УДК 678.02:621.365

Задоя Н.О.[1], Вечеря Е.С.[2]
[1] канд. техн. наук, доц. НУ «Запорізька політехніка»
[2] студ. гр. М-318 НУ «Запорізька політехніка»

ОГЛЯД МЕТОДІВ ВИРІШЕННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Існуючі методи вирішення крайових завдань можна класифікувати за різними ознаками. Один із них - форма, в якій одержують результати рішень. Розв'язання задачі може бути представлене у вигляді формули, яка дозволяє за заданим значенням аргументу отримати значення шуканої функції. І тут кажуть, що рішення отримано в аналітичної формі. За допомогою чисельних методів, рішення може бути представлене числовими значеннями функції деяких заданих числових значеннях аргументу. Часто для аналізу аналітичного рішення на певному етапі необхідно застосування чисельних методів, тобто в цьому випадку можна говорити про синтез аналітичних та чисельних методів. Аналітичні методи дозволяють отримати наочніше рішення в порівнянні з чисельними методами, за якими легко проаналізувати вплив всіх факторів на результати рішень. Важливим критерієм для аналітичних методів є вирішення нелінійних крайових завдань. Якщо метод розроблено на вирішення нелінійних завдань, він застосовний і на вирішення лінійних завдань, зворотне часто неможливе. Використання чисельних методів дозволяє вирішувати складні крайові завдання, недоступні на вирішення аналітичними методами.

Аби вирішити лінійні завдання теорії теплопровідності застосовують такі методи: поділу змінних; інтегральних перетворень; функцій джерел (функцій Гріна) та теплових потенціалів. За допомогою перерахованих методів можна отримати аналітично точне рішення крайової задачі. Метод поділу змінних (метод Фур'є) і еквівалентний йому, але більш універсальний, метод кінцевих інтегральних перетворень застосовується на вирішення завдань у областях обмежених координатними поверхнями із однотипними, межах кожної поверхні, граничними умовами. Для областей складної форми ці методи можна застосувати, якщо вдається побудувати повну систему власних функцій.

Методи функцій джерел (функцій Гріна) та теплових потенціалів призводять до інтегральної форми подання рішення. Теорія лінійних інтегральних рівнянь добре розроблена також і для тіл простої форми. Вдається отримати точне аналітичне розв'язання таких рівнянь.

Область застосування точних аналітичних методів зазвичай може бути розширена з включенням до неї лінеаризованих нелінійних завдань. Для цього можна застосовувати методи підстановок (алгебраїчні та інтегральні), різні прийоми лінеаризації, методи послідовних наближень, метод збуджень (малого параметра).

У тих випадках, коли не вдається застосувати методи отримання точного аналітичного рішення лінійних задач, застосовують варіаційні методи або універсальні, проекційні. Застосування проекційних методів (колокацій, Бубнова-Галеркіна, моментів, інтегральний) засноване на математичному формулюванні пов'язаному з вибором наближеного рішення з інтегральної умови малої неузгодженості наближеного рішення з точним. Сутність варіаційних методів (Рітца, Канторовича, Треффтца, Біо) полягає у використанні екстремальних властивостей, еквівалентних крайовим завданням функціоналів визначення наближених рішень.

Найчастіше для чисельного вирішення крайових задач теплопровідності використовується метод кінцевих різниць (метод сіток). При цьому в диференціальному рівнянні та крайових умовах замінюються різницеві співвідношення між значеннями температур у вузлах кінцевої сітки.

Застосування методу прямих ґрунтується на заміні похідних по всіх змінних, крім однієї (наприклад, часу) кінцевими різницями. Це призводить до системи диференціальних рівнянь (загалом нелінійних), для чисельного вирішення якої можна використовувати методи Рунге-Кутта, Адамса та ін.

Все більше визнання отримує метод кінцевих елементів, тісно пов'язаний із методом кінцевих різниць. Фізична область ділиться на кінцеві елементи, а потім невідома функція апроксимується функцією спеціального виду на кожному кінцевому елементі та параметри цих апроксимацій знаходяться з визначальних рівнянь, отриманих варіаційними методами. Кожен із методів має певні переваги, наприклад, метод кінцевих елементів є потужним засобом для вирішення задач із межами складної форми, а метод кінцевих різниць переважно в областях простої форми. Розвиток методу кінцевих елементів призвело до появи методу граничних елементів, що базується на понятті фундаментального вирішення крайової задачі та використовує кінцеві елементи для апроксимації області. Метод граничних елементів рекомендується застосовувати у тих випадках, коли метод кінцевих елементів не є ефективним (наприклад, через обсяг обчислень).

З імовірнісних методів теорії теплопровідності найчастіше використовується метод Монте-Карло. Застосування цього методу може виявитися ефективним, якщо необхідно визначити значення температури лише в одній або кількох характерних точках області.