

УДК 372.851

Антоненко Н.М.¹, Кірюніна А.Є.²

¹ канд. фіз.-мат. наук, доц. НУ «Запорізька політехніка»

² студ. гр. Е-612 НУ «Запорізька політехніка»

ПРО ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ ЦИКЛІЧНИХ ФУНКЦІЙ В ОЛІМПІАДНИХ ЗАДАЧАХ

Розглянемо задачу. На дошці записано деяке число x . Олена праворуч від x записує число $\frac{x-5}{x+3}$, потім витирає число x . Після цього вона робить таку саму операцію з утвореним числом і так далі. Яке число буде написано на дошці після 2023 таких операцій, якщо $x = 9$? Відповідь обґрунтуйте.

Розв'язання. Нехай на дошці написано число x . Після першої операції на дошці буде написано $\frac{x-5}{x+3}$, після другої $-\frac{\frac{x-5}{x+3}-5}{\frac{x-5}{x+3}+3} = -\frac{x+5}{x+1}$, після третьої $-\frac{3x+5}{x-1}$, після четвертої $-x$ і т.д. Маємо ланцюжок:

$x \xrightarrow{1} \frac{x-5}{x+3} \xrightarrow{2} \frac{x+5}{x+1} \xrightarrow{3} \frac{3x+5}{x-1} \xrightarrow{4} x \rightarrow \dots$, у якому числа циклічно повторюються через кожні чотири операції. Оскільки $2023 = 4 \cdot 505 + 3$, то після 2023 операцій ми одержимо число, яке отримано після третьої операції, тобто $-\frac{3x+5}{x-1}$. Якщо $x=9$, то після 2023 операцій на дошці буде записано $-\frac{3 \cdot 9 + 5}{9 - 1} = -4$.

Постає питання: у чому особливість функції $\frac{x-5}{x+3}$? Ця функція є циклічною функцією четвертого порядку. За означенням функція $\varphi(x)$ називається циклічною функцією n -го порядку, якщо n – найменше натуральне число, для якого справджується тотожність $\varphi(\varphi(\dots\varphi(x)\dots)) \equiv x$, в лівій частині якої функція $\varphi(x)$ фігурує n разів. У роботі [1] отримано умови, яким мають задовольняти коефіцієнти a, b, c, d , щоб функція $\varphi(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ була циклічною першого-п'ятого порядків. Використовуючи ідею циклічності функцій, можна скласти серію задач подібних до розглянутої.

Іншим застосуванням циклічних функцій є їх використання при побудові деяких типів функціональних рівнянь. Якщо в ролі аргументу одного або кількох доданків рівняння виступає циклічна функція, то метод розв'язання також ґрунтуватиметься на підборі вдалої циклічної підстановки. Розглянемо, наприклад, функціональне рівняння $2f\left(\frac{x-1}{x}\right) + f\left(-\frac{1}{x-1}\right) = 9x$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$. Замінивши в заданому рівнянні x на $\frac{x-1}{x}$, а в отриманому рівнянні знову x на $\frac{x-1}{x}$, отримаємо систему:

$$\begin{cases} 2f\left(\frac{x-1}{x}\right) + f\left(-\frac{1}{x-1}\right) = 9x, \\ 2f\left(-\frac{1}{x-1}\right) + f(x) = \frac{9(x-1)}{x}, \\ 2f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = -\frac{9}{x-1}. \end{cases}$$

Розв'язком системи є функція $f(x) = -\frac{2x^3 - 3x^2 + 6x - 1}{x(x-1)}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$.

Доцільність зробленої підстановки базується на тому, що функція $\varphi(x) = \frac{x-1}{x}$ є циклічною функцією третього порядку, тобто $\varphi(\varphi(\varphi(x))) \equiv x$, зокрема $\varphi(\varphi(x)) = -\frac{1}{x-1}$.

Якщо в якості аргументу буде виступати циклічна функція n -го порядку, то розв'язання функціонального рівняння зведеться до розв'язання системи n рівнянь.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Федак І. В. Функціональні рівняння : навч. посібник / І. В. Федак. – Івано-Франківськ : ПНУ, 2018. – 144 с.