*.

Значення хвильового опору лінії без спотворювань

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0} \cdot \frac{\frac{R_0}{L_0} + j\omega}{\frac{G_0}{C_0} + j\omega}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \quad (9.56)$$

є дійсним числом, тобто хвильовий опір є активним і не залежить від кутової частоти джерела енергії.

Якщо опір навантаження узгоджений із хвильовим, то передача сигналу здійснює без спотворювань.

Фазова швидкість біжних хвиль у лінії без спотворювань

$$V_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} \quad (9.57)$$

досягає максимального значення й дорівнює швидкості поширення електромагнітних хвиль у діелектрику, що оточує проводи лінії.

Звичайно в лініях  $R_0 C_0 > G_0 L_0$ . Тому доводиться штучно збільшувати індуктивність лінії шляхом підмикання через певні проміжки спеціальних котушок індуктивності або застосування

спеціальних кабелів, проводящі жили яких обмотані тонкою стрічкою з феромагнітного матеріалу.

На практиці більшість ліній передач не є лініями без спотворювань. Тому спотворення усувають за допомогою спеціальних чотириполосників і корегувальних фільтрів одночасно для всієї лінії передачі сигналів.

*Приклад 9.3.* Відомі первинні параметри лінії без втрат:  $R_0 = 5 \text{ Ом/м}$ ,  $L_0 = 2 \text{ мГн/м}$ ,  $G_0 = 0,5 \text{ мкСим/м}$ ,  $C_0 = 6 \text{ нФ/м}$ . Визначити індуктивності додаткових індуктивних елементів, які необхідно підмикати на кожному погонному метрі лінії, щоб лінія перетворилась у лінію без спотворювань. Якими при цьому будуть хвильовий опір і фазова швидкість.

*Розв'язання.* Індуктивності додаткових індуктивних елементів визначаємо з умови (9.53)

$$R_0 C_0 = G_0 (L_0 + L_\partial).$$

Звідси маємо

$$L_\partial = \frac{R_0 C_0}{G_0} - L_0 = \frac{5 \cdot 6 \cdot 10^{-9}}{0,5 \cdot 10^{-6}} - 2 \cdot 10^{-3} = 58 \cdot 10^{-3} \text{ Гн/м}.$$

Хвильовий опір лінії без спотворювань

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{L_0 + L_\partial}{C_0}} = \sqrt{\frac{58 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 10^{-9}}} = 3162 \text{ Ом}.$$

Фазова швидкість біжних хвиль у лінії без спотворювань, з виразу (9.57)

$$V_{\phi} = \frac{1}{\sqrt{(L_\partial + L_0)C_0}} = \frac{1}{\sqrt{(58 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-3}) \cdot 6 \cdot 10^{-9}}} = 52700 \text{ м/с}.$$

## 9.9 Лінія без втрат

У ряді випадків, особливо у відносно коротких високочастотних лініях, які застосовують в техніці зв'язку, коли  $\omega L_0 \gg R_0$  й  $\omega C_0 \gg G_0$ , можна зневажити наявність активних втрат у лінії й прийняти, що  $R_0 = 0$  й  $G_0 = 0$ .

Лінію, у якій первинні параметри  $R_0$  й  $G_0$  дорівнюють нулю, називають *лінією без втрат*.

Хвильовий опір  $\underline{Z}_C$  такої лінії

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{j\omega L_0}{j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \quad (9.58)$$

Коефіцієнт поширення  $\gamma$  лінії без втрат і його складові: коефіцієнт загасання  $\alpha$  й коефіцієнт фази  $\beta$

$$\underline{\gamma} = \sqrt{j\omega L_0 \cdot j\omega C_0} = j\omega \sqrt{L_0 C_0}; \quad \alpha = 0; \quad \beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}. \quad (9.59)$$

Із аналізу співвідношень (9.54-9.56), (9.58) і (9.59) випливає висновок, що лінія без втрат є частковим випадком лінії без спотворювань.

Розкриємо гіперболічні функції від комплексного аргументу  $\underline{\gamma}y = \alpha y + j\beta y$  за умови, що  $\alpha = 0$

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(\alpha y + j\beta y) &= \operatorname{ch} \alpha y \cos \beta y + j \operatorname{sh} \alpha y \sin \beta y = \\ &= \operatorname{ch} 0 \cos \beta y + j \operatorname{sh} 0 \sin \beta y = \cos \beta y; \\ \operatorname{sh}(\alpha y + j\beta y) &= \operatorname{sh} \alpha y \cos \beta y + j \operatorname{ch} \alpha y \sin \beta y = \\ &= \operatorname{sh} 0 \cos \beta y + j \operatorname{ch} 0 \sin \beta y = j \sin \beta y. \end{aligned} \quad (9.60)$$

Співвідношення (9.36-9.38), які були отримані раніше, спрощуються, тому що рівняння в гіперболічних функціях перетворюються в рівняння в тригонометричних функціях. Зокрема, якщо відомі напруга  $\underline{U}_2$  й струм  $\underline{I}_2$  наприкінці лінії без втрат, то маємо

$$\begin{cases} \underline{U} = \underline{U}_2 \cos \beta y + j \underline{Z}_C \underline{I}_2 \sin \beta y; \\ \underline{I} = \underline{I}_2 \cos \beta y + j \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_C} \sin \beta y. \end{cases} \quad (9.61)$$

Розглянемо докладніше два межові випадки: режим холостого ходу й режим короткого замикання в лінії без втрат. В обох випадках потужність, що споживається навантаженням, дорівнює нулю.

У режимі холостого ходу в лінії без втрат ( $\underline{Z}_L \rightarrow \infty$ ,  $\underline{I}_2 = 0$ ) на підставі системи рівнянь (9.61) маємо

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_2 \cos \beta y; \\ \underline{I} &= j \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_C} \sin \beta y. \end{aligned} \quad (9.62)$$

Виразивши в даній системі з використанням виразу (9.44) ко-

ефіцієнт фази  $\beta$  через довжину хвилі  $\lambda$ , одержуємо

$$\begin{cases} U = U_2 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)y; \\ I = j \frac{U_2}{Z_C} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)y. \end{cases} \quad (9.63)$$

Відповідно до (9.63) у точках лінії з аргументами тригонометричних функцій, для яких виконується умова  $\frac{2\pi y}{\lambda} = \pi n$ , де  $n$  - ціле число, маємо  $\sin \pi n = 0$  й  $\cos \pi n = \pm 1$ . Отже, у цих точках мають місце екстремальні значення напруги, які називають *випнутостями*, і нульові значення струму, які називають *вузлами*. У точках лінії з аргументами тригонометричних функцій, для яких виконується умова  $\frac{2\pi y}{\lambda} = \frac{\pi}{2} + \pi n$ , де  $n$  - ціле число, маємо  $\sin \pi n = \pm 1$  й  $\cos \pi n = \pm 0$ . Тому випнутості й вузли напруги й струму міняються місцями.

Таким чином, вузли й випнутості нерухомі, причому координати випнутостей напруги збігаються з координатами нулів струму й навпаки.

У режимі холостого ходу наприкінці лінії без втрат (якщо  $y = 0$ ) перебуває вузол струму й випнутість напруги. Далі в міру збільшення координати  $y$  вузли й випнутості струму й напруги міняються місцями через відстані, які дорівнюють чверті довжини хвилі. Наприклад, якщо  $y = \frac{\lambda}{4}$ , то має місце вузол напруги й випнутість напруги, а якщо  $y = \frac{\lambda}{2}$ , знову має місце вузол струму й випнутість напруги.

В режимі короткого замикання лінії без втрат ( $Z_l = 0$ ,  $\underline{U}_2 = 0$ ) на підставі системи рівнянь (9.61) маємо

$$\begin{cases} U = j Z_C I_2 \sin \beta y = j Z_C I_2 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)y; \\ I = I_2 \cos \beta y = I_2 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)y. \end{cases} \quad (9.64)$$

Відповідно до (9.64) у точках лінії з аргументами тригонометричних функцій, для яких виконується умова  $\frac{2\pi y}{\lambda} = \pi n$ , де  $n$  - ціле число, маємо  $\sin \pi n = 0$  й  $\cos \pi n = \pm 1$ . Отже, у цих точках мають місце екстремальні значення струму й нульові значення напруги. У точках лінії з аргументами тригонометричних функцій, для яких виконується умова  $\frac{2\pi y}{\lambda} = \frac{\pi}{2} + \pi n$ , де  $n$  - ціле число, маємо  $\sin \pi n = \pm 1$  й  $\cos \pi n = \pm 0$ . Отже, у цих точках мають місце вузли струму й випнутості напруги.

У режимі короткого замикання наприкінці лінії без втрат (якщо  $y=0$ ) перебуває вузол напруги й випнутість струму. Далі в міру збільшення координати  $y$  вузли й випнутості струму й напруги міняються місцями через відстані, які дорівнюють чверті довжини хвилі.

Таким чином, і у режимі холостого ходу, і у режимі короткого замикання наприкінці довгої лінії без втрат, як впливає з виразів (9.63) і (9.64) у результаті накладення двох незатухаючих біжних хвиль, з однаковими амплітудами, розподіли напруги й струму уздовж лінії являють собою стоячі хвилі.

Графіки розподілу випнутостей і вузлів для діючих значень напруги й струму для випадку холостого ходу лінії представлені на рис. 9.4, а, а для випадку короткого замикання - на рис. 9.4, б.

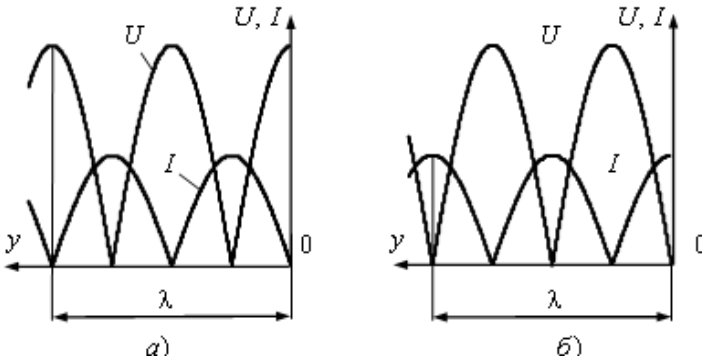


Рис. 9.4

Стоячі хвилі виникають у лінії без втрат й у тих випадках, коли в якості навантаження виступають індуктивні або ємнісні елементи.

У всіх цих випадках через лінію передачі енергії не відбувається, тому що у вузлах, де миттєві значення напруги (або струму) дорівнюють нулю  $u = 0$  (або  $i = 0$ ) миттєва потужність завжди дорівнює нулю  $p = 0$  й, отже, енергія через ці точки не передається.

Енергію можуть передавати тільки біжні хвилі.

Якщо в ролі навантаження виступають резистивні елементи, то діючі значення напруги й струму не досягають нульових значень, тому що в цьому випадку лінією буде відбуватися передача енергії.

При узгодженому навантаженні лінії без втрат діючі значення напруги й струму залишаються незмінними вздовж всієї лінії.

*Приклад 9.4.* Повітряна лінія без втрат підімкнена до джерела синусоїдної напруги. Лінія працює в режимі короткого замикання. Хвильовий опір лінії  $Z_C = 200 \text{ Ом}$ . Довжина лінії  $l = 1 \text{ м}$ . Напруга на затискачах джерела енергії  $U_1 = 100 \text{ В}$ . Частота джерела енергії  $f = 100 \text{ МГц}$ . Визначити силу струму на виході лінії.

*Розв'язання.* Для лінії без втрат у режимі короткого замикання відповідно до (9.64) маємо

$$\underline{U} = jZ_C I_2 \sin \beta y.$$

Приймаємо, що на вході лінії (якщо  $y = l = 1 \text{ м}$ ) напруга  $\underline{U}_1 = U_1 = 100e^{j0^\circ} \text{ В}$ .

Для повітряної лінії фазова швидкість дорівнює швидкості поширення електромагнітних хвиль у вакуумі  $V_\phi = c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ .

Коефіцієнт фази

$$\beta = \frac{2\pi f}{V_\phi} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 100 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^8} = 2,09 \text{ рад/м}.$$

Тоді

$$\beta l = 2,09 \cdot 1 = 2,09 \text{ рад}.$$

Сила струму наприкінці лінії

$$I_2 = \frac{U_1}{jZ_C \sin \beta l} = \frac{100e^{j0^\circ}}{j200 \cdot \sin 2,09} = 0,576e^{-j90^\circ} \text{ А}.$$

### 9.10 Вхідний опір лінії з розподіленими параметрами

Вхідним опором лінії з розподіленими параметрами називають такий зосереджений опір, підмикання якого до затискачів джерела енергії замість лінії не змінить режим роботи джерела. Чисельно вхідний опір дорівнює відношенню напруги  $\underline{U}_1$  до струму  $\underline{I}_1$  на вході лінії. У загальному випадку для лінії з довільним навантаженням використовуючи співвідношення (9.38) маємо

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{in} &= \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{U}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} l + \underline{Z}_C \underline{I}_2 \operatorname{sh} \underline{\gamma} l}{\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_C} \operatorname{sh} \underline{\gamma} l + \underline{I}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} l} = \underline{Z}_C \frac{\underline{Z}_l \operatorname{ch} \underline{\gamma} l + \underline{Z}_C \operatorname{sh} \underline{\gamma} l}{\underline{Z}_l \operatorname{sh} \underline{\gamma} l + \underline{Z}_C \operatorname{ch} \underline{\gamma} l} = \\ &= \underline{Z}_C \frac{\underline{Z}_l + \underline{Z}_C \operatorname{th} \underline{\gamma} l}{\underline{Z}_l \operatorname{th} \underline{\gamma} l + \underline{Z}_C}, \end{aligned} \quad (9.65)$$

де  $\underline{Z}_l = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}$  - опір навантаження, Ом.

З виразу (9.65) випливає, що вхідний опір є функцією опору навантаження  $\underline{Z}_l$ , довжини лінії  $l$  й вторинних параметрів лінії - коефіцієнта поширення  $\underline{\gamma}$  й хвильового опору  $\underline{Z}_C$ .

Аналіз показує, що модуль вхідного опору зі зміною довжини коливається між деякими максимумами й мінімумами, що обумовлено наявністю зворотної хвилі. Зі збільшенням довжини лінії як пряма, так й, відповідно, зворотна хвилі загасають. Внаслідок цього вплив зворотної хвилі слабшає, і амплітуда коливань функції вхідного опору  $\underline{Z}_{in}$  зменшується. Якщо довжина лінії прагне до нескінченності  $l \rightarrow \infty$ , то значення вхідного опору прагне до значення хвильового опору  $\underline{Z}_{in} \rightarrow \underline{Z}_C$ .

У випадку узгодженого навантаження лінії, тобто коли  $\underline{Z}_l = \underline{Z}_C$ , як уже було сказано, зворотні хвилі відсутні й тому вираз (9.65) трансформується в співвідношення

$$\underline{Z}_{in} = \underline{Z}_l = \underline{Z}_C \quad (9.66)$$

У режимі холостого ходу лінії, коли  $\underline{Z}_l \rightarrow \infty$ , на підставі виразу (9.65) маємо

$$\underline{Z}_{in} = \frac{\underline{Z}_C}{\operatorname{th} \underline{\gamma} l}. \quad (9.67)$$

У режимі короткого замикання лінії, коли  $Z_l = 0$ , на підставі виразу (9.65) одержуємо

$$Z_{in} = Z_C \operatorname{th} \underline{\gamma} l. \quad (9.68)$$

Для лінії без втрат на підставі співвідношень (9.60)

$$\operatorname{th} \underline{\gamma} l = \frac{\operatorname{sh} \underline{\gamma} l}{\operatorname{ch} \underline{\gamma} l} = \frac{j \sin \beta l}{\cos \beta l} = j \operatorname{tg} \beta l \quad (9.69)$$

або, виразивши з використанням виразу (9.44) коефіцієнт фази  $\beta$  через довжину хвилі  $\lambda$ , одержуємо

$$\operatorname{th} \underline{\gamma} l = j \operatorname{tg} \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right) l. \quad (9.70)$$

Вхідний опір лінії без втрат з обліком (9.65) і (9.70)

$$Z_{in} = Z_C \frac{Z_l + j Z_C \operatorname{tg} \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right) l}{Z_C + j Z_l \operatorname{tg} \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right) l}. \quad (9.71)$$

Вхідний опір лінії без втрат у режимі холостого ходу

$$Z_{in(o)} = -j Z_C \operatorname{ctg} \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right) l. \quad (9.72)$$

Вхідний опір лінії без втрат у режимі короткого замикання

$$Z_{in(k)} = j Z_C \operatorname{tg} \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right) l. \quad (9.73)$$

Аналіз характеру зміни вхідного опору лінії без втрат у режимі холостого ходу залежно від довжини лінії  $l$  показує, що якщо  $l \in (0; \lambda/4)$ , то модуль  $Z_{in(o)}$  змінюється в межах від нескінченності до нуля, причому опір є ємнісним. Якщо  $l \in (\lambda/4; \lambda/2)$ , то модуль  $Z_{in(o)}$  змінюється в межах від нуля до нескінченності, причому опір є індуктивним. Якщо  $l = \lambda/4$ , то вхідний опір лінії дорівнює нулю  $Z_{in(o)} = 0$ . Таке чергування триває й далі через відрізки лінії, довжини яких дорівнюють чверті довжини хвилі.

Аналіз характеру зміни вхідного опору лінії без втрат у ре-

жимі короткого замикання залежно від довжини лінії  $l$  показує, що через відстань, що дорівнює чверті довжини хвилі характер опору  $Z_{in(k)}$  також міняється з індуктивного на ємнісний і навпаки, значення опору за модулем змінюється від 0 до  $\pm \infty$  (знак "-" відповідає ємнісному характеру вхідного опору).

Графік зміни модуля опору  $Z_{in(o)}$  залежно від довжини лінії представлений на рис. 9.5, а, а графік зміни модуля опору  $Z_{in(k)}$  - на рис. 9.5, б.

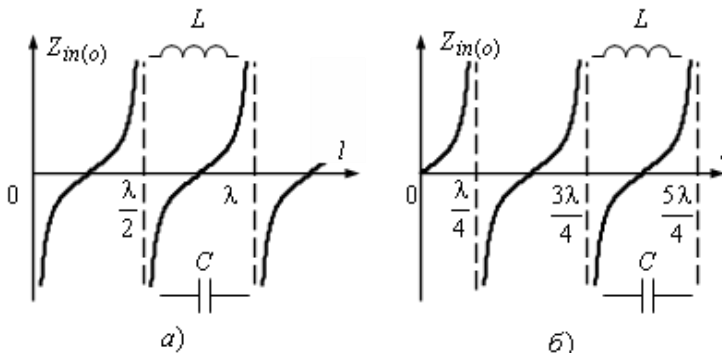


Рис. 9.5

Точки, у яких вхідний опір дорівнює нулю ( $Z_{in} = 0$ ) відповідають резонансу напруг, а точки, у яких вхідний опір прагне в нескінченність ( $Z_{in} \rightarrow \infty$ ) відповідають резонансу струмів.

Таким чином, шляхом зміни довжини лінії без втрат можна одержати будь-яке значення індуктивного або ємнісного опору.

Оскільки довжина хвилі лінії  $\lambda$  є функцією кутової частоти  $\omega$ , то зміна значення вхідного опору може бути отримане шляхом варіювання не тільки довжини лінії, але й частоти джерела енергії.

При деяких частотах характер вхідного опору лінії з розподіленими параметрами стає резистивним. Такі частоти називають резонансними. Причому резонансними є частоти, при яких довжина лінії дорівнює цілої кількості довжин чверті хвилі.

*Приклад 9.5.* Визначити на якій відстані від початку потрібно закоротити лінію без втрат, щоб вона була еквівалентна індуктивному елементу, індуктивність якого дорівнює  $L=0,1$  мГн, якщо хвильовий опір лінії  $Z_C = 800$  Ом, довжина хвилі  $\lambda = 50$  м, а фазова швидкість  $V_\phi = 3 \cdot 10^8$  м/с.

Розв'язання. Коефіцієнт фази лінії

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2 \cdot 3,14}{50} = 0,1257 \text{ рад/м.}$$

Кутова швидкість

$$\omega = \beta V_{\phi} = 0,1257 \cdot 3 \cdot 10^8 = 37,70 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}.$$

Вхідний опір лінії в режимі короткого замикання (9.73)

$$\underline{Z}_{in(k)} = j\underline{Z}_C \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)l.$$

Відповідно до умови цей опір повинен дорівнювати індуктивному опору  $\underline{Z}_{in(k)} = j\omega L$ . Отже,

$$\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)l = \frac{\omega L}{Z_C} = \frac{37,70 \cdot 10^6 \cdot 0,1 \cdot 10^{-3}}{800} = 4,712.$$

Відстань, на якій необхідно закоротити лінію

$$l = \frac{\lambda}{2\pi} \arctg 4,712 = \frac{50}{2 \cdot 3,14} \arctg 4,712 = 10,84 \text{ м.}$$

### 9.11 Експериментальне визначення параметрів лінії з розподіленими параметрами

Як й у чотириполосників, характеристичні параметри лінії з розподіленими параметрами - хвильовий опір  $\underline{Z}_C$  і коефіцієнт поширення  $\underline{\gamma}$  можна розрахувати, якщо на підставі досвідів холостого ходу й короткого замикання визначені вхідні опори  $\underline{Z}_{in(o)}$  й  $\underline{Z}_{in(k)}$ .

Перемноживши значення вхідних опорів  $\underline{Z}_{in(o)}$  і  $\underline{Z}_{in(k)}$  на підставі співвідношень (9.67) і (9.68) одержуємо

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\underline{Z}_{in(o)} \underline{Z}_{in(k)}}, \quad (9.74)$$

а поділивши значення  $\underline{Z}_{in(k)}$  на  $\underline{Z}_{in(o)}$  відповідно маємо

$$\operatorname{tg} \underline{\gamma} l = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{in(k)}}{\underline{Z}_{in(o)}}}. \quad (9.75)$$

З виразу (9.75)

$$\underline{\gamma} = \frac{1}{l} \operatorname{arth} \sqrt{\frac{\underline{Z}_{in(k)}}{\underline{Z}_{in(o)}}}. \quad (9.76)$$

Вирази (9.74) і (9.76) дозволяють на підставі експериментальних даних знайти характеристичні параметри лінії. Якщо задано кутову частоту джерела енергії  $\omega$ , то за відомими вторинними параметрами можна визначити первинні параметри  $R_0$ ,  $L_0$ ,  $G_0$  і  $C_0$

$$\begin{aligned} R_0 + j\omega L_0 &= \underline{Z}_C \underline{\gamma}; \\ G_0 + j\omega C_0 &= \frac{\underline{\gamma}}{\underline{Z}_C}. \end{aligned} \quad (9.77)$$

### Питання для самоконтролю

1. Чим розрізняються кола із зосередженими й розподіленими параметрами?
2. За яким критерієм електричні кола відносять до класу кіл з розподіленими або зосередженими параметрами?
3. Який вигляд має схема заміщення довгої лінії.
4. Запишіть рівняння однорідної лінії в частинних похідних.
5. Як визначають комплекси напруги й сили струму в будь-якій точці однорідної лінії
6. Що являє собою коефіцієнт поширення?
7. Яку величину називають хвильовим опором?
8. Поясніть поняття прямої й зворотної біжних хвиль.
9. Що таке узгоджений режим роботи лінії з розподіленими параметрами, чим він характеризується?
10. Визначити первинні параметри лінії, якщо її вторинні параметри: хвильовий опір  $\underline{Z}_C = 500e^{j20^\circ}$  Ом/м; коефіцієнт поширення

$$\underline{\gamma} = 1,2 \cdot 10^{-3} e^{j80^\circ} \text{ м}^{-1}, \text{ а частота джерела енергії } f = 1000 \text{ Гц.}$$

$$\text{Відповідь: } R_0 = 0,498 \text{ Ом/м; } L_0 = 0,0944 \cdot 10^{-3} \text{ Гн/м;}$$

$$G_0 = 1,342 \cdot 10^{-3} \text{ Сим/м; } C_0 = 0,123 \cdot 10^{-6} \text{ Ф/м.}$$

11. Визначити вторинні параметри лінії, якщо відомі її первинні параметри  $R_0 = 5$  Ом/м,  $L_0 = 2 \cdot 10^{-3}$  Гн/м,  $G_0 = 0,8 \cdot 10^{-3}$  Сим/м,

$C_0 = 0,1 \cdot 10^{-6} \text{ Ф/м}$ , а частота джерела енергії  $f = 1000 \text{ Гц}$ .

*Відповідь:*  $\underline{Z}_C = 115,3e^{j15^\circ} \text{ Ом/м}$ ;  $\underline{\gamma} = 0,0702 + j0,0939 \text{ м}^{-1}$ .

12. З яких причин можливі спотворення сигналу в лінії?
13. Що називається лінією без спотворювань? Як співвідносяться первинні параметри такої лінії?
14. Як визначають експериментально параметри лінії з розподіленими параметрами?
15. Двопровідна повітряна лінія має довжину  $l = 400 \text{ м}$ . Миттєве значення напруги на навантаженні  $u_2 = 120 \sin 3000t \text{ В}$ . Опір навантаження  $\underline{Z}_l = \underline{Z}_C$ . Знайти миттєве значення напруги на вході лінії.

*Відповідь:*  $u_1 = 120 \sin(300t + 2^\circ) \text{ В}$ .

16. За яких умов у лінії утворюються стоячі хвилі?
17. Що називається лінією без втрат? Які властивості вона має?
18. За яких умов реальну лінію можна розглядати як лінію без втрат?
19. Визначити вхідний опір лінії без втрат, навантаженням якої є ємнісної елемент із ємністю  $C = 50 \cdot 10^{-9} \text{ Ф}$ . Довжина лінії дорівнює чверті довжини хвилі. Частота джерела  $f = 100 \cdot 10^3 \text{ Гц}$ . Хвильовий опір лінії  $Z_C = 500 \text{ Ом}$ .

*Відповідь:*  $\underline{Z}_{in} = j1250 \text{ Ом}$ .

20. Який характер має залежність вхідного опору лінії від її довжини?
21. За допомогою чого можна змінювати характер і значення вхідного опору кола з розподіленими параметрами?
22. Визначити мінімальну довжину короткозамкненої повітряної лінії без втрат, якщо характер її вхідного опору індуктивний  $\underline{Z}_{in(k)} = j125 \text{ Ом}$ . Хвильовий опір лінії  $Z_C = 600 \text{ Ом}$ . Частота джерела енергії  $f = 1 \text{ МГц}$ .

*Відповідь:*  $l = 9,89 \text{ м}$ .

23. Для визначення параметрів повітряної лінії без втрат довжиною  $l = 5 \text{ м}$ , що відімкнена з джерелом енергії, частота якого  $f = 50 \text{ МГц}$ , у режимі короткого замикання був виміряний вхідний опір  $Z_{in(k)} = 173,2 \text{ Ом}$ . Визначити вторинні параметри лінії.

*Відповідь:*  $\beta = 0,419 \text{ рад/м}$ ,  $Z_C = 100 \text{ Ом}$ .

**ПРЕДМЕТНИЙ ВКАЗІВНИК**

- Амплітуда комплексна 151  
Аргумент комплексного числа 150  
Баланс потужностей 49  
Випнутість 408  
Вітка 43  
Вмикання узгоджене 341  
Вузол 408  
Вузол простий 43  
Вузол складний 43  
Гармоніка непарна 287  
Гармоніка парна 287  
Двигун асинхронний 249  
Двигун синхронний 251  
Двополюсник 25, 79  
Двополюсник активний 25, 80  
Двополюсник еквівалентний 80  
Двополюсник пасивний 25, 80  
Джерело електромагнітної енергії 25  
Джерело енергії реальне 41  
Джерело ЕРС 39  
Джерело напруги ідеальне 39  
Джерело напруги 17  
Джерело струму ідеальне 39  
Джерело струму 17, 39  
Діаграма векторна 103  
Діаграма векторна суміщена 104  
Діаграма хвильова 102  
Добротність контуру 132  
Довжина хвилі електромагнітної 386  
Елемент 26  
Елемент активний 26, 38  
Елемент активний ідеальний 39  
Елемент ємнісний 33  
Елемент індуктивний 29  
Елемент індукційно-зв'язаний 32  
Елемент лінійний 26, 37  
Елемент нелінійний 26  
Елемент пасивний 26, 28  
Елемент реактивний 35  
Елемент резистивний 28  
Енергія електричного поля 35  
Енергія заряду потенційна 15  
Енергія магнітного поля 31  
Енергія поля електричного 112  
Енергія поля магнітного 110  
ЕРС 18  
ЕРС взаємної індукції 32  
ЕРС змінна 97  
ЕРС контурне 70  
ЕРС самоіндукції 30  
Ємність 34  
Загасання власне чотириполюсника 343  
Загасання контуру 132  
Задача аналізу 45  
Задача синтезу 45  
Закон Ампера 24  
Закон Біо-Савара-Лапласа 21  
Закон Джоуля-Ленца 19, 29  
Закон електромагнітної індукції Фарадея-Максвелла 22, 29  
Закон Кірхгофа другий 46

- Закон Кірхгофа другий в символічній формі 157
- Закон Кірхгофа перший 46
- Закон Кірхгофа перший в символічній формі 156
- Закон Ома 17, 46
- Закон Ома в комплексній формі 154
- Закон Ома в символічній формі 154
- Закон повного струму 22
- Заряд електричний 13
- Заряд елементарний 13
- Заряд негативний 13
- Заряд позитивний 13
- Заряд пробний 14
- Заряд точковий 13
- Затискачі вихідні 325
- Затискачі вторинні 325
- Затискачі вхідні 325
- Затискачі однойменні 167
- Затискачі первинні 325
- Зв'язок зворотний від'ємний 361
- Зв'язок зворотний додатний 361
- Зв'язок зворотний 360
- З'єднання зіркою 56
- З'єднання змішане 54
- З'єднання зустрічне 168
- З'єднання паралельне 43, 52
- З'єднання послідовне 43, 51
- З'єднання трикутником 56
- З'єднання узгоджене 168
- З'єднання чотириполюсників каскадне 346
- З'єднання чотириполюсників паралельне 349
- З'єднання чотириполюсників паралельно-послідовне 351
- З'єднання чотириполюсників послідовне 349
- З'єднання чотириполюсників послідовно-паралельне 350
- Знак струму 17
- Значення амплітудне 98
- Значення діюче комплексне спряжене струму 160
- Значення діюче комплексне 151
- Значення діюче 99
- Значення ефективне 99
- Значення максимальне 98
- Значення середнє 98
- Значення середньоквадратичне 99
- Зсув фазовий 101
- ЗФ 363, 379
- Індуктивність взаємна 33, 165
- Індуктивність 30
- Індукція магнітна 20
- Індукція магнітного поля 20
- Кількість електрики 13
- Клітка білчина 248
- Ковзання критичне 250
- Ковзання 250
- Коефіцієнт амплітуди 301
- Коефіцієнт взаємної індукції 166
- Коефіцієнт відбиття 403
- Коефіцієнт гармонік 302
- Коефіцієнт загасання 394

- Коефіцієнт індукційного зв'язку 166
- Коефіцієнт корисної дії (ККД) джерела енергії 85, 89
- Коефіцієнт несиметрії 256
- Коефіцієнт несинусоїдності 302
- Коефіцієнт потужності 122
- Коефіцієнт поширення 394
- Коефіцієнт пульсації 302
- Коефіцієнт ряду Фур'є 286
- Коефіцієнт спотворення 301
- Коефіцієнт трансформації трансформатора 187
- Коефіцієнт трансформації чотириполюсника 341, 342
- Коефіцієнт фази чотириполюсника 343
- Коефіцієнт фази 394
- Коефіцієнт форми 301
- Коливання вільне 129
- Коливання власне 129
- Коливання змушене 129
- Коло багатоконтурне 43
- Коло електричне багатofазне 195
- Коло електричне лінійне 26, 37
- Коло електричне нелінійне 26
- Коло електричне 25
- Коло з декількома джерелами 43
- Коло з зосередженими параметрами 27, 385
- Коло з одним джерелом 43
- Коло з розподіленими параметрами 27, 385
- Коло нерозгалужене 43
- Коло одноконтурне 43
- Коло розгалужене 43
- Коло синусоїдного струму 100
- Контур 43
- Контур замкнутий 43
- Контур коливальний одиночний 130
- Контур коливальний паралельний 138
- Контур коливальний послідовний 130
- Контур незалежний 43
- Криві резонансні 134
- Кут зсуву фазового 101
- Лінія без втрат 406
- Лінія без спотворювань 405
- Лінія довга 385
- Лінія з розподіленими параметрами 385
- Лінія магнітного поля 20
- Магнітопровід 182
- Метод активного двополюсника 81
- Метод безпосереднього застосування законів Кірхгофа 64
- Метод безпосереднього застосування закону Ома 58
- Метод вузлових напруг 71
- Метод вузлових потенціалів 71
- Метод двох ватметрів 239
- Метод двох вузлів 76
- Метод еквівалентних перетворень 58
- Метод еквівалентного генератора 81

- Метод еквівалентного джерела ЕРС 81  
 Метод еквівалентного джерела струму 82  
 Метод еквівалентного джерела 81  
 Метод згортання 58  
 Метод контурних струмів 68  
 Метод Крамера 75  
 Метод накладення 78  
 Метод подоби 63  
 Метод провідностей 128  
 Метод пропорційних величин 63  
 Метод розв'язки індукційних зв'язків 179  
 Метод розкиду струмів 60  
 Метод симетричних складових 260  
 Метод суперпозиції 78  
 Метод трьох ватметрів 239  
 Методом холостого ходу й короткого замикання 81  
 Міра передачі 341  
 Модуль комплексного числа 150  
 Модуль опору хвильового 395  
 Момент критичний 250  
 Навантаження несиметричне 201  
 Навантаження однорідне 201  
 Навантаження рівномірне 201  
 Навантаження симетричне 201  
 Напруга змінна 97  
 Напруга зсуву нейтралі 207  
 Напруга зсуву нейтральної точки 207  
 Напруга комплексна 151  
 Напруга лінійна 203  
 Напруга несиметрична періодична 283  
 Напруга фазна 200  
 Напруга холостого ходу двополюсника 80  
 Напруга 15  
 Напруженість електричного поля 14  
 Напруженість магнітного поля 20  
 Нейтраль генератора 203  
 Нейтраль навантаження 205  
 Несиметрія повздожжня 271  
 Несиметрія поперечна 265  
 Номер гармоніки 285  
 Обмотка збудження 251  
 Оператор повороту 151  
 Оператор трифазної системи 199  
 Опір 28  
 Опір активний 28  
 Опір взаємний комплексний 330  
 Опір вхідний комплексний 330  
 Опір вхідний 411  
 Опір двополюсника вхідний 80  
 Опір джерела внутрішнє 41  
 Опір динамічний 37  
 Опір диференційний 37  
 Опір ємнісний 111  
 Опір індуктивний 109  
 Опір інтегральний 37  
 Опір контурів взаємний 70

- Опір контуру власний 69  
Опір контуру характеристичний 131  
Опір контуру хвильовий 131  
Опір навантаження 40  
Опір передаточний комплексний 330  
Опір передаточний 326  
Опір повздовжній 364  
Опір повний комплексний 154  
Опір повний 115  
Опір поперечний 364  
Опір реактивний 114  
Опір резистивний 28  
Опір статичний 37  
Опір характеристичний 341  
Опір хвильовий 395  
Опір чотириполюсника вхідний 339  
Опір чотириполюсника характеристичний 395  
Осердя 182  
Параметр лінії вторинний 395  
Параметр характеристичний лінії 395  
Параметр чотириполюсника вторинний 341  
Параметр чотириполюсника первинний 327  
Параметр форми запису рівнянь чотириполюсника 327  
Параметр чотириполюсника характеристичний 341  
Передача зворотна 327  
Передача пряма 327  
Період 97  
Період повторення 97  
Показник фази опору хвильового 395  
Поле електричне 14  
Поле електромагнітне 13  
Поле магнітне обертове кругове 245  
Поле магнітне пульсуюче 244  
Поле магнітне 19  
Послідовність чергування фаз 198  
Послідовність чергування фаз зворотна 198  
Послідовність чергування фаз пряма 198  
Постійна передачі 341, 342  
Постійна складова 285  
Потенціал електричного поля 15  
Потенційна діаграма 89  
Потік магнітний 21  
Потокозчеплення взаємне 32  
Потокозчеплення власне 30  
Потужність 19  
Потужність активна 107  
Потужність втрат усередині джерела 85, 89  
Потужність ємнісна 112  
Потужність індуктивна 110  
Потужність миттєва 19  
Потужність повна 124  
Потужність реактивна 125  
Потужність трифазного кола 235  
Правило Ленца 22  
Правило лівої руки 24  
Приймач електромагнітної енергії 25

- Принцип суперпозиції 78  
 Провід лінійний 203  
 Провід нейтральний 203, 206  
 Провідність активна 29  
 Провідність взаємна комплексна 329  
 Провідність вузла власна 72  
 Провідність вузлів взаємна 72  
 Провідність вхідна комплексна 329  
 Провідність ємнісна 111  
 Провідність індуктивна 109  
 Провідність передаточна комплексна 329  
 Провідність питома електрична 29  
 Провідність повна комплексна 155  
 Провідність повна 119  
 Провідність реактивна 118  
 Проникність відносна діелектрична 14  
 Проникність відносна магнітна 20  
 Проникність діелектрична вакууму 14  
 Режим генератора 42  
 Режим короткого замикання 41, 86  
 Режим неробочий 86  
 Режим номінальний 86  
 Режим симетричний трифазного електричного кола 202  
 Режим споживача 42  
 Режим узгоджений 86  
 Режим узгодженого навантаження 86  
 Режим холостого ходу 41, 86  
 Режим холостого ходу трансформатора 185  
 Резонанс амплітудний 129  
 Резонанс напруг 130  
 Резонанс струмів 139  
 Резонанс фазовий 129  
 Рівняння енергетичного балансу 49  
 Ротор 248  
 Ротор короткозамкнений 248  
 Ротор фазний 248  
 Ряд Фур'є тригонометричний 285  
 Сила Ампера 24  
 Сила електрорушійна 18  
 Сила струму 16  
 Система багатофазна 195  
 Система врівноважена 235  
 Система двофазна 196  
 Система неуврівноважена 235  
 Система послідовності зворотної 254  
 Система послідовності нульової 254  
 Система послідовності прямої 253  
 Система симетрична багатофазна 195  
 Складова напруги активна 117  
 Складова напруги реактивна 117  
 Складова постійна 98  
 Складова симетрична головна 256  
 Складова струму активна 121  
 Складова струму реактивна 121

- Смуга загасання 363  
Смуга затримки 363  
Смуга непрозорості 363  
Смуга прозорості 363  
Смуга пропускання контуру 137  
Смуга пропускання 363  
Спектр дискретний 288  
Спектр лінійчатий 288  
Спектр 288  
Стала електрична 14  
Стала магнітна 20  
Статор 248  
Струм вузловий 72  
Струм змінний 97  
Струм короткого замикання двополюсника 80  
Струм лінійний 206  
Струм намагнічування 186  
Струм несиметричний періодичний 283  
Струм провідності 16  
Струм холостого ходу трансформатора 186  
СФ 363, 276  
Схема 27  
Схема електрична 28  
Схема заміщенні 28  
Схема заміщення чотириполюсника П-образна 333  
Схема заміщення чотириполюсника Т-образна 333  
Схема кола 27  
Схема монтажна 28  
Схема принципова 28  
Схема розрахункова 28  
Теорема компенсації 93  
Теорема про еквівалентне джерело 81  
Теорема про циркуляцію вектора магнітної індукції 22  
Точка нейтральна генератора 203  
Точка нейтральна навантаження 205  
Трансформатор 182  
Трансформатор досконалий 186  
Трансформатор ідеальний 187  
Трансформатор повітряний 182  
Умова регулярності з'єднання 346  
Фаза 100  
Фаза кола багатофазного 195  
Фаза початкова 100  
Фазопоказчик 200, 219  
ФВЧ 363, 371  
Фільтр активний 364  
Фільтр безіндукційний 364  
Фільтр високочастотний 363  
Фільтр вищих частот 363, 371  
Фільтр електричний 363  
Фільтр загороджувальний 363, 379  
Фільтр ідеальний 364  
Фільтр нижніх частот 363, 368  
Фільтр низькочастотний 363  
Фільтр пасивний 364  
Фільтр реактивний 364  
Фільтр режекторний 363  
Фільтр симетричних складових 277  
Фільтр смуговий 363, 376

- Фільтр смуго-загороджувальний 363
- Фільтр смуго-пропускний 363
- ФНЧ 363, 368
- Функція передатна 345
- Характеристика джерела енергії реального зовнішня 38
- Характеристика джерела ЕРС зовнішня 38
- Характеристика джерела струму зовнішня 38
- Характеристика чотириполюсника амплітудно-частотна 346
- Характеристика контуру частотна 134
- Характеристика чотириполюсника фазочастотна 346
- Хвиля біжна 401
- Хвиля відбита 402
- Хвиля зворотна 402
- Хвиля падаюча 401
- Хвиля пряма 401
- Частина комплексного числа дійсна 151
- Частина комплексного числа уявна 151
- Частка заряджена 13
- Частота 98
- Частота зрізу 363
- Частота кругова 100
- Частота кутова гармоніки не-сучої 286
- Частота кутова гармоніки основної 286
- Частота кутова гармоніки першої 286
- Частота кутова 100
- Частота резонансна 131
- Число комплексне 150
- Число комплексне спряжене 152
- Чотириполюсник 25, 325
- Чотириполюсник автономний 325
- Чотириполюсник активний 325, 359
- Чотириполюсник лінійний 326
- Чотириполюсник мостовий 356
- Чотириполюсник неавтономний 325
- Чотириполюсник нелінійний 326
- Чотириполюсник необоротний 326
- Чотириполюсник несиметричний 326
- Чотириполюсник оборотний 326
- Чотириполюсник пасивний 325
- Чотириполюсник симетричний 326, 354
- Чотириполюсник складний 346
- Чотириполюсник суто фазового зсуву 358
- Швидкість поширення хвилі електромагнітної 386
- Швидкість фазова 401

**БІБЛОГРАФІЧНИЙ СПИСОК***Основна література*

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники: Учебник для вузов. - М: Высшая школа, 1984. - 528 с.
2. Зевеке Г.В., Ионкин П.А., Нетушил А.В. и др. Основы теории цепей: Учебник для вузов. - М.: Энергоатомиздат, 1989. - 528 с.
3. Попов В.П. Основы теории цепей: Учебник для вузов. - М.: Высшая школа, 1985. 496 с.
4. Сборник задач и упражнений по теоретическим основам электротехники: Учебное пособие для вузов. - М.: Энергоиздат, 1982. - 768 с.
5. Атабеков Г.И. Линейные электрические цепи: Учебник для вузов. М.: Энергия, 1978. - 592 с.
6. Качан Ю.Г. Лнійна електротехніка (теоретичні основи): Навч. посібник. - Запоріжжя: Видавництво ЗДІА, 1995, 205.
7. Шебес М.Р., Каблукова М.В. Задачник по теории электрических цепей: Учебное пособие для вузов. - М.: Высшая школа, 1990. - 528 с.
8. Маляр В.С. Теоретичні основи електротехніки. Електричні кола: Навч. посібник. - Львів : Вид-во Львівської політехніки, 2012.- 309 с.

*Додаткова література*

9. Мілих В.І. Електротехніка та електромеханіка: Навч. посібник. - К: Каравела, 2005. - 376 с.
10. Мілих В.І., Шавьолкін О.О. Електротехніка, Електроніка та мікропроцесорна техніка: Навч. посібник/ За ред. В.І.Мілих. - К: Каравела, 2007. - 686 с.
11. Малинівський С.М. Загальна електротехніка: Підручник. - Львів: Видавництво "Бекід Біт", 2003. - 640 с.
12. Паначевский Б.І. Загальна електротехніка: Теорія і практика: Навч. посібник. - К: Каравела, 2003. - 440 с.
13. Данько В.Г., Мілих В.І., Черкасов А.К. та ін. Електротехніка: Навч посібник для самостійної роботи студентів. - К.: УМК ВО, 1990 - 264 с.
14. Антамонов В.Х., Курило И.А. Избранные задачи по линейным электрическим цепям. - К.: УМК ВО, 1993 - 94 с.
15. Данько В.Г., Мілих В.І., Карпенко Ф.Т., Марков В.С. Збірник задач з електротехніки: Навч. посібник. - Х.: НТУ "ХПІ", 2004 - 119 с.

16. Козлов В.В., Набокова О.В. Методичні вказівки до самостійної роботи та виконання РГР №1 з дисципліни "Теоретичні основи електротехніки" "Електричні кола постійного струму" (І модуль) для студентів, які навчаються за напрямком "Електромеханіка", всіх форм навчання. - Запоріжжя: ЗНТУ, 2010. - 66 с.
17. Козлов В.В., Набокова О.В. Методичні вказівки до самостійної роботи та виконання РГР №2 з дисципліни "Теоретичні основи електротехніки" "Однофазні електричні кола синусоїдного струму" (ІІ модуль) для студентів, які навчаються за напрямком "Електромеханіка", всіх форм навчання. - Запоріжжя: ЗНТУ, 2013. - 82 с.
18. Козлов В.В., Набокова О.В. Методичні вказівки до самостійної роботи та виконання РГР №3 з дисципліни "Теоретичні основи електротехніки" "Трифазні електричні кола синусоїдного струму" (ІІІ модуль) для студентів, які навчаються за напрямком "Електромеханіка", всіх форм навчання. - Запоріжжя: ЗНТУ, 2014. - 58 с.
19. В.Ф. Безотосний, В.В. Козлов, О.В. Набокова, О.Л. Пазюк. Методичні вказівки до самостійної роботи з дисциплін ТОЕ, ОТК, ТЕ і ЕК для студентів усіх форм навчання. - Запоріжжя: ЗНТУ, 2015. - 58 с.
20. O.V.Nabokova. Theoretical Electrical Engineering (Теоретична електротехніка): Навч. посібник. (англ.) - Запоріжжя: ЗНТУ, 2015. - 468 с.