

## УСОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ МЕТОДА ОБОБЩЕННЫХ ТРАПЕЦИЙ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО РАСКРОЯ

*Введено понятие внутреннего и внешнего  $x$ - диаметра обобщенной трапеции, через которые выражаются допустимые сдвиги фигур на плоскости, при котором не происходит их наложения. Показана связь введенных понятий с задачей оптимального раскроя. Получены явные формулы для вычисления  $x$ - диаметров в случае, когда боковые стороны обобщенной трапеции являются дугами окружностей.*

**Ключевые слова:** оптимальный раскрой, обобщенная трапеция, внутренний  $x$ - диаметр, внешний  $x$ - диаметр, плотная укладка.

### Введение

Одним из способов экономии сырья при штамповке деталей есть использование оптимального раскроя. В задачах оптимального раскроя как регулярного, так и иррегулярного, есть группа алгоритмов, которые основаны на следующей идее: в заданной области размещаются фигуры, а потом они сдвигаются так, чтобы они образовывали плотную укладку.

Обычно при этом рассматривается два вида движения фигур: параллельный перенос вдоль некоторого направления и поворот относительно некоторой точки. Как правило, длина вектора переноса и величина угла поворота определяются итерационно.

В данной статье получены явные формулы, позволяющие находить вектор переноса для такого, практически важного случая, когда контуры фигур состоят из дуг окружностей.

### Обзор литературы

Вопросам оптимального раскроя посвящено большое количество литературы, среди которых отметим

фундаментальные монографии [1–3]. В настоящее время в Украине исследования по оптимальному раскрою сосредоточены в институте проблем машиностроения (г. Харьков), координирует которые член-корреспондент АН Украины Стоян Ю.Г. [4, 5]. Отметим так же деятельность интернациональной научной группы ЕЗИКУП, результаты деятельности которых освещены на сайте [6].

Для описания условия отсутствия перекрытия фигур чаще всего используют  $\Phi$ -функции [7], однако их построение является громоздкой процедурой [8]. Более простым аппаратом является использование аппарата обобщенных трапеций, введенных автором в [9]. Данная статья продолжает эти исследования в направлении получения явных аналитических выражений для искомых параметров.

### Постановка задачи

Пусть на плоскости даны две фигуры  $F$  и  $G$ , ограниченные отрезками и дугами окружностей и имеющие непересекающиеся окрестности, и выбрано направление. Выберем систему координат так, чтобы

выбранное направление совпадало с осью абсцисс.

Требуется найти такой вектор  $\vec{a}$  минимальной длины, параллельный оси  $OX$ , при смещении на который фигуры  $F$ , происходит соприкосновение фигур  $F$  и  $G$ .

**Определение.** Обобщенной трапецией называется фигура, ограниченная двумя горизонтальными параллельными прямыми (верхнее и нижнее основания) и двумя кривыми, каждая из которых есть либо отрезок, либо дуга окружности.

**Определение.** Внутренним (внешним)  $x$ -диаметром обобщенной трапеции будем называть длину горизонтального отрезка минимальной (максимальной) длины, концы которого лежат на данной трапеции. Внутренний  $x$ -диаметр будем обозначать  $d_x$ , а внешний через  $D_x$ .

Угловой точкой фигуры будем называть точку, в которой касательная не существует или горизонтальна. Через угловые точки каждой из фигур проведем горизонтальные касательные. Тогда область, расположенная между фигурами, разобьется на обобщенные трапеции. Задача сводится к вычислению внутренних  $x$ -диаметров каждой из таких обобщенных трапеций и выбору минимального из этих  $x$ -диаметров.

В задачах поиска однорядного прямого регулярного раскроя для однотипных фигур шаг в качестве шага трансляции нужно брать максимальный из внешних  $x$ -диаметров трапеций, на которые делится заданная фигура (рис. 1).

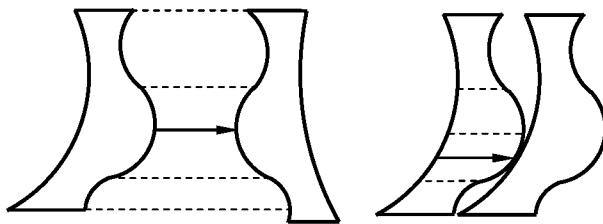


Рис. 1. Применение  $x$ -диаметров для определения допустимых сдвигов

В данной статье мы получим явные формулы как для внешнего, так и для внутреннего  $x$ -диаметров обобщенных трапеций, у которых боковые стороны являются дугами.

Пусть левая дуга – дуга окружности радиуса  $r_1$  с центром в точке  $(x_1, y_1)$ , а правая дуга – дуга окружности радиуса  $r_2$  с центром в точке  $(x_2, y_2)$ .

Если уравнение прямой, содержащей нижнее (верхнее) основание этой трапеции, имеет вид

$$y = a \quad (y = b),$$

то координаты вершин трапеции будут следующими

$$A(x_1 + \varepsilon \cdot s_1(a), a), B(x_2 + \eta \cdot s_2(a), a), \\ C(x_2 + \eta \cdot s_2(b), b), D(x_1 + \varepsilon \cdot s_1(b), b).$$

Здесь  $\varepsilon = \pm 1$  в зависимости от того, выгнута левая дуга вправо или влево,  $\eta = \pm 1$  в зависимости от того, выгнута правая дуга вправо или влево,

$$s_i(t) = \sqrt{r_i^2 - (y_i - t)^2}. \quad (1)$$

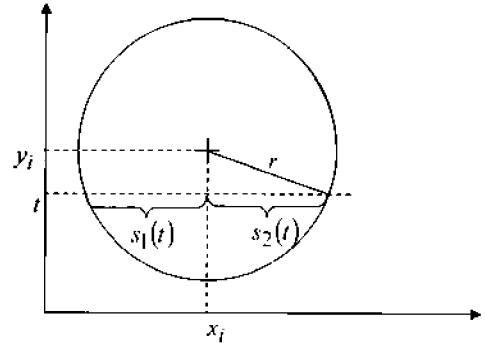


Рис. 2. К определению величины  $s(t)$

Обозначим длину отрезка, лежащего на прямой  $y = t$ , с концами на боковых сторонах трапеции, через  $l(c)$ , где  $a \leq c \leq b$ . Тогда длина верхнего основания

$$l(b) = |AB| = x_2 - x_1 + \eta \cdot s_2(b) - \varepsilon \cdot s_1(b), \quad (2)$$

а нижнего основания

$$l(a) = |CD| = x_2 - x_1 + \eta \cdot s_2(a) - \varepsilon \cdot s_1(a). \quad (3)$$

В случае двух дуг функция  $l(c)$  на интервале  $c \in (a, b)$  либо является монотонной, либо имеет единственный локальный экстремум.

Перейдем к рассмотрению частных случаев.

1.  $\varepsilon = 1, \eta = -1$ .

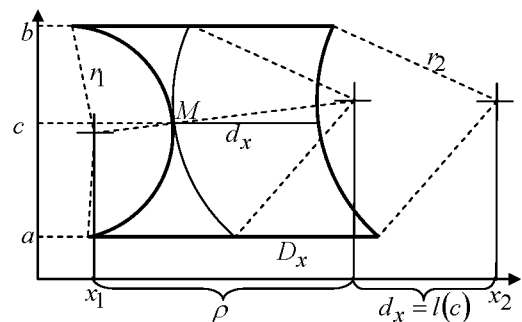


Рис. 3. Случай двух вогнутых дуг

В этом случае, очевидно, что внешний  $x$ -диаметр равен

$$D_x = \max\{l(a), l(b)\}.$$

Найдем внутренний  $x$ -диаметр. Предположим, что мы сдвинули стороны трапеции так, что боковые дуги

касаются друг друга. Поскольку точка касания расположена на прямой, содержащей центры этих дуг, то расстояние  $\rho$  между проекциями центров сдвинутых окружностей можно найти из соотношения

$$\rho = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - (y_1 - y_2)^2}, \quad (4)$$

а величина сдвига

$$l(c) = x_2 - x_1 - \rho. \quad (5)$$

Ордината точки касания вычисляется по формуле

$$c = y_1 + (y_2 - y_1) \frac{r_1}{r_1 + r_2}, \quad \text{если } y_1 \leq y_2 \quad (6)$$

и

$$c = y_2 + (y_1 - y_2) \frac{r_2}{r_1 + r_2}, \quad \text{если } y_1 > y_2. \quad (7)$$

Значит для данной трапеции внутренний  $x$ - диаметр

$$d_x = \begin{cases} \min\{l(a), l(b)\}, & c \notin (a, b) \\ l(c), & c \in (a, b) \end{cases}$$

2.  $\varepsilon = -1, \eta = 1$ .

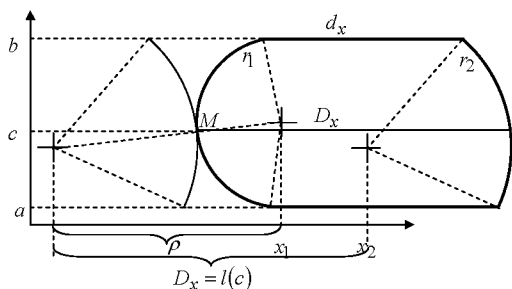


Рис. 4. Случай двух выпуклых дуг

В этом случае, очевидно  $d_x = \min\{l(a), l(b)\}$ .

Для нахождения внешнего  $x$ - диаметра снова сдвинем боковые стороны так, чтобы боковые дуги касались друг друга. Находим расстояние между проекциями центров по формуле (4) и величину сдвига

$$l(c) = x_2 - x_1 + \rho. \quad (8)$$

Ордината точки касания вычисляется по тем же формулам (6) и (7).

Значит для данной трапеции внешний  $x$ - диаметр

$$D_x = \begin{cases} \max\{l(a), l(b)\}, & c \notin (a, b) \\ l(c), & c \in (a, b) \end{cases}$$

3.  $\varepsilon = \eta = \pm 1$ .

Опять сдвинем стороны трапеции так, что соответствующие боковым дугам полуокружности касались друг друга внутренним образом. Если это невозможно сделать, а это равносильно тому, что

$$|y_2 - y_1| + \min\{r_1, r_2\} > \max\{r_1, r_2\}, \quad (9)$$

то тогда (рис. 6)

$$d_x = \min\{l(a), l(b)\}, \quad D_x = \max\{l(a), l(b)\}. \quad (10)$$

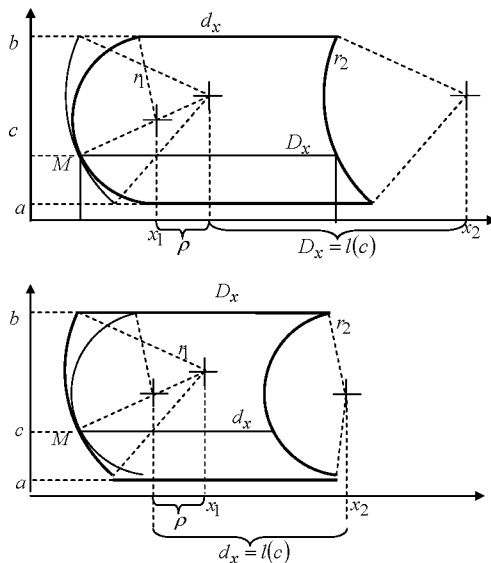


Рис. 5. Случай дуг разной ориентации

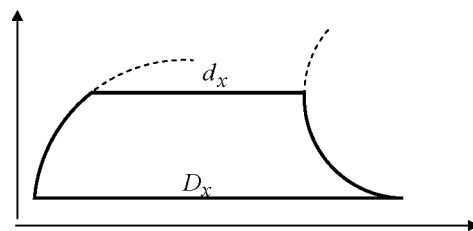


Рис. 6. К определению внешнего и внутреннего  $x$ - диаметров

Пусть теперь условие (9) не выполняется, то есть касание возможно. Ордината  $c$  точки касания определяется по формуле

$$c = y_i + (y_j - y_i) \frac{r_{\max} - r_{\min}}{r_{\min}},$$

где  $r_{\max} = \max\{r_1, r_2\}$ ,  $r_{\min} = \min\{r_1, r_2\}$ ,  $y_i$  ( $y_j$ ) – ордината центра окружности большего (меньшего) радиуса. Если  $c \notin (a, b)$ , то в этом случае также применимы формулы (10).

Рассмотрим случай, когда  $c \in (a, b)$ . Возможны два варианта.

Если после сдвига порядок дуг не поменялся, то  $D_x = \max\{l(a), l(b)\}$ , а

$$d_x = x_2 - x_1 + \rho, \quad (11)$$

где расстояние  $\rho$  между проекциями центров сдвинутых окружностей можно найти из соотношения

$$\rho = \sqrt{(r_{\max} - r_{\min})^2 - (y_1 - y_2)^2}. \quad (12)$$

Если после сдвига порядок дуг поменялся, то  $d_x = \min\{l(a), l(b)\}$ , а

$$D_x = x_2 - x_1 - \rho. \quad (13)$$

где расстояние  $\rho$  также вычисляется по формуле (12).

#### Выводы и перспективы исследований

В статье предлагается решение одной из подзадач, возникающих в задачах оптимального раскроя – задачи определения допустимых сдвигов фигур. Задача сводится к определению  $x$ - диаметров обобщенных трапеций. Для частного случая, когда боковые стороны трапеций являются дугами, получены аналитические выражения для вычисления внешнего и внутреннего  $x$ - диаметров.

В дальнейшем планируется получить формулы для вычисления  $x$ - диаметров обобщенных трапеций, у которых одна из боковых граней является отрезком, а другая – дугой. Это позволит получить полное описание алгоритма нахождения допустимых сдвигов.

#### Список литературы

1. Канторович Л. В. Рациональный раскрой промышленных материалов / Л. В. Канторович, В. А. Залгаллер. – Новосибирск : Наука, 1971.

2. Мухачева Э. А. Рациональный раскрой промышленных материалов. Применение АСУ / Э. А. Мухачева. – М. : Машиностроение, 1984. – 176 с.

3. Бабаев Ф. В. Оптимальный раскрой материалов с помощью ЭВМ / Ф. В. Бабаев. – М. : Машиностроение, 1982. – 168 с.

4. Стоян Ю. Г. Размещение геометрических объектов / Ю. Г. Стоян. – К. : Наукова думка, 1975. – 239 с.

5. Стоян Ю. Г. Периодическое размещение геометрических объектов. / Ю. Г. Стоян, А. А. Панасенко. – К. : Наукова думка, 1978. – 174 с.

6. <http://paginas.fe.up.pt/~esicup/tiki-index.php>

7. Стоян Ю. Г. Псевдонормализованные Ц-функции для двумерных ц-объектов / Стоян Ю. Г., Романова Т. Е., Чернов Н. И. // Доповіді НАН України. – 2011. – С. 29–34.

8. Полный класс Ц-функций для базовых двумерных ц-объектов / [Ю. Г. Стоян, Т. Е. Романова, Н. И. Чернов, А. В. Панкратов] // Доповіді НАН України. – № 12. – 2010. – С. 25–30.

9. Величко І. Г. Аналітичний спосіб визначення кроку штампування при однорядному регулярному розкрої / І. Г. Величко, А. І. Зінченко // Вісник двигунобудування. – 2011. – № 1. – С. 113–116.

Одержано 06.06.2013

#### Зінченко А. І. Удосконалення методу узагальнених трапецій розв'язку задач оптимального розкрою

*Введено поняття внутрішнього й зовнішнього  $x$ - діаметра узагальненої трапеції, через які виражаються допустимі зрушення фігур на площині, при яких не відбувається їх накладення. Показаний зв'язок уведених понять із задачею оптимального розкрою. Отримані явні формули для обчислення  $x$ - діаметрів у випадку, коли бічні сторони узагальненої трапеції є дугами кіл.*

**Ключові слова:** оптимальний розкрій, узагальнена трапеція, внутрішній  $x$ - діаметр, зовнішній  $x$ - діаметр, щільне укладання.

#### Zinchenko A. Improvement of the method of generalized trapeze solving optimal cutting

*We introduce the concept of internal and external diameter of the  $x$ - generalized trapezoid used to express the allowable shifts figures in the plane in which they are not overlapping. The connection between introduced concepts with the objective of optimal cutting is shown. Explicit formulas for calculating the  $x$ - diameter when generalized trapezoidal sides are circular arcs are propoused.*

**Key words:** optimal cutting, generalized trapezoid, internal  $x$ - diameter, outer  $x$ - diameter, dense packing.