

УДК 539.3

Левада В.С., канд. техн. наук, Хижняк В.К., канд. физ.-мат. наук.,  
Левицкая Т.И., канд. техн. наук

## ИЗГИБ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ С ШАРНИРНО-ОПЕРТЫМ КРАЕМ, НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ НАГРУЗКИ

Получено точное решение задачи изгиба полубесконечной анизотропной пластины с шарнирно-опертым краем, находящейся под действием сосредоточенной нагрузки. Решение выражено в замкнутой форме через элементарные функции. Построена функция Грина соответствующей краевой задачи.

*Ключевые слова:* изгиб, анизотропная пластина, сосредоточенная нагрузка, шарнирно-опертый край, функция Грина, краевая задача.

**Введение.** Задачи о локальных воздействиях на элементы конструкций издавна привлекали внимание исследователей. Решение таких задач стремятся получить в замкнутом виде относительно элементарных или других легко вычисляемых функций. При решении задачи изгиба анизотропных пластин под действием сосредоточенных нагрузок широко использовались методы теории аналитических функций, основанные на классических работах С.Г. Лехницкого [1]. Эти методы использовались в [2]. В настоящей работе использованы интегральные преобразования обобщенных функций для получения решения задачи изгиба полубесконечной анизотропной пластины с шарнирно-опертым краем.

Рассматривается задача

$$D_{11} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 W}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 W}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \delta(x - \xi) \delta(y); \quad (1)$$

$$x \in (0; \infty); \quad y \in (-\infty, +\infty);$$

$$W(0, y) = 0; \quad D_{11} \frac{\partial^2 W(0, y)}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 W(0, y)}{\partial x \partial y} = 0, \quad (2)$$

где  $\xi \in (0; \infty)$ .

Здесь  $\delta(x - \xi) \delta(y)$  - дельта-функция Дирака;  
 $D_{11}, D_{12}, D_{16}, D_{26}, D_{66}, D_{22}$  - жесткости пластины;  $W(x, y)$  - прогиб пластины в точке  $(x, y)$ .

Эта краевая задача моделирует изгиб анизотропной пластинки, находящейся под действием единичной нагрузки, сосредоточенной в точке  $(\xi, 0)$ .

Зная  $W(x, y)$ , можно найти  $M_x = -\left(D_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right)$  на

прямой  $x=0$ .

Зная  $W(x, y)$ , можно определить изгибающие и скручивающие моменты, и перерезывающие силы.

Применим к (1), (2) преобразование Фурье по  $y$ . Обозначив  $F_y[W(x, y)] = \bar{W}(x, \lambda)$ , получаем:

$$D_{11} \frac{\partial^4 \bar{W}}{\partial x^4} + 4D_{16}(-i\lambda) \frac{\partial^3 \bar{W}}{\partial x^3} + 2(D_{12} + 2D_{66})(-i\lambda)^2 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} + 4D_{26}(-i\lambda)^3 \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} + (-i\lambda)^4 D_{22} \bar{W} = \delta(x - \xi); \quad (3)$$

$$\bar{W}(0, \lambda) = 0; \quad D_{11} \frac{\partial^2 \bar{W}(0, \lambda)}{\partial x^2} - 2i\lambda D_{16} \frac{\partial \bar{W}(0, \lambda)}{\partial x} = 0. \quad (4)$$

Применяя к (3) преобразование Лапласа по  $x$  и обозначив  $L[\bar{W}(x, \lambda)] = \bar{\bar{W}}(p, \lambda)$ , получим

$$\bar{\bar{W}}(p) = \frac{1}{\Delta} \left( e^{-p\xi} + D_{11} B_1 p^2 - 2i\lambda D_{16} B_1 p + \lambda^2 B_1 (8D_{16}^2 - 2D_{11} D_{12} - 4D_{11} D_{66}) / (D_{11} + D_{11} B_2) \right), \quad (5)$$

где

$$\Delta = D_{11} p^4 + 4D_{16}(-i\lambda) p^3 + 2(D_{12} + 2D_{66})(-i\lambda)^2 p^2 + 4D_{26}(-i\lambda)^3 p + (-i\lambda)^4 D_{22};$$

$$B_1 = \frac{\partial^2 \bar{W}(0, \lambda)}{\partial x^2}; \quad B_2 = \frac{\partial^3 \bar{W}(0, \lambda)}{\partial x^3}.$$

Уравнение

$$D_{11} \mu^4 + 4D_{16} \mu^3 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \mu^2 + 4D_{26} \mu + D_{22} = 0$$

может иметь следующие варианты корней:

- 1)  $\mu_{1,2} = \alpha_1 \pm i\beta_1$ ,  $\mu_{3,4} = \alpha_2 \pm i\beta_2$ ,  $\beta_1 > 0$ ,  $\beta_2 > 0$ ;
- 2)  $\mu_{1,2,3,4} = \alpha \pm i\beta$ ,  $\beta > 0$ .

Коэффициенты уравнения (1) выражаются через эти корни следующим образом.

Для первого варианта корней:

$$\begin{aligned}
 2D_{16} &= -D_{11}(\alpha_1 + \alpha_2); \\
 2(D_{12} + 2D_{66}) &= D_{11}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 4\alpha_1\alpha_2 + \beta_1^2 + \beta_2^2); \\
 2D_{26} &= -D_{11}(\alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_2\beta_1^2 + \alpha_1\beta_2^2); \\
 D_{22} &= D_{11}(\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_1^2\beta_2^2 + \alpha_2^2\beta_1^2 + \beta_1^2\beta_2^2). \quad (6)
 \end{aligned}$$

Для второго варианта корней:

$$\begin{aligned}
 D_{16} &= -D_{11}\alpha; \quad 2(D_{12} + 2D_{66}) = D_{11}(6\alpha^2 + 2\beta^2); \\
 D_{26} &= -D_{11}(\alpha^3 + \alpha\beta^2); \quad D_{22} = D_{11}(\alpha^4 + \beta^4 + 2\alpha^2\beta^2).
 \end{aligned}$$

Применяя к (5), с учетом (6), обратное преобразование Лапласа и определяя  $B_1$  и  $B_2$ , из условия  $\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{W}(x, \lambda) = 0$ , получаем для первого варианта корней:

$$\begin{aligned}
 \bar{W} &= \frac{e^{-|\lambda||x-\xi|\beta_1} e^{-i\lambda\alpha_1(x-\xi)}}{2D_{11}\beta_1|\lambda|^3 S_1 S_2} (\beta_2^2 - \beta_1^2 + (\alpha_1 - \alpha_2)^2) + \\
 &+ \frac{e^{-|\lambda||x-\xi|\beta_2} e^{-i\lambda\alpha_2(x-\xi)}}{2D_{11}\beta_2|\lambda|^3 S_1 S_2} (\beta_1^2 - \beta_2^2 + (\alpha_1 - \alpha_2)^2) - \\
 &- \frac{i\lambda e^{-|\lambda||x-\xi|\beta_1} e^{-i\lambda\alpha_1(x-\xi)} \text{sign}(x-\xi)(\alpha_2 - \alpha_1)}{D_{11}|\lambda|^4 S_1 S_2} - \\
 &- \frac{i\lambda e^{-|\lambda||x-\xi|\beta_2} e^{-i\lambda\alpha_2(x-\xi)} (\alpha_1 - \alpha_2)}{D_{11}|\lambda|^4 S_1 S_2} - \\
 &- \frac{e^{-|\lambda|(\beta_1 x + \beta_2 \xi)} e^{-i\lambda(\alpha_1 x - \alpha_2 \xi)} (\alpha_1 - \alpha_2)^2}{D_{11}|\lambda|^3 (\beta_1 + \beta_2) S_1 S_2} - \\
 &- \frac{e^{-|\lambda|(\beta_2 x + \beta_1 \xi)} e^{-i\lambda(\alpha_2 x - \alpha_1 \xi)} (\alpha_1 - \alpha_2)^2}{D_{11}|\lambda|^3 (\beta_1 + \beta_2) S_1 S_2} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{-i\lambda e^{-|\lambda|(\beta_1 x + \beta_2 \xi)} e^{-i\lambda(\alpha_1 x - \alpha_2 \xi)} (\alpha_1 - \alpha_2)}{D_{11} |\lambda|^4 S_1 S_2} + \\
& + \frac{-i\lambda e^{-|\lambda|(\beta_2 x + \beta_1 \xi)} e^{-i\lambda(\alpha_2 x - \alpha_1 \xi)} (\alpha_2 - \alpha_1)}{D_{11} |\lambda|^4 S_1 S_2} + \\
& + \frac{e^{-|\lambda|\beta_1(x+\xi)} e^{-i\lambda\alpha_1(x-\xi)}}{2D_{11}\beta_1|\lambda|^3(\beta_1 + \beta_2)S_1S_2^2} (\beta_1 - \beta_2) \left( (\alpha_1 - \alpha_2)^2 + \beta_1^2 - \beta_2^2 \right)^2 + \\
& + \frac{e^{-|\lambda|\beta_2(x+\xi)} e^{-i\lambda\alpha_2(x-\xi)}}{2D_{11}\beta_2|\lambda|^3(\beta_1 + \beta_2)S_1S_2^2} (\beta_2 - \beta_1) \left( (\alpha_1 - \alpha_2)^2 + \beta_2^2 - \beta_1^2 \right)^2,
\end{aligned}$$

где  $S_1 = (\beta_1 + \beta_2)^2 + (\alpha_1 - \alpha_2)^2$ ,  $S_2 = (\beta_1 - \beta_2)^2 + (\alpha_1 - \alpha_2)^2$ .

Для второго варианта корней

$$\begin{aligned}
\bar{W} = \frac{1}{4D_{11}\beta^3|\lambda|^3} & \left( e^{-|\lambda|\beta|x-\xi|} e^{-i\lambda\alpha(x-\xi)} (1 + |\lambda|\beta|x-\xi|) - \right. \\
& \left. - e^{-|\lambda|\beta(x+\xi)} e^{-i\lambda\alpha(x-\xi)} (1 + |\lambda|\beta(x+\xi)) \right).
\end{aligned}$$

Применяя формулы [3]:

$$\begin{aligned}
F^{-1} \left[ \frac{e^{-a|\lambda|}}{|\lambda|^2} \right] &= \frac{1}{\pi} a \ln \sqrt{a^2 + y^2} - \frac{y}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{a} + \frac{a}{2\pi}; \\
F^{-1} \left[ \frac{e^{-a|\lambda|}}{|\lambda|^3} \right] &= -\frac{1}{2\pi} (a^2 - y^2) \ln \sqrt{a^2 + y^2} + \frac{ay}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{a}; \\
F^{-1} \left[ -i\lambda \frac{e^{-a|\lambda|}}{|\lambda|^4} \right] &= -\frac{ay}{\pi} \ln \sqrt{a^2 + y^2} - \frac{1}{2\pi} (a^2 - y^2) \operatorname{arctg} \frac{y}{a},
\end{aligned}$$

где  $a > 0$ , получаем решение задачи.

Для первого варианта корней

$$W = \frac{\beta_2^2 - \beta_1^2 + (\alpha_1 - \alpha_2)^2}{4\pi D_{11} \beta_1 S_1 S_2} \left( (n_1^2 - m_1^2) \ln \sqrt{r_1} + 2m_1 n_1 \Theta_1 \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2\pi D_{11} S_1 S_2} \left( 2m_1 n_1 \ln \sqrt{r_1} - (n_1^2 - m_1^2) \Theta_1 \right) + \\
& + \frac{\beta_1^2 - \beta_2^2 + (\alpha_1 - \alpha_2)^2}{4\pi D_{11} \beta_2 S_1 S_2} \left( (n_2^2 - m_2^2) \ln \sqrt{r_2} + 2m_2 n_2 \Theta_2 \right) + \\
& + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2\pi D_{11} S_1 S_2} \left( 2m_2 n_2 \ln \sqrt{r_2} - (n_2^2 - m_2^2) \Theta_2 \right) + \\
& + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}{2\pi D_{11} (\beta_1 + \beta_2) S_1 S_2} \left( (m_3^2 - n_3^2) \ln \sqrt{r_3} - 2m_3 n_3 \Theta_3 + \right. \\
& \quad \left. + (m_4^2 - n_4^2) \ln \sqrt{r_4} - 2m_4 n_4 \Theta_4 \right) + \\
& + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2\pi D_{11} S_1 S_2} \left( 2m_3 n_3 \ln \sqrt{r_3} - (m_3^2 - n_3^2) \Theta_3 - 2m_4 n_4 \ln \sqrt{r_4} - (m_4^2 - n_4^2) \Theta_4 \right) + \\
& + \frac{(\beta_1 - \beta_2) (\alpha_1 - \alpha_2)^2 + \beta_1^2 - \beta_2^2}{4\pi D_{11} \beta_1 (\beta_1 + \beta_2) S_1 S_2^2} \left( (n_5^2 - m_5^2) \ln \sqrt{r_5} + 2m_5 n_5 \Theta_5 \right) + \\
& + \frac{(\beta_2 - \beta_1) (\alpha_1 - \alpha_2)^2 + \beta_2^2 - \beta_1^2}{4\pi D_{11} \beta_2 (\beta_1 + \beta_2) S_1 S_2^2} \left( (n_6^2 - m_6^2) \ln \sqrt{r_6} + 2m_6 n_6 \Theta_6 \right),
\end{aligned}$$

где  $m_1 = \beta_1(x - \xi)$ ,  $n_1 = y + \alpha_1(x - \xi)$ ,

$m_2 = \beta_2(x - \xi)$ ,  $n_2 = y + \alpha_2(x - \xi)$ ,

$m_3 = \beta_1 x + \beta_2 \xi$ ,  $n_3 = y - \alpha_2 \xi + \alpha_1 x$ ,

$m_4 = \beta_2 x + \beta_1 \xi$ ,  $n_4 = y - \alpha_1 \xi + \alpha_2 x$ ,

$m_5 = \beta_1(x + \xi)$ ,  $m_6 = \beta_2(x + \xi)$ ,

$\Theta_1 = \arctg \frac{n_1}{m_1}$ ,  $\Theta_2 = \arctg \frac{n_2}{m_2}$ ,  $\Theta_3 = \arctg \frac{n_3}{m_3}$ ,

$\Theta_4 = \arctg \frac{n_4}{m_4}$ ,  $\Theta_5 = \arctg \frac{n_1}{m_5}$ ,  $\Theta_6 = \arctg \frac{n_2}{m_6}$ ,

$r_1 = m_1^2 + n_1^2$ ,  $r_2 = m_2^2 + n_2^2$ ,

$r_3 = m_3^2 + n_3^2$ ,  $r_4 = m_4^2 + n_4^2$ ,

$r_5 = m_5^2 + n_1^2$ ,  $r_6 = m_6^2 + n_2^2$ .

Для второго варианта корней решение примет вид

$$W = \frac{1}{8\pi\beta^3 D_{11}} \left( \left( \beta^2(x-\xi)^2 + (y + \alpha(x-\xi))^2 \right) \ln q - \left( \beta^2(x+\xi)^2 + (y + \alpha(x-\xi))^2 \right) \ln \bar{q} - 4\beta^2 x\xi \right),$$

где  $q = \sqrt{\beta^2(x-\xi)^2 + (y + \alpha(x-\xi))^2}$ ,  $\bar{q} = \sqrt{\beta^2(x+\xi)^2 + (y + \alpha(x-\xi))^2}$ .

Слагаемое  $-4\beta^2 x\xi$  можно убрать, так как оно удовлетворяет однородному уравнению, соответствующему уравнению (1) с граничными условиями (2).

Из полученного решения легко получается функция Грина соответствующей краевой задачи

$$G(x, y, \xi, \eta) = W(x, y - \eta).$$

Полученное точное решение задачи об изгибе полубесконечной анизотропной пластины выражено в замкнутой форме через элементарные функции, что позволяет эффективно его использовать. Если использовать  $G(x, y, \xi, \eta)$  для построения ядер соответствующих интегральных уравнений с последующим их решением МГЭ для пластин, граница которых содержит отрезок  $x=0$ ,  $a \leq y \leq b$ , мы избегаем дискретизации этого отрезка.

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. **Лехницкий С.Г.** Анизотропные пластинки. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
2. **Максименко В.Н.**, Подружин Е.Г. Фундаментальные решения в задачах изгиба анизотропных пластин// ПМТФ. – 2003. – 44, № 4. – С. 135-143.
3. **Левада В.С.** К применению преобразования Фурье для построения фундаментального решения эллиптического дифференциального оператора. – Запорожье, 1987. – Деп. в Укр. НИИНТИ, № 706 – Ук-87.

*Запорожский национальный  
технический университет,  
Запорожье, Украина*

*Поступила в редколлегию 20.03.2012*

*Левада В.С., к.т.н., Хижняк В.К., к.ф.-м.н., Левицька Т.І., к.т.н.*

### **ЗГИН НАПІВНЕСКІНЧЕНОЇ АНІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ З ШАРНІРНО-ОПЕРТИМ КРАЄМ, ЩО ЗНАХОДИТЬСЯ ПІД ДІЄЮ ЗОСЕРЕДЖЕНОГО НАВАНТАЖЕННЯ**

Отримано точний розв'язок задачі згину напівнескінченної анизотропної пластины з шарнірно-опертим краєм, що знаходиться під дією зосередженого навантаження. Розв'язок виражено в замкнутій формі через елементарні функції. Побудовано функцію Гріна відповідної крайової задачі.

**Ключові слова:** згин, анизотропна пластина, зосереджене навантаження, шарнірно-опертий край, функція Гріна, крайова задача.

*Levada V.S, Ph.D., Khizhnyak V.K., Ph.D., Levitskaya T.I., Ph.D.*

## **BENDING SEMIINFINITE ANISOTROPIC PLATE WITH HINGEDLY SUPPORTED EDGE UNDER THE ACTION OF CONCENTRATED LOAD**

Obtained an exact solution to the problem of bending a semi-infinite anisotropic plate with a hingedly supported edge under a concentrated load. Solution is expressed in closed form through elementary functions. Built Green's function corresponding to the boundary problem.

*Key words:* bending, anisotropic plate, concentrated load, hingedly supported edge, the Green's function, boundary value problem.