

УДК 631.316.022

Канд. техн. наук З. М. Шанина, канд. техн. наук Л. В. Гальченко,
канд. техн. наук Л. М. Мартовицкий

Национальный технический университет, г. Запорожье

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОВЕРХНОСТИ ЗУБЧАТОГО РАБОЧЕГО ОРГАНА ДЛЯ ОБРАБОТКИ ПОЧВЫ

Предложена математическая модель, которая при определенных условиях позволит разработать зубчатый орган с такой формой рабочей поверхности, который будет удовлетворять агротехническим, технологическим и экономическим показателям при обработке почвы. Получены уравнения, которые описывают поверхность рабочего органа на участках впадин и выступов.

Ключевые слова: зубчатый рабочий орган, почва, выступы и впадины зубьев, логарифмическая спираль, парабола четвертого порядка, математическая модель, матрично-векторное решение.

Плодородие черноземных почв как основного экономического ресурса Украины зависит от качества их обработки. Известно, что определяющим критерием

качества обработки почвы является ее крошение. Уровень крошения почвы зависит от геометрии рабочего органа и от кинематики его движения в процессе ра-

боты. Исследования показали, что геометрия рабочего органа определяет энергоемкость обработки почвы, а также напряженно-деформированное состояние инструмента во время его работы. С целью удовлетворения вышеизложенным требованиям к обработке почвы был разработан и предложен почвообрабатывающий рабочий орган.

Рабочий орган выполнен в виде блока зубьев (рис. 1), представляющих собой в горизонтальной плоскости впадины, выполненные по логарифмической спирали и выступов, спрофилированных по параболе четвертой степени.

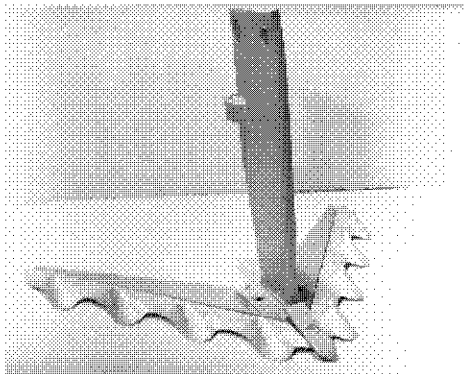


Рис. 1. Общий вид зубчатого рабочего органа для обработки почвы

В горизонтально-проецирующих плоскостях сечение зуба представляет собой семейство логарифмических спиралей

$$r_{\psi_i} = r_0 e^{\psi \operatorname{tg} \varphi}, \quad (1)$$

где r_{ψ_i} – текущий радиус-вектор;

r_0 – начальный радиус-вектор;

$\operatorname{tg} \varphi$ – коэффициент внутреннего трения;

ψ – текущий угол радиуса-вектора спирали.

Рабочую поверхность будем задавать кинематически, как траектории движения точек производящей ло-

гарифмической спирали (рис. 2), расположенной в плоскости OX_2X_3 и совершающей вращательное и поступательное движения.

Геометрию поверхности зубчатого рабочего органа для обработки почвы в общем виде можно представить с помощью матрицы

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ – матрица третьего порядка,

описывающая вращение в трехмерном пространстве;

$(a_{14}, a_{24}, a_{34})^T$ – составляющие поступательного перемещения.

Вращение точек M_i спирали вокруг оси OX_3 на угол $\alpha = 90 - \gamma$ (где γ – угол раствора лапы рабочего органа), описывается матрицей вращения

$$A_{вп} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Координаты текущих точек M_i производящей логарифмической спирали, определяемые по уравнению (1), при $\varphi = 45^\circ$ и $\psi = -45^\circ \dots 50^\circ$ будут иметь следующие значения (рис. 3)

$$x_1^G = 0, \quad x_2^G = r_{\psi_i} \sin \psi_i; \quad x_3^G = r_{\psi_i} \cos \psi_i.$$

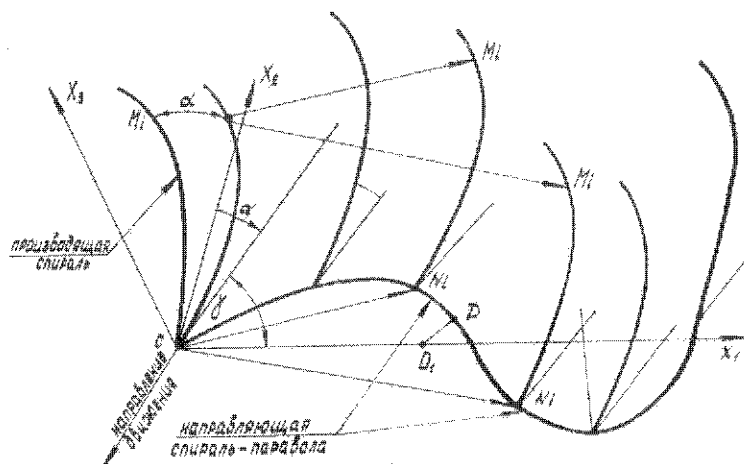


Рис. 2. Кинематическая модель поверхности рабочего органа

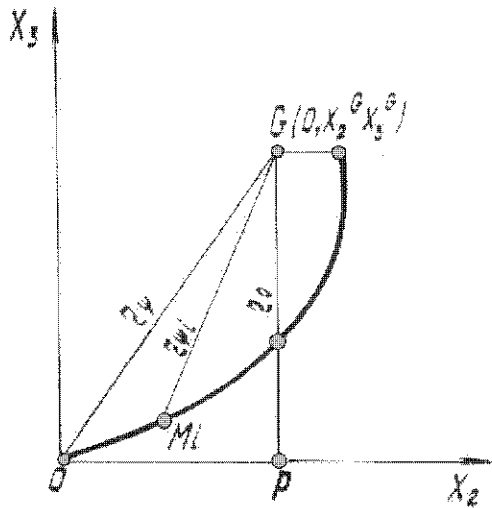


Рис. 3. Вид производящей спирали

Координаты текущих точек M_i производящей спирали в декартовых координатах в зависимости от ψ запишутся в следующем виде

$$\begin{aligned} x_1^{r\psi_i} &= 0; \\ x_2^{r\psi_i} &= OP - r_{\psi_i} \sin \psi_i; \\ x_3^{r\psi_i} &= GP - r_{\psi_i} \cos \psi_i. \end{aligned} \quad (4)$$

Поступательное перемещение точек M_i на участке впадины или выступа, описывается матрицей перемещения

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta x_1^{N_i} \\ 0 & 1 & 0 & \Delta x_2^{N_i} \\ 0 & 0 & 1 & \Delta x_3^{N_i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где $\Delta x_1^{N_i}, \Delta x_2^{N_i}, \Delta x_3^{N_i}$ – составляющие вектора.

Таким образом, общее перемещение точек производящей логарифмической спирали определится путем скалярного перемножения матриц

$$A = A_n \cdot A_{ep} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & \Delta x_1^{N_i} \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & \Delta x_2^{N_i} \\ 0 & 0 & 1 & \Delta x_3^{N_i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Тогда уравнение поверхности зубчатого рабочего органа может быть представлено в виде

$$Y_i = A \cdot X_i, \quad (7)$$

где X_i – координаты текущей точки M_i на производящей спирали, определяемые уравнениями (4);

Y_i – координаты точек поверхности зубчатого рабочего органа, зависящие от параметра ψ_i – производящей логарифмической спирали и величины вектора ON_i , определяемые положением текущей точки N_i на впадине или выступе кромки режущего лезвия.

Для участка впадины координаты текущей точки N_i вектора перемещения по логарифмической спирали (рис. 4) определяются по уравнениям

$$\begin{aligned} x_1^{N_i} &= x_1^{O_1} + r_{\theta_i} e^{\theta_i/g\varphi} \cos \theta_i; \\ x_2^{N_i} &= r_{\theta_i} e^{\theta_i/g\varphi} \sin \bar{\theta}_i; \\ x_3^{N_i} &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\theta_i = 180^\circ$ – исходные углы;

$\bar{\theta}_i = 20^\circ + \theta_i$ – координаты точки $O_1(s/2, 0, 0)$;
 S – шаг расстановки зубьев.

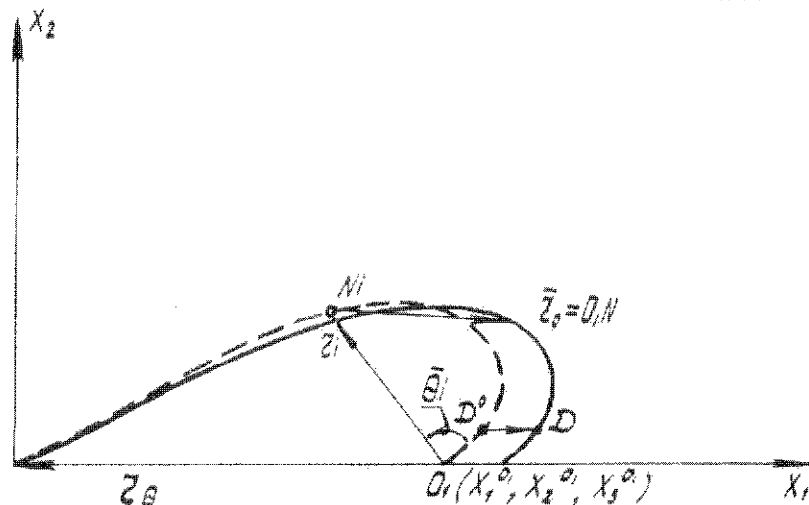


Рис. 4. Преобразования спирали впадины

В связи с удлинением логарифмической спирали профиля впадины по оси OX_1 вводится коэффициент

$$k = \frac{1}{\cos \alpha},$$

а преобразование удлинения запишется матрицей

$$A_{\text{уд}}^y = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

С учетом уравнения (9) координаты точек вектора поступательного перемещения можно определить

$$\begin{aligned} \Delta x_i &= A_{\text{уд}}^y \cdot x_i; \\ \Delta x_1^{N_i} &= kx_1^{N_i}; \\ \Delta x_2^{N_i} &= x_2^{N_i}; \\ \Delta x_3^{N_i} &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Для участка выступа координаты текущей точки N_i (рис. 5) вектора поступательного перемещения по параболе $x_2 = x_1^4$ определяются как произведение следующих преобразований:

а) сжатия вдоль оси OX_2 с коэффициентом μ , описываемого матрицей

$$A_{\text{сж}}^{\text{выст}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (11)$$

б) удлинения вдоль оси OX_1 с коэффициентом k , описываемого матрицей (9);

в) поступательного перемещения вдоль вектора CD , описываемого матрицей (5).

Тогда общее преобразование параболы опишется матрицей

$$A_{\text{общ}} = A_n \cdot A_y \cdot A_{\text{сж}};$$

$$A_{\text{общ}} = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \Delta x_1^{CD} \\ 0 & \mu & 0 & \Delta x_2^{CD} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Координаты текущей точки N_i на параболе будут иметь следующий вид в матричной форме

$$\Delta x_i = A_{\text{общ}} \cdot X_i, \quad (13)$$

где X_i – координаты точек исходной параболы $x_2 = x_1^4$;

Δx_i – координаты точек преобразованной параболы, которые определяются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= kx_1 + \Delta x_1^{CD}; \\ \Delta x_2 &= \mu x_2 + \Delta x_2^{CD}; \\ \Delta x_3 &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

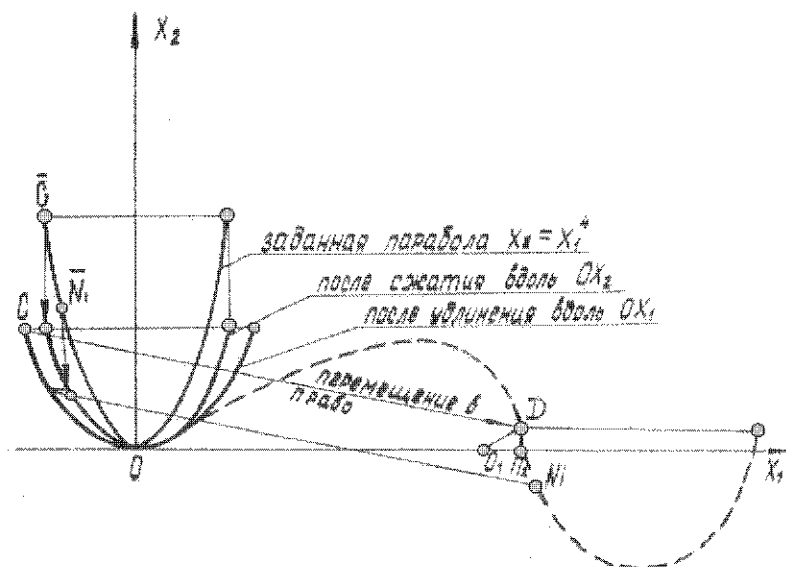


Рис. 5. Координаты текущих точек N_i параболы на участке выступов

Уравнение поверхности зубчатого рабочего органа (7) в матричной форме может быть представлено как

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & \Delta x_1^{N_i} \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & \Delta x_2^{N_i} \\ 0 & 0 & 1 & \Delta x_3^{N_i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{M_i} \\ x_2^{M_i} \\ x_3^{M_i} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

где $x_1^{M_i}, x_2^{M_i}, x_3^{M_i}$ – координаты точек производящей спирали;

$\Delta x_1^{N_i}, \Delta x_2^{N_i}, \Delta x_3^{N_i}$ – координаты точек режущего лезвия.

Данное уравнение описывает поверхность зуба на участках впадин и выступов.

В конечном виде координаты точек поверхности зуба можно записать для участка впадины

$$\begin{aligned} y_1 &= \sin \alpha (OP - r_{\psi_i} \sin \psi_i) + k \left(\frac{s}{2} + r_{\theta_i} \cos \bar{\theta}_i \right); \\ y_2 &= \cos \alpha (GP - r_{\psi_i} \sin \psi_i) + r_{\theta_i} \sin \bar{\theta}_i; \\ y_3 &= GP - r_{\psi_i} \cos \psi_i, \end{aligned} \quad (16)$$

и для участка выступа

$$\begin{aligned} y_1 &= \sin \alpha (OP - r_{\psi_i} \sin \psi_i) + kx_i + \Delta x_1^{CD}; \\ y_2 &= \cos \alpha (GP - r_{\psi_i} \sin \psi_i) + \mu x_2 + \Delta x_2^{CD}; \\ y_3 &= GP - r_{\psi_i} \cos \psi_i. \end{aligned} \quad (17)$$

Вывод

Полученная математическая модель (16), (17) для описания поверхности зубчатого рабочего органа позволяет для различных условий с учетом глубины обработки, агротехнических требований к качеству крошения почвы, физико-механических свойств почвы, геометрии режущей кромки и числа зубьев получить семейство зубчатых почвообрабатывающих органов, которые будут работоспособными в конкретных условиях. Формы поверхностей рабочих органов зависят от значений функциональных параметров k, μ, θ, ψ .

Одержано 14.12.2011

Шанина З.М., Гальченко Л.В., Мартовицкий Л.М. Математична модель поверхні зубчастого робочого органу для обробки ґрунту

Запропоновано математичну модель, яка за певних умов дозволить розробити зубчастий орган з такою формою робочої поверхні, який буде задовольняти агротехнічним, технологічним та економічним показникам при обробці ґрунту. Отримано рівняння, що описують поверхню робочого органу на ділянках западин і виступів.

Ключові слова: зубчастий робочий орган, почва, виступи і западини зубців, логарифмічна спіраль, парабола четвертого порядку, математична модель, матрично-векторний рішення.

Shanina Z., Galchenko L., Martovitski L. A mathematical model of toothed labor body for soil treatment

A mathematical model that under certain conditions gives possibility to develop toothed body with such form of working surface, which will meet the agro-technical, technological and economic indices in soil was proposed. The equations that describe working body surface in the areas of depressions and protrusions was received.

Key words: toothed working body, treated soil, protrusions and depressions of the teeth, logarithmic spiral, parabola of the fourth-order mathematical model, matrix-vector solution.