

УДК 539.3

Попович О.Г.¹, Шевченко В.Г.²

¹ канд. техн. наук, доц. НУ «Запорізька політехніка»

² канд. техн. наук, доц., зав. каф. НУ «Запорізька політехніка»

МАТЕМАТИЧНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПЛАСТИЧНОСТІ ПРИ ОБ'ЄМНОМУ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОМУ СТАНІ

Метою розв'язання задачі про пружно-пластичне деформування тіла у загальному випадку є визначення п'ятнадцяти функцій. Цими функціями є: шість компонентів симетричного тензора напружень (σ_x ; σ_y ; σ_z ; τ_{xy} ; τ_{yz} ; τ_{zx}), шість компонентів симетричного тензора деформацій (ϵ_x ; ϵ_y ; ϵ_z ; $\gamma_{xy}/2$; $\gamma_{yz}/2$; $\gamma_{zx}/2$), зміщення точок пружно-пластичного тіла вздовж координатних осей (u_x ; u_y ; u_z). Для знаходження шуканих функцій у теорії пластичності необхідно вирішити систему наступних рівнянь, які математично описують статичний, геометричний і фізичний аспекти задачі, задовольнивши при цьому граничні умови на поверхні тіла.

Поверхню деформованого тіла для задавання граничних умов розглядають як таку, що складається з декількох ділянок. На одних ділянках задано зміщення (зокрема вони можуть дорівнювати нулю); на інших ділянках прикладені розподілені навантаження. Також можуть бути такі ділянки, на яких граничні умови є комбінованими.

Статичний аспект задачі полягає в тому, що компоненти тензора напружень мають задовольняти трьом диференціальним рівнянням рівноваги.

Геометричний аспект задачі відображають залежності (шість формул Коші) між компонентами тензора деформацій і зміщеннями точок пружно-пластичного тіла.

При складному процесі навантаження, під час якого змінюються напрямки головних осей тензора напружень і співвідношення головних напружень, фізичний аспект задачі добре описується за допомогою рівнянь теорії пластичної плинності, основні положення якої полягають у наступному.

Матеріал тіла ізотропний; відносна зміна об'єму evol є пружною деформацією, пропорційною до середнього нормального напруження. Прирости компонентів тензора повної деформації ($d\epsilon_x$; $d\epsilon_y$; $d\epsilon_z$; $d\gamma_{xy}/2$; $d\gamma_{yz}/2$; $d\gamma_{zx}/2$) складаються з приростів компонентів тензорів пружної та пластичної деформації. Прирости компонентів тензора пружної деформації пов'язані з приростами компонентів тензора напружень за узагальненим законом Гука.

Пластичні деформації виникають або розвиваються в тих об'ємах матеріалу тіла, для яких виконується умова пластичності. Ця умова математично записується у вигляді співвідношення між компонентами тензора напружень, котре в якості постійної величини містить границю текучості матеріалу σ_t (перед початком процесу деформування). Також у математичному записі умови пластичності можуть фігурувати параметри, які характеризують попередню історію деформування розглядуваного об'єму матеріалу.

У тих об'ємах матеріалу, де виконується умова пластичності, прирости компонентів тензора пластичної деформації пропорційні відповідним компонентам девіатора напружень, причому коефіцієнт пропорційності пов'язаний з приростом роботи пластичної деформації. В тих об'ємах матеріалу, де умова пластичності не виконується, прирости компонентів тензора пластичної деформації дорівнюють нулю.

Пружно-пластичні властивості багатьох металевих матеріалів можна з достатньою для інженерних розрахунків точністю схематизувати діаграмою деформування з лінійним зміцненням. При цьому прийнято вважати, що робота пластичної деформації є функцією від інтенсивності напружень σ_{int} , однаковою для різних видів напруженого стану.

Розв'язання задач про визначення напружено-деформованого стану в пружно-пластичному тілі пов'язано з великими математичними труднощами, тому аналітичні розв'язки задач такого типу відомі тільки для простих випадків. У зв'язку з цим у теорії пластичності мають важливе значення чисельні методи розв'язання задач, насамперед метод скінченних елементів.

У цьому методі геометричну модель розглядуваного тіла розбивають на сукупність областей – скінченних елементів, які межують один з одним, але

не перетинаються. Шукані компоненти тензорів напружень і деформацій, а також зміщення у будь-якій точці скінченного елемента визначають апроксимуючими виразами через значення цих величин у вузлах розглядуваного скінченного елемента.

Серед усіх віртуальних напружено-деформованих станів (тобто таких, які задовольняють рівнянням рівноваги, геометричним рівнянням і граничним умовам на поверхні деформованого тіла) потрібно визначити дійсний стан (який задовольняє ще й фізичним рівнянням). Дійсним напружено-деформованим станом буде такий, при якому дорівнює нулю варіація функціонала, який виражається через значення шуканих функцій (напружень, деформацій і приростів зміщень) у вузлах скінченноелементної сітки.

Варіація цього функціонала дорівнюватиме нулю, якщо задовольняється система рівнянь, які виражають рівність нулю всіх частинних похідних цього функціонала за значеннями шуканих функцій у вузлах. За допомогою цієї системи рівнянь можливо визначити напруження, деформації та зміщення у вузлах, тобто дійсний напружено-деформований стан, на поточному кроці навантаження. При вирішенні задач у теорії пластичної плинності крок за кроком простежується розвиток пружно-пластичних деформацій у матеріалі тіла при послідовних малих приростах навантажень.