

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Запорізький національний технічний університет

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять

з дисципліни

„ВАКУУМНА ТА ПЛАЗМОВА ЕЛЕКТРОНІКА“

для студентів спеціальності 6.050801

„Мікро- та наноелектроніка“

денної й заочної форм навчання

Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни „Вакуумна та плазмова електроніка“ для студентів спеціальності 6.050801 „Мікро- та наноелектроніка“ денної й заочної форм навчання / Укл.: А. В. Коротун, А. В. Бабіч, Н. І. Павлище. – Запоріжжя: ЗНТУ. – 2014. – 94 с.

Укладачі: А. В. Коротун, доц., канд. фіз.-мат. наук,
А. В. Бабіч, доц., канд. фіз.-мат. наук,
Н. І. Павлище, інженер I кат.

Рецензент: В. В. Погосов, проф., д-р фіз.-мат. наук

Відповідальний за випуск: Є.Л.Жавжаров, доц., канд.фіз.-мат. наук

Затверджено
на засіданні кафедри
мікро- та наноелектроніки
Протокол №2
від „18“ серпня 20 14 р.

ЗМІСТ

1 Фізика і техніка вакууму	4
1.1 Основні формули і визначення	4
1.1.1 Елементи кінетичної теорії та газові закони	4
1.1.2 Закон Дальтона	4
1.1.3 Явища переносу	7
1.1.4 Теоретичні основи процесу відкачування	8
1.1.5 Процеси зміни стану газу у вакуумних системах	9
1.1.6 Критерій визначення меж режимів протікання газу в трубопроводах	10
1.1.7 Пропускна здатність отворів	10
1.1.8 Перехідний режим протікання	12
1.1.2 Пропускна здатність трубопроводів	13
1.1.2.1 Молекулярний режим	13
1.1.2.2 В'язкісний режим	15
1.1.2.3 Вибір форвакуумного насосу для дифузійного насосу	16
1.2 Приклади розв'язування задач	17
1.3 Задачі для самостійного розв'язування	25
2 Рух заряджених частинок в електричних і магнітних полях	27
2.1 Основні формули та визначення	27
2.1.1 Рух електрона в однорідних полях	27
2.1.2 Однорідне магнітне поле	29
2.1.3 Рух електрона в схрещених полях	31
2.2 Приклади розв'язування задач	34
2.3 Задачі для самостійного розв'язування	44
3 Електронна і йонна оптика	48
3.1 Основні формули і визначення	48
3.1.1 Електростатична відхиляюча система	48
3.1.2 Керування за допомогою електронної оптики	51
3.1.3 Керування за допомогою магнітної оптики	59
3.2 Приклади розв'язування задач	64
3.3 Задачі для самостійного розв'язування	69
4 Електричний розряд у газах	72
4.1 Основні формули і визначення	72
4.1.1 Акти взаємодії частинок в газі	74
4.2 Приклади розв'язування задач	77
4.3 Задачі для самостійного розв'язування	84
Рекомендована література	90
Додаток А Параметри пружних зіткнень електронів і молекул газу	91
Додаток Б Ефективні перерізи іонізації атомів деяких парів і газів	92
Додаток В Потенціали йонізації і ефективні перерізи йонізації молекул і атомів деяких газів	93
Додаток Г Залежності тиску пари ртуті від температури.	94

1 ФІЗИКА І ТЕХНІКА ВАКУУМУ

1.1 Основні формули і визначення

1.1.1 Елементи кінетичної теорії та газові закони

Ідеальні гази підкоряються *рівнянню стану Менделєєва – Клапейрона*:

$$PV = Nk_B T, \quad (1.1)$$

де P – тиск газу; V – об'єм газу; N – кількість частинок газу в об'ємі, T – абсолютна температура; $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$ – стала Больцмана.

Загальна кількість молекул у ν молях дорівнює

$$N = \nu N_A, \quad (1.2)$$

де $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ – число Авогадро. Тому

$$PV = \nu RT, \quad (1.3)$$

де $R = N_A k_B = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ – універсальна газова стала.

Уведемо поняття *мольного об'єму*

$$v_\mu = \frac{V}{\nu}, \quad (1.4)$$

тоді рівняння (1.3) матиме вигляд:

$$P v_\mu = RT. \quad (1.5)$$

У багатьох випадках доречно представити рівняння (1.3) з використанням значення маси газу в явному вигляді:

$$PV = \frac{m_r}{M} RT, \quad (1.6)$$

де m_r – маса газу; $M = \frac{m_r}{\nu}$ – маса одного моля газу.

1.1.2 Закон Дальтона

Повний тиск суміші газів, які хімічно не взаємодіють, дорівнює сумі парціальних тисків окремих газів.

Парціальним тиском газу, який входить у суміш, називають тиск, під яким перебував би цей газ, якщо б із суміші були видалені всі інші гази, а об'єм і температура збереглись попередніми.

$$P_{\text{сум}} = P_1 + P_2 + \dots + P_n, \quad (1.7)$$

де $P_{\text{сум}}$ – повний тиск суміші; $P_1, P_2, \dots, P_n$ – парціальні тиски.

Кількість молекул в одиниці об'єму

$$n = \frac{P}{k_B T}. \quad (1.8)$$

Основне рівняння кінетичної теорії газів має вигляд:

$$P = \frac{2}{3} n \frac{mv^2}{2}, \quad (1.9)$$

де m – маса молекули; $\sqrt{v^2}$ – середня квадратична швидкість молекули.

При зіткненнях одна з одною або із стінками вакуумної камери молекули газу змінюють свої швидкості як за величиною, так і за напрямком, через що виникло поняття функції розподілу молекул за швидкостями, введене Максвеллом.

Закон розподілу молекул за швидкостями (закон Максвелла)

$$f(v) = \frac{dn_v}{ndV} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}}, \quad (1.10)$$

де dn_v – кількість молекул, швидкості яких обмежені від v до $v + dv$.

Найімовірніша швидкість – швидкість, за якої спостерігається максимум функції розподілу (рис. 1.1):

$$v_n = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}. \quad (1.11)$$

Якщо ввести позначення $u = \frac{v}{v_n}$, то (1.10) запишеться у вигляді

$$\frac{dn_v}{ndu} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 v^2 e^{-u^2}. \quad (1.12)$$

Середня квадратична швидкість молекули

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}. \quad (1.13)$$

Середня арифметична швидкість

$$v_a = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}. \quad (1.14)$$

Розподіл молекул за енергіями має вигляд (рис. 1.1)

$$\frac{dn_E}{ndE} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (k_B T)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{E}{k_B T}} \sqrt{E}, \quad (1.15)$$

де E – енергія поступального руху молекули; dn_E – кількість молекул, енергія яких лежить в інтервалі від E до $E + dE$.

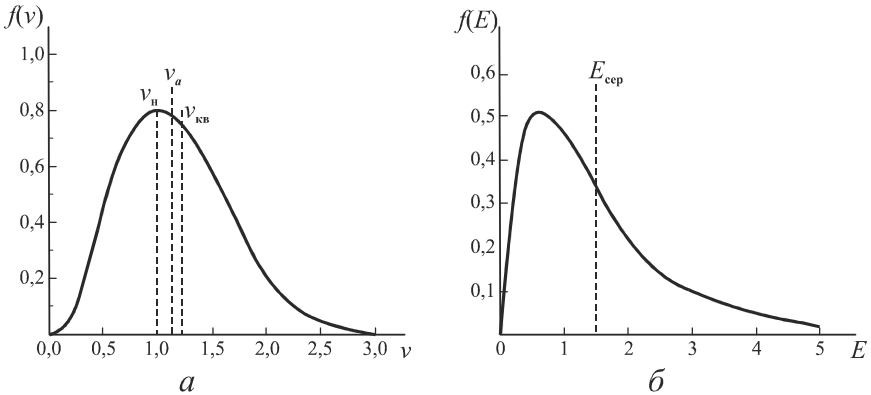


Рисунок 1.1 – Функції розподілу Максвелла за швидкостями (а) і за енергіями (б) у безрозмірних одиницях

Надалі ми будемо зазвичай користуватись середньою арифметичною швидкістю і лише при розрахунку кінетичної енергії – середньою квадратичною швидкістю.

Середня довжина вільного пробігу визначається як відстань, при проходженні якої частинка в середньому зштовхується з однією молекулою середовища. Зіткнення може виникати, якщо відстань між центрами молекул не більше діаметра молекули d (рис. 1.2.).

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma}, \quad \sigma = \pi d^2, \quad (1.16)$$

де σ – переріз зіткнення; d – ефективний діаметр молекули (рис. 1.2).

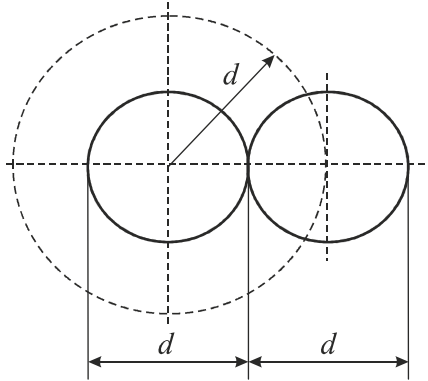


Рисунок 1.2 – Зіткнення двох однакових молекул

Середня довжина вільного пробігу молекули з урахуванням залежності перерізу зіткнення від температури:

$$\lambda_T = \frac{1}{\sqrt{2} n \sigma \left(1 + \frac{C}{T} \right)}, \quad (1.17)$$

де λ_T – середня довжина вільного пробігу при температурі T ;

C – стала Сезерленда.

Середня кількість молекул, які зіштовхуються із стінкою:

$$Z = \frac{1}{4} n v = \frac{P}{\sqrt{2 \pi m k_B T}}. \quad (1.18)$$

1.1.3 Явища переносу

Коефіцієнт динамічної в'язкості:

$$\eta = \frac{1}{3} n m v \lambda, \quad (1.19)$$

або

$$\eta = \frac{1}{3} \rho v \lambda, \quad (1.20)$$

де $\rho = n m$ – густина газу.

Коефіцієнт теплопровідності газу:

$$\kappa = \frac{1}{3} \rho v \lambda C_v, \quad (1.21)$$

де C_V – питома теплоємність газу.

Коефіцієнт самодифузії газів:

$$D = \frac{1}{3} \rho v \lambda. \quad (1.22)$$

Зв'язок між коефіцієнтами переносу:

$$\kappa = \eta C_V, \quad (1.23)$$

$$D = \frac{\eta}{\rho}. \quad (1.24)$$

Кількість молекул, які пройшли шлях x без зіткнень:

$$n = n_0 e^{-\frac{x}{\lambda}}. \quad (1.25)$$

Кількість молекул, середній пробіг яких обмежений x і $x + dx$:

$$dn = \frac{1}{\lambda} n_0 e^{-\frac{x}{\lambda}} dx. \quad (1.26)$$

1.1.4 Теоретичні основи процесу відкачування

Швидкістю відкачування посудини або ефективною швидкістю дії насосу називають об'єм газу, який поступає в одиницю часу із судини в трубопровід при даному тиску у відкачуваній судині.

Швидкістю дії насосу при даному впускному тиску називають об'єм газу, який поступає в працюючий насос в одиницю часу при цьому тискові.

Кількість газу, який протікає в одиницю часу в будь-якому перерізі трубопроводу, визначається як добуток тиску в цьому перерізі P_1 на об'єм газу S_1 , який проходить через нього в одиницю часу:

$$Q = P_1 S_1. \quad (1.27)$$

Потік газу, який протікає у вхідному перерізі вакуумного насосу, називають продуктивністю насосу при даному впускному тиску P_n

$$Q = P_n S_n. \quad (1.28)$$

Провідність трубопроводу (будь-якого елемента вакуумної системи) визначається як

$$U = \frac{Q}{P_1 - P_2}, \quad (1.29)$$

де U – провідність; Q – потік газу; $(P_1 - P_2)$ – різниця тисків на

кінцях трубопроводу.

Результуюча провідність послідовного з'єднання трубопроводів:

$$\frac{1}{U_{\text{посл}}} = \sum \frac{1}{U_i}. \quad (1.30)$$

Результуюча провідність паралельно з'єднаних трубопроводів:

Основне рівняння вакуумної техніки:

$$S_{\text{еф}} = \frac{S_{\text{н}} U}{S_{\text{н}} + U}, \quad (1.31)$$

де $S_{\text{еф}}$ – ефективна швидкість дії наносу (швидкість відкачування судини); $S_{\text{н}}$ – швидкість дії наносу; U – провідність трубопроводу.

1.1.5 Процеси зміни стану газу у вакуумних системах

Адіабатичний процес

$$PV^x = \text{const}, \quad (1.32)$$

де $x = \frac{C_{P, \text{пит}}}{C_{V, \text{пит}}}$ – показник адіабати; $C_{P, \text{пит}}$, $C_{V, \text{пит}}$ – питомі тепло-

ємності газу відповідно при постійному тиску і об'ємі.

Температура, густина газу і тиск при адіабатичному розширенні взаємопов'язані наступним співвідношенням:

$$\begin{aligned} \frac{T_1}{T_2} &= \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{x-1}; \quad \frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^x, \\ \frac{T_1}{T_2} &= \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^{x-1}; \quad \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{(x-1)}{x}}, \end{aligned} \quad (1.33)$$

де індекси 1 і 2 відповідають початковим і кінцевим значенням відповідних параметрів.

Для одноатомного газу $x = \frac{5}{3}$, для двоатомного $x = \frac{7}{5}$, для бага-

тоатомного $x = \frac{4}{3}$.

На практиці зазвичай мають справу з проміжним процесів, коли між газом і стінками є неповний теплообмін. У цьому разі стан газу описують рівнянням

$$PV^n = \text{const}, \quad (1.34)$$

де n – показник політропи: $1 < n < \chi$.

1.1.6 Критерій визначення меж режимів протікання газу в трубопроводах

Режим протікання газу в трубопроводі визначають співвідношенням середньої довжини вільного пробігу молекул газу з діаметром трубопроводу.

Для повітря при $T = 293 \text{ K}$

$$\lambda = \frac{5 \cdot 10^{-5}}{P} \text{ (м)}, \quad (1.35)$$

де P – тиск в мм рт.ст.

В'язкісний режим: $Pd > 0,666 \text{ Па}\cdot\text{м}$.

Молекулярний режим: $Pd < 0,02 \text{ Па}\cdot\text{м}$.

Молекулярно-в'язкісний режим: $0,02 < Pd < 0,666 \text{ Па}\cdot\text{м}$.

1.1.7 Пропускна здатність отворів

Розглянемо *молекулярний режим протікання газу*. *Отвором* називають канал, у якого товщина стінок набагато менше діаметра. Якщо поверхня, в якій є отвір, не нескінченна, а має обмежену площу S_0 , то провідність отвору S збільшується із зменшенням $\frac{S_0}{S}$.

У випадку циліндричного резервуара з отвором в основі циліндра (рис. 1.3) збільшення провідності отвору викликано деякою мірою фокусуючою дією циліндра на молекули, що рухаються в резервуарі у напрямку отвору S .

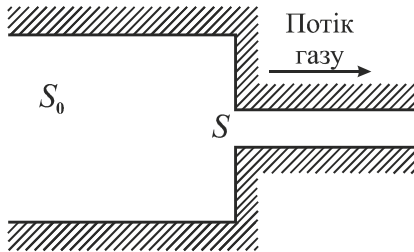


Рисунок 1.3 – Циліндричний резервуар з отвором в основі циліндра

Якщо відношення $\frac{S_0}{S} < 1$, то площу отвору S замінюють на ефективну площу S' , і такий отвір називають великим:

$$S' = \frac{S}{1 - \frac{S}{S_0}}. \quad (1.36)$$

З цією поправкою можна не рахуватися, якщо відношення $\frac{S_0}{S}$ значно менше одиниці (разів у 10). Навпаки, коли це відношення дорівнює 1, провідність отвору стає рівною нескінченності, тобто в цьому крайньому разі отвір вже не виправдовує свою назву і перестає відігравати роль окремого елемента трубопроводу.

Провідність малого отвору

$$U = 36,4S\sqrt{\frac{T}{M}} \quad (1.37)$$

або для повітря при 293 К

$$U = 116S.$$

Провідність великого отвору

$$U = 36,4S\sqrt{\frac{T}{M}} \frac{S}{1 - \frac{S}{S_0}} \quad (1.38)$$

або для повітря при 293 К

$$U = 116 \frac{S}{1 - \frac{S}{S_0}}.$$

Розглянемо **в'язкісний режим протікання газу**. Провідність отвору у в'язкісному режимі протікання залежить від перепаду тиску

$\tau = \frac{P_1}{P_2}$, де P_1 - тиск у судині, із якої витікає газ.

Провідність малого отвору: із зменшенням тиску $\tau \leq 1$ провідність зростає до певного значення, відповідного критичному відношенню

$$\tau_{кр} = \left(\frac{2}{x+1} \right)^{\frac{x}{x-1}}. \quad (1.39)$$

Для одноатомного газу $\tau_{кр}=0,437$; для двоатомного газу і повітря $\tau_{кр}=0,528$; для багатоатомного газу $\tau_{кр}=0,526$.

При відношеннях тиску $\frac{P}{P_2} < \tau_{кр}$ кількість газу, який перетікає, залишається незмінною. При $\tau > \tau_{кр}$ провідність отвору визначається виразом

$$U = S \frac{\tau^{\frac{1}{x}}}{1-\tau} \sqrt{\left(1 - \tau^{\frac{x-1}{x}} \right) \frac{2x}{x-1} \frac{RT}{M}}. \quad (1.40)$$

Для повітря ($M = 29 \frac{\Gamma}{\text{моль}}$) і кімнатної температури ($T = 293 \text{ K}$):

$$- \text{при } 0,528 \leq \tau < 1 \quad U = 766 \tau^{0,714} \frac{S}{1-\tau} \sqrt{1 - \tau^{0,286}}, \quad (1.41)$$

$$- \text{при } \tau < 0,528 \quad U = 200 \frac{S}{1-\tau}. \quad (1.42)$$

$$- \text{при } \tau < 0,1 \quad U = 200S. \quad (1.43)$$

Провідність більшого отвору визначається за формулами для провідності малого отвору із врахуванням поправочного коефіцієнта

$$\frac{S}{1 - \frac{S}{S_0}}.$$

1.1.8 Перехідний режим протікання

У разі перехідного молекулярно-в'язкісного режиму зручного розрахунку для пропускної здатності не існує. Користуються зазвичай формулою, запропонованою Кнудсенем:

$$U = U_{\text{в}} + bU_{\text{м}}, \quad (1.44)$$

де b - коефіцієнт, який враховує середній тиск у трубопроводі

$$b = \frac{1 + DP_{\text{сер}} \frac{\sqrt{\frac{M}{RT}}}{\eta}}{1 + 1,24 DP_{\text{сер}} \frac{\sqrt{\frac{M}{RT}}}{\eta}}, \quad (1.45)$$

де $P_{\text{сер}} = \frac{P_1 + P_2}{2}$ – середнє значення тиску.

Для повітря при $T = 293 \text{ K}$:

$$b = \frac{1 + 1,25 \left(\frac{D}{\lambda} \right)}{1 + 1,55 \left(\frac{D}{\lambda} \right)}. \quad (1.46)$$

У широкому діапазоні тисків коефіцієнт b змінюється від 0,8 до 1,0. Для технічних розрахунків середнє значення $b = 0,9$ може бути прийнято постійним.

1.1.2 Пропускна здатність трубопроводів

1.1.2.1 Молекулярний режим

Провідність довгого ($l > 20D$) прямолінійного циліндричного трубопроводу має вигляд

$$U = 38,1 \frac{D^3}{l} \sqrt{\frac{T}{M}}. \quad (1.47)$$

Для повітря при $T = 293 \text{ K}$:

$$U = 121 \frac{D^3}{l}. \quad (1.48)$$

Розглянемо провідність короткого трубопроводу. Із вищенаведених формул для провідності довгого трубопроводу виходить, що із зменшенням довжини каналу його провідність зростає, і при $l = 0$ має прямувати до нескінченності. Природно, що це неможливо, оскільки залишається отвір, провідність якого кінцева

$$\frac{1}{U_{\text{кор}}} = \frac{1}{U_{\text{довг}}} + \frac{1}{U_{\text{отв}}}. \quad (1.49)$$

Більш точні результати отримують при використанні **формули Клаузінга**, яка враховує опір вхідного отвору:

$$U = 36,4SK \sqrt{\frac{T}{M}}, \quad (1.50)$$

де K – поправочний множник, який є функцією відношення $\frac{l}{D}$ (табл. 1.1).

Таблиця 1.1 – Поправочний коефіцієнт K у рівнянні (1.50)

$\frac{l}{D}$	K	$\frac{l}{D}$	K	$\frac{l}{D}$	K
0	1	0,85	0,5518	4,0	0,2316
0,05	0,9524	0,90	0,5384	4,5	0,2131
0,10	0,9092	0,95	0,5256	5,0	0,1973
0,15	0,8699	1,00	0,5136	6,0	0,1719
0,20	0,8341	1,1	0,4914	7,0	0,1523
0,25	0,8013	1,2	0,4711	8,0	0,1367
0,30	0,7711	1,3	0,4527	9,0	0,1240
0,35	0,7434	1,4	0,4359	10,0	0,1135
0,40	0,7177	1,5	0,4205	15	0,0997
0,45	0,6940	1,6	0,4062	20	0,0613
0,50	0,6720	1,7	0,3931	25	0,0499
0,55	0,6514	1,8	0,3809	30	0,0420
0,60	0,6320	1,9	0,3695	35	0,0363
0,65	0,6139	2,00	0,3589	40	0,0319
0,70	0,5970	2,5	0,3146	45	0,0285
0,75	0,5810	3,0	0,2807	50	0,0258
0,80	0,5659	3,5	0,2537	500	0,002658
				Понад 500	$\frac{4}{3} \frac{d}{l}$

Для повітря при $T = 293 \text{ K}$:

$$U_{\text{кор}} = 36,4SK. \quad (1.51)$$

У разі коротких трубок поправка не має застосовуватись, якщо еле-

мент трубопроводу попереду трубки має діаметр, рівний діаметру трубки або менший за нього.

Вплив локального опору при молекулярному режимі протікання газу враховують деяким збільшенням розрахункової довжини трубопроводу проти фактичної. Так, вплив вигину трубопроводу під кутом 90° враховується подовженням трубопроводу на $1,33$ діаметра, тобто:

$$l_{\text{розр}} = l_{\text{факт}} + 1,33Dn, \quad (1.52)$$

де n – кількість вигинів під кутом 90° .

1.1.2.2 В'язкісний режим

Провідність циліндричного довгого трубопроводу ($l > 20D$) круглого перерізу:

$$U = \frac{\pi R^4 P_{\text{сер}}}{8\eta l}, \quad (1.53)$$

де R – радіус трубопроводу; η – динамічна в'язкість;

$$P_{\text{сер}} = \frac{P_1 + P_2}{2} \text{ – середнє значення тиску в трубопроводі.}$$

Для повітря при $T=293$ К:

$$U = 1360 \frac{D^4 P_{\text{сер}}}{l}. \quad (1.54)$$

Провідність трубопроводу при протіканні по ньому будь-якого газу визначають за формулою:

$$U_1 = \beta_1 U, \quad (1.55)$$

де U – провідність трубопроводу при протіканні по ньому повітря; β – коефіцієнт, що враховує різницю динамічних в'язкостей досліджуваного газу η_1 і повітря η (табл. 1.2):

$$\beta_1 = \frac{\eta_1}{\eta} = \left(\frac{\sigma}{\sigma_1} \right)^2 \sqrt{\frac{M_1}{M}}, \quad (1.56)$$

де σ , σ_1 – діаметри молекул повітря і досліджуваного газу;
 M , M_1 – молекулярна маса повітря і досліджуваного газу.

Таблиця 1.2 – Значення β_1 для деяких газів

Газ	Повітря	H ₂	He	H ₂ O	Ne	N ₂	O ₂	Ar	CO ₂
β_1	1	2,06	0,93	1,94	0,58	1,04	0,9	0,84	1,24

Провідність коротких трубопроводів ($l < 20D$) визначають за емпіричними залежностями

$$U = \frac{\pi D^4 P_{\text{сер}}}{128 \eta l \left[1 + 4,54 \cdot 10^{-2} \frac{MC}{1 + 0,03 \cdot Q/l} \right]} \quad (1.57)$$

Для повітря при $T = 293 \text{ K}$:

$$U = 1360 \frac{P_{\text{сер}}}{l} \frac{D}{1 + 1 + 0,03 \left(\frac{Q}{l} \right)} \quad (1.58)$$

Якщо потік Q невідомий, то в це рівняння підставляють довільне значення Q і розрахунок ведуть методом послідовних наближень до тих пір, поки різниця між прийнятим значенням і значенням $Q = U \Delta P$ не стане меншою за задану точність розрахунку.

Протікання газу в перехідному режимі описують в основній емпіричній залежності для вузьких діапазонів λ/D .

Провідність довгого циліндричного трубопроводу ($l > 20D$) визначають за емпіричними залежностями (1.44).

Провідність коротких трубопроводів ($l < 20D$) при молекулярно-в'язкісному режимі слід розраховувати за формулою (1.44), підставляючи в неї значення провідності досліджуваного короткого трубопроводу, розраховані відповідно рекомендаціям для в'язкісного і молекулярного режимів протікання газу.

1.1.2.3 Вибір форвакуумного насосу для дифузійного насосу

Параметри форвакуумного насосу, відповідного даному дифузійному насосу, визначають, виходячи із рівняння нерозривності протікання газу

$$P_p S_p = P_{\text{дифуз}} S_{\text{дифуз}} \quad (1.59)$$

де P_p – тиск на вході ротаційного насосу (тобто на виході дифузійного насосу або тиску форвакууму P_0); $P_{\text{дифуз}}$ – тиск на вході в дифузійний насос (або ж робочий тиск P).

Для надійності в роботі має виконуватись нерівність

$$P_0 S_p = P S_{\text{дифуз}} \quad (1.60)$$

Оскільки S_p і $S_{\text{дифуз}}$ є функціями тиску, то умова (1.59) має виконуватися навіть в більш несприятливому разі, а саме

$$P_{0\min} S_{p\min} = P_{\max} S_{\text{дифуз}\max}, \quad (1.61)$$

де $P_{\max}$ – максимальний робочий тиск дифузійного насосу; $P_{0\min}$ – мінімальний тиск форвакууму; $S_{\text{дифуз}\max}$ – максимальна швидкість відкачування дифузійного насосу; $S_{p\min}$ – швидкість відкачування ротаційного насосу при $P_{0\min}$.

В умові (1.59) враховано деякий запас, пов'язаний із тим, що $P_{\max}$ і $S_{\text{дифуз}\max}$ не мають місця одночасно.

Отже, швидкість відкачування форвакуумного насосу має визначатися з умови:

$$S_{p\min} > \frac{P_{\max}}{P_{0\min}} S_{0\max}. \quad (1.62)$$

1.2 Приклади розв'язування задач

1.2.1 Яку максимальну концентрацію молекул CO_2 , газокінетичний діаметр яких $d=3,2 \cdot 10^{-10}$ м, можна утворити в сферичній посудині з $D=1$ м, щоб середня довжина вільного пробігу перевищувала діаметр?

Розв'язання

За умовою задачі $\lambda \geq D$. Середня довжина вільного пробігу, згідно (1.16),

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n},$$

тому

$$\frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n_{\max}} \geq D.$$

Звідси отримуємо

$$n_{\max} \leq \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 D} = \frac{1}{1,41 \cdot 3,14 \cdot (3,2 \cdot 10^{-10})^2 \cdot 1} = 2,3 \cdot 10^{18} \text{ м}^{-3}.$$

Відповідь: $n_{\max} = 2,3 \cdot 10^{18} \text{ м}^{-3}$.

1.2.2 Чому дорівнює середня квадратична швидкість молекул ідеального газу, який підлягає розподілу Максвелла?

Розв'язання

Середня квадратична швидкість за означенням

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\overline{v^2}},$$

де $\overline{v^2}$ – середнє значення квадрата швидкості, яке дорівнює

$$\overline{v^2} = \frac{1}{N_0} \int_0^\infty v^2 dN(v) = \frac{1}{N_0} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{N_0}{\alpha^3} \int_0^\infty v^4 e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} dv = \frac{3}{2} \alpha^2,$$

де $\alpha^2 = \frac{2k_B T}{m}$, звідки

$$v_{\text{кв}} = \alpha \sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{2k_B T}{m} \frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}.$$

Відповідь: $v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}.$

1.2.3 Вважаючи, що газокінетичний діаметр молекули CO_2 $d=3,2 \cdot 10^{-10}$ м, визначте середню довжину її вільного пробігу за температури 50°C і тиску $133,3$ Па.

Розв'язання

З основного рівняння молекулярно-кінетичної теорії маємо

$$n = \frac{p}{k_B T}, \text{ тоді середня довжина вільного пробігу, згідно з (1.16),}$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} = \frac{k_B T}{\sqrt{2}\pi d^2 p} = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 323}{1,41 \cdot 3,14 \cdot (3,2 \cdot 10^{-10})^2 \cdot 133,3} = 7,4 \cdot 10^{-5} \text{ м}.$$

Відповідь: $\lambda = 7,4 \cdot 10^{-5} \text{ м}.$

1.2.4 Знайдіть середню частоту зіткнень в умовах прикладу 1.2.3, вважаючи, що середня швидкість приблизно дорівнює середньоквадратичній.

Розв'язання

Оскільки при вказаній умові $\overline{v^2} \simeq \frac{k_B T}{m}$, то для частоти зіткнень

ν знаходимо

$$v = \sqrt{\frac{v^2}{\lambda^2}} \approx \sqrt{\frac{k_B T}{m} \frac{1}{\lambda^2}} \approx \sqrt{\frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 323}{44 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot (7,4 \cdot 10^{-5})^2}} \approx 4 \cdot 10^4 \text{ c}^{-1}$$

Відповідь: $v = 4 \cdot 10^4 \text{ c}^{-1}$.

1.2.5 Чому дорівнює середня арифметична швидкість молекул ідеального газу, який підлягає розподілу Максвелла?

Розв'язання

Згідно означення середня арифметична швидкість

$$v_a = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} v dN(v) = \int_0^{\infty} v f(v) dv, \quad (1)$$

де N – повна кількість молекул газу; $dN(v)$ – кількість молекул, швидкість яких знаходиться в інтервалі $(v, v + dv)$; $f(v)$ – функція розподілу молекул за модулем швидкості.

Підставляючи $f(v)$ в (1), матимемо

$$v_a = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} v^3 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} dv. \quad (2)$$

Уводячи позначення $\frac{mv^2}{2k_B T} \equiv x$, $dv = \frac{k_B T}{mv} dx$, з (2) отримаємо

$$v_a = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{2k_B T}{m} \frac{k_B T}{m} \int_0^{\infty} x e^{-x} dx = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}.$$

Відповідь: $v_a = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}$.

1.2.6 Дві посудини A і B , що містять повітря, з'єднані між собою капіляром із краном. Посудина A занурена у водяну ванну з температурою $t_1 = 100^\circ \text{C}$, а посудина B – в охолоджуючу суміш з температурою $t_2 = -20^\circ \text{C}$. Об'єм посудини A дорівнює 250 cm^3 , а посудини B – 400 cm^3 . Спочатку при закритому крані і роз'єднаних посудинах тиск повітря в посудинах A і B дорівнював відповідно

$P_1 = 0,5 \cdot 10^5$ Па і $P_2 = 0,2 \cdot 10^5$ Па . Знайдіть тиск повітря, який встановиться в посудинах після того, як відкриють кран.

Розв'язання

Після того, як відкрили кран, тиск повітря в посудинах A і B буде однаковий і рівний P . Оскільки температури повітря в посудинах A і B різні, то деяка частина газу перейде з однієї посудини в іншу. Нехай v_1 і v_2 – число молів повітря в посудинах A і B до їх з'єднання, а v'_1 і v'_2 – після їх з'єднання. Запишемо рівняння стану для повітря в посудинах A і B до і після їх з'єднання:

$$P_1 V_1 = v_1 R T_1, \quad P_2 V_2 = v_2 R T_2, \quad P V_1 = v'_1 R T_1, \quad P V_2 = v'_2 R T_2.$$

$$\text{Звідси маємо } v_1 + v_2 = \frac{1}{R} \left(\frac{P_1 V_1}{T_1} + \frac{P_2 V_2}{T_2} \right), \quad v'_1 + v'_2 = \frac{P}{R} \left(\frac{V_1}{T_1} + \frac{V_2}{T_2} \right).$$

Загальна кількість повітря в посудинах є сталою, тобто

$$v_1 + v_2 = v'_1 + v'_2.$$

Тому остаточно маємо

$$P = \frac{P_1 V_1 T_2 + P_2 V_2 T_1}{V_1 T_2 + V_2 T_1} = \frac{0,5 \cdot 10^5 \cdot 2,5 \cdot 10^{-4} \cdot 253 + 0,2 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot 373}{2,5 \cdot 10^{-4} \cdot 253 + 4 \cdot 10^{-4} \cdot 373} = 0,3 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Відповідь: $P = 0,3 \cdot 10^5$ Па .

1.2.7 Коефіцієнт внутрішнього тертя азоту (N_2) за температури

0°C дорівнює $\eta = 1,68 \cdot 10^{-4} \frac{\text{Г}}{\text{см} \cdot \text{с}}$. Визначте значення середньої довжини вільного пробігу молекул азоту за нормального тиску.

Розв'язання

Середня довжина вільного пробігу пов'язана з коефіцієнтом внутрішнього тертя співвідношенням (1.20):

$$\eta = \frac{1}{3} \rho v \lambda, \quad (1)$$

$$\text{де } v = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \text{ – середня арифметична швидкість молекул;} \quad (2)$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi d^2 n}} \quad - \text{середня довжина вільного пробігу}; \quad (3)$$

ρ – густина газу при заданих умовах.

З рівняння Менделєєва – Клапейрона

$$\rho = \frac{MP}{RT}. \quad (4)$$

Враховуючи співвідношення (2) – (4), з (1) отримаємо

$$\lambda = \frac{3\eta}{\nu\rho} = \frac{3\eta}{P} \sqrt{\frac{\pi RT}{8M}} = \frac{3 \cdot 1,68 \cdot 10^{-5}}{1,013 \cdot 10^5} \cdot \sqrt{\frac{3,14 \cdot 8,31 \cdot 273}{8 \cdot 0,028}} = 7,5 \cdot 10^{-8} \text{ м.}$$

Відповідь: $\lambda = 7,5 \cdot 10^{-8} \text{ м.}$

1.2.8 Коефіцієнт дифузії водню (H_2) за нормальних умов $D = 1,31 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$. Визначте коефіцієнт внутрішнього тертя водню за цих умов.

Розв'язання

З виразів для коефіцієнтів дифузії та внутрішнього тертя:

$$D = \frac{1}{3} \rho \nu \lambda, \quad \eta = \frac{1}{3} \rho \nu \lambda \quad (1)$$

$$\text{Випливає} \quad \eta = D \rho, \quad (2)$$

$$\text{де} \quad \rho = \frac{MP}{RT}. \quad (3)$$

Підставляючи (3) в (2), маємо

$$\eta = D \frac{MP}{RT} = 1,34 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{0,002 \cdot 1,013 \cdot 10^5}{8,31 \cdot 273} = 1,74 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}.$$

Відповідь: $\eta = 1,74 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}.$

1.2.9 Повітря в посудині об'ємом V відкачують за допомогою насоса зі швидкістю C , яка не залежить від тиску. Початковий тиск повітря в посудині дорівнює P_0 . Вважаючи процес відкачування ізо-термічним, знайдіть швидкість відкачування як функцію часу.

Розв'язання

Швидкістю відкачування називатимемо об'єм газу, який відкачує насос за одиницю часу, причому цей об'єм вимірюється за тиску, існуючому в цей момент. За умовою задачі

$$C = \frac{dV}{dt} = \text{const.} \quad (1)$$

Виразимо зміну об'єму dV газу через dP . Оскільки процес відкачування ізотермічний, то

$$PdV + VdP = 0,$$

звідки

$$dV = -\frac{V}{P} dP. \quad (2)$$

Підставляючи (2) в (1), отримаємо

$$C = -\frac{V}{P} \frac{dP}{dt},$$

або

$$\frac{dP}{P} = -\frac{C}{V} dt. \quad (3)$$

За умовою задачі в початковий момент часу $t = 0$ тиск повітря в посудині дорівнює P_0 , а в момент часу t він становить P . Інтегруючи вираз (3), знаходимо швидкість відкачування

$$\int_{P_0}^P \frac{dP}{P} = -\frac{C}{V} \int_0^t dt,$$

звідки

$$C = \frac{V}{t} \ln \frac{P_0}{P}.$$

Відповідь: $C = \frac{V}{t} \ln \frac{P_0}{P}.$

1.2.10 Визначте пропускну здатність трубки, що має розміри $D = 3$ мм та $l = 150$ мм, при тиску у відкачуваному приладі 10 мм рт. ст. Газ – повітря за температури 27°C .

Розв'язання

Пропускна здатність довгої ($l > 20D$) циліндричної трубки для в'язкісного режиму, оскільки

$$Pd = 1333,2 \cdot 0,003 = 4 \text{ Па} \cdot \text{м} > 0,666 \text{ Па} \cdot \text{м},$$

визначається виразом (1.47):

$$U = 38,1 \frac{D^3}{l} \sqrt{\frac{T}{M}}.$$

Тому

$$U = 38,1 \cdot \frac{(3 \cdot 10^{-3})^3}{0,15} \cdot \sqrt{\frac{300}{0,029}} = 6,97 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}^3}{\text{с}}.$$

$$\text{Відповідь: } U = 6,97 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}^3}{\text{с}}.$$

1.2.11 Визначте пропускну здатність трубопроводу довжиною 0,8 м і діаметром 0,3 м при середньому тиску в ньому $P_{\text{сер}} = 10 \text{ Па}$. Газ, що відкачується, – повітря за $T = 293 \text{ К}$.

Розв'язання

Внаслідок того, що $Pd = 10 \cdot 0,3 = 3 \text{ Па} \cdot \text{м} > 0,666 \text{ Па} \cdot \text{м}$ – режим течії в'язкісний.

Для повітря при $T = 293 \text{ К}$ провідність

$$U = 36,4SK,$$

де коефіцієнт $K = 0,31$ при $\frac{l}{d} = \frac{0,8}{0,3} \approx 2,66$. Тому

$$U = 36,4 \cdot 0,31 \cdot \frac{3,14}{4} \cdot (0,3)^2 = 0,8 \frac{\text{м}^3}{\text{с}}.$$

$$\text{Відповідь: } U = 0,8 \frac{\text{м}^3}{\text{с}}.$$

1.2.12 Визначте провідність трубопроводу за повітрям при 293 К діаметром $d = 40 \text{ мм}$ і довжиною 1 м при тисках на його кінцях $P_1 = 2003 \text{ Па}$ і $P_2 = 2000 \text{ Па}$.

Розв'язання

Для визначення режиму течії газу розрахуємо добуток середнього тиску на діаметр трубопроводу:

$$P_{\text{сер}} d = \frac{P_1 + P_2}{2} d = \frac{2003 + 2000}{2} \cdot 0,04 = 80,12 \text{ Па} \cdot \text{м},$$

тому режим течії є в'язкісним.

Провідність трубопроводу для повітря при 293 К визначається формулою (1.53):

$$U_1 = \frac{\pi R^4 P_{\text{ср}}}{8\eta l} = \frac{\pi}{128\eta} \frac{d^4}{l} \frac{P_1 + P_2}{2} = 1,36 \cdot 10^3 \cdot \frac{(4 \cdot 10^{-2})^4}{1} \cdot \frac{2003 + 2000}{2} =$$

$$= 6,97 \frac{\text{М}^3}{\text{с}}.$$

Потік повітря в трубопроводі

$$Q = U_1 (P_1 - P_2) = 6,97 \cdot (2003 - 2000) = 20,91 \frac{\text{Па} \cdot \text{М}^3}{\text{с}}.$$

$$\text{Число Рейнольдса } Re = \frac{4m_0}{\pi k_B T \eta} \frac{Q}{d},$$

де для повітря $m_0 = 4,811 \cdot 10^{-26}$ кг, $\eta = 1,808 \cdot 10^{-5}$ Па · с, тому

$$Re = \frac{4 \cdot 4,811 \cdot 10^{-26}}{3,14 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 293 \cdot 1,808 \cdot 10^{-5}} \cdot \frac{20,91}{4 \cdot 10^{-2}} = 604,5.$$

Внаслідок того, що $Re < 2200$, режим течії – в'язкісний. Знаходимо добуток

$$0,029d Re = 0,029 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 604,5 = 0,7 \text{ м}.$$

Для розрахунку провідності для в'язкісного режиму течії скористаємось формулою (повітря при 293 К):

$$U_2 = \frac{0,68 \cdot 10^3 d^4 (P_1 + P_2)}{l \left(1 + 2,15 \cdot 10^{-3} \frac{Q}{l} \right)} = \frac{0,68 \cdot 10^3 \cdot (4 \cdot 10^{-2})^4 \cdot (2003 + 2000)}{1 \cdot \left(1 + 2,15 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{20,91}{1} \right)} = 6,66 \frac{\text{М}^3}{\text{с}}.$$

Внаслідок того, що різниця між U_1 та U_2 складає менше, ніж 10%, то приймаємо $U = 6,66 \frac{\text{М}^3}{\text{с}}.$

$$\text{Відповідь: } U = 6,66 \frac{\text{М}^3}{\text{с}}.$$

1.3 Задачі для самостійного розв'язування

1.3.1 Знайдіть середню арифметичну, середню квадратичну і найбільш ймовірну швидкості молекул газу, густина якого за тиску 300 мм рт.ст. дорівнює $\rho = 0,3$ г/л.

1.3.2 За якої температури середня квадратична швидкість молекул азоту більше їхньої найбільш ймовірної швидкості на 50 м/с?

1.3.3 Середня енергія молекул гелію дорівнює $3,92 \cdot 10^{-21}$ Дж. Визначте середню швидкість молекул гелію.

1.3.4 Скільки молекул зіштовхується за 1 с із 1 м^2 стінки посудини, в якій міститься азот при тиску 1 атм і температурі 20°C ?

1.3.5 У сферичній посудині з внутрішнім радіусом 5 см міститься водень при температурі 300 К і тиску 10^5 Па. Скільки молекул ударяється об стінку за 1 с?

1.3.6 Яким може бути найменший об'єм балона, що вміщує 6,4 кг кисню, якщо його стінки при 20°C витримують тиск у $160 \text{ кг} \cdot \text{с} / \text{см}^2$?

1.3.7 У посудині перебуває 14 г азоту і 9 г водню за температури 10°C і тиску 10^6 Па. Розрахуйте об'єм посудини і масу одного кіломоля суміші.

1.3.8 Знайдіть середню квадратичну швидкість молекул повітря при 17°C , вважаючи повітря однорідним газом, маса одного кіломоля якого дорівнює 29 кг/моль.

1.3.9 Визначте середню довжину вільного пробігу молекул повітря за нормальних умов. Діаметр молекули повітря $3 \cdot 10^{-8}$ см.

1.3.10 Знайдіть середню кількість зіткнень за 1 с молекул CO_2 при 100°C , якщо середня довжина вільного пробігу за цих умов дорівнює $8,7 \cdot 10^{-2}$ см.

1.3.11 Знайдіть коефіцієнт дифузії водню. За нормальних умов, якщо середня довжина вільного пробігу молекул за цих умов дорівнює $1,6 \cdot 10^{-7}$ см.

1.3.12 Знайдіть кількість азоту, який проник внаслідок дифузії через площадку 100 см^2 за 10 с, якщо градієнт густини в напрямку, перпендикулярному до площадки, дорівнює $1,26 \text{ кг} / \text{м}^4$. Температура азоту 27°C ; середня довжина вільного пробігу молекул азоту 10^{-5} см.

1.3.13 При якому тиску відношення коефіцієнта внутрішнього тертя деякого газу до коефіцієнту його дифузії дорівнює $0,3 \text{ г/л}$, а середня квадратична швидкість його молекул дорівнює 620 м/с ?

1.3.14 Знайдіть середню довжину вільного пробігу молекул гелію при 0°C і тиску 760 мм рт. ст. , якщо за цих умов коефіцієнт внутрішнього тертя для нього дорівнює $1,3 \cdot 10^{-4} \text{ г/см}\cdot\text{с}$.

1.3.15 Знайдіть діаметр молекули кисню, якщо відомо, що для кисню коефіцієнт внутрішнього тертя при 0°C дорівнює $1,8 \cdot 10^{-6} \text{ Па}\cdot\text{с}$.

1.3.16 Знайдіть коефіцієнт внутрішнього тертя азоту за нормальних умов, якщо коефіцієнт дифузії для нього за цих умов дорівнює $0,142 \text{ см}^2/\text{с}$.

1.3.17 Знайдіть коефіцієнт дифузії і коефіцієнт внутрішнього тертя повітря при тиску 760 мм рт.ст. і температурі 10°C . Діаметр молекули повітря $3 \cdot 10^{-8} \text{ см}$.

1.3.18 Коефіцієнти дифузії і внутрішнього тертя водню за деяких умов рівні, відповідно $1,42 \text{ см}^2/\text{с}$ і $8,5 \cdot 10^{-6} \text{ Н}\cdot\text{с}/\text{м}^2$. Знайдіть кількість молекул водню в 1 м^3 за цих умов.

1.3.19 Відстань між нагрітою і холодною поверхнями 10 мм , тиск газу 750 мм рт.ст. Як зміниться коефіцієнт теплопровідності газу, якщо тиск знизиться до 375 мм рт.ст. ? Газ – повітря.

1.3.20 Відстань між стінками дьюарівської посудини дорівнює 8 мм . При якому тиску теплопровідність повітря, яке перебуває між стінками судини, почне зменшуватись при відкачуванні? Температура повітря 17°C ; діаметр молекули повітря $3 \cdot 10^{-8} \text{ см}$.

1.3.21 Знайдіть коефіцієнт теплопровідності водню, якщо відомо, що коефіцієнт внутрішнього тертя для нього за цих умов дорівнює $8,5 \cdot 10^{-6} \text{ Н}\cdot\text{с}/\text{м}^2$.

1.3.22 Знайдіть коефіцієнт теплопровідності повітря за температурі 10°C і тиску $10^5 \text{ Н}/\text{см}^2$. Діаметр молекули повітря $3 \cdot 10^{-8} \text{ см}$.

1.3.23 Визначте пропускну здатність трубки, що має розміри $d = 2,4 \text{ мм}$ та $L = 100 \text{ мм}$, при тиску у відкачуваному приладі $0,02$; 2 ; 5 і $12,5 \text{ мм рт.ст.}$ Газ – повітря за температури 20°C .

1.3.24 Визначте пропускну здатність трубки довжиною 1 м і діаметром 40 мм при тисках на кінцях трубопроводу $P_1 = 1500 \text{ Па}$ і $P_2 = 1530 \text{ Па}$. Відкачуваний газ – повітря при $T = 293 \text{ К}$.

1.3.25 Визначте провідність трубопроводу довжиною 0,8 м і діаметром 0,3 м при середньому тиску в ньому $P_{\text{сер}}=10$ Па. Відкачуваний газ – повітря при $T=293$ К.

1.3.26 Розрахуйте тривалість відкачування робочої камери технологічної установки об'ємом 50 л від атмосферного тиску до 5 Па. Швидкість дії насосу $S_H=5$ л/с і не залежить від тиску. Граничний тиск насоса $P_{\text{гр}}=0,1$ Па.

2 РУХ ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК В ЕЛЕКТРИЧНИХ І МАГНІТНИХ ПОЛЯХ

2.1 Основні формули та визначення

2.1.1 Рух електрона в однорідних полях

Розглянемо класичну задачу про рух електрона в однорідному електричному полі, у якого величина і напрям вектору напруженості у всіх точках континуального середовища сталі (рис. 2.1).

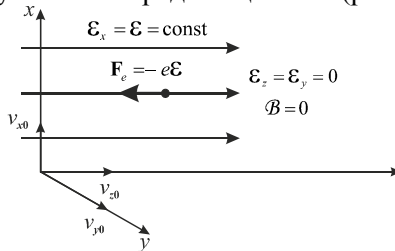


Рисунок 2.1 – Рух електрона в однорідному електричному полі

Силу, що діє на електрон в електростатичному полі, визначають тільки напруженістю поля в даній точці і не залежить від її швидкості.

Задамо початкові умови: при $t = 0$, $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, v_{0x} , v_{0y} , v_{0z} – задані величини.

Запишемо систему рівнянь руху електрона: $\mathbf{F} = -e\mathbf{E} = m\mathbf{a}$.

Тоді $\mathbf{a} = -\frac{e}{m}\mathbf{E} = -\eta\mathbf{E}$ і компоненти прискорення по осям можна записати у вигляді:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\eta \mathcal{E}, \quad (2.3)$$

$$\text{де } \eta = \frac{e}{m} = 1,76 \cdot 10^{11} \frac{\text{Кл}}{\text{кг}}.$$

Розв'язки рівнянь (2.1) – (2.3) мають вигляд:

$$x(t) = v_{x0}t, \quad y(t) = v_{y0}t, \quad z(t) = -\frac{\eta \mathcal{E}}{2}t^2 + v_{z0}t. \quad (2.4)$$

Вираз (2.4) є розв'язком рівнянь (2.1) – (2.3) в параметричній формі. Виключаючи t за допомогою співвідношення $t = \frac{x}{v_{0x}}$, отримаємо рівняння траєкторії:

$$z(x) = -\frac{\eta \mathcal{E}}{2v_{x0}^2}x^2 + \frac{v_{z0}}{v_{x0}}x. \quad (2.5)$$

Отже, в площині (x, z) траєкторія електрона є **параболою** (рис.2.2).

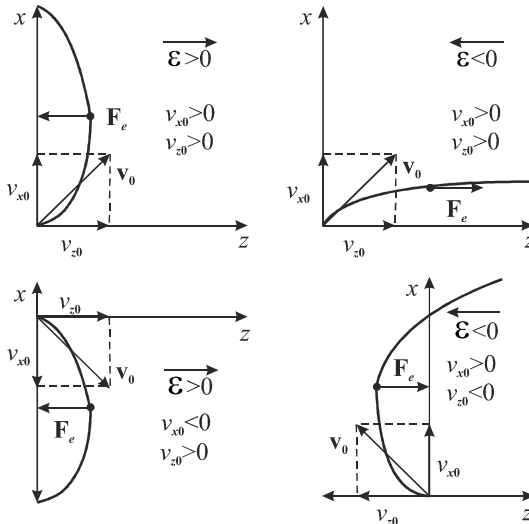


Рисунок 2.2 – Траєкторія руху електрона в однорідному електричному полі при різних початкових умовах: знаках $\mathcal{E}$ і початкових компонент швидкості

2.1.2 Однорідне магнітне поле

Під **однорідним** магнітним полем розумітимемо постійне за величиною і напрямком значення $\mathcal{B}$ в усіх точках континуального середовища.

Сила впливу магнітного поля на електрон визначається *силою Лоренца*

$$\mathbf{F}_\text{Л} = -e[\mathbf{v}, \mathcal{B}].$$

За допомогою квадратних дужок позначений векторний добуток векторів $\mathbf{v}$ і $\mathcal{B}$. Ця сила залежить від індукції в даній точці і від швидкості електрона. Вона викликає прискорення $\mathbf{a}$, що визначається співвідношенням:

$$\mathbf{a} = -\frac{e}{m}[\mathbf{v}, \mathcal{B}] = -\eta[\mathbf{v}, \mathcal{B}]. \quad (2.6)$$

Значення $\mathbf{a}$ можна розписати по координатам в скалярній формі:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\eta(v_y \mathcal{B}_z - v_z \mathcal{B}_y), \quad (2.7)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\eta(v_z \mathcal{B}_x - v_x \mathcal{B}_z), \quad (2.8)$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\eta(v_x \mathcal{B}_y - v_y \mathcal{B}_x), \quad (2.9)$$

або, враховуючи зміст рівнянь, показаних на рис. 2.3, маємо:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\eta \mathcal{B} \frac{dy}{dt}, \quad (2.10)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\eta \mathcal{B} \frac{dx}{dt}, \quad (2.11)$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = 0. \quad (2.12)$$

Ці рівняння визначають траєкторію руху електрона в однорідному магнітному полі.

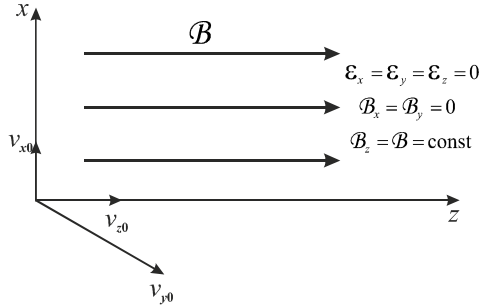


Рисунок 2.3 – Рух електрона в однорідному магнітному полі

Розв'язуючи систему рівнянь (2.10) – (2.12), можна знайти рівняння траєкторії руху електрона в магнітному полі:

$$\left(x + \frac{v_{y0}}{\omega}\right)^2 + \left(y - \frac{v_{x0}}{\omega}\right)^2 = R^2, \quad (2.13)$$

де $\omega = \eta \mathcal{B}$.

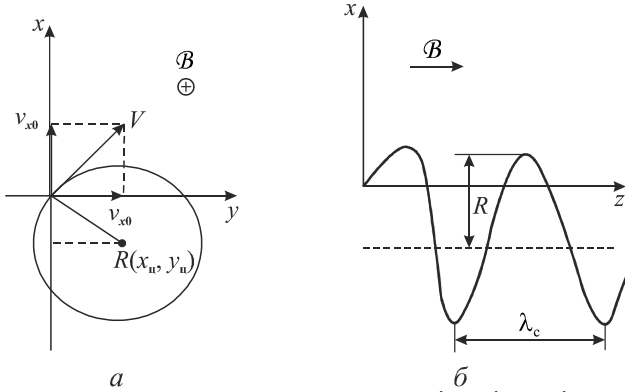
Формула (2.13) є рівнянням кола й інтерпретує собою проекцію траєкторії електрона на площину (x, y) , перпендикулярну магнітному полю.

Центр кола зміщений в точку з координатами (рис. 2.4, а):

$$x_{\text{ц}} = -\frac{v_{y0}}{\omega} = -\frac{v_{y0}}{\eta \mathcal{B}},$$

$$y_{\text{ц}} = \frac{v_{x0}}{\eta \mathcal{B}}.$$

В площині (x, y) проекція траєкторії електрона є синусоїдою з амплітудою $R = \frac{v_{\perp}}{\eta \mathcal{B}}$ (рис. 2.4, б).



a – на площину, перпендикулярну вектору магнітної індукції;

б – на площину вздовж силових ліній магнітного поля

Рисунок 2.4 – Проекції траєкторії руху електронів у однорідному магнітному полі

Якщо розглядати просторовий образ траєкторії електрона в магнітному полі, то вона представляє собою спіраль або гвинтову лінію з кроком або періодом коливань T . Величину $\lambda_c = v_{z0}T = v_{z0} \frac{2\pi}{\omega}$ називають *циклотронною довжиною хвилі*.

2.1.3 Рух електрона в схрещених полях

Під *схрещеними* полями розумітимемо накладені одне на одне електричні і магнітні поля, перпендикулярні одне одному в усіх точках континуального простору.

До першого типу схрещених полів віднесемо випадок, коли обидва поля однорідні й їхні вектори перпендикулярні.

Другий тип схрещених полів складається з однорідного магнітного поля й електричного поля, що володіє осьовою симетрією. Таке електричне поле утворюється в зазорі між коаксіальними циліндрами.

На рис. 2.5 показана траєкторія руху електрона в схрещених електричному і магнітному полях.

Початкові умови запишемо у вигляді:

$$x(0) = 0 \quad v_x(0) = v_{x0},$$

$$y(0) = 0 \quad v_y(0) = v_{y0},$$

$$z(0) = 0 \quad v_z(0) = v_{z0}.$$

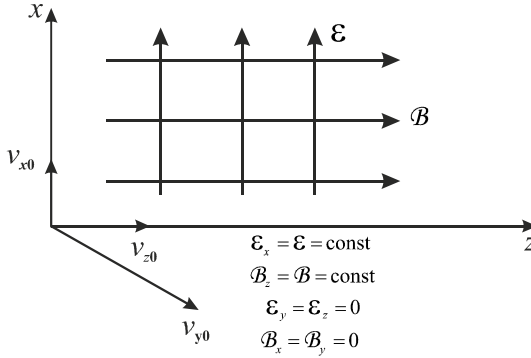


Рисунок 2.5 – Рух електрона в схрещених електричному і магнітному полях

У схрещених полях на електрон діють сили $\mathbf{F}$, що визначаються співвідношенням:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = -e\mathbf{E} - e[\mathbf{v}, \mathbf{B}], \quad (2.14)$$

і тоді електрон рухається з прискоренням

$$\mathbf{a} = -\eta\mathbf{E} - \eta[\mathbf{v}, \mathbf{B}]. \quad (2.15)$$

В декартовій системі координат рівняння (2.15) можна переписати у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\eta E_x - \eta(v_y B_z - v_z B_y), \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\eta E_y - \eta(v_z B_x - v_x B_z), \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -\eta E_z - \eta(v_x B_y - v_y B_x), \end{aligned} \quad (2.16)$$

де $-\eta E_z = 0$.

Тоді система рівнянь (2.16) набуває вигляду:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\eta E - \omega \frac{dy}{dt}, \quad (2.17)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \omega \frac{dx}{dt}, \quad (2.18)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = 0, \quad (2.19)$$

де $\omega = \eta B$.

Розв'язуючи сумісно систему (2.17) – (2.19), отримуємо рівняння траєкторії:

$$\left(x + \frac{\eta \mathcal{E}}{\omega^2} + \frac{v_{y0}}{\omega}\right)^2 + \left(y + \frac{\eta \mathcal{E}}{\omega} t - \frac{v_{x0}}{\omega}\right)^2 = R^2. \quad (2.20)$$

Вираз (2.20) – рівняння кола з радіусом R і координатами центру, які описуються так:

$$\begin{cases} x_{\text{ц}} = -\frac{\eta \mathcal{E}}{\omega^2} + \frac{v_{y0}}{\omega}, \\ y_{\text{ц}} = -\frac{\eta \mathcal{E}}{\omega} t + \frac{v_{x0}}{\omega}. \end{cases} \quad (2.21)$$

Аналіз показує, що траєкторія руху електрона в площині (x, y) представляє собою коло з центром, яке рівномірно зміщується по осі y і одночасно перпендикулярно полям $\mathcal{E}$ і $\mathcal{B}$.

Швидкість зміщення визначається так:

$$v_{\text{зм}} = \frac{y_{\text{ц}}}{t} = -\frac{\eta \mathcal{E}}{\eta \mathcal{B}} = -\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{B}}. \quad (2.22)$$

Графічно проекція траєкторії на площину (x, y) , перпендикулярну магнітному полю, зображено на рис. 2.6.

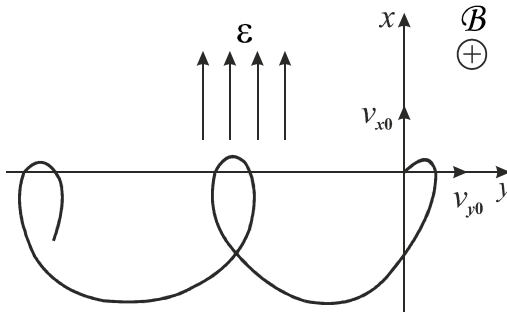


Рисунок 2.6 – Проекція траєкторії руху електрона, який рухається в схрещених $\mathcal{E} \times \mathcal{B}$ полях

Ця крива нагадує *циклоїду* – криву, яку описує яка-небудь точка колеса, що котиться без ковзання. В нашому випадку траєкторія має вигляд подовженої циклоїди, радіус якої залежить від напруженості електричного поля й індукції магнітного поля.

При зміні знаку напруженості траєкторія руху теж змінює знак. Параметри циклоїди можна змінювати варіюванням значень v_{x0} і v_{y0} .

Циклоїда може перетворюватися в пряму лінію, якщо в напрямку x початкова швидкість відсутня, а початкова швидкість y від'ємному напрямку по осі y дорівнює швидкості зміщення.

Отже, якщо сила Лоренца й електростатична сила рівні $\mathbf{F}_e = -e\mathbf{E} = \mathbf{F}_L = -e[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$, то зміщення в напрямку x не буде.

2.2 Приклади розв'язування задач

2.2.1 Електрон рухається в електричному полі ондулятора $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = (\mathcal{E}_0 \cos kz, 0, 0)$. Знайдіть $\mathbf{r}(t)$, якщо $\mathbf{r}(0) = 0$, $\mathbf{v}(0) = (0, 0, v_0)$.

Розв'язання

Згідно другого закону Ньютона

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -e\mathbf{E},$$

звідки покомпонентно у декартовій системі координат

$$m\ddot{x} = -e\mathcal{E}_0 \cos kz, \quad \ddot{y} = 0, \quad \ddot{z} = 0. \quad (1)$$

Інтегруючи рівняння руху (1), маємо

$$z(t) = C_1 t + C_2, \quad y(t) = C_3 t + C_4.$$

Підставляючи початкові умови, отримаємо

$$y(t) = 0, \quad z(t) = v_0 t. \quad (2)$$

Тоді з (1) і (2) впливає рівняння

$$m\ddot{x} = -e\mathcal{E}_0 \cos kv_0 t,$$

інтегруючи яке двічі, матимемо

$$m\dot{x} = C_5 - \frac{e\mathcal{E}_0}{kv_0} \sin kv_0 t,$$

$$mx = C_5 t + C_6 + \frac{e\mathcal{E}_0}{k^2 v_0^2} \cos kv_0 t.$$

Використовуючи початкові умови, матимемо

$$C_5 = 0, \quad 0 = C_6 + \frac{e\mathcal{E}_0}{k^2 v_0^2},$$

звідки

$$C_6 = -\frac{e\mathcal{E}_0}{k^2 v_0^2}.$$

Тоді

$$mx(t) = -\frac{e\mathcal{E}_0}{k^2 v_0^2} + \frac{e\mathcal{E}_0}{k^2 v_0^2} \cos kv_0 t,$$

або

$$x(t) = -\frac{2e\mathcal{E}_0}{mk^2 v_0^2} \sin^2 kv_0 t.$$

Відповідь: $x(t) = -\frac{2e\mathcal{E}_0}{mk^2 v_0^2} \sin^2 kv_0 t$; $y(t) = 0$; $z(t) = v_0 t$.

2.2.2 Пучок електронів рухається в однорідному постійному магнітному полі, вектор індукції якого $\mathcal{B} = (0, 0, \mathcal{B})$ перпендикулярний площині XOY . Початкові швидкості електронів $\mathbf{v}(0) = (v_0 \cos \alpha, v_0 \sin \alpha, u)$ відрізняються значенням кута α . Знайдіть умову, при якій електрони фокусуються в одній точці.

Розв'язання

Помістимо початок координат в точку вильоту електрона, а вісь OZ спрямуємо паралельно вектору індукції $\mathcal{B}$. Рівняння руху електрона має вигляд:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e[\mathbf{v}, \mathcal{B}], \quad (1)$$

або в проекціях на осі OX , OY , OZ :

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\omega \dot{y}, \\ \ddot{y} = \omega \dot{x}, \\ \ddot{z} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

де $\omega = \frac{e\mathcal{B}}{m}$.

З системою рівнянь (2), враховуючи початкову умову $\mathbf{r}(0) = (0, 0, 0)$, маємо $z(t) = ut$ і перший інтеграл

$$\dot{y} - \omega x = \dot{y}_0 = v_0 \sin \alpha. \quad (3)$$

Розв'язуючи рівняння (3) і перше рівняння системи (2), отримаємо закон руху електрона в площині XOY

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{\dot{y}_0}{\omega} (1 - \cos \omega t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t, \\ y(t) = \frac{\dot{y}_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} (1 - \cos \omega t). \end{cases} \quad (4)$$

Вважаючи $v_0 = R\omega$, представимо (4) у вигляді

$$\begin{cases} x(t) = -R \sin \alpha + R \sin(\omega t + \alpha), \\ y(t) = R \cos \alpha - R \cos(\omega t + \alpha). \end{cases}$$

Проекцією траєкторії на площину XOY є коло

$$(x + R \sin \alpha)^2 + (y - R \cos \alpha)^2 = R^2.$$

Нехай τ – час прольоту електронів до деякого екрану паралельного площині XOY і розташованого на відстані $L = u\tau$ від точки вильоту. Електрони, що вилітають під різними кутами α , фокусуються в різних місцях екрану. Але за умови $\omega\tau = 2\pi n$ (n – ціле число) всі електрони фокусуються в точці $(0,0,L)$. Тому відстань від точки вильоту до екрану має задовольняти умові

$$L = \frac{2\pi n}{\omega} u = 2\pi \frac{mu}{e\mathcal{B}} n.$$

Відповідь: $L = 2\pi \frac{mu}{e\mathcal{B}} n$.

2.2.3 Електрон рухається в схрещених однорідних постійних електричному і магнітному полях $\mathbf{E} = (0, \mathcal{E}, 0)$, $\mathbf{B} = (0, 0, \mathcal{B})$. Знайдіть $\mathbf{r}(t)$, якщо $\mathbf{r}(0) = 0$, $\mathbf{v}(0) = (\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$.

Розв'язання

Згідно другого закону Ньютона

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E} + e[\mathbf{v}, \mathbf{B}]. \quad (1)$$

Запишемо (1) в координатній формі

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\omega\dot{y}, \\ \ddot{y} = \omega\dot{x} - \frac{e}{m}\mathcal{E}, \\ \ddot{z} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

де $\omega = \frac{e\mathcal{B}}{m}$.

З системи рівнянь (2) знаходимо $z(t) = \dot{z}_0 t$ і перший інтеграл першого рівняння:

$$\dot{x} + \omega y = \dot{x}_0. \quad (3)$$

Підставляючи (3) в друге рівняння системи (2), отримуємо

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \omega \dot{x}_0 - \frac{e}{m} \mathcal{E},$$

розв'язок якого

$$y = \frac{1}{\omega} \left(\frac{e\mathcal{E}}{m\omega} - \dot{x}_0 \right) (\cos \omega t - 1) + \frac{\dot{y}_0}{\omega} \sin \omega t. \quad (4)$$

З (3) і (4) знаходимо

$$\dot{x} = \left(\dot{x}_0 - \frac{e\mathcal{E}}{m\omega} \right) \cos \omega t - \dot{y}_0 \sin \omega t + \frac{e\mathcal{E}}{m\omega},$$

звідки

$$x = \frac{1}{\omega} \left(\dot{x}_0 - \frac{e\mathcal{E}}{m\omega} \right) \sin \omega t + \frac{\dot{y}_0}{\omega} (\cos \omega t - 1) + \frac{e\mathcal{E}}{m\omega} t.$$

Відповідь: $x = \frac{1}{\omega} \left(\dot{x}_0 - \frac{e\mathcal{E}}{m\omega} \right) \sin \omega t + \frac{\dot{y}_0}{\omega} (\cos \omega t - 1) + \frac{e\mathcal{E}}{m\omega} t;$

$$y = \frac{1}{\omega} \left(\frac{e\mathcal{E}}{m\omega} - \dot{x}_0 \right) (\cos \omega t - 1) + \frac{\dot{y}_0}{\omega} \sin \omega t; \quad z(t) = \dot{z}_0 t.$$

2.2.4 Електрони рухаються в плоскому конденсаторі. площини $y = 0$, $y = d$ є анодом і катодом. Різниця потенціалів між ними дорівнює U_0 . Вектор магнітної індукції постійного однорідного поля $\mathcal{B} = (0, 0, \mathcal{B}_0)$. Електрони емітують із початковою швидкістю $\mathbf{v}_0 = 0$. Знайдіть значення $\mathcal{B}_0$, за якого струму немає.

Розв'язання

Вважатимемо, що в прикладі 2.2.3 $\mathcal{E} = -\frac{U_0}{d}$, $\mathbf{v}_0 = 0$. Тому мати-

memo

$$\dot{y}(t) = \frac{eU_0}{m\omega d} \sin \omega t, \quad y(t) = \frac{eU_0}{m\omega^2 d} (1 - \cos \omega t),$$

де $\omega = \frac{e\mathcal{B}_0}{m}$.

За умовою задачі в момент часу $t = \tau$ $y(\tau) = d$, $\dot{y}(\tau) = 0$, тому

$$\sin \omega \tau = 0, \quad \frac{eU_0}{m\omega^2 d}(1 - \cos \omega \tau) = d,$$

тому

$$\frac{2eU_0}{md \frac{e^2 \mathcal{B}_0^2}{m^2}} = d, \quad d^2 = \frac{2mU_0}{e\mathcal{B}_0^2},$$

і

$$\mathcal{B}_0 = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{2mU_0}{e}}.$$

$$\text{Відповідь: } \mathcal{B}_0 = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{2mU_0}{e}}.$$

2.2.5 Електрон рухається в магнітному ондуляторі, індукції поля якого $\mathbf{B} = (0, 0, \mathcal{B}_0 \cos ay)$. Знайдіть розв'язок рівнянь руху, якщо $\mathbf{r}(0) = 0$, $\mathbf{v}(0) = \left(0, \frac{\omega}{a}, 0\right)$.

Розв'язання

З рівнянь руху

$$\ddot{x} = -\omega \dot{y} \cos ay, \quad \ddot{z} = 0$$

знайдемо перші інтеграли

$$\dot{x} + \frac{\omega}{a} \sin ay = 0, \quad \dot{z} = 0.$$

Із закону збереження енергії отримуємо рівняння

$$\dot{y} = \frac{\omega}{a} \cos ay,$$

тому

$$x(t) = -\frac{1}{a} \ln \operatorname{ch} \omega t, \quad \sin ay = \operatorname{th} \omega t.$$

$$\text{Відповідь: } x(t) = -\frac{1}{a} \ln \operatorname{ch} \omega t.$$

2.2.6 Дві сітки, крізь які можуть рухатись електрони, розташовані в площині $z_1 = h$ і $z_2 = H > h$. Різниця потенціалів між сітками $U = \varphi_1 - \varphi_2 > 0$. В початковий момент часу $\mathbf{r}(0) = 0$,

$\mathbf{v}(0) = (v_0 \cos \alpha, 0, v_0 \sin \alpha)$. Доведіть, що існують три траєкторії, що перетинають вісь x в одній точці.

Розв'язання

З другого закону Ньютона

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -e\mathbf{E},$$

з урахуванням того, що $\mathbf{E} = (0, 0, E)$, маємо

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= 0, & m\ddot{y} &= 0, & m\ddot{z} &= 0, & z &< h; \\ m\ddot{z} &= -eE, & h &\leq z \leq H, \end{aligned}$$

де $E = \frac{U}{H-h}$. Вважатимемо, що $\frac{mv_0^2 \sin^2 \alpha}{2} < eU$. Дальність польоту електрона

$$l(\alpha) = 2h \operatorname{ctg} \alpha + \frac{v_0^2}{a} \sin 2\alpha, \quad a = \frac{eU}{m(H-h)}.$$

Знайдемо максимальну дальність польоту. Проводячи заміну $u = \operatorname{tg} \alpha$, отримаємо функцію

$$l(u) = \frac{2h}{u} + 2 \frac{v_0^2}{a} \frac{u}{1+u^2}.$$

З умови екстремуму $\frac{dl}{du}$ знайдемо їх положення:

$$u_{1,2}^2 = \frac{1-2c \pm \sqrt{1-8c}}{2(c+1)}, \quad c = \frac{ha}{v_0^2}.$$

При $h=0$ отримаємо відомий результат $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Якщо

$$ah \leq v_0^2 \leq a(H-h), \quad (1)$$

то існують два екстремальних положення дальності $l_{\min}$ і $l_{\max}$. Значення кутів, при яких частинка досягає заданої дальності l_0 в інтервалі $l_{\min} < l_0 < l_{\max}$, визначаються рівнянням

$$u^3 - (k + \varepsilon)u^2 + u - \varepsilon = 0, \quad k = \frac{2v_0^2}{l_0 a}, \quad \varepsilon = \frac{2h}{l_0}.$$

Тому, при умові (1) існують три траєкторії, що перетинають вісь Ox в одній точці.

Відповідь: існують три траєкторії.

2.2.7 Дві паралельні пластини довжиною 50 мм розташовані горизонтально на відстані 5 мм одна від одної. З середини зазору між пластинами в горизонтальному напрямку вилітає електрон із початковою енергією 250 еВ. Розрахуйте різницю потенціалів між пластинами, якщо траєкторія електрону лише торкається краю позитивно зарядженої пластини (рис. 2.7).

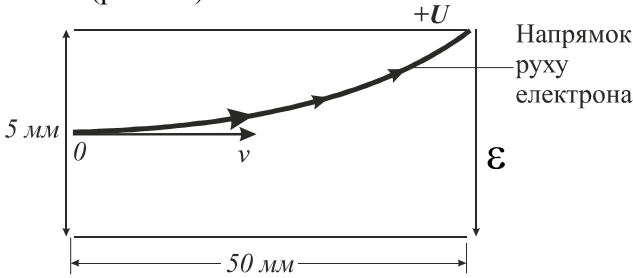


Рисунок 2.7

Розв'язання

Згідно другого закону Ньютона

$$ma_y = m \frac{dv_y}{dt} = -e\mathcal{E}. \quad (1)$$

Інтегруючи рівняння (1) за часом t при початковій умові $v_y(0)=0$, матимемо

$$v_y = -\frac{e\mathcal{E}}{m}t. \quad (2)$$

Інтегруючи рівняння (2) за t і вважаючи, що електрон почав рухатися з точки 0 (рис. 2.7), отримаємо

$$y = -\frac{e\mathcal{E}}{2m}t^2. \quad (3)$$

Вважаючи, що $\mathcal{E}$ не залежить від t , а $t = \frac{x}{v_x}$, оскільки компонента швидкості v_x під дією поля не змінюється, знаходимо

$$y = -\frac{e\mathcal{E}}{2mv_x^2}x^2. \quad (4)$$

Із закону збереження енергії

$$\frac{mv_x^2}{2} = E_0 ,$$

знаходимо

$$v_x = \sqrt{\frac{2E_0}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 250 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 9,38 \cdot 10^6 \frac{\text{м}}{\text{с}} .$$

Підставляючи в (4) $y = -2,5 \cdot 10^{-3}$ м і $x = 5 \cdot 10^{-2}$ м розрахуємо напруженість електричного поля

$$\mathcal{E} = -\frac{2mv_x^2 y}{ex^2} = -\frac{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (9,38 \cdot 10^6)^2 \cdot (-2,5 \cdot 10^{-3})}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot (5 \cdot 10^{-2})^2} = 10^3 \frac{\text{В}}{\text{м}}$$

і потенціал між пластинами

$$U = \mathcal{E}d = 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 5 \text{ В} .$$

Відповідь: $U = 5 \text{ В}$.

2.2.8 Обчисліть час, за який електрон, що знаходився в стані спокою в початковий момент часу, пройшов відстань $l = 10$ мм, якщо різниця потенціалів, прикладена на цій відстані, дорівнює:

а) постійній напрузі $U = 100 \text{ В}$;

б) змінній напрузі, що змінюється за синусоїдальним законом, з амплітудою 25 В і частотою 3 МГц .

Вказівка. Вважайте, що в обох випадках градієнт потенціалу є постійною величиною, а у другому випадку електрон знаходиться в спокої в той момент, коли прикладена напруга дорівнює нулю.

Розв'язання

а) Оскільки електрон починає свій рух із стану спокою, його початкова швидкість $v_0 = 0$. Тому відстань, пройдена електроном, визначається формулою

$$l = \frac{at^2}{2} . \quad (1)$$

Отже, оскільки $a = \frac{e\mathcal{E}}{m_e}$,

$$l = \frac{e\mathcal{E}}{2m_e} t^2 . \quad (2)$$

З цього рівняння знаходимо t і в результаті отримуємо

$$t = l \sqrt{\frac{2m_e}{eU}} = 10^{-2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 100}} = 3,37 \cdot 10^{-9} \text{ с} = 3,37 \text{ нс}.$$

б) Миттєве значення синусоїдальної напруги з амплітудою 25 В і частотою $f = 3$ МГц, дорівнює

$$u = U_{\max} \sin \omega t,$$

$$\text{де } \omega = 2\pi f = 6\pi \cdot 10^6 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Напруженість електричного поля розраховується за формулою

$$\mathcal{E} = \frac{u}{l} = \frac{U_{\max} \sin \omega t}{l}. \quad (3)$$

Підставляючи вираз (3) в рівняння (2), знаходимо для t :

$$t = l \sqrt{\frac{2m_e}{eu}} = l \sqrt{\frac{2m_e}{eU_{\max} \sin \omega t}}. \quad (4)$$

Піднесемо до квадрату обидві частини рівняння (4):

$$t^2 = \frac{2m_e l^2}{eU_{\max} \sin \omega t}. \quad (5)$$

Позначаючи ωt через θ і підставляючи цю величину замість t і ωt в рівняння (5), отримуємо

$$\theta^2 = \frac{2m_e \omega^2 l^2}{eU_{\max} \sin \theta}.$$

Підстановка вихідних даних дає для величини $\theta^2 \sin \theta$ наступне значення

$$\theta^2 \sin \theta = \frac{2m_e \omega^2 l^2}{eU_{\max}} = \frac{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 4\pi^2 10^{12}}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 25} = 0,0161. \quad (6)$$

Рівняння (6) можна розв'язати наближено, якщо припустити, що для малих значень θ , виражених у радіанах, $\sin \theta \rightarrow \theta$. Тоді

$$\theta^3 \approx 0,0161 \quad (7)$$

або

$$\theta \approx 0,252 \text{ рад}.$$

Перевіримо цю відповідь. Обчислюючи θ в градусах ($\theta = \frac{0,252 \cdot 180}{\pi} = 14,5^\circ$) та підставляючи цей результат у аргумент синуса в рівняння (6), маємо

$$0,252^2 \sin 14,5^\circ = 0,016.$$

Отже, значення (7) знайдено вірно і, отже, $\theta = 0,252$ рад. Але оскільки $\theta = \omega t$, звідси знаходимо

$$t = \frac{0,252}{6\pi \cdot 10^6} = 13,4 \cdot 10^{-9} \text{ с} = 13,4 \text{ нс}.$$

Відповідь: $t = 3,37$ нс; $t = 13,4$ нс.

2.2.9 Електрон, який пройшов прискорюючу різницю потенціалів $U = 1$ кВ, влітає у вакуумі в однорідне магнітне поле з індукцією $B = 0,01$ Тл перпендикулярно ліням індукції. Визначте радіус кола, описуваного електроном у полі.

Розв'язання

Сила Лоренца, що діє на електрон, який рухається в магнітному полі, надає йому доцентрового прискорення $a = \frac{v^2}{R}$. Тоді

$$\frac{mv^2}{R} = evB. \quad (1)$$

Пролетівши прискорюючу різницю потенціалів U , електрон набув енергії

$$\frac{mv^2}{2} = eU,$$

звідки

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}.$$

Підставляючи в (1) отримане значення швидкості, матимемо

$$\frac{\sqrt{2emU}}{R} = eB,$$

звідки остаточно

$$R = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2mU}{e}} = \frac{1}{0,01} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^3}{1,6 \cdot 10^{-19}}} = 0,01 \text{ м}.$$

Відповідь: $R=0,01$ м.

2.3 Задачі для самостійного розв'язування

2.3.1 Якої швидкості набуває однозарядний йон аргону ($A=40$), пройшовши різницю потенціалів у 400 В?

2.3.2 Два йони D^+ з однаковою початковою кінетичною енергією, що дорівнює 100 кеВ, летять вздовж прямої лінії назустріч один одному. Визначте мінімальну відстань між ними.

2.3.3 У гальмівне електричне поле вводиться потік електронів зі струмом $I_0 = 10$ мА. Функція розподілу електронів за енергіями

$f(E)$ відповідає температурі $T = 5 \cdot 10^4$ К (тобто $f(E) = A e^{-\frac{E}{k_B T}}$). Який буде струм у колі колектора, якщо напруга на ньому становить $U_K = -15$ В?

2.3.4 В однорідне гальмівне електричне поле $\mathcal{E} = 5,39 \cdot 10^3$ В/м літає електрон з енергією 100 еВ. Кут між напрямком початкової швидкості електрона й електричним полем дорівнює α . Через $5 \cdot 10^{-3}$ с електрон досягає точки посадки на електрод, у якій його швидкість перпендикулярна електричному полю. Знайдіть кут α і енергію, з якою електрон потрапляє на електрод.

2.3.5 Пучок протонів, прискорених до енергії 10^7 еВ, бомбардує тверду мішень. Чому дорівнює сила, яка діє на мішень, якщо при проходженні крізь мішень протони втрачають у ній половину своєї енергії? Сила струму в пучку 100 мА.

2.3.6 В однорідне електричне поле енергоаналізатора у вигляді плоского конденсатора (рис. 2.8) під кутом $\alpha = 45^\circ$ до напрямку поля крізь отвір в пластині інjektується пучок електронів із кутом розхилу пучка $\Delta\alpha = 15^\circ$ і енергією електронів 10 кеВ. Яка напруженість поля, якщо після відхилення в ньому пучок виходить із конденсатора крізь отвір у тій же пластині, що знаходиться на відстані $l = 60$ мм від точки інжекції? Знайдіть ширину δ цього отвору, що забезпечує вихід всього пучка.

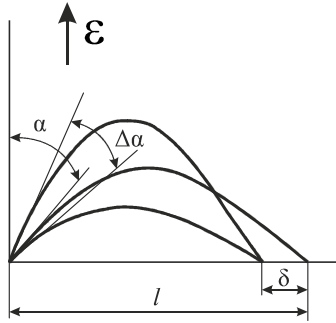


Рисунок 2.8

2.3.7 Електрон влітає в область однорідного магнітного поля в напрямку, перпендикулярному вектору магнітної індукції. Енергія електрона дорівнює 10^3 еВ. Знайдіть величину магнітної індукції, за якої електрон відхилиться від початкового напрямку на 5 мм на відстані від точки вльоту 2 см.

2.3.8 Електрон влітає в область однорідного магнітного поля в напрямку, перпендикулярному вектору магнітної індукції. Енергія електрона дорівнює $2 \cdot 10^3$ еВ. Знайдіть величину магнітної індукції, за якої відхилення електрона від початкового напрямку на відстані від точки вльоту 5 мм складатиме 20° .

2.3.9 Електронний промінь з енергією $5 \cdot 10^3$ еВ проходить крізь область поперечного магнітного поля протяжністю 15 см. Знайдіть, якою повинна бути індукція магнітного поля, щоб викликати при виході з магнітного поля відхилення променя на 2 см. Знайдіть швидкість електронів по напрямку вльоту до і після прольоту області магнітного поля.

2.3.10 Електрон влітає в однорідне магнітне поле з індукцією 0,01 Тл під кутом 25° до напрямку вектора магнітної індукції з енергією 10^3 еВ. Знайдіть, на якій відстані від точки вльоту опиниться електрон через 10^{-8} с після вльоту.

2.3.11 Електрон влітає в однорідне магнітне поле з індукцією 0,005 Тл під кутом 30° до напрямку вектора магнітної індукції з енергією 500 еВ. Разом з магнітним полем на електрон діє однорідне

прискорююче електричне поле напруженістю 10^3 В/см. Знайдіть, на якій відстані від точки вльоту опиниться електрон через 10 нс після вльоту.

2.3.12 Система електродів утворена плоскими паралельними пластинами з нескінченною протяжністю і відстанню між ними 1 см. Електрон виходить із однієї пластини по напрямку до іншої з початковою швидкістю $5 \cdot 10^6$ м/с і під кутом 75° до поверхні пластин. Знайдіть, на якій відстані від точки виходу електрон потрапляє на одну із пластин, якщо між пластинами прикладена напруга 100 В, що створює гальмівне електричне поле для електрона.

2.3.13 Система електродів утворена плоскими паралельними пластинами з нескінченною протяжністю і відстанню між ними 1 см. Електрон виходить із однієї пластини по напрямку до іншої з початковою швидкістю $5 \cdot 10^3$ м/с і під кутом 45° до поверхні пластин. Знайдіть, на якій відстані від точки виходу електрон потрапляє на одну із пластин, якщо між пластинами прикладена напруга 100 В, що створює прискорююче електричне поле для електрона.

2.3.14 Електрон влітає в простір, утворений плоскими паралельними пластинами нескінченної протяжності, з енергією 2 кеВ. Напрямок вльоту паралельний поверхні пластин. Між пластинами існує електричне поле, створене прикладеною до них напругою 300 В. Відстань між пластинами дорівнює 10 мм. Знайдіть координати точки на пластині, в яку потрапить електрон, якщо точка вльоту знаходиться на відстані 5 мм від будь-якої з пластин.

2.3.15 Електрон влітає в простір, утворений плоскими паралельними пластинами нескінченної протяжності, з енергією 1,5 кеВ. Напрямок вльоту паралельний поверхні пластин. Між пластинами існує електричне поле, створене прикладеною до них напругою 100 В. Відстань між пластинами дорівнює 10 мм. Знайдіть кут, на який відхилиться траєкторія електрона при проходженні ним відстані 15 мм вздовж напрямку вльоту.

2.3.16 Електрон влітає в простір, утворений плоскими паралельними пластинами нескінченної протяжності, з енергією 2 кеВ. Напрямок вльоту паралельний поверхні пластин. Між пластинами існує електричне поле, створене прикладеною до них напругою 50 В. Від-

стань між пластинами дорівнює 10 мм. Знайдіть час, по проходженні якого електрон потрапить на одну з пластин.

2.3.17 Електрон зі швидкістю $3 \cdot 10^6$ м/с влітає в область гальмівного електричного поля. Знайдіть, якою має бути напруженість електричного поля, щоб швидкість електрона знизилася до нуля на відстані 10 см від точки вльоту.

2.3.18 Електрон влітає в простір між двома плоскими паралельними густими металевими сітками з гальмівним електричним полем, створеним різницею потенціалів між ними 100 В. Визначте, чи подолає електрон між електродний простір, якщо швидкість при вльоті дорівнює $3 \cdot 10^7$ см/с і направлена під кутом 45° до поверхні сіток.

2.3.19 Яку напругу слід прикласти до дефлекторних пластин електронно-променевої трубки, щоб відхилити електронний промінь на $x = 3$ см, якщо $L = 30$ см, $l = 4$ см, $d = 0,8$ см; $U_0 = 1200$ В?

2.3.20 Яка напруженість магнітного поля має бути в зазорі між полюсами постійного магніту для того, щоб електрон, що влетів у зазор, не покинув його? Енергія електрона E , діаметр полюсів d , ширина зазору h .

№ варіанту	E , еВ	d , см	h , мм
1	5	2	3
2	18	12	10
3	2	5	5
4	7	7	12
5	9	3	14
6	15	4	6
7	13	14	8
8	6	17	4
9	9	5	12
10	3	8	6
11	8	9	9
12	11	11	2
13	19	4	5
14	4	7	7
15	8	5	13

16	6	8	16
17	12	11	12
18	16	4	6
19	7	6	17
20	4	9	14
21	3	10	13
22	10	15	8
23	5	4	4
24	15	9	6
25	3	10	5

3 ЕЛЕКТРОННА І ЙОННА ОПТИКА

3.1 Основні формули і визначення

3.1.1 Електростатична відхиляюча система

Електростатична відхиляюча система являє собою дві паралельні пластини довжиною l , розміщені одна від одної на відстані d .

Якщо між пластинами прикладено напругу U , то виникає електричне поле, напруженість якого дорівнює $\mathcal{E} = -U/d$ (рис. 3.1). На електрон, який влетів у систему із швидкістю $v = \sqrt{2\eta U_0}$, діє сила $F = -e\mathcal{E}$, де U_0 – напруга на прискорюючому аноді.

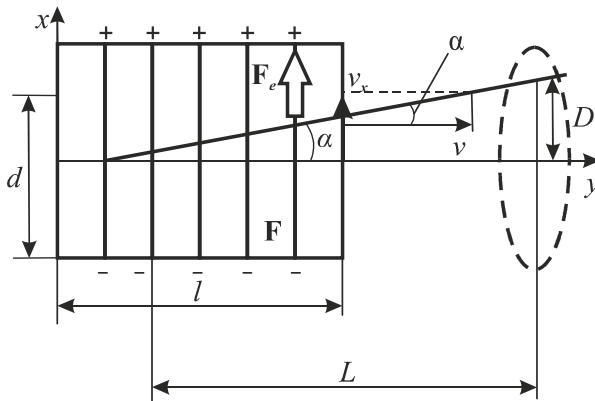


Рисунок 3.1 – Електростатична відхилювальна система

Рівняння руху електрона має вигляд:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -e \mathcal{E} \quad (3.1)$$

або

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \eta \frac{U}{d}.$$

Проінтегруємо це рівняння:

$$\frac{dx}{dt} = v_x = \frac{\eta U}{d} l + C,$$

де константу C знайдемо, поклавши $t = 0$. Тоді $C = v_{x_0} = 0$.

Враховуючи, що час прольоту пластини $\tau = \frac{l}{v}$, для поперечної швидкості електрона маємо наступний вираз

$$v_x = \frac{\eta U}{d} \frac{l}{v},$$

і тоді

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_x}{v} = \frac{\eta U}{d} \frac{l}{v^2} = \frac{1}{2} \frac{l}{d} \frac{U}{U_0}. \quad (3.2)$$

Далі електрон попадає в еквіпотенціальний простір і рухається по прямій лінії. На екрані він відхилиться від нульового положення на величину $D = L \operatorname{tg} \alpha$. Система двох пар пластин утворює електростатичну відхиляючу систему конденсаторного типу, яка дозволяє отримати на екрані лінійчатий растр (рис. 3.2).

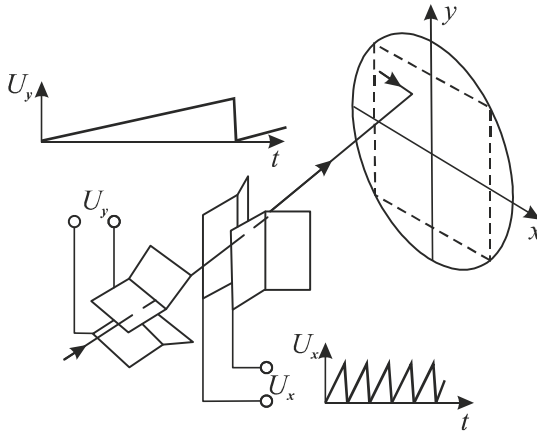


Рисунок 3.2 – Система відхилення пучка горизонтальними і вертикальними пластинами

Перша пара, розміщена ближче до екрану, відхиляє промінь по осі x , а друга пара – по осі y . При одночасному включенні напруги на обидві пластини промінь відхиляється одночасно по двом напрямкам. Для отримання лінійчатого растра на пластини x і y подають пилкоподібну напругу. Саме лінійна залежність напруги від часу дозволяє променю рівномірно рухатись по екрану. Однак при більших кутах відхилення ця система викривляє електронну пляму.

Електромагнітні відхиляючі пристрої представляють собою дві котушки із струмом, площини яких паралельні одна одній (рис. 3.3).

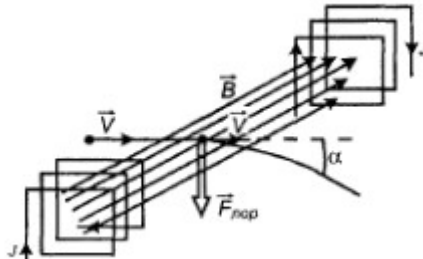


Рисунок 3.3 – Відхилення електронів поперечним магнітним полем

У просторі між котушками створюється магнітне поле, яке можна вважати однорідним. На електрон, який влітає у цей простір, перпендикулярно магнітно-силовим лініям, діє сила Лоренца:

$$\mathbf{F}_L = -e[\mathbf{v}, \mathbf{B}]. \quad (3.3)$$

Електромагнітні відхилювальні системи отримали широке розповсюдження в телевізійних пристроях. Використовують дві пари відхиляючих котушок горизонтального і вертикального відхилення. Такі системи дозволяють відхилити електронний промінь на 90° і 110° .

Ця сила відхиляє траєкторію руху електрона. Зміною напрямку струму в котушці можна змінити напрямок вектора магнітної індукції на протилежний і, відповідно, напрямок вектора сили Лоренца. Змінюючи силу струму і його напрямок в магнітній котушці, можна керувати траєкторіями електронів.

3.1.2 Керування за допомогою електронної оптики

Керування електронними потоками за допомогою електронної оптики почалося із дослідження катодних променів. Вже тоді було зрозуміло, що характер поширення катодних променів подібний поширенню світлових променів. В якості електронних лінз використовують осесиметричне магнітне поле котушки із струмом. Наведемо деякі аналогії із геометричної і електронної оптики:

— закони геометричної оптики є наслідком фундаментального принципу Ферма, згідно якого світлові промені розповсюджуються між двома точками простору a_1 і a_2 по такому шляху S , на проходження якого витрачається мінімальний час t . Іншими словами, існує екстремум функції довжини оптичного шляху $\delta \int_{a_1}^{a_2} n ds = 0$, де n — показник заломлення. Аналогічний закон існує і в електронній оптиці;

— у світловій оптиці справедливий закон Снелліуса $\frac{\sin \varphi}{\sin \theta} = \frac{n_1}{n_2}$.

Падаючі і відбиті промені, а також нормаль до поверхні лежать в одній площині. Цей закон застосовний і до електронної оптики, причому роль показника заломлення виконує величина $\sqrt{U}$. Цікаво, що в оптиці справедлива нерівність $1 \leq n \leq 2$, в той час як в електронній оптиці $\sqrt{U}$ неперервно змінюється від точки до точки і лежить в дуже широких межах;

— якщо у світловій оптиці лінза точно окреслена своїми межами, то в електронній оптиці заломлюючі поверхні і межі поділу зав-

жди задовольняють рівнянню Лапласа: $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$, де U –

потенціал електричного поля в області, яка не містить заряди;

– при проходженні світлового променя через межу поділу середовища, його енергія не змінюється, в той час як електронний промінь, проходячи через цю межу, змінює свої електричні параметри.

Існує три основні типи електронних лінз:

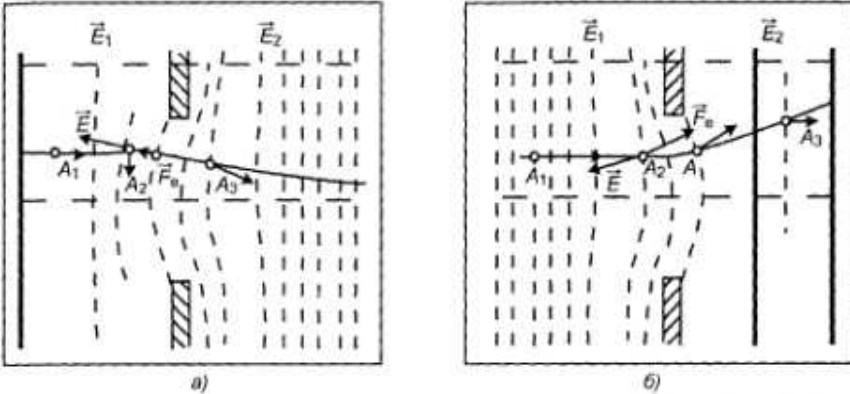
- лінза, утворена діафрагмою;
- імерсійна лінза;
- одиночна лінза.

Поєднання лінзи з катодом, наприклад, імерсійний об'єктив (фокусувальний або розсіюючий), віднесемо до катодної частини електронних пушок і електронних прожекторів.

Діафрагма може виконувати функцію лінзи. В однорідному полі еквіпотенціалі є паралельними площинами. Де сильніше поле, там еквіпотенціалі розміщуються густіше.

Поблизу отвору спостерігається перехід від слабкого поля до сильного. Функцію лінзи виконує неоднорідність електричного поля. Зазначимо, що силові лінії направлені «від плюса до мінуса», або від електроду з більш високим потенціалом до електроду з більш низьким потенціалом (рис. 3.4).

Вектор напруженості поля направлений по дотичній до силовій лінії або перпендикулярний до лінії еквіпотенціала. У точці A_1 на електрон діє тільки поздовжня сила тому, що поле в цій точці однорідне. Ця сила прискорює електрон вздовж осі z . У точці A_2 викривлення поля вже помітне і вектор сили має нахил до осі. Наряду з поздовжньою складовою сили виникає і радіальна, яка направляє електрон у бік центральної осі. Траєкторія електрона викривляється і набуває збіжності. У точці A_2 викривлення незначне, радіальна сила дорівнює нулю і електрон зберігає тільки горизонтальну складову швидкості.



$$a - |\mathcal{E}_2| > |\mathcal{E}_1|; \quad b - |\mathcal{E}_1| > |\mathcal{E}_2|$$

Рисунок 3.4 – Електронна лінза, утворена діафрагмою

У цьому випадку говорять про фокусуючу дію лінзи у вигляді діафрагми.

У протилежному випадку, коли $|\mathcal{E}_1| > |\mathcal{E}_2|$ аналіз траєкторії електронів свідчить про те, що має місце ефект розсіювання електронів (рис. 3.4, б).

Отже, змінюючи конфігурацію силових ліній поля, можна сформувати або фокусуючу, або розсіюючу електронний потік електронну лінзу.

Імерсійною електронною лінзою називається лінза, у якій електроно-оптичні показники заломлення, а отже, і потенціали праворуч і ліворуч від лінзи постійні, але не рівні; вона являє собою два електроди, між якими прикладена різниця потенціалів. Така лінза може, наприклад, бути утворена двома циліндрами, комбінацією циліндра й діафрагми або двома діафрагмами (рис. 3.5).

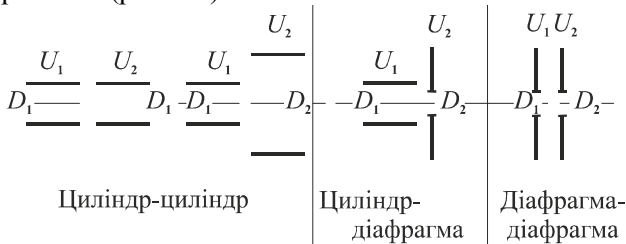


Рисунок 3.5 – Типи імерсійних лінз

На рис. 3.6 наведено лінзу, утворену двома трубчастими електродами, оберненими торцями один до одного. Картина еквіпотенціалей симетрична відносно центральної площини.

Припустимо, що $U_1 > U_2$ відносно катода, і траєкторії руху електронів йдуть зліва направо. Зліва еквіпотенціальний простір і сили на електрон не діють. При підльоті до електрона з більшим потенціалом він попадає у викривлене електричне поле.

У точці A за рахунок прогину еквіпотенціалі вектор напруженості електричного поля $\mathbf{E}$ направлений вліво від осі, а сила, яка діє на електрон, направлена вправо до осі ($\mathbf{F} = -e\mathbf{E}$). Отже, виникає радіальна складова, направлена до осі, і яка зсуває електрон до центру. Вхідна ділянка імерсійної лінзи є фокусувальною.

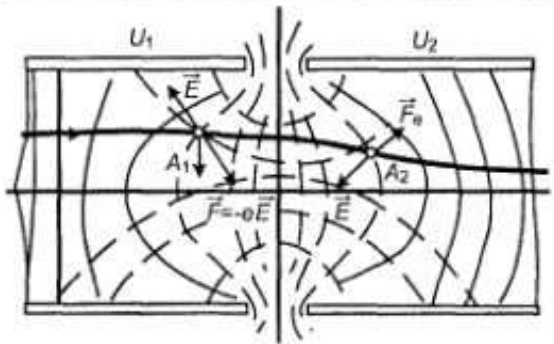


Рисунок 3.6 – Імерсійна лінза, утворена двома трубчастими електродами

На вихідній ділянці електричне поле направлене до зазору, а сила, яка діє на електрон, має компоненту, направлену від осі. У цьому випадку вихідна ділянка лінзи є розфокусувальною.

Отже, імерсійна лінза скомпонована із фокусувальної і розфокусувальної лінз. Оскільки електрон у вхідній частині лінзи перебуває далі від осі, і, отже, перебуває в більш сильному електричному полі, то він прискорюється цим полем.

Попавши в розфокусувальну вихідну ділянку, електрон там перебуває протягом меншого часу, і тому його підсумкова траєкторія наближається до осьової лінії. В цілому імерсійні лінзи мають властивості фокусування електронів.

У всіх випадках між електродами, що утворюють лінзу й мають різні потенціали U_1 і U_2 і, утворюється аксіально-симетричне поле, що є і електронною лінзою.

Відзначимо деякі загальні властивості імерсійних лінз:

а) імерсійні лінзи завжди збиральними;

б) імерсійні лінзи завжди несиметричні, тобто їхні фокусні від-

стані f_1 і f_2 не рівні й відносяться як $\frac{f_1}{f_2} = \frac{\sqrt{U_1}}{\sqrt{U_2}}$;

в) імерсійна лінза змінює швидкість електронів, які проходять через неї, збільшує або зменшує.

Можливі два випадки в імерсійних лінзах: коли $U_1 < U_2$ і другий випадок, коли, навпаки, $U_1 > U_2$. З оптичної точки зору в обох випадках поле лінзи складається із двох частин – збиральної та розсіювальної, розташованих по різному в першому й другому випадках. Однак результуюча дія імерсійної лінзи – збиральна. Крім того, у випадку $U_1 < U_2$ електрони, проходячи лінзу, будуть прискорюватися, у випадку $U_1 > U_2$ – сповільнюватися.

Розглянемо більш детально лінзу, утворену двома діафрагмами (рис. 3.7). Розподіл потенціалу в такій лінзі у випадку коли діаметр отвору в діафрагмі набагато менший відстань між діафрагмами тобто при $R \ll d$, отримується шляхом простого поєднання полів двох лінз із однією діафрагмою, сітки в яких співпадають, а сила заломлення – поєднанням заломлюючих сил останніх. Незалежно від полярності напруг на діафрагмах лінза завжди буде збиральною. При $U_2 > U_1$ поле першої діафрагми збиральне, а другої – розсіювальне; при $U_2 < U_1$ – має місце зворотна ситуація.

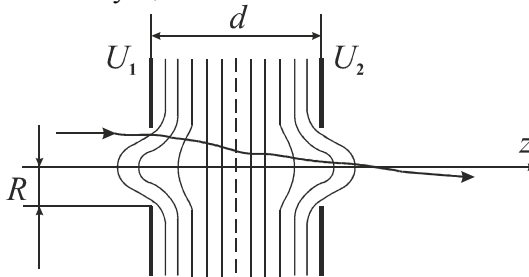


Рисунок 3.7 – Лінза із двох діафрагм

Співвідношення для фокусних відстаней такої лінзи наступні:

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{4d} \frac{U_2 - U_1}{\sqrt{U_2}} \left[\frac{1}{\sqrt{U_1}} - \frac{1}{\sqrt{U_2}} \right], \quad (3.4)$$

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{4d} \frac{U_2 - U_1}{\sqrt{U_1}} \left[\frac{1}{\sqrt{U_1}} - \frac{1}{\sqrt{U_2}} \right]. \quad (3.5)$$

Із (3.4) та (3.5) витікає таке співвідношення:

$$\frac{\sqrt{U_2}}{f_2} = \frac{\sqrt{U_1}}{f_1} = \frac{1}{4d} \frac{(U_2 - U_1)(\sqrt{U_2} - \sqrt{U_1})}{\sqrt{U_1 U_2}}, \quad (3.6)$$

де d – відстань між діафрагмами, в см; U_1, U_2 – напруга на діафрагмах, у В; f_1, f_2 – фокусні відстані простору предмета й простору зображення, у см.

Оптична сила імерсійної лінзи з двома діафрагмами дорівнює сумі оптичних сил (з боку діафрагм) двох лінз з однією діафрагмою і сіткою кожна, з яких може бути сконструйовано початкову лінзу (рис.3.8).

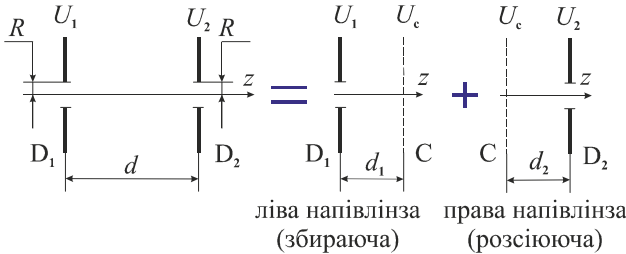


Рисунок 3.8 – Схема імерсійної лінзи із двох діафрагм представлена у вигляді двох лінз з однією діафрагмою і сіткою

У цьому випадку фокусна відстань простору зображення (фокус із боку діафрагми) дорівнює:

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_D} = -\frac{1}{4d} \frac{U_D - U_c}{U_D}, \quad (3.7)$$

фокусна відстань предметного простору (фокус із боку сітки) дорівнює:

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{f_c} = -\frac{1}{4d} \frac{U_D - U_c}{\sqrt{U_D U_c}} \quad (3.8)$$

де U_c – напруга на сітці, яка визначається за співвідношенням $U_c = \frac{U_{D1} + U_{D2}}{2}$, у В; U_D – напруга на діафрагмі, у В; d – відстань між сіткою й діафрагмою, в см; $f_D = f_2$ – фокусна відстань із боку діафрагми, в см; $f_c = f_1$ – фокусна відстань із боку сітки, в см.

Оскільки $R \ll d$, то фокусні відстані лінзи не залежать від радіусу отвору в діафрагмі. Тоді, оптична сила лінзи визначається

$$\frac{\sqrt{U_c}}{f_c} = \frac{\sqrt{U_D}}{f_D}. \quad (3.9)$$

При $U_c > U_D$ – лінза збиральна ($f_2 > 0$), а при $U_c < U_D$ – лінза розсіювальна ($f_2 < 0$).

Аналогом співвідношення (3.6) є таке:

$$\frac{\sqrt{U_2}}{f_2} = \frac{\sqrt{U_2}}{f_{D2}} + \frac{\sqrt{U_1}}{f_{D1}}. \quad (3.10)$$

Одиночна лінза є сукупністю трьох електродів, центральний із яких має менший потенціал. Трубочаті електроди з потенціалами $U_1 > U_2$ утворюють еквіпотенціали (суцільні лінії) і силові лінії (штрихові лінії) представлені на рис. 3.9.

Найбільш сильне поле зосереджено у зазорах електродів, а на осі поле більш слабе. Виникають замкнуті еквіпотенціали, які оточують електрод. Під ним утворюються „сідлоподібні“ зони.

У точці A_1 сила електричного поля направлена у відповідності з прогином еквіпотенціалі похило до осі. Сила, яка діє на електрон, відхиляє його у бік центрального електрода.

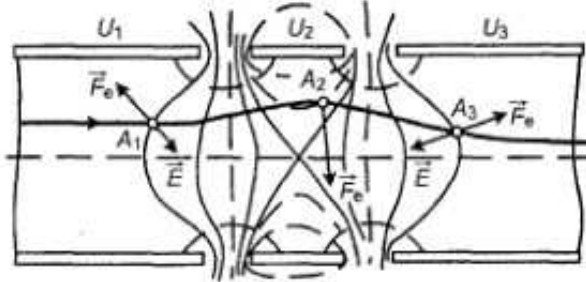


Рисунок 3.9 – Одиночна лінза і траєкторія електрона на різних ділянках

У точці A_2 сила, яка діє на електрон, направлена у бік осі. Ця ділянка є фокусувальною. Швидкість електрона під центральним електричним мінімумом, і він перебуває на цій ділянці більший час.

У точці A_3 сила знову намагається змінити траєкторію електрона в бік від осі.

Така конструкція лінзи дозволяє фокусувати електронний потік. Це пояснюється тим, що в фокусувальній ділянці на електрон триваліше діє радіальна складова сили. Одиночна лінза має важливу особливість: після її проходження електрон не змінює своєї енергії.

Сформулюємо основні властивості електронних лінз. По аналогії із світловою оптикою в електронній оптиці існує поняття *товстих* і *тонких* лінз. Як правило, в електронній оптиці лінзи відносять до типу товстих, схему побудови зображення в яких наведено на рис. 3.10.

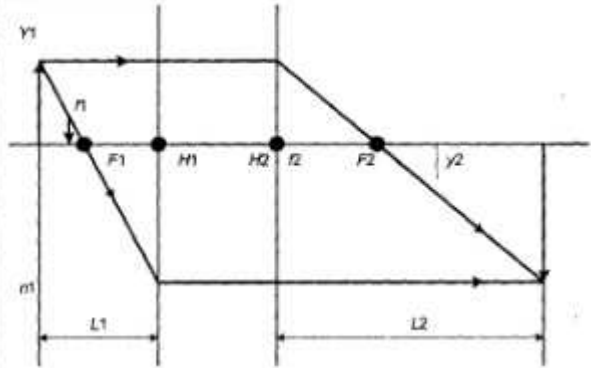


Рисунок 3.10 – Схема побудови зображення в товстій лінзі й її кардинальні точки F_1 , F_2 , H_1 , H_2

Уведемо співвідношення:

$$m = \frac{\varphi_2}{\varphi_1} \text{ – кутове збільшення;}$$

$$M = \frac{y_2}{y_1} \text{ – лінійне збільшення;}$$

$$f_1 = F_1 H_1 \text{ і } f_2 = F_2 H_2 \text{ – фокусні відстані.}$$

У цьому разі виконуються закони:

$$\frac{f_1}{L_1} + \frac{f_2}{L_2} = 1 \text{ – формула лінзи;}$$

$Mm = \frac{n_2}{n_1} = 1$, де n_1 і n_2 – показники заломлення.

В електронній оптиці роль показника заломлення відіграє величина $\sqrt{U}$, де U – напруга. Як і в оптиці, для електронних лінз характерні сферична, хроматична, геометрична аберації, викривлення площини зображення.

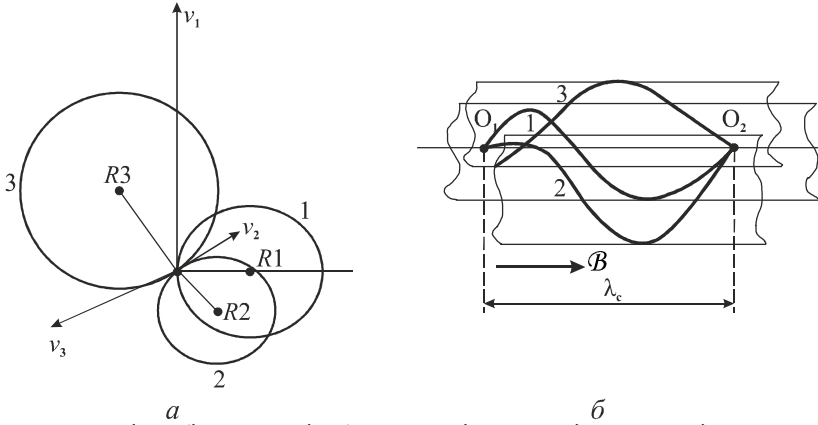
Перерахуємо основні властивості електронних траєкторій:

- для визначення траєкторії електрона достатньо знати розподіл потенціалу на осі симетрії;
- траєкторії електронів і йонів будуть співпадати, якщо в них однакові початкові умови (наприклад, кут нахилу);
- якщо потенціал всіх електродів і всіх точок простору змінити в однакову кількість разів, то траєкторія електронів не зміниться;
- при зміні розмірів електродів у n разів розміри траєкторії зміняться в таку саму кількість разів, що дозволяє здійснити масштабування і моделювання;
- траєкторії оборотні; якщо направити заряджену частинку у зворотному напрямку, надавши їй відповідну швидкість, то вона піде по тій самій траєкторії, але у зворотному напрямку;
- сукупність вихідних точок, які лежать в одній площині, можна розглядати як об'єкт, а сукупність точок, в яких збираються електронні траєкторії, можна розглядати як зображення об'єкта;
- при використанні параксіальних траєкторій можна отримати збільшене або зменшене зображення без спотворень.

3.1.3 Керування за допомогою магнітної оптики

Як зображення системи може бути використаний довгий соленоїд, який являє собою протяжну котушку, довжина якої в багато разів перевищує її діаметр, і по якій протікає струм. У центральній частині соленоїда утворюється практично однорідне магнітне поле, направлене по осі соленоїда.

У такому разі із кожної точки емітера виходитиме пучок спіральних ліній, які матимуть різні радіуси, але однаковий крок (рис. 3.11).



a – геометрія орбіт електронів; b – траєкторії електронів вздовж осі соленоїда
Рисунок 3.11 – Траєкторії електронів в однорідному магнітному полі

Усі електрони, які вийшли із точки O_1 , зберуться в точці O_2 . Точка O_2 є електронно-оптичним зображенням точки O_1 .

Величина $\lambda_c = v_{z_0} \frac{2\pi}{\omega}$ являє собою циклотронну довжину хвилі,

де $\omega = \eta B$ – циклотронна частота.

Коротка магнітна лінза являє собою котушки (виток) із струмом. Усі силові лінії такого витка із струмом замкнуті, а найбільше магнітне поле буде в центрі котушки. Коротка магнітна лінза дає дзвіноподібний розподіл магнітного поля (рис. 3.12).

Умовно приймемо, що магнітне поле зосереджено в області, обмеженій площинами M_1 і M_2 .

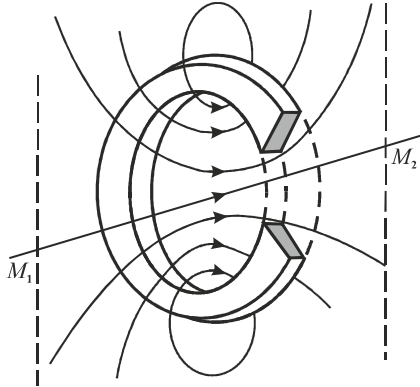
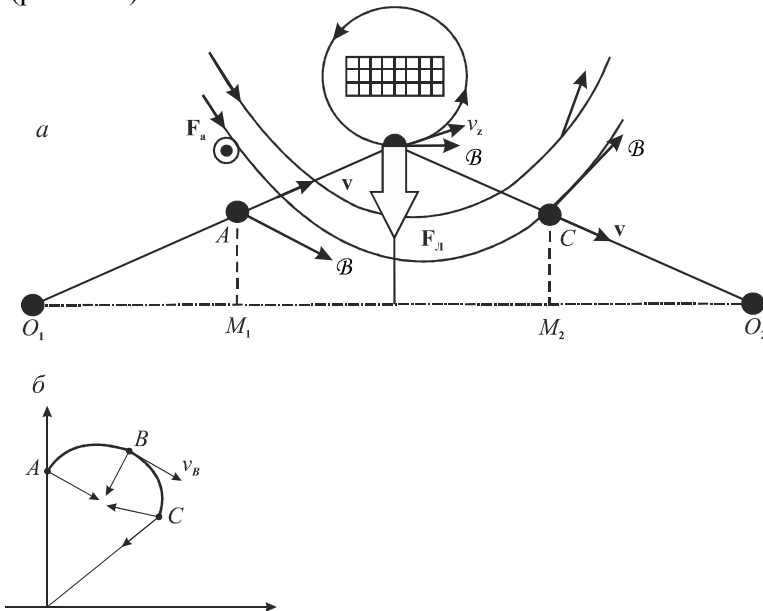


Рисунок 3.12 – Магнітне поле котушки із струмом, яке утворює коротку магнітну лінзу

Проаналізуємо траєкторії руху електрона, який вийшов із точки, розміщеної на осі, але поза діючого магнітного поля. Із цієї точки емітуються електрони з певною швидкістю і кутом нахилу вектора швидкості (рис. 3.13).



a - в меридіональній площині; b - проекція траєкторії в поперечній площині
Рисунок 3.13 – Траєкторії руху електронів у короткій магнітній лінзі

У точці А, поблизу магнітної лінзи, на електрон діє сила Лоренца $\mathbf{F}_л = -e[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$, при цьому вектор магнітної індукції $\mathbf{B}$ направлений по дотичній до силовій лінії магнітного поля. Згідно правила лівої руки векторний добуток визначає напрямок сили Лоренца від площини уверх. Ця сила $\mathbf{F}_л$ отримала назву азимутальної сили, яка виводить електрона не із початкової площини, і внаслідок цього траєкторія електрона отримує просторове викривлення.

У точці В, розміщеній в центрі лінзи, на електрон діє сила Лоренца. Одночасно на ділянці АВ під дією азимутальної сили виникає азимутальна швидкість, направлена під кутом 90° силовим лініям магнітного поля.

У точці С взаємне розміщення векторів $\mathbf{v}$ і $\mathbf{B}$ змінюється, азимутальна компонента змінює свій знак і гальмується кутовий рух електрона. На вихідній ділянці лінзи кутова швидкість зменшується і на виході в точці O_2 стає рівною нулю.

Точка O_2 є електронно-оптичним зображенням точки O_1 . Така лінза є фокусувальною.

Випишемо без виведення рівняння траєкторії в меридіональній площині в еквіпотенціальному просторі:

$$\frac{d^2 r}{dz^2} + \frac{\eta \mathcal{B}_z^2}{8U} r = 0,$$

де r – координата в циліндричній системі координат.

Це рівняння описує траєкторію електрона, що лежить в меридіональній площині, яка повертається навколо осі із кутовою швидкістю:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\eta \mathcal{B}_z}{2}. \quad (3.11)$$

Враховуючи, що для параксіальних пучків $v_z \gg v_r$ (в наближенні $\frac{mv^2}{2} \approx W_0$), для тонкої магнітної лінзи оптична сила:

$$\frac{1}{f} = \frac{e}{8mW_0} \int_a^b \mathcal{B}_z^2 dz \quad \text{або} \quad \frac{1}{f} \left[\frac{1}{\text{см}} \right] = \frac{0,22}{W_0 [\text{eВ}]} \int_a^b \mathcal{B}_z^2 [\text{Гс}] dz.$$

Кут повороту в магнітній лінзі:

$$\varphi(z) = \sqrt{\frac{e}{8mW_0}} \int_a^b \mathcal{B}_z^2 dz \quad \text{або} \quad \varphi[\text{рад}] = \frac{0,15}{\sqrt{W_0[\text{eB}]}} \int_a^b \mathcal{B}_z^2 [\text{Гс}] dz.$$

Для магнітного витка з силою струму I з радіусом R магнітне поле:

$$\mathcal{B}_z = \frac{\mathcal{B}_m}{\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

де $\mathcal{B}_m$ – поле в центрі витка.

Фокусна відстань для одного струмового витка:

$$f[\text{см}] \approx 96,8 \frac{W_0[\text{eB}] R[\text{см}]}{I^2[\text{A}]},$$

для котушки із N витків:

$$f[\text{см}] \approx 96,8 \frac{W_0[\text{eB}] R[\text{см}]}{(NI[\text{A}])^2}$$

Кут повороту:

$$\varphi[\text{рад}] = 0,19 \frac{NI[\text{A}]}{\sqrt{W_0[\text{eB}]}}$$

Для екранованої лінзи $f_e = kf$, де k – поправочний коефіцієнт, $k = 0,5 \div 0,7$.

Отже, властивості електронних траєкторій у магнітному полі:

- зміна полярності поля не змінює траєкторію в меридіональній площині;
- траєкторія електрона є просторовою кривою;
- розв'язок рівняння містить відношення заряду до маси для даної частинки, отже, в одному і тому самому магнітному полі траєкторії електронів і йонів різних речовин істотно різняться;
- розв'язки рівняння магнітної і електростатичної оптики аналогічні.

Тому за допомогою параксіальних траєкторій в аксіально-симетричному магнітному полі можна отримати викривлене електронно-оптичне зображення.

3.2 Приклади розв'язування задач

3.2.1 Яку кількість ампер-витків потрібно використати в безпанцирній магнітній лінзі, щоб отримати фокусну відстань $f = 8$ см? Середній діаметр котушки $d_{\text{сер}} = 5$ см. Енергія електронів у пучку $E = 100$ еВ.

Розв'язання

Фокусну відстань безпанцирної магнітної лінзи (в метрах) можна знайти з виразу

$$f = \frac{256}{3} \frac{m}{\pi e \mu_0^2} \frac{U d_{\text{сер}}}{(nI)^2}.$$

Під дією прискорювальної напруги електрони набули кінетичної енергії, отже

$$U = \frac{E}{e}.$$

Тоді кількість ампер-витків дорівнюватиме

$$\begin{aligned} nI &= \frac{1}{\mu_0 e} \sqrt{\frac{256 m E d_{\text{сер}}}{3 \pi f}} = \frac{1}{4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \times \\ &\times \sqrt{\frac{256 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}}{3 \cdot 3,14} \cdot \frac{100 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{8 \cdot 10^{-2}}} = 79 \text{ А} \cdot \text{витків}. \end{aligned}$$

Відповідь: $nI = 79$ А · витків.

3.2.2 Тонка магнітна лінза утворена полем, вектор-потенціал якого $\mathcal{A}_\rho = \mathcal{A}_z = 0$, $\mathcal{A}_\varphi = \frac{1}{\rho} \int_0^\rho \rho B(\rho, z) d\rho$. Функція $B(\rho, z)$ швидко спадає в області $|z| > l$. Знайдіть фокусну відстань лінзи і кут повороту зображення.

Розв'язання

Індукція магнітного поля в циліндричних координатах

$$\mathcal{B}_\rho = -\frac{\partial \mathcal{A}_\varphi}{\partial z}, \quad \mathcal{B}_\varphi = 0, \quad \mathcal{B}_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \mathcal{A}_\varphi).$$

Рівняння руху електрона із зарядом $q = -e$ мають вигляд:

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) = -e\rho\dot{\phi}\mathcal{B}, \quad (1)$$

$$\frac{m}{\rho} \frac{d}{dt} \rho\dot{\phi}^2 = e \left(\dot{z} \frac{\partial \mathcal{A}_\phi}{\partial z} + \frac{\dot{\rho}}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \mathcal{A}_\phi) \right), \quad (2)$$

$$m\ddot{z} = -e\dot{\phi} \int \rho \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial z} d\rho. \quad (3)$$

З рівняння (2) випливає вираз для першого інтегралу

$$m\rho^2\dot{\phi} - e \int_0^\rho \rho \mathcal{B}(\rho, z) d\rho = M_0. \quad (4)$$

Вважатимемо, що об'єкт знаходиться в точці з координатами $\rho_1 = 0$, $z_1 = -d$. Для параксіального пучка електронів з (4) випливає

$$m\rho^2\dot{\phi} - \frac{e}{2}\rho^2\mathcal{B}(0, z) = 0. \quad (5)$$

Підставляючи $\dot{\phi}$ в (1), отримуємо рівняння

$$\ddot{\rho} + \left(\frac{e\mathcal{B}(0, z)}{2m} \right)^2 \rho = 0. \quad (6)$$

Область, зайнята магнітним полем, невелика, тому можна знехтувати правою частиною рівняння (3). В цьому наближенні $\dot{z} \simeq u$, де u – проекція початкової швидкості електрона на вісь z . Переходячи від аргументу t до z , маємо

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dz} u, \quad \ddot{\rho} = \frac{d^2\rho}{dz^2} u^2,$$

отримаємо з (6) рівняння

$$\frac{d^2\rho}{dz^2} + \left(\frac{e\mathcal{B}(0, z)}{2mu} \right)^2 \rho = 0. \quad (7)$$

У випадку довільної функції $\mathcal{B}(0, z)$ рівняння (7) не інтегрується в кінцевому вигляді. Знайдемо наближений розв'язок (7), вважаючи, що на довжині лінзи $\rho(z) \simeq \rho(0)$ змінюється повільно. Інтегруючи (7), отримаємо

$$\left(\frac{d\rho}{dz} \right)_{z_2} - \left(\frac{d\rho}{dz} \right)_{z_1} = -\rho(0) \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{e\mathcal{B}(0, z)}{2mu} \right)^2 dz. \quad (8)$$

Для параксіального пучка

$$\left(\frac{d\rho}{dz}\right)_{z_1} = \frac{\rho(0)}{d}, \quad \left(\frac{d\rho}{dz}\right)_{z_2} = -\frac{\rho(0)}{f}, \quad (9)$$

де f – відстань між лінзою і зображенням. Підставляючи (9) в (8), отримаємо формулу лінзи

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}, \quad \frac{1}{F} \approx \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e\mathcal{B}(0, z)}{2mu} \right)^2 dz, \quad (10)$$

де F – фокусна відстань лінзи. Зображення протяжного об'єкту, повернутого на кут

$$\Delta\varphi = \frac{e}{2mu} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{B}(0, z) dz. \quad (11)$$

Наприклад, для випадку $\mathcal{B}(0, z) = \frac{\mathcal{B}_0}{\text{ch}\left(\frac{z}{a}\right)}$ фокусна відстань і кут

повороту зображення

$$F = \frac{1}{2a} \left(\frac{2mu}{e\mathcal{B}_0} \right)^2, \quad \Delta\varphi = \frac{e\mathcal{B}_0 a}{2mu}.$$

Відповідь: $\frac{1}{F} \approx \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e\mathcal{B}(0, z)}{2mu} \right)^2 dz; \quad \Delta\varphi = \frac{e}{2mu} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{B}(0, z) dz.$

3.2.3 Електронно-оптична система складається з катода К, двох діафрагм D_1 і D_2 . Всі відстані між електродами однакові і дорівнюють $d = 1$ см. Потенціал першої діафрагми дорівнює потенціалу анода $U_1 = 100$ В (потенціал відраховується від катода). Визначте, який повинен бути потенціал другої діафрагми U_2 , щоб електрони, що пройшли через систему, сфокусувалися на аноді.

Розв'язання

Вважатимемо, що діаметр отвору діафрагми набагато менший за d . Тому дію кожної діафрагми на промінь можна розглядати незалежно від дії інших діафрагм.

Зіставляючи електронно-оптичну систему з її оптичним еквівалентом (рис. 3.14), можна замінити кожену діафрагму оптичною лінзою з відповідною фокусною відстанню. Користуючись для другої лінзи співвідношенням $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$, знайдемо умову, при якій електрони фокусуватимуться на аноді

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{d - f_1} + \frac{1}{d}. \quad (1)$$

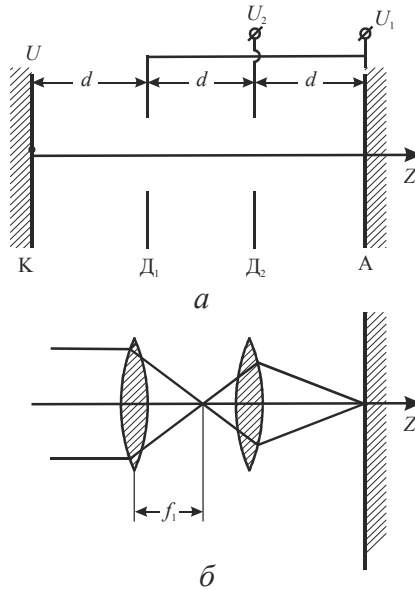


Рисунок 3.14 – Електронно-оптична система (а) та її оптичний еквівалент (б)

Фокусні відстані діафрагм, згідно з

$$f = \frac{4U_D}{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}, \quad (2)$$

де U_D – потенціал в центрі отвору діафрагми, $\mathcal{E}_1$ та $\mathcal{E}_2$ – поля по обидві боки діафрагми, відповідно дорівнюватимуть

$$f_1 = \frac{4U_1 d}{U_2 - 2U_1}, \quad f_2 = \frac{4U_2 d}{2(U_1 - U_2)}. \quad (3)$$

Підставляючи (3) в (1), матимемо рівняння

$$5U_2^2 - 23U_2U_1 + 6U_1^2 = 0,$$

розв'язки якого $U_2 = 432$ В і $U_2 = 28$ В.

Відповідь: $U_2 = 432$ В ; $U_2 = 28$ В.

3.2.5 Магнітна лінза представляє собою круглий виток радіусом $R = 1$ см, по якому тече деякий струм. Фокусна відстань лінзи $f = 10$ см. Розрахуйте струм, необхідний для забезпечення вказаної фокусної відстані і кут θ , на який лінза повертає зображення. Електрони пучка прискорюються потенціалом 1000 В.

Розв'язання

Фокусна відстань магнітної лінзи визначається виразом

$$\frac{1}{f} = \frac{e}{8mU_0} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{B}^2(z) dz, \quad (1)$$

а значення магнітного поля на осі – виразом

$$\mathcal{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (2)$$

де z – відстань від площини витка до точки спостереження.

Розрахуємо інтеграл у правій частині (1) за допомогою заміни змінних $z = R \operatorname{ctg} \varphi$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{B}^2(z) dz &= \frac{\mu_0^2 I^2 R^4}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(R^2 + z^2)^3} = \frac{\mu_0^2 I^2 R^5}{4R^6} \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi (1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi)^6} = \\ &= \frac{\mu_0^2 I^2}{4R} \int_0^{\pi} \sin^{10} \varphi d\varphi = \frac{3\pi}{32} \frac{\mu_0^2 I^2}{R} = \frac{8mU_0}{ef}. \end{aligned}$$

Розрахуємо струм витка

$$I = \sqrt{\frac{256mU_0R}{3\pi\mu_0^2ef}} = \sqrt{\frac{256 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^3 \cdot 10^{-2}}{3 \cdot 3,14 \cdot (4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7})^2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,1}} = 98 \text{ А}.$$

Кут θ , на який лінза повертає зображення, знайдемо за формулою

$$\theta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{e}{2mU_0}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{B}(z) dz. \quad (3)$$

Інтеграл у формулі (3) знайдемо за законом повного струму

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I = \int_{-\infty}^{\infty} B(z) dz ,$$

тому

$$\theta = \frac{\mu_0 I}{2} \sqrt{\frac{e}{2mU_0}} = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7}}{2} \cdot \sqrt{\frac{1,6 \cdot 10^{-19}}{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^3}} \approx 0,58 \text{ рад} .$$

Відповідь: $I = 98 \text{ A}$; $\theta = 0,58 \text{ рад}$.

3.3 Задачі для самостійного розв'язування

3.3.1 Крізь виток радіусом 3 см протікає струм 1 А . Розрахуйте магнітне поле на відстані 1 см від площини витка. Знайдіть відстань, на якій поле спадає до 0,1 від вихідної величини.

3.3.2 Електронний пучок уводиться в довгий соленоїд під малим кутом до осі. Крізь соленоїд протікає струм 2 А . Розрахуйте магнітне поле і число витків у соленоїді, якщо електрони фокусуються на відстані 25 см від місця введення і прискорені напругою 625 В .

3.3.3 Електронно-оптична система складається з катоду, сітки, що прискорює, під потенціалом 50 В . Відстань сітка – діафрагма 1 см . Розрахуйте, на якій відстані потрібно розмістити анод, щоб на ньому фокусувався електронний потік.

3.3.4 Електрони фокусуються тонкою магнітною лінзою на відстані від неї 20 см . Індукція магнітного поля в центрі котушки складає 10^{-3} Тл, середній радіус котушки 2 см , електрони прискорені напругою 20 В . Розрахуйте число витків у котушці.

3.3.5 Електрон із нульовою початковою швидкістю рухається в полі плоского конденсатора, напруга на пластинах якого 600 В , а відстань між ними 0,6 см . Через який час електрон досягне позитивно зарядженої пластини?

3.3.6 В електронно-променевій трубці використовують паралельні відхиляючі пластини довжиною 2 см, відстань між якими 0,5 см . Пластини горизонтального відхилення віддалені від екрана на 49 см, а вертикального – на 52 см. Яка чутливість систем горизонталь-

ного і вертикального відхилення, якщо прискорювальна напруга 1000 В ?

3.3.7 Пучок електронів вводиться у довгий соленоїд, який має 1000 витків на 1 м довжини. Електрони прискорені потенціалом 1000 В. Визначте, яким має бути магнітне поле в обмотці соленоїда, щоб електрони, які вводяться під невеликим кутом до осі, фокусувалися на відстані 20 см від місця їхнього введення.

3.3.8 Електрон рухається в полі плоского конденсатора, напруга на пластинах якого складає 500 В, а відстань між ними 0,5 см. Якою повинна бути величина магнітного поля, прикладеного паралельно пластинам, щоб електрон не досягав позитивно зарядженої пластини?

3.3.9 Пучок електронів, прискорених напругою 400 В, відхиляють, пропускаючи між плоскопаралельними пластинами довжиною 15 мм, що відстоять одна від одної на відстані на 8 мм і мають різницю потенціалів 200 В. Обчисліть відхилення променя, якщо мішень розташована на відстані 120 мм від краю пластин.

3.3.10 Скільки обертів робить електрон за 1 с у магнітному полі індукцією $B = 10^{-2}$ Тл ?

3.3.11 Два електрони починають свій рух із стану спокою. Який електрон пройшов більшу різницю потенціалів і у скільки разів, якщо перший набрав швидкість 6000 км/с, а другий 12000 км/с?

3.3.12 Яку кількість витків потрібно використати в котушці безпанцирної магнітної лінзи, щоб отримати фокусну відстань f ? Середній діаметр котушки $d_{\text{сер}}$; струм у обмотці I , а швидкість електронів у пучку v .

№ варіанту	f , см	$d_{\text{сер}}$, см	I , А	v , $10^6 \frac{\text{м}}{\text{с}}$
1	14	6	0,5	4
2	4	3	1	1
3	10	5	0,1	10
4	8	7	0,8	7
5	12	4	0,6	5

3.3.13 Визначте різницю потенціалів, що прискорила електрон, який набув швидкість 18000 км/с за початкової швидкості, рівної нулю.

3.3.14 Використовуючи основне рівняння електронної оптики електричних полів, покажіть, що для електростатичної електронної лінзи виконується теорема Лагранжа – Гельмгольца $Mm \frac{n_2}{n_1} = 1$, де

M – лінійне збільшення лінзи, m – кутове збільшення лінзи, n_1 і n_2 – показники заломлення середовища з різних боків лінзи.

3.3.15 Покажіть, що для тонкої слабкої електростатичної лінзи виконується умова:

$$\frac{f_1}{l_1} + \frac{f_2}{l_2} = 1,$$

де f_1 і f_2 – фокусні відстані лінзи; l_1 і l_2 – відстані від джерела електронів до лінзи і від лінзи до зображення джерела електронів відповідно (рис. 3.15).

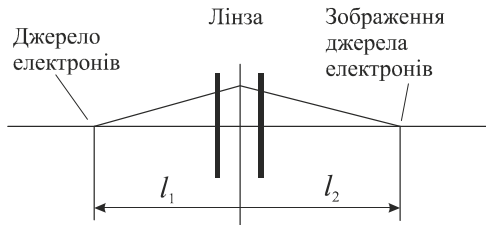


Рисунок 3.15

3.3.16 Електростатична лінза (рис. 3.16) утворена в отворі металевого екрану 2, що розділяє простір між катодом 1 і колектором електронів 3. Діаметр отвору в екрані $\delta=5$ мм, відстані між електродами $d_1=20$ мм, $d_2=30$ мм. Потенціали: катода $U_1=0$, екрана $U_2=200$ В, колектора $U_3=500$ В. Знайдіть фокусну відстань лінзи.

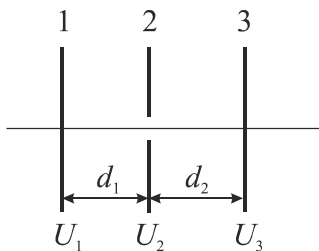


Рисунок 3.16

3.3.17 Підрахуйте фокусну відстань f короткої магнітної лінзи. Лінза представляє собою короткий соленоїд радіуса $R=1\text{ см}$ з $n=100$ витків дроту, по якому протікає струм $I=1\text{ А}$. Енергія електронів становить 1000 еВ .

3.3.18 Оцініть роздільну здатність електронного мікроскопа, якщо потенціал, який прискорює електрони, становить 100 еВ .

4 ЕЛЕКТРИЧНИЙ РОЗРЯД У ГАЗАХ

4.1 Основні формули і визначення

У загальному випадку частинками в газовому середовищі є молекули, атоми, позитивні іони, негативні йони і електрони. При русі відбувається зіткнення частинок між собою з відповідним їх розсіюванням.

Поведінка частинок характеризується такими параметрами, як *середня довжина вільного пробігу* частинки $\bar{\lambda}$ й *ефективний переріз* $Q=1/\bar{\lambda}$ (іноді повний ефективний переріз).

Середня довжина вільного пробігу частинки $\bar{\lambda}$ вказує на середню довжину шляху, на якому вона не має зіткнень з іншими частинками. При конкретизації типу частинки позначення $\bar{\lambda}$ набуває відповідний індекс. Наприклад, $\bar{\lambda}_e$ – середня довжина вільного пробігу електрона.

Середня довжина вільного пробігу молекули в газі

$$\bar{\lambda} = \frac{k_B T}{\sqrt{2} \pi d^2 P},$$

де d – діаметр молекули; P – тиск газу в паскалях (1мм рт. ст.=133,322 Па).

Середня довжина вільного пробігу електрона в газі

$$\bar{\lambda}_e = \frac{4k_B T}{\pi d^2 P}.$$

Ефективний переріз Q показує, скільки зіткнень зазнає частинка на одиниці шляху. Для електронів ефективний переріз Q_e іноді називають *коефіцієнтом поглинання*, оскільки при проходженні через газ введений ззовні електронний пучок ослабляється.

Для того, щоб вказані параметри були параметрами конкретного роду газу, їх використовують в приведеному вигляді, тобто приводять до температури $T = 273$ К і тиску газу $P = 1$ Па. В цьому випадку в позначенні параметра з'являється індекс 0. Наприклад, Q_0 – повний ефективний переріз для зіткнень молекул при одиничному тиску і температурі газу $T = 273$ К.

Важливим в кінетичній теорії газів є рівняння, що дозволяє визначити, яке число частинок N_x із загального числа частинок N при русі в газі пройде без зіткнень шлях x :

$$N_x = N e^{-\frac{x}{\bar{\lambda}}} = N e^{-Qx}. \quad (4.1)$$

Наведене рівняння також застосовне і до руху електронів у газі.

З урахуванням того, що електрон через малу масу рухається значно швидше за молекули, останні можна вважати нерухомими при виведенні співвідношень між параметрами молекул і електронів за умови пружних зіткнень. Їх вигляд

$$Q_e = \frac{Q}{4\sqrt{2}}; \quad \bar{\lambda}_e = 4\sqrt{2}\bar{\lambda}. \quad (4.2)$$

Середня швидкість електронів у газі

$$\bar{v}_{ex} = -0,815 \sqrt{\frac{e\bar{\lambda}_{e0}}{m_e}} \sqrt[4]{\kappa} \sqrt{\frac{\mathcal{E}}{P_0}}, \quad (4.3)$$

де P_0 – тиск, приведений до 0°C ($P_0 = \frac{273}{T} P$, де P – тиск газу в об'ємі); κ – частка енергії, що передається в середньому електроном атому при сутичці з ним, яка називається коефіцієнтом акомодатії і

яка відповідно до кінетичної теорії газів дорівнює $\kappa = 2 \frac{m_e}{m_a}$; $\bar{\lambda}_{e0}$ – довжина вільного пробігу електрона за температури 273 К і тиску газу $P = 1$ Па. Причому $\bar{\lambda}_{e0} = 4\sqrt{2} \bar{\lambda}_0$.

Без дії зовнішніх сил заряджені частинки рухаються в газі за законами дифузії. Згідно закону Ейштейна,

$$l^2 = 2D\tau, \quad (4.4)$$

де l – відстань, на яку перемістилася частинка; τ – час, що витрачається на це переміщення; D – коефіцієнт дифузії, визначуваний як

$$D = \frac{\lambda \bar{v}}{3} = \frac{\bar{v}}{3Q}. \quad (4.5)$$

4.1.1 Акти взаємодії частинок в газі

При виникненні нерівноважних носіїв заряду можливі різні акти взаємодії частинок. При цьому, окрім пружних зіткнень, виникають непружні зіткнення. При непружному зіткненні змінюється внутрішня енергія хоча б однієї з частинок, і вона переходить в інший стан. Наприклад, можливі акти іонізації, збудження, рекомбінації, перезарядки. Кожний з цих процесів характеризується ефективним перерізом, в позначенні якого присутній індекс, що вказує на рід процесу (Q_i – іонізація, Q_z – збудження, Q_r – рекомбінація, Q_{Π} – перезарядка). Ці величини вказують на число зіткнень даного роду, проведених зарядженою частинкою на одиниці шляху.

Ефективний переріз непружного зіткнення може бути виражений через імовірність, яка показує, яка частка всіх зіткнень призводить до непружних процесів даного роду. Наприклад, імовірність іонізації

$$w_i = \frac{Q_i}{Q}. \quad (4.6)$$

Імовірність іонізації молекул та атомів газів апроксимується формулою

$$w_i(U) = \alpha (U - U_i) e^{\frac{U - U_i}{\beta}}, \quad (4.7)$$

де U_i – потенціал іонізації; α, β – чисельні коефіцієнти (табл. Е.1).

Рекомбінацією називають зіткнення носіїв заряду протилежного знаку, що призводить до їх взаємної нейтралізації (наприклад, іон-іонна, електрон-іонна рекомбінації).

Число актів рекомбінації, що відбувається в одиниці об'єму газу за час dt , пропорційне концентрації носіїв позитивного заряду n_+ , концентрації носіїв негативного заряду n_- і часу dt :

$$dn = -\alpha_r n_+ n_- dt,$$

де α_r – коефіцієнт об'ємної рекомбінації розмірністю $\text{м}^3 \cdot \text{с}^{-1}$.

Газові розряди класифікуються на несамостійні і самостійні.

Для підтримки *несамостійного розряду* потрібна емісія електронів з катода або утворення заряджених частинок під дією зовнішніх факторів. Нехай $\left(\frac{dn}{dt}\right)_{\text{утв}}$ – швидкість зміни концентрації зарядів зов-

нішнім джерелом іонізації; $\left(\frac{dn}{dt}\right)_{\text{рек}}$ – швидкість рекомбінації зарядів.

При динамічній рівновазі ці швидкості рівні: $\left(\frac{dn}{dt}\right)_{\text{утв}} = \left(\frac{dn}{dt}\right)_{\text{рек}}$. Тоді

$n = n_+ = n_-$ (дана рівність справедлива для випадку, коли швидкість $\left(\frac{dn}{dt}\right)_{\text{рек}}$ значно більше за число електронів, що потрапляють на 1 м^2 за 1 с на електрод). А оскільки швидкість рекомбінації пропорційна добутку концентрації зарядів, тобто n^2 , то

$$\left(\frac{dn}{dt}\right)_{\text{утв}} = -\alpha_r n^2.$$

Повна густина струму j у газах за умов несамостійного розряду є сумою густин струмів, які зумовлені рухом позитивних і негативних іонів:

$$j = j_+ + j_-, \quad (4.8)$$

а

$$j_{\pm} = q n_{\pm} \mu_{\pm} \mathcal{E} - q D_{\pm} \frac{dn_{\pm}}{dx}, \quad (4.9)$$

де q – модуль заряду іонів; $\mu_{\pm}$ – рухливість (позитивних або негативних) іонів; $D_{\pm}$ – коефіцієнт дифузії іонів; $n_{\pm}$ – концентрація іонів; $\frac{dn_{\pm}}{dx}$ – градієнт концентрації іонів у газі.

Якщо напруженість поля достатньо велика, так що всі іони, що утворюються зовнішнім джерелом, встигають без рекомбінації дійти до електродів, то швидкість рекомбінації $\left(\frac{dn}{dt}\right)_{рек} = 0$. При цьому виникає струм насичення, густина якого

$$j_{нас} = ed \left(\frac{dn}{dt} \right)_{утв},$$

де d – відстань між катодом і анодом; e – заряд електрона.

При *самостійному розряді* генерація і рух зарядів відбуваються за рахунок енергії електричного поля між анодом і катодом. При цьому електрони, рухаючись в газі під дією електричного поля, набувають достатню енергію для іонізації молекул газу.

Формула Таунсенда для електричного пробою (виникнення самостійного газового розряду з несамостійного розряду):

$$\gamma(e^{\alpha d} - 1) = 1, \quad (4.10)$$

де α – коефіцієнт об'ємної іонізації - число пар електронів та іонів, що утворюються одним електроном на одиниці його шляху, $[m^{-1}]$; γ – коефіцієнт вторинної емісії (кількість вторинних електронів, вибитих з катоду одним позитивним іоном).

Коефіцієнт α залежить від напруженості електричного поля $\mathcal{E}$ у газі та тиску P . При цьому, як показує дослід, відношення α/P є функцією відношення напруженості поля до тиску газу:

$$\frac{\alpha}{P} = f\left(\frac{\mathcal{E}}{P}\right), \quad (4.11)$$

де вигляд функції f залежить від роду газу.

4.2 Приклади розв'язування задач

4.2.1 Електрон рухається в неоні під дією електричного поля напруженістю $\mathcal{E} = 5 \cdot 10^3 \frac{\text{В}}{\text{м}}$. Тиск газу $P = 0,25$ мм рт.ст. Визначте α – число актів іонізації, здійснюваних електроном при русі на шляху в 1 м.

Розв'язання

Рішення задачі було запропоноване вченим Таунсендом за таких припущень:

а) імовірність іонізації апроксимується спрощеним законом:

$$w_i = \begin{cases} 0, & \text{якщо } U < U_i, \\ 1, & \text{якщо } U > U_i, \end{cases}$$

де U – напруга між електродами; U_i – потенціал іонізації.

б) швидкість хаотичного руху електронів не враховується;

в) при кожному зіткненні електрон повністю втрачає придбану ним енергію.

Відповідно до (4.1) у електрона, що рухається у газі, ймовірність вільного пробігу довжиною, більшою за L , буде дорівнювати $e^{-\frac{L}{\lambda_e}}$.

Тому з N вільних пробігів лише $Ne^{-\frac{L}{\lambda_e}}$ за довжиною перевершуватимуть L . Рухаючись уздовж поля напруженістю $\mathcal{E}$, електрон на шляху L набуває енергію $e\mathcal{E}L$. Якщо $L \geq \frac{U_i}{\mathcal{E}}$, то електрон іонізує молекулу

газу. Отже, з N вільних пробігів лише $Ne^{-\frac{U_i}{\mathcal{E}\lambda_e}}$ приводитимуть до іонізації.

З припущень б) і в) випливає, що рух електронів прямолінійний. На шляху в 1 м він зробить Q_e зіткнень з молекулами газу; з них тільки $Q_e e^{-\frac{U_i}{\mathcal{E}\lambda_e}}$ приводитимуть до іонізації. Число актів іонізації

$$\alpha = Q_e e^{-\frac{U_i}{\mathcal{E}\lambda_e}} = Q_{e0} P e^{-\frac{U_i Q_{e0} P}{\mathcal{E}}} = 1520 \cdot 0,25 \cdot e^{-\frac{21,5 \cdot 1520 \cdot 0,25}{5000}} = 74 \text{ м}^{-1}.$$

Відповідь: $\alpha = 74 \text{ м}^{-1}$.

4.2.2 Для дослідження пружних зіткнень електронів з молекулами газу виготовлено прилад, який складається з катода, колектора, двох сіток, які перебувають у замкнутому просторі, наповненому гелієм (рис. 4.1).

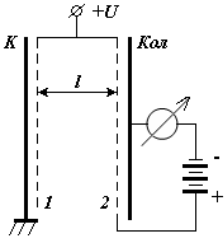


Рисунок 4.1 – Прилад для дослідження пружних зіткнень

На сітки подається однаковий потенціал $U = 18$ В. Тиск газу $P = 1,2$ мм рт. ст. Відстань між сітками $l = 1,0$ см. Визначте енергію електронів, які пройшли за допомогою дифузії через проміжок l , а також електронів, які входять крізь сітку 2 в проміжок сітка-колектор?

Розв'язання

Електрони, які виходять з катода, прискорюються першою сіткою до енергії $E = eU$. З цією енергією вони входять в проміжок сітка-сітка. При дифузії від сітки 1 до сітки 2 електрони випробовують багатократні пружні зіткнення (непружних зіткнень бути не може, оскільки резонансний рівень збудження атома гелію відповідає 19,8 В). Якщо таких зіткнень було N , то електрони проходять до другої сітки, втративши енергію $\Delta E = N\kappa E$.

Істинний шлях, який проходить частинка, буде $l = N\bar{\lambda}_e$; час шляху складе $\tau = \frac{N\bar{\lambda}_e}{\bar{v}}$. Тоді відповідно до (5.4) і (5.5)

$$l^2 = 2D\tau = 2D \frac{N\bar{\lambda}_e}{\bar{v}} = 2 \frac{\bar{v}_e}{3Q_e} \cdot \frac{N}{\bar{v}_e Q_e} = \frac{2N}{3Q_e^2}.$$

Звідки

$$N = \frac{3}{2} Q_e^2 l^2 = \frac{3}{2} (Q_e P l)^2 = \frac{3}{2} (1,35 \cdot 10^3 \cdot 1,2 \cdot 10^{-2})^2 = 393.$$

Енергія електронів в області сітки 2

$$E_2 = E - \Delta E = eU(1 - N\kappa) = 18(1 - 393 \cdot 2,7 \cdot 10^{-4}) = 16,2 \text{ еВ}.$$

Енергія електронів поблизу колектора

$$E_{\text{кол}} = E_2 + E = 16,2 + 18 = 34,2 \text{ еВ}.$$

Відповідь: $E_{\text{кол}} = 34,2$ еВ.

4.2.3 Визначте кількість йонів, які падають на 1 м^2 електрода в 1с, а також кількість йонів, які рекомбінують в просторі між електро-

дами. Порівняйте отримані результати і оцініть коректність застосування формули (5.6). Механізм дифузії електронів не враховуйте. Рухливості йонів $\mu_+ = \mu_- = 10^{-4} \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$; коефіцієнт рекомбінації $\alpha_r = 1 \frac{\text{м}^3}{\text{с}}$; швидкість зміни концентрації зарядів зовнішнім джерелом йонізації $\left(\frac{dn}{dt}\right)_{\text{вне}} = 10^{16} \frac{\text{йонів}}{\text{м}^3 \cdot \text{с}}$; напруженість поля $\mathcal{E} = 10^3 \text{ В/м}$; відстань між електродами $d = 0,1 \text{ м}$.

Розв'язання

Густина струму між електродами

$$\begin{aligned} j &= j_+ + j_- = qn_+\mu_+\mathcal{E} + qn_-\mu_-\mathcal{E} = q(\mu_+ + \mu_-)n\mathcal{E} = \\ &= q(\mu_+ + \mu_-) \sqrt{\frac{1}{\alpha_r} \left| \frac{dn}{dt} \right|_{\text{вне}}} \mathcal{E}. \end{aligned}$$

Формула справедлива для випадку, коли кількість рекомбінуючих йонів в 1с набагато більше кількості йонів, які потрапляють за 1с на електрод.

Кількість йонів, які потрапляють на 1 м^2 електроду за 1с, дорівнює

$$\frac{j}{q} = (\mu_+ + \mu_-) \sqrt{\frac{1}{\alpha_r} \left| \frac{dn}{dt} \right|_{\text{вне}}} \mathcal{E} = 2 \cdot 10^{-4} \sqrt{\frac{1}{1} \cdot 10^{16} \cdot 10^3} = 2 \cdot 10^7 \frac{\text{йонів}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}.$$

Швидкість рекомбінації зарядів зовнішнім джерелом йонізації

$$\left(\frac{dn}{dt}\right)_{\text{вне}} = 10^{16} \frac{\text{йонів}}{\text{м}^3 \cdot \text{с}}. \text{ Тоді в просторі між електродами на } 1 \text{ м}^2 \text{ попе-}$$

речного перетину в 1с рекомбінує $10^{16} \cdot d = 10^{15} \text{ йонів}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$. Отже, застосування формули (5.6) є коректним.

4.2.4 Розрахуйте потенціал запалювання в наповненій азотом розрядній трубці, два плоскопаралельні електроди якої розділені проміжком довжиною 4 мм. Відношення ступеню йонізації до тиску дорівнює $\frac{\alpha}{P} = 500 \frac{\text{пар йонів}}{\text{м} \cdot \text{ммрт. ст.}}$, а відношення напруженості електричного

поля до тиску $\frac{\mathcal{E}}{P} = 10^5 \frac{\text{В}}{\text{м} \cdot \text{мм рт.ст.}}$. Коефіцієнт вторинної емісії

$\gamma = 0,07$. Знайдіть напруженість електричного поля і тиск у трубці.

Розв'язання

Потенціал запалювання дорівнює

$$U_s = \mathcal{E}d.$$

З умови пробою

$$\gamma(e^{\alpha d} - 1) = 1$$

знайдемо вираз для d

$$d = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1+\gamma}{\gamma} \approx \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{\gamma}, \text{ оскільки } \gamma \ll 1.$$

Отже,

$$U_s = \mathcal{E}d = \frac{\mathcal{E}}{P} P d = \frac{\mathcal{E}}{P} P \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{\gamma} = \frac{\mathcal{E}}{P} \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{\gamma} = 443 \text{ В}.$$

Звідси напруженість електричного поля

$$\mathcal{E} = \frac{U_s}{d} \approx 10^5 \frac{\text{В}}{\text{м}},$$

а тиск у трубці

$$P = \frac{\mathcal{E}}{\left(\frac{\mathcal{E}}{P}\right)} = 1 \text{ мм рт.ст.}$$

Відповідь: $U_s = 443 \text{ В}$; $\mathcal{E} = 10^5 \text{ В/м}$; $P = 1 \text{ мм рт.ст.}$

4.2.5 В електронно-променевій трубці міститься аргон при тиску $1,8 \cdot 10^{-3}$ мм рт. ст. З електронної гармати виходить пучок електронів з силою струму $I_0 = 2 \cdot 10^{-4}$ А. Електрони прискорені напругою в 350 В. Відстань від гармати до екрану $L = 0,35$ м. Визначте частку електронів пучка, які дійшли до екрану нерозсіяними, а також кількість йонізацій, здійснюваних електронами пучка за 1 секунду.

Розв'язання

Відповідно до (4.1) частка нерозсіяних електронів, що пройшли шлях L без зіткнень

$$\frac{N_L}{N} = e^{-\frac{L}{\lambda_e}} = e^{-\frac{L}{\lambda_{e0}} P} = e^{-\frac{0,35 \cdot 1,8 \cdot 10^{-3}}{4,38 \cdot 10^{-4}}} = 0,246.$$

Це означає, що зі всієї кількості N електронів пучка зіткнення з молекулами газу випробують тільки $N - N_L$ електронів. Але зі всіх цих зіткнень тільки $(N - N_L) w_i$ приведуть до йонізації.

Відповідно до (4.6), рис. Б.1 і табл. В.1 імовірність йонізації атомів аргону електронами складає

$$w_i = \frac{Q_{i0}}{Q_{e0}} = \frac{750}{2270} = 0,34.$$

Кількість йонізацій, здійснюваних пучком за 1 с, з урахуванням того, що $\frac{I_0}{e} = N$, дорівнює

$$\begin{aligned} n_i &= \frac{I_0}{eN} (N - N_L) w_i = \frac{I_0}{e} \left(1 - \frac{N_L}{N}\right) w_i = \\ &= \frac{2 \cdot 10^{-4}}{1,6 \cdot 10^{-19}} (1 - 0,246) \cdot 0,34 = 3,2 \cdot 10^{-14} \text{ с}^{-1}. \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{N_L}{N} = 0,246$; $n_i = 3,2 \cdot 10^{-14} \text{ с}^{-1}$.

4.2.6 Визначте, чи може йон літію (відносна атомна маса $A=7$), який має кінетичну енергію $E_k=60$ еВ, завдяки непружному зіткненню йонізувати атом гелію?

Розв'язання

При непружному зіткненні двох частинок мають виконуватися:

а) закон збереження енергії

$$\frac{m_1 u_0^2}{2} + \frac{m_2 v_0^2}{2} = \frac{m_1 u^2}{2} + \frac{m_2 v^2}{2} + E_{II},$$

де m_1, u_0, u – маса, початкова і кінцева швидкість першої частинки;

m_2, v_0, v – маса, початкова і кінцева швидкість другої частинки;

E_{II} – потенціальна енергія стану, порушеного при непружному ударі.

б) закон збереження кількості руху

$$m_1 u_0 + m_2 v_0 = m_1 u + m_2 v.$$

Припустимо, до зіткнення одна частинка перебуває в стані спокою (що повною мірою справедливо по відношенню до нейтральної частинки, $v_0 = 0$), тоді швидкість іншої частинки після зіткнення:

$$v = \frac{m_1 (u_0 - u)}{m_2}.$$

У цьому випадку рівняння збереження енергії

$$\frac{m_1 u_0^2}{2} = \frac{m_1 u^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{m_2} (u_0 - u)^2 + E_{\Pi}.$$

Найбільше можливе значення E_{Π} визначається з умови $\frac{dE_{\Pi}}{du} = 0$, яка після перетворення матиме вигляд

$$u = u_0 \frac{m_1}{m_1 + m_2}.$$

Підставляючи цей вираз у попередню формулу, отримаємо

$$E_{\Pi \max} = E_{\kappa} \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

Відповідно до умови задачі $m_1 = 7m_p$ (m_p – маса протона) і $m_2 = 4m_p$ (табл. А.1). Тоді

$$E_{\Pi \max} = \frac{60 \cdot 4}{4 + 7} = 21,8 \text{ eB}.$$

Одержана величина менше енергії, необхідної для йонізації гелію (для гелію $eU_i = 24,5 \text{ eB}$).

Відповідь: $E_{\Pi \max} = 21,8 \text{ eB}$, що менше енергії, необхідної для йонізації гелію.

4.2.7 Яку мінімальну швидкість повинен мати електрон для йонізації молекули аргону, який має потенціал йонізації $U_{i1} = 11,6 \text{ В}$? Електрон з цією швидкістю при зіткненні з молекулою ртуті йонізує її; потенціал йонізації ртуті $U_{i2} = 10,4 \text{ В}$. Визначте швидкість бомбардуючого і звільненого електронів після зіткнення за умови, що надлишкова енергія розподілилася порівну між цими електронами.

Розв'язання

Кінетична енергія електрона, необхідна для йонізації молекули аргону

$$\frac{mv_1^2}{2} = eU_{i1},$$

звідки

$$v_1 = \sqrt{\frac{2eU_{i1}}{m}}.$$

Підставляючи чисельні дані з умови задачі, отримуємо швидкість електрона при йонізації молекули ртуті

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 11,6}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 2,02 \cdot 10^6 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Знайдемо тепер надлишкову енергію звільненого електрона:

$$\Delta E = \frac{mv_1^2}{2} - eU_{i2} = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} (2,02 \cdot 10^6)^2}{2} - 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10,4 = 1,9 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}.$$

Оскільки після зіткнення надлишкова енергія розподіляється порівну між бомбардуючим і звільненим електронами, то

$$\Delta E = mv_2^2,$$

звідки швидкість електронів після зіткнення

$$v_2 = \sqrt{\frac{\Delta E}{m}} = \sqrt{\frac{1,9 \cdot 10^{-19}}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 0,457 \cdot 10^6 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

$$\text{Відповідь: } v_1 = 2,02 \cdot 10^6 \frac{\text{м}}{\text{с}}; \quad v_2 = 0,457 \cdot 10^6 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

4.2.8 Нехай у розрядній трубці з міжелектродною відстанню 5 мм пробій відбувається за напруги 500 В. Ефективне значення коефіцієнта вторинної емісії для катода $\gamma = 0,018$. Чому дорівнює коефіцієнт первинної йонізації і коефіцієнт множення, якщо напруженість поля між електродами дорівнює 10^5 В/м?

Розв'язання

Згідно рівняння для анодного струму

$$I_a = \frac{I_0 e^{\alpha d}}{1 - \gamma(e^{\alpha d} - 1)},$$

пробій відбувається в тому разі, коли знаменник

$$1 - \gamma(e^{\alpha d} - 1) = 0,$$

тобто

$$e^{\alpha d} = \frac{1 + \gamma}{\gamma}.$$

При цьому коефіцієнт первинної йонізації дорівнює

$$\alpha = \frac{1}{d} \ln \frac{1 + \gamma}{\gamma} = \frac{1}{5 \cdot 10^{-3}} \cdot \ln \frac{1 + 0,018}{0,018} = 807 \text{ м}^{-1}.$$

Таке значення коефіцієнта первинної йонізації свідчить про те, що первинний електрон на шляху 1 м створює 807 нових електронів. Оскільки напруженість електричного поля є сталою, величина α не змінюється.

Коефіцієнт множення знаходимо з рівняння для струму

$$M = \frac{I_a}{I_0} = \frac{e^{807 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}}{1 - 0,018 \cdot (e^{807 \cdot 5 \cdot 10^{-3}} - 1)} = \infty.$$

Цей результат відповідає напрузі пробію. Реально струм обмежується опором зовнішнього ланцюга.

Відповідь: $\alpha = 807 \text{ м}^{-1}$; $M = \infty$.

4.3 Задачі для самостійного розв'язування

4.3.1 Підрахуйте значення середнього коефіцієнта акомодатії k при пружному співударянні електрона з атомом аргону ($A = 40$).

4.3.2 У скільки разів зменшиться потік електронів при їх русі в газі на шляху $x = 5 \text{ см}$, якщо повний переріз зіткнень електронів з атомами газу становить $Q = 0,3 \text{ см}^{-1}$?

4.3.3 Ефективний поперечний переріз розсіяння електронів на молекулах газу становить $q = 3 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2$. Чому дорівнюватиме довжина вільного пробігу електронів у газі при тиску $p = 0,1 \text{ мм рт. ст.}$ (при температурі газу 0°C)?

4.3.4 Оцініть порядок величини енергії електронів, при якій має спостерігатися ефект Рамзауера. Вважайте, що розмір молекул газу $a = 10^{-7}$ см.

4.3.5 Підрахуйте середнє значення ефективного перерізу кулонівських зіткнень електронів з однозарядними позитивними йонами. Температура електронів $T_e = 10^6$ К. Чому дорівнюватиме повний поперечний переріз цих співударянь, якщо концентрація йонів $n_i = 10^{14}$ см $^{-3}$?

4.3.6 Підрахуйте частоту зіткнень електронів із попередньої задачі з позитивними йонами водню. При кожному зіткненні вони віддають йонам частину своєї енергії, яка визначається коефіцієнтом акомодатії k . Оцініть час, за який електрони передадуть йонам енергію, яка дорівнює енергії теплового руху електронів.

4.3.7 Підрахуйте коефіцієнт дифузії електронів у газі, якщо їх температура дорівнює $T_e = 2 \cdot 10^4$ К, а повний поперечний переріз зіткнень з атомами газу становить $Q = 0,3$ см $^{-1}$. На яку середню відстань продифундують електрони за $\tau = 10^{-3}$ с.

4.3.8 Підрахуйте рухливість електронів за умов, наведених у попередній задачі. Яку дрейфову швидкість матимуть електрони в електричному полі $\mathcal{E} = 0,1 \frac{\text{В}}{\text{см}}$?

4.3.9 Енергія дисоціації молекул газу становить 2,5 еВ. Яка частина молекул газу буде дисоційована при температурі 1500 °С? Якою буде абсолютна концентрація продисоційованих молекул, якщо тиск газу становить 1 атм?

4.3.10 Підрахуйте вихід процесу збудження атомів гелію електронами, які мають температуру $T_e = 5 \cdot 10^4$ К. Тиск газу (при $T_a = 300$ К) дорівнює 0,01 мм рт. ст., а концентрація електронів $n_e = 10^{12}$ см $^{-3}$. Ефективний переріз збудження атомів електронами дорівнює $q_a = 10^{-18}$ см ^{2} . Яка потужність буде витрачена на збудження атомів у 1 см ^{3} , якщо енергія збудження атома гелію дорівнює 20,5 еВ?

4.3.11 Якою буде концентрація збуджених атомів за умов із попередньої задачі, якщо час перебування їх у збудженому стані становить $\tau = 10^{-8}$ с?

4.3.12 У скільки разів збільшиться середній коефіцієнт акомодатії, якщо крім пружних зіткнень враховувати ще непружні (збуджуючі) зіткнення із задачі №4.11? Повний переріз пружних зіткнень дорівнює $Q = 0,2 \text{ см}^{-1}$.

4.3.13 Яку довжину хвилі повинен мати квант світла, щоб збудити за рахунок фотозбудження резонансний рівень атома натрію, енергія збудження якого становить 2,12 еВ?

4.3.14 Середня швидкість електронів у парах ртуті $v_e = 8,8 \cdot 10^7 \frac{\text{см}}{\text{с}}$. Яку енергію вони матимуть після зіткнення другого роду з атомом ртуті, збудженим на резонансний рівень з $eU_a = 4,9$ еВ?

4.3.15 За рахунок природної радіоактивності в повітрі атмосфери відбувається в середньому $z_i = 10^7$ актів йонізації в 1 м^3 за 1 с. Якою буде при цьому рівноважна концентрація позитивних і негативних йонів? Яким буде середній час життя йона? Коефіцієнт йон-йонної рекомбінації $1,6 \cdot 10^6 \text{ м}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$.

4.3.16 Обчисліть середню довжину вільного пробігу молекул неону і електронів в неоні, які перебувають в електронній лампі. Тиск газу $P = 5 \cdot 10^{-7}$ мм рт.ст. Температура $T = 300$ К. Діаметр молекули неону $d = 3 \cdot 10^{-10}$ м.

4.3.17 В замкненому об'ємі перебуває гелій. У об'ємі створюється електричне поле напруженістю $\mathcal{E}$. Відношення $\frac{\mathcal{E}}{P_0} = 2 \frac{\text{В}}{\text{м} \cdot \text{Па}}$.

Значення $\bar{\lambda}_0$ для гелію прийміть рівним $1,88 \cdot 10^{-2}$ м. Підрахуйте середню швидкість дрейфу електронів.

4.3.18 Коефіцієнт поглинання електронів в аргоні складає 6000 м^{-1} . У середовище аргону в точці з координатою $x = 0$ уводиться пучок електронів концентрацією 10^{40} м^{-3} . На якій відстані від точки введення концентрація електронів зменшиться в e^2 разів?

4.3.19 Електрон рухається в газі під дією електричного поля напруженістю $\mathcal{E}$. Тиск газу P . Визначте α – число актів йонізації,

здійснюваних електроном при русі на шляху в 1 м. Вихідні дані наведені в таблиці 4.1.

Таблиця 4.1 – Вихідні дані до задачі 4.3.19

№ варіанту	Рід газу	$\mathcal{E}$, В/м	P , мм рт.ст.
1	Ar	$2 \cdot 10^3$	1,00
2	Ne	$4 \cdot 10^3$	0,75
3	H ₂	$6 \cdot 10^3$	1,50
4	N ₂	$1 \cdot 10^4$	0,50
5	Hg	$7 \cdot 10^3$	0,35

4.3.20 В електронно-променевій трубці міститься аргон при тиску P . З електронної гармати виходить пучок електронів з силою струму I_0 . Електрони прискорені напругою U . Відстань від гармати до екрану L . Визначте частку електронів пучка, які дійшли до екрану нерозсіяними, а також кількість йонізацій, здійснюваних електронами пучка за 1 секунду. Вихідні дані наведено в таблиці 4.2.

Таблиця 4.2 – Вихідні дані до задачі 4.3.20

№ варіанту	Рід газу	P , мм рт.ст.	I_0 , А	U , В	L , м
1	H ₂	$1,8 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-4}$	600	0,50
2	He	$1,8 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-4}$	200	0,25
3	Ne	$1,8 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-4}$	80	0,45
4	Ar	$1,8 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-4}$	1000	0,65
5	Xe	$1,8 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-4}$	2000	0,55
6	Hg	$1,8 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-4}$	900	0,35

4.3.21 Визначте, чи може йон літію (відносна атомна маса $A=7$), який має кінетичну енергію $E_k = 200$ еВ, завдяки непружному зіткненню йонізувати атом Ne?

4.3.22 Визначте, чи може йон літію (відносна атомна маса $A=7$), який має кінетичну енергію $E_k = 40$ еВ, завдяки непружному зіткненню йонізувати атом Ar?

4.3.23 Яку мінімальну швидкість повинен мати електрон для іонізації молекули газу? Рід газу наведено в таблиці 4.3.

Таблиця 4.3 – Вихідні дані до задачі 4.3.23

№ варіанту	1	2	3	4	5
Рід газу	Ne	He	H ₂	N ₂	O ₂

4.3.24 Для дослідження пружних зіткнень електронів з молекулами газу виготовлено прилад, який складається з катода, колектора, двох сіток, що перебувають у замкнутому просторі, наповненому гелієм (рис.5.1). На сітки подають однаковий потенціал U . Тиск газу P . Відстань між сітками l . Визначте енергію електронів, які пройшли завдяки дифузії через проміжок l , а також електронів, які входять крізь сітку 2 в проміжок сітка-колектор. Вихідні дані наведено в табл.4.4.

Таблиця 4.4 - Вихідні дані до задачі 4.3.24

№ варіанту	Рід газу	U , В	P , мм рт. ст.	l , см
1	Kr	20	2,0	1,5
2	Ne	15	1,4	1,2
3	Ar	35	3,5	0,9
4	Xe	22	3,8	0,8
5	H ₂	26	1,9	1,4

4.3.25 При освітленні посудини з газом рентгенівськими променями в кожному міліметрі його об'єму щосекунди йонізується 10^{10} молекул. В результаті рекомбінації у посудині встановилася рівновага, причому в 1 см^3 перебуває 10^8 йонів кожного знаку. Знайдіть коефіцієнт рекомбінації.

4.3.26 У розрядній трубці (відстань між електродами $d = 5\text{ мм}$) відбувається пробій. Коефіцієнт вторинної емісії $\gamma = 0,018$. Скільки електронів утворює первинний електрон на довжині 1 м ?

4.3.27 Визначте напруженість електричного поля і відстань між електродами в розрядній трубці, наповненій аргоном, якщо пробій на-

стає при $U_s = 400 \text{ В}$. Коефіцієнти Таунсенда дорівнюють $\alpha = 100 \frac{\text{пар йонів}}{\text{м}}$, $\gamma = 0,07$.

4.3.28 Напруженість електричного поля в розрядній трубці, наповненій аргеном до тиску $P = 6,5 \text{ ммрт.ст.}$, дорівнює 26 кВ/м . Розрахуйте потенціал запалювання і кількість пар йонів і електронів у розрядній трубці, утворених первинним електроном на шляху в 1 м , якщо відношення ступеню йонізації до тиску дорівнює $\frac{\alpha}{P} = 100 \frac{\text{пар йонів}}{\text{м} \cdot \text{ммрт.ст.}}$, а коефіцієнт вторинної емісії $\gamma = 0,07$.

4.3.29 У газорозрядній трубці між електродами з площею поперечного перетину 1 см^2 , розташованими на відстані 3 см один від одного, сила струму насичення дорівнює $I_H = 10^{-7} \text{ А}$. Розряд несамостійний. Яка кількість елементарних зарядів кожного із знаків виникає за одну секунду в 1 см^3 об'єму трубки?

4.3.30 До електродів розрядної трубки прикладено різницю потенціалів 5 В , відстань між ними 10 см . Газ, який перебуває в трубці, одноразово йонізований, кількість пар йонів в одному м^3 дорівнює 10^8 , причому рухливість позитивних йонів $\mu_+ = 3 \cdot 10^{-2} \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$, а негативних –

$\mu_- = 3 \cdot 10^2 \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}$. Знайдіть: а) густину струму в трубці; б) частку повного струму, який переноситься позитивними йонами.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

- 1 **Светцов, В. И.** Вакуумная и плазменная электроника [Текст] / В. И. Светцов. – Иваново: Иван. гос. хим.-техн. ун-т, 2003. – 172 с.
- 2 **Щука, А. А.** Электроника. Учебное пособие [Текст] / А. А. Щука. – СПб: БХВ-Петербург, 2005. – 800 с.
- 3 **Левитський, С. М.** Фізична електроніка [Текст] / С. М. Левитський. – К.: ВПЦ „Київський університет“, 2005.-153 с.
- 4 **Аксенов, А. И.** Вакуумная и плазменная электроника [Текст] / А. И. Аксенов, А. Ф. Злобина. – Томск: ТУСУР, 2007. – 168 с.
- 5 **Битнер, Л. Р.** Вакуумная и плазменная электроника [Текст] / Л. Р. Битнер. – Томск: Томский межвузовский центр дистанционного образования, 2006. – 148 с.
- 6 **Злобина А.Ф.** Вакуумная и плазменная электроника [Текст] / А. И. Аксенов, А. Ф. Злобина. – Томск: Томский межвузовский центр дистанционного образования, 2003. – 106 с.
- 7 **Ильгисонис, В. И.** Сборник задач по физической электронике и физике плазмы [Текст] / В. И. Ильгисонис, Д. Л. Кирко, В. А. Курнаев, Д. Е. Прохорович, А. А. Сковорода, И. К. Фетисов, И. В. Цветков. – М.: МИФИ, 2008. – 96 с.
- 8 **Левитский, С. М.** Сборник задач и расчетов по физической электронике [Текст] / С. М. Левитский. – К.: Издательство Киевского университета, 1964. – 212 с.
- 9 **Линч, П.** Задачи по физической электронике (с решениями и комментариями) [Текст] / П. Линч, А. Николайдес. – М.: Мир, 1975. – 264 с.
- 10 **Терехов, В. А.** Задачник по электронным приборам [Текст] / В. А. Терехов. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 280 с.
- 11 **Германюк, В. Н.** Задачник по электровакуумным и проводниковым приборам [Текст] / В. Н. Германюк. – М.: Высшая школа, 1973. – 123 с.
- 12 **Смирнов, Б. М.** Физика слабоионизованного газа: В задачах с решениями [Текст] / Б. М. Смирнов. – М.: Наука, 1985. – 424 с.
- 13 **Веденов, А. А.** Задачник по физике плазмы [Текст] / А. А. Веденов. – М.: Атомиздат, 1981. – 160 с.
- 14 **Соболев, В. Д.** Физические основы электронной техники [Текст] / В. Д. Соболев. – М.: Высшая школа, 1979. – 448 с.

Додаток А

Параметри пружних зіткнень електронів і молекул газу

Таблиця А.1 – Деякі параметри пружних зіткнень електронів і молекул газу при $P = 1$ мм рт. ст. та $T = 0^{\circ}\text{C}$

Газ	A, ат.од.	λ_{Γ_0} , м	λ_{e_0} , м	Q_{e_0} , м ⁻¹	κ , відн.од
H ₂	2	$1,33 \cdot 10^{-4}$	$7,53 \cdot 10^{-4}$	1320	$5,4 \cdot 10^{-4}$
He	4	$1,31 \cdot 10^{-4}$	$7,41 \cdot 10^{-4}$	1350	$2,7 \cdot 10^{-4}$
Ne	20	$1,16 \cdot 10^{-4}$	$6,57 \cdot 10^{-4}$	1520	$5,4 \cdot 10^{-5}$
Ar	40	$7,73 \cdot 10^{-5}$	$4,38 \cdot 10^{-4}$	2270	$2,7 \cdot 10^{-5}$
Kr	84	$3,67 \cdot 10^{-5}$	$2,08 \cdot 10^{-4}$	4800	$1,3 \cdot 10^{-5}$
Xe	131	$2,56 \cdot 10^{-5}$	$1,50 \cdot 10^{-4}$	6700	$8,2 \cdot 10^{-6}$
Hg	201	$4,88 \cdot 10^{-5}$	$2,76 \cdot 10^{-4}$	3600	$5,4 \cdot 10^{-6}$
N ₂	28	$6,33 \cdot 10^{-5}$	$3,58 \cdot 10^{-4}$	2800	$3,83 \cdot 10^{-5}$
Na	23	$8,07 \cdot 10^{-5}$	$4,57 \cdot 10^{-4}$	2200	$4,7 \cdot 10^{-5}$
Cs	133	$5,85 \cdot 10^{-6}$	$3,30 \cdot 10^{-5}$	30000	$8,1 \cdot 10^{-6}$

λ_{Γ_0} – середня довжина вільного пробігу молекули газу;

λ_{e_0} – середня довжина вільного пробігу електрона в газі;

Q_{e_0} – повний ефективний переріз пружного зіткнення електрона з молекулами газу;

$\kappa = 2 \frac{m_e}{m_a}$ – коефіцієнт акомодатії.

Додаток Б
Ефективні перерізи йонізації атомів деяких парів і газів

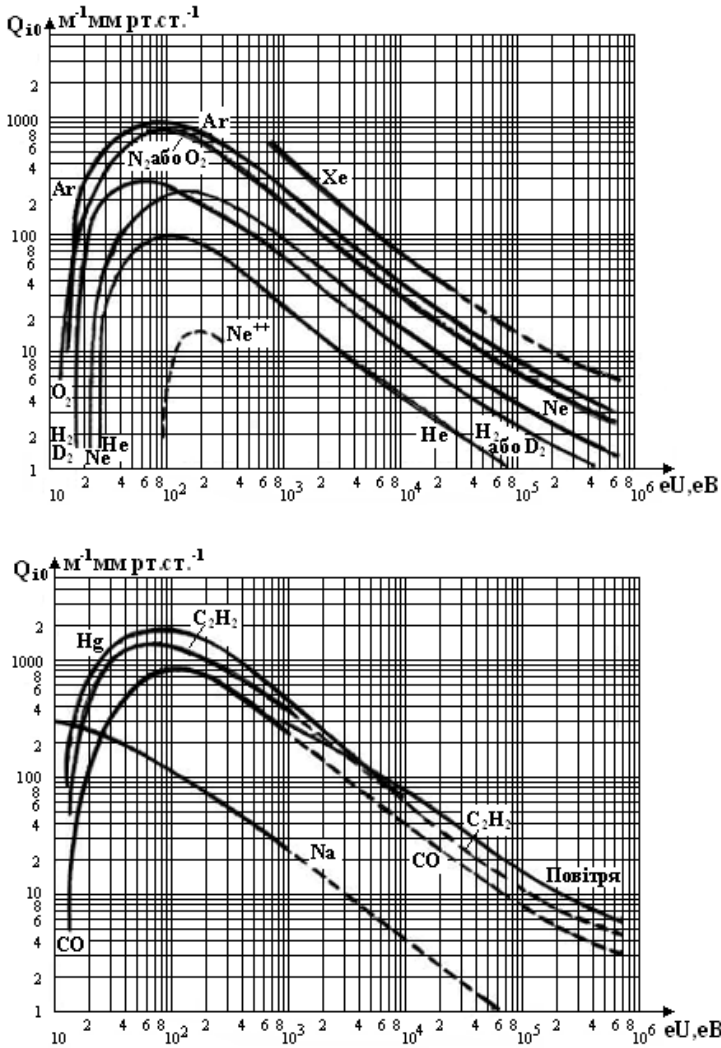


Рисунок Б.1 – Залежності ефективних перерізів йонізації атомів деяких парів і газів від енергії електронів

Додаток В
Потенціали йонізації й ефективні перерізи йонізації
молекул і атомів деяких газів

Таблиця В.1 – Потенціали йонізації й ефективні перерізи йонізації молекул і атомів деяких газів, і константи у формулах для їх апроксимації

Рід газу	Кратність йонізації	U_i , В	U_m , В	$q_i(U_m)$, $\text{м}^2 \cdot 10^{20}$	α_i , $\text{м}^2 \cdot \text{В}^{-1}$	Межі викорис- тання, В	α , В^{-1}	β , В
H ₂	1	15,4	70	1,05	$4,80 \cdot 10^{-22}$	16...25	-	-
He	1	24,5	120	0,34	$1,30 \cdot 10^{-22}$	25...35	-	-
Ne	1	21,5	170	0,85	$1,58 \cdot 10^{-22}$	22...40	$2,5 \cdot 10^{-3}$	300
	2	62,4	200	0,05	$0,04 \cdot 10^{-22}$	63...190	-	-
Ar	1	15,4	100	3,40	$20,0 \cdot 10^{-22}$	16...25	$1,3 \cdot 10^{-3}$	110
	2	43,5	110	0,34	$0,90 \cdot 10^{-22}$	43...80	-	-
Hg	Спільн.	-	100	6,50	$20,0 \cdot 10^{-22}$	10,5...12,	$8,6 \cdot 10^{-3}$	100
	1	10,4	100	4,80	-	5	-	-
	2	29,1	120	0,56	$1,69 \cdot 10^{-22}$	-	-	-
	3	71,0	220	0,13	$0,17 \cdot 10^{-22}$	30...50	-	-
N ₂	1	15,8	110	3,10	$8,50 \cdot 10^{-22}$	71...150	$7,8 \cdot 10^{-3}$	160
O ₂	1	12,5	110	3,10	$5,65 \cdot 10^{-22}$	16...30	-	-
Повітря	1	-	130	2,80	$7,35 \cdot 10^{-22}$	13...30	-	-
						16...30		

Примітки:

1 Лінійна апроксимація ефективного перерізу іонізації молекули газу $q_i(U) = \alpha_i(U - U_i)$;

2 Складна апроксимація ймовірності іонізації

$$w_i(U) = \alpha(U - U_i) e^{\frac{U - U_i}{\beta}},$$

де U_i – потенціал іонізації; α, β – чисельні коефіцієнти;

U_m – потенціал, при якому переріз йонізації максимальний;

$q(U_m)$ – максимальне значення перерізу іонізації молекули газу.

Додаток Г
Залежності тиску пари ртуті від температури

Таблиця Г.1 – Тиск насиченої пари ртуті залежно від температури

Температура рідкої і твердої ртуті, °С	Тиск насиченої пари, мм рт. ст.	Концентрація атомів ртуті, м ⁻³	Температура рідкої і твердої ртуті, °С	Тиск насиченої пари, мм рт. ст.	Концентрація атомів ртуті, м ⁻³
-180	1,8 10 ⁻²⁷	-	100	2,73 10 ⁻¹	7,10 10 ²¹
-78	3,3 10 ⁻⁹	1,63 10 ¹⁴	150	2,80	6,50 10 ²²
-40	1,8 10 ⁻⁶	7,45 10 ¹⁶	200	17,3	3,60 10 ²³
-20	2,2 10 ⁻⁵	8,40 10 ¹⁷	250	74,4	1,40 10 ²⁴
-10	6,5 10 ⁻⁵	2,38 10 ¹⁸	300	2,47 10 ²	4,20 10 ²⁴
0	1,85 10 ⁻⁴	6,90 10 ¹⁸	350	6,7 10 ²	1,05 10 ²⁵
10	4,89 10 ⁻⁴	2,26 10 ¹⁹	356,7	7,6 10 ²	1,20 10 ²⁵
20	1,20 10 ⁻³	4,00 10 ¹⁹	397,9	1,52 10 ³	2,20 10 ²⁵
30	2,79 10 ⁻³	8,90 10 ¹⁹	461,9	3,80 10 ³	5,00 10 ²⁵
40	6,11 10 ⁻³	1,88 10 ²⁰	519	7,6 10 ³	9,30 10 ²⁵
50	1,27 10 ⁻²	3,80 10 ²⁰	586	1,52 10 ⁴	1,70 10 ²⁶
60	2,54 10 ⁻²	7,36 10 ²⁰	693	3,80 10 ⁴	3,80 10 ²⁶
70	4,86 10 ⁻²	1,37 10 ²¹	795	7,6 10 ⁴	6,90 10 ²⁶
80	8,95 10 ⁻²	2,45 10 ²¹	920	1,52 10 ⁵	1,20 10 ²⁷

Уточнені формули для обчислення тиску насиченої пари ртуті (температура T в К, тиск P в мм рт.ст.):

$$\lg P = 8,4525 - \frac{3332,25}{T}, \text{ для температур від } -180^{\circ}\text{C до } +30^{\circ}\text{C};$$

$$\lg P = 11,5029 - 1,1596 \lg T - \frac{3387,65}{T}, \text{ для температур від } 0^{\circ}\text{C до } +300^{\circ}\text{C};$$

$$\lg P = 7,752 - \frac{3066}{T}, \text{ для температур від } 300^{\circ}\text{C до } +920^{\circ}\text{C}.$$

Уточнені формули для обчислення тиску насиченої пари цезію (температура T в К, тиск P в мм рт.ст.):

а) метал в рідкій фазі: $\lg P = 11,05 - 1,35 \lg T - 4041/T$,

б) метал в твердій фазі: $\lg P = 10,55 - \lg T - 4150/T$.