

Министерство образования и науки Украины

Донецкий национальный университет

На правах рукописи

КАИРОВ ВЛАДИМИР АЛЕКСЕЕВИЧ

УДК 539.3

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОДКРЕПЛЕННЫХ
КОНСТРУКТИВНО НЕОДНОРОДНЫХ ОБОЛОЧЕК С ОТВЕРСТИЯМИ И
ПРИСОЕДИНЕННЫМИ ТВЕРДЫМИ ТЕЛАМИ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ
НАГРУЖЕНИИ

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук

Научный руководитель:

Шевченко Владимир Павлович

академик НАН Украины,

доктор физико-математических

наук, профессор

Винница – 2016

СОДЕРЖАНИЕ

Список условных обозначений, символов и сокращений	4
Введение	6
Раздел 1 Аналитический обзор современного состояния исследований и нерешенные проблемы динамики конструктивно неоднородных оболочек ...	13
1.1 Общая характеристика подходов к решению задач колебаний и напряженно-деформированного состояния тонкостенных оболочек с конструктивными неоднородностями	15
1.2 Характеристика основных аналитических и численных методов исследования задач колебаний тонких упругих неоднородных оболочек	19
1.3 Экспериментальные методы	21
1.4 Основные задачи исследования	23
1.5 Выводы	25
Раздел 2 Разрешающие уравнения колебаний и напряженно-деформированного состояния дискретно подкрепленных цилиндрических оболочек	26
2.1 Основные соотношения упругого напряженно-деформированного состояния теории тонких оболочек	26
2.2 Основные соотношения теории прямых и криволинейных стержней	36
2.3 Учет присоединенных твердых тел	40
2.4 Постановка задач колебаний и НДС дискретно подкрепленных оболочек.	41
2.5 Граничные и начальные условия	45
2.6 Выводы	48
Раздел 3 Численное исследование свободных колебаний тонких упругих цилиндрических оболочек с конструктивными неоднородностями	49
3.1 Численный алгоритм решения задачи о свободных колебаниях конструктивно неоднородных цилиндрических оболочек	49
3.2 Описание дискретных моделей применяемых конечных элементов	58
3.3 Оценка достоверности полученных численных результатов	62

3.4 Влияние основных геометрических параметров оболочки и дискретно подкрепляющих ребер на частоты и формы колебаний	67
3.5 Свободные колебания оболочек с присоединенными твердыми телами	76
3.6 Особенности колебаний оболочек с отверстиями различной формы	93
3.7 Выводы	101
Раздел 4 Напряженно-деформированное состояние конструктивно неоднородных цилиндрических оболочек при динамическом нагружении ...	103
4.1 Алгоритм решения задачи о вынужденных колебаниях и НДС конструктивно неоднородной оболочечной системы	103
4.2 Напряженно-деформированное состояние подкрепленных оболочек	110
4.3 Влияние отверстий и присоединенных твердых тел на напряженно-деформированное состояние оболочек	116
4.4 Выводы	120
Раздел 5 Экспериментальное исследование амплитудно-частотных характеристик резонансных колебаний оболочек с конструктивными неоднородностями	121
5.1 Методика проведения эксперимента	121
5.2 Исследование частот и форм собственных колебаний подкрепленных ребрами оболочек с присоединенными твердыми телами	128
5.3 Анализ влияния отверстий на амплитудно-частотные характеристики собственных колебаний оболочек	140
5.4 Выводы	148
Выводы	149
Список использованных источников	151
Приложение А Описание вибростенда и технологии изготовления моделей .	171
Приложение Б	179
Приложение В	180
Приложение Г	181
Приложение Д	182

СПИСОК УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ, СИМВОЛОВ И СОКРАЩЕНИЙ

- $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ – цилиндрическая жесткость оболочки;
- E, G – модуль Юнга и модуль сдвига, МПа;
- ν – коэффициент Пуассона;
- ρ – плотность материала, кг/м³;
- L, R, h – длина, радиус и толщина оболочки;
- α_1, α_2, ξ – криволинейные ортогональные координаты поверхности;
- A_1, A_2 – параметры Ляме, связанные с координатами;
- R_1, R_2 – радиусы нормальной кривизны координатной поверхности оболочки вдоль линий α_1, α_2 ;
- m, n – число полуволн в продольном и волн в окружном направлениях;
- M_0, M_1 – масса оболочки и присоединенного тела;
- $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ – деформации растяжения-сжатия и сдвига элемента;
- $\varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6$ – деформации изгиба и сдвига срединной поверхности;
- N_{11}, N_{22}, N_{12} – погонные нормальные и сдвигающие усилия;
- M_{11}, M_{22}, M_{12} – погонные изгибающие и крутящий моменты;
- t – время;
- q – обобщенные перемещения узлов конечного элемента;
- ε – матрица упругих деформаций;
- f – частота свободных колебаний оболочки, Гц;
- $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ – нормальные и касательное напряжения, МПа;
- σ_i – максимальные динамические напряжения, возникающие в оболочке с присоединенным телом при динамическом нагружении, МПа;
- σ_0 – максимальные динамические напряжения в оболочке без присоединенных тел при вынужденных колебаниях, МПа;
- r_0 – радиус круглого отверстия;
- q_0 – амплитуда перемещений;

- φ – сдвиг фаз для перемещений, рад ;
- ω – круговая частота собственная колебаний оболочки, с^{-1} ;
- ω_* – безразмерный частотный параметр собственных колебаний оболочки;
- Ω – частота вынужденных колебаний оболочки, с^{-1} ;
- V – объем материала оболочки;
- D_ε – дифференциальный оператор;
- K – матрица жесткости конечного элемента;
- M – матрица масс конечного элемента;
- C – матрица демпфирования;
- N – матрица функций формы конечного элемента;
- I – единичная матрица;
- J – матрица Якоби;
- D_σ – матрица упругости;
- B – матрица градиентов конечного элемента;
- НДС – напряженно-деформированное состояние;
- АЧХ – амплитудно-частотные характеристики;
- МКЭ – метод конечных элементов;
- КЭ – конечный элемент.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. В современном машиностроении, авиационной и ракетно-космической технике и в других отраслях народного хозяйства широко используются конструкции с элементами в виде оболочек, которые отличаются достаточно высокой прочностью, несущей способностью и надежностью при минимальном весе. В большинстве случаев оболочки имеют неоднородную структуру, которая характеризуется отверстиями, присоединенными твердыми телами, наличием подкрепляющих ребер и дискретных включений. Указанные конструктивные неоднородности оболочек влияют на их амплитудно-частотные характеристики (АЧХ), напряженно-деформированное состояние (НДС) и являются концентраторами напряжений.

Вблизи этих концентраторов под действием динамических нагрузок могут возникать большие напряжения, которые необходимо учитывать при проектировании и расчете конструкций на прочность. Учет указанных факторов значительно усложняет математические модели динамического поведения и требует разработки новых подходов к решению задач вибропрочности тонкостенных оболочек. Сложность процессов, которые рассматриваются, вызывает необходимость использования современных численных методов для расчета АЧХ и НДС оболочек с локальными конструктивными неоднородностями. Одним из наиболее эффективных численных методов для задач данного класса является метод конечных элементов (МКЭ).

Таким образом, определение динамического поведения и НДС тонких оболочек вращения с конструктивными несовершенствами является на сегодняшний день актуальной и важной научно-технической проблемой.

Связь работы с научными программами, планами, темами. Диссертация выполнена в рамках индивидуального плана подготовки аспиранта по кафедре прикладной механики и компьютерных технологий Донецкого национального университета. Проведенные в работе исследования связаны с госбюджетными научно-исследовательскими темами вышеназванного университета, включенными в координационный план Министерства образования и науки Украины, а именно: «Разработка моделей и

методов исследования прочности и устойчивости тонкостенных конструкций, находящихся под действием силовых и температурных полей» (№ ГР 0113U001528, 2013-2015 гг.), «Разработка методов исследования прочности и устойчивости тонкостенных конструкций при действии различного вида статических и динамических нагрузок» (№ ГР 0116U002522, 2016-2018 гг.), и с научно-исследовательскими госбюджетными темами Национального университета кораблестроения им. адмирала Макарова «Разработка математических моделей и методов исследования колебаний и напряженно-деформированного состояния лопаточных и оболочечных элементов газотурбинных двигателей с учетом конструктивных и технологических факторов» (№ ГР 0114U002009, 2014-2015 гг.), «Разработка математических моделей и методов исследования колебаний и напряженно-деформированного состояния тонкостенных оболочечных элементов с учетом конструктивных неоднородностей» (№ ГР 0115U001959, 2015-2016 гг.).

Цель и задачи исследования. Целью диссертационной работы является разработка методики исследования динамического поведения тонкостенных цилиндрических оболочек с конструктивными несовершенствами в виде отверстий, присоединенных твердых тел, подкрепляющих ребер и анализ зависимости АЧХ и НДС исследуемых конструкций от наличия указанных несовершенств.

Для достижения сформулированной цели в работе были определены следующие направления исследования:

– постановка задач для анализа амплитудно-частотных характеристик и напряженно-деформированного состояния тонкостенных цилиндрических оболочек с конструктивными неоднородностями при различных граничных условиях в рамках линейной теории дискретно подкрепленных оболочек;

– создание эффективного вычислительного аппарата (математических моделей, методик и алгоритмов расчета, программного обеспечения) для исследования АЧХ и НДС в упругих оболочках для различных видов граничных условий;

– получение численного решения сформулированных задач и установление новых зависимостей и закономерностей влияния конструктивных несовершенств на АЧХ и НДС исследуемых конструкций;

– численное исследование достоверности разработанных математических моделей и сходимости полученных решений;

– проведение экспериментальных испытаний по исследованию АЧХ и НДС тонкостенных цилиндрических оболочек и выявление новых закономерностей влияния конструктивных несовершенств;

– выполнение сравнительного анализа полученных численных и экспериментальных результатов для подтверждения достоверности и адекватности созданных математических моделей.

Объектом исследования являются процессы НДС и колебаний подкрепленных упругих цилиндрических оболочек с отверстиями и присоединенными твердыми телами при динамическом нагружении.

Предметом исследования является влияние подкрепляющих ребер, отверстий и присоединенных тел на НДС и колебательные процессы тонкостенных цилиндрических оболочек вращения.

Методы исследования. Проведенные в работе теоретические исследования основаны на теории тонких упругих оболочек в линейной постановке с учетом гипотез Кирхгофа-Лява и вариационного принципа Лагранжа. Численное решение задач осуществлялось с помощью метода конечных элементов. Экспериментальные данные получены методами голографической интерферометрии (стробоголографической и усреднения во времени) с помощью разработанной методики и специального оборудования.

Научная новизна полученных результатов заключается в том, что:

– разработаны математические модели динамического поведения и НДС тонкостенных упругих цилиндрических оболочек, которые позволяют учитывать конструктивные особенности в виде отверстий, присоединенных твердых тел, продольно-поперечных подкрепляющих ребер, а также

неравномерность распределения их инерционных, жесткостных и геометрических характеристик;

– развиты эффективные численные методики, разработаны алгоритмы и программы для решения задач данного класса;

– получены новые численные результаты на основании предложенного подхода для широкого диапазона изменения геометрических и механических параметров исследуемой оболочечной системы;

– установлено распределение амплитудно-частотных характеристик и полей динамических напряжений в сложных неоднородных тонкостенных цилиндрических оболочечных конструкциях, обусловленное совместным присутствием отверстий, систем присоединенных тел, подкрепляющих ребер, их расположением, количеством, размерами;

– получены новые экспериментальные результаты методами голографической интерферометрии (стробоголографической и усреднения во времени) на базе уточненной методики экспериментальных исследований, которые определяют совместное влияние отверстий, присоединенных твердых тел, продольно-поперечных подкрепляющих ребер на АЧХ и НДС исследуемых сложных оболочечных систем и подтверждают адекватность разработанных усовершенствованных математических моделей и достоверность полученных численных результатов.

Практическое значение полученных результатов заключается в возможности непосредственного применения созданных методик и программного комплекса для анализа АЧХ и НДС подкрепленных тонкостенных оболочек при наличии отверстий различной формы и присоединенных твердых тел. Полученные в диссертации новые результаты являются теоретической основой для методов расчета амплитудно-частотных характеристик и полей напряжений оболочечных конструкций при динамическом нагружении.

Результаты диссертационной работы внедрены в расчетной практике ГП «Судостроительный завод им. 61 Коммунара», ГП НПКГ «Заря»–«Машпроект» и ОАО «УкрНИИ ТСМ» для прогнозирования вибропрочности и несущей

способности оболочечных элементов газотурбинных двигателей и специальных судовых конструкций. Предложенные методики и алгоритмы расчета, комплекс компьютерных программ и экспериментальные данные могут быть использованы в работе конструкторских бюро, научно-исследовательских институтов и предприятий, занимающихся проектированием и расчетом оболочечных элементов в машиностроении, судостроении, авиационной и космической технике.

Отдельные результаты исследований используются в учебном процессе, в частности при изучении специальных дисциплин по вибропрочности тонкостенных конструкций, а также при выполнении научно-исследовательских госбюджетных тем в Донецком национальном университете и в Национальном университете кораблестроения им. адмирала Макарова.

Личный вклад соискателя. Основные результаты исследований, которые представлены в диссертационной работе и выносятся на защиту, получены автором лично. В публикациях, выполненных в соавторстве, вклад соискателя заключается в следующем: разработка методов определения АЧХ оболочек с конструктивными несовершенствами, создание алгоритмов и программ решения конкретных задач, проведение численных расчетов [61, 63, 64, 142, 144]; постановка и решение задач о вынужденных колебаниях и НДС тонких неоднородных оболочек, анализ влияния конструктивных факторов [65, 69, 81]; проведение эксперимента и обработка его результатов [62, 141, 143]. Статьи [66, 67, 68] опубликованы автором самостоятельно.

Апробация результатов диссертации. Результаты исследований, приведенные в диссертации, были доложены на следующих научных конференциях: I–III Международных научно-технических конференциях «Актуальные проблемы прикладной механики и прочности конструкций» (Украина, Ялта, Институт механики им. С.П. Тимошенко, 2009-2011); V и VI Международных научно-практических конференциях «Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела» (Украина, Донецк, Донецкий национальный университет, 2008, 2010); I и II Международных научно-технических конференциях «Актуальные проблемы инженерной

механики» (Украина, Николаев, Национальный университет кораблестроения им. адмирала Макарова, 2011, 2012); IV и V Международных научно-технических конференциях «Актуальные проблемы прикладной механики и прочности конструкций» (Украина, Запорожье, Институт механики им. С.П. Тимошенко, 2012, 2015); XIV Международной научно-технической конференции «Прогрессивная техника, технология и инженерное образование» (Украина, Севастополь, Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт», 2013); III Международной научно-технической конференции «Судовая энергетика: состояние и проблемы» (Украина, Николаев, Национальный университет кораблестроения им. адмирала Макарова, 2007); XVI Международной научно-технической конференции «Прогрессивная техника, технология и инженерное образование» (Украина, Одесса, Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт», 2015); I Всеукраинской научно-технической конференции «Компьютерное моделирование и оптимизация сложных систем» (Украина, Днепрпетровск, Украинский государственный химико-технологический университет, 2015); XVI Международной научно-технической конференции «Математические проблемы технической механики – 2016» (Украина, Днепродзержинск, Днепродзержинский государственный технический университет, 2016).

В полном объеме диссертация докладывалась и была обсуждена на: межкафедральных научных семинарах по механике сплошных сред при Донецком национальном университете (Украина, Донецк, Винница, Донецкий национальный университет, 2013-2015); межкафедральном научном семинаре по прикладной математике и механике при Запорожском национальном университете (Украина, Запорожье, Запорожский национальный университет, 2016); межкафедральном специализированном семинаре «Механика деформируемого твердого тела» при Запорожском национальном техническом университете (Украина, Запорожье, Запорожский национальный технический университет, 2016).

Публикации. По результатам выполненных исследований опубликовано 14 научных работ, в которых отражено основное содержание диссертации. Среди них 7 статей опубликовано в специализированных изданиях Украины, из которых 4 относятся к международным наукометрическим базам, а также 7 публикаций в материалах научно-технических конференций.

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю – академику НАН Украины, доктору физ.-мат. наук, профессору Шевченко В.П. за постоянное внимание, помощь и ценные замечания при написании диссертационной работы.

РАЗДЕЛ 1

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ОБЗОР СОВРЕМЕННОГО СОСТОЯНИЯ ИССЛЕДОВАНИЙ И НЕРЕШЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ДИНАМИКИ КОНСТРУКТИВНО НЕОДНОРОДНЫХ ОБОЛОЧЕК

1.1 Общая характеристика подходов к решению задач колебаний и напряженно-деформированного состояния тонкостенных оболочек с конструктивными неоднородностями

Решение динамических задач для тонких упругих оболочек влечет за собой, в зависимости от их конструктивных особенностей, использование различных механических моделей напряженно-деформированного состояния и различных методов расчета. Данное направление механики оболочек включает разные классы волновых задач, среди которых особое место занимают задачи собственных колебаний и напряженно-деформированного состояния конструкций при динамических нагрузениях.

Существенный вклад в разработку теории колебаний и напряженно-деформированного состояния тонкостенных оболочек внесли: С.А. Амбарцумян, И.Я. Амиро, В.А. Баженов, В.В. Болотин, В.З. Власов, А.С. Вольмир, И.И. Ворович, А.Л. Гольденвейзер, Э.И. Григолюк, Я.М. Григоренко, В.З. Гришак, В.С. Гудрамович, А.Н. Гузь, А.П. Дзюба, В.А. Заруцкий, В.Д. Кубенко, В.И. Моссаковский, В.В. Новожилов, В.И. Пожуев, А.С. Сахаров, С.П. Тимошенко, В.П. Шевченко, К.Ф. Черных, M. Amabili, L.H. Donnell, D.A. Evensen, K. Marguerre и многие другие.

Основные положения и уравнения современной теории тонких упругих оболочек приведены в работах [4, 5, 8, 9, 19, 23, 27, 28, 29, 37, 38, 93, 95, 99, 120, 129, 140]. Решения получены на основе как классической теории оболочек, так и уточненных теорий. Краткий анализ работ, посвященных разработке методов расчета конструктивно неоднородных оболочек при динамическом нагружении, приведен в обзорах и монографиях [8, 9, 11, 19, 86, 87, 113, 114]. Сложность построения механических моделей подкрепленных оболочек и применение принципиально различных кинематических и статических гипотез приводят к существенному разнообразию расчетных схем и уравнений.

При постановке динамических задач для ребренных оболочек существуют две основные механические модели, различающиеся способом учета подкрепляющих элементов. Первая из них основана на замене ребренной оболочки эквивалентной ей, гладкой конструктивно-ортотропной моделью, вторая – учитывает дискретное размещение ребер.

Конструктивно-ортотропная модель использовалась в работах [5, 8, 12, 47, 75, 85, 103, 119] при определении низших собственных частот колебаний и в ряде других динамических задач. При этом механические свойства, жесткостные и инерционные характеристики подкрепляющих ребер усредняются по поверхности оболочки в соответствующих направлениях. Полученная таким образом оболочка рассматривается как однородная конструктивно-ортотропная модель, для которой считаются справедливыми гипотезы классической теории гладких упругих оболочек. Использование данной модели позволяет определять лишь усредненные напряжения и деформации, что в свою очередь может привести к значительным погрешностям [5, 12, 13]. Поэтому для выявления закономерностей, которые связаны с наличием ребер, целесообразно использовать модель с учетом дискретного размещения ребер.

Дискретная модель подкрепленной ребрами оболочки основана на классической теории оболочек Кирхгофа-Лява и теории стержней Кирхгофа-Клебша, или уточненной теории С.П. Тимошенко. При этом приходится вводить ряд дополнительных допущений и давать оценку связанным с этим погрешностям. Наиболее широко используемые постановки задач динамики для ребристых оболочек с учетом дискретного подкрепления основаны на расчетных схемах, предложенных В.З. Власовым и А.И. Лурье.

Упрощающие гипотезы Кирхгофа-Лява о построении полей деформаций и напряжений позволяют решить основную задачу теории оболочек, которая заключается в сведении трехмерных краевых задач механики к двумерным. Метод, разработанный Лявом для расчета оболочек, основан на использовании двух гипотез Кирхгофа, которые применялись в теории пластин. Согласно первой гипотезе, прямые линии, перпендикулярные к срединной поверхности, остаются прямыми и перпендикулярными к деформированной срединной поверхности. Согласно второй гипотезе, нормальными напряжениями, направленными перпендикулярно к срединной поверхности, можно пренебречь по сравнению с другими напряжениями.

Рассмотренные гипотезы отвечают следующим положениям:

1) толщина оболочки мала по сравнению с наименьшим радиусом кривизны и размерами срединной поверхности;

2) перемещения малы по сравнению с толщиной оболочки.

Уравнения движения подкрепленных оболочек для задач динамики в классической постановке сводятся к системе уравнений параболического типа. В монографиях [4, 8, 9, 19, 50, 113] на основе данного подхода представлены различные математические методы решения линейных задач колебаний оболочек и получены конкретные результаты исследований.

При расчете оболочек для контактных динамических задач наряду с классическими [114, 129, 140] используются и уточненные методы решения, учитывающие большие прогибы и построенные на основе модели С.П. Тимошенко [77, 86, 87] с учетом деформаций сдвига и инерции вращения нормального элемента.

В работе [54] при расчете собственных частот колебаний цилиндрических оболочек, усиленных только продольными ребрами, установлено, что учет в расчетной модели влияния деформаций поперечного сдвига приводит к увеличению влияния дискретного размещения ребер. Однако, при определении низших частот классическая теория обеспечивает достаточно высокую точность получаемых результатов, поэтому для данного класса задач уточнения, основанные на нелинейной теории, как правило, не приводят к улучшению решения.

Современная теория ребристых оболочек, учитывающая дискретное размещение ребер и основанная на классической и уточненной теориях оболочек и стержней, изложена в работах И.Я. Амиро, В.А. Заруцкого [5, 8, 9], И.В. Андрианова, [13], А.Е. Богдановича [18], Я.М. Григоренко [29, 120], П.З. Лугового, В.Ф. Мейша [86, 87] и других.

Основные результаты теоретических исследований влияния дискретного размещения ребер и их параметров на частоты и формы собственных колебаний и напряженно-деформированное состояние оболочечных конструкций приведены в работах [5, 8-11, 18, 45, 54, 74, 88, 91, 127, 127, 129, 133-135, 151]. Наиболее полно современное состояние исследований в области динамики

подкрепленных оболочек изложено в монографиях и обзорных работах И.Я. Амиро и В.А. Заруцкого [4, 7-9, 50]. В работах [9, 10, 88, 139, 151] рассматриваются задачи собственных колебаний цилиндрических оболочек, а в работах [9, 91, 134, 138] – конических и сферических оболочек с регулярно расположенными ребрами. В работе [9] предложена классификация случаев деформации оболочек, используемая при рассмотрении собственных колебаний и при решении задач их динамической устойчивости. Собственные колебания цилиндрических оболочек с нерегулярным подкреплением изучены в работе [135]. Наиболее полно исследованы шарнирно опертые оболочки. В монографии [5] для цилиндрических оболочек на основании точного решения уравнений движения выполнен анализ влияния дискретного размещения продольных ребер. Вычисление собственных частот колебаний сведено к определению корней трансцендентных уравнений.

С целью упрощения задачи в ряде работ [82, 89, 91] не учитывались касательные составляющие сил инерции несущей поверхности. В этом случае в уравнениях движения не учитываются закручивание и изгиб ребер в плоскостях, касательных к срединной поверхности обшивки. При этом предполагается, что ребра работают только на изгиб в радиальной плоскости и кручение, а для описания напряженно-деформированного состояния обшивки используются гипотезы теории пологих оболочек. Следует отметить, что практически отсутствуют работы, в которых анализировалась бы область применения указанных выше упрощающих допущений, поэтому решения не распространяются на широкий круг задач, а сводятся лишь к частным задачам. Наиболее строгий подход связан с учетом всех видов деформации ребер.

Исследованию НДС и определению основных динамических характеристик тонкостенных оболочек на основе теории нелинейных колебаний и динамической устойчивости посвящены работы В.С. Гудрамовича [37-42, 164].

В работах В.З. Грищака [31-36, 92, 114, 147] рассмотрен широкий круг динамических задач тонких упругих оболочек с конструктивными неоднородностями.

Решения различных задач колебаний гладких многослойных и подкрепленных ортотропных композитных оболочек, полученные на основе уравнений теорий Кирхгофа-Лява, С.П. Тимошенко, С.А. Амбарцумяна, В.В. Болотина и некоторых других теорий, приведены в работах [4, 14, 15, 19, 48, 120]. Изучен характер совместного влияния свойств связующей матрицы, армирования различными волокнами и анизотропии материала на колебания и напряженно-деформированное состояние перекрестно армированных оболочек вращения.

Влияние начальных погибей на частоты и формы собственных колебаний ребристых цилиндрических и конических оболочек исследовалось в работах [5, 9, 77, 78, 138, 168]. Отмечено, что неосесимметричная погибь оказывает незначительное влияние на вычисленные частоты, но приводит к существенному изменению форм колебаний.

Следует выделить также работы [9, 16, 129], посвященные собственным колебаниям оболочек при распределенном осесимметричном статическом нагружении. Исследование колебаний цилиндрических оболочек с осевыми сжимающими силами [5, 60] показало, что влияние начальных погибей в этих оболочках на собственные частоты колебаний незначительно до тех пор, пока величины сжимающих усилий далеки от критических значений.

Методы и результаты исследований динамических характеристик оболочек с отверстием приведены в работах [82, 84, 93, 104, 113, 121, 122, 161, 167, 172]. Их анализ показывает, что традиционными приемами, основанными на использовании вариационных принципов, удается определить с приемлемой точностью только низшие частоты и формы колебаний оболочек. На практике этого оказывается недостаточно, поскольку для тонкостенных конструкций, в силу их повышенной чувствительности к вибрациям, и в связи с ростом динамичности действующих нагрузок, необходимо иметь более широкий спектр собственных частот и форм. Таким образом, совершенствование методов определения резонансных характеристик оболочек с отверстием остается важной и актуальной задачей.

Особого внимания заслуживают работы, посвященные исследованию колебаний цилиндрической, конической и сферической оболочек с

присоединенными твердыми телами. Данный класс задач в различных постановках для гладких и подкрепленных ребрами оболочек получил развитие в исследованиях ряда авторов [8, 9, 11, 75, 84, 85, 88, 103, 115, 127, 128, 145, 161, 167, 172]. Среди приведенных необходимо выделить работы Л.В. Андреева, А.Л. Дышко и И.Д. Павленко [11, 145], в которых результаты теоретических исследований собственных характеристик оболочек с локально присоединенными твердыми телами сопоставляются с экспериментальными данными. В большинстве работ отмечается, что присоединенные тела приводят к локализации форм колебаний конструкции и к усилению влияния на собственные частоты дискретного размещения ребер. Недостатком многих исследований является тот факт, что используемая расчетная схема учитывает лишь нормальные перемещения присоединенного тела. Такой подход упрощает решение, но увеличивает погрешность полученных результатов.

В работах, посвященных изучению вынужденных колебаний ребристых и гладких оболочек, как правило, рассеивание энергии не учитывалось, в связи с чем исследование проводилось в диапазоне частот, удаленных от резонансных зон. Различные задачи о вынужденных колебаниях шарнирно опертых ребристых цилиндрических, конических и сферических оболочек при гармоническом нагружении рассматривались в работах [5, 6, 8, 9, 12, 31-33, 34-36, 45, 48, 49, 79, 90, 93, 106], а при действии распределенных и краевых импульсных нагрузок – в работах [7, 86, 87]. Решения получены как на основе уточненной, так и на основе классической теорий оболочек.

Как показывают многочисленные исследования, классическая теория позволяет достичь достаточно высокой точности при решении ряда практических задач на собственные значения для тонких упругих оболочек. Однако, для соблюдения гипотез Кирхгофа-Лява должны выполняться ограничения, налагаемые на области частот колебаний, длин волн смещений, деформаций и напряжений. В противном случае необходимы уточнения, связанные с трехмерной теорией и с учетом деформаций сдвига.

1.2 Характеристика основных аналитических и численных методов исследования задач колебаний тонких упругих неоднородных оболочек

При решении задач о собственных колебаниях и НДС тонких упругих оболочек с учетом расчетной схемы, граничных условий, вида нагружения широко используются и совершенствуются различные математические методы и приемы: интегральные уравнения и интегральные преобразования Фурье, теория функций комплексной переменной, одинарные и двойные тригонометрические ряды, асимптотическое интегрирование; вариационные и прямые методы математической физики, различные численные методы.

Для решения в упрощенной постановке динамических задач для цилиндрических оболочек на основе классической теории применяются методы точного интегрирования уравнений колебаний [89, 140]. Задачи решаются с помощью двойных или одинарных тригонометрических рядов, специальных функций и при анализе корней характеристических уравнений [5, 9]. Решения задач о свободных и вынужденных колебаниях получены в основном для гладких и подкрепленных в одном направлении шарнирно опертых по торцам замкнутых цилиндрических оболочек [5, 8, 48, 90]. Полученные результаты имеют важное значение как эталонные для приближенных решений.

Широкое распространение получили приближенные аналитические методы на основе асимптотического интегрирования [4, 13, 28, 47, 83, 106]. С использованием данного подхода получены достаточно простые формулы для определения собственных частот колебаний [12, 78].

Для численного исследования колебаний и напряженного состояния оболочек с произвольными граничными условиями нашли широкое применение вариационные методы Ритца и Бубнова-Галеркина [4, 85, 88, 119, 127, 134]. При реализации указанных методов для записи дифференциальных уравнений, характеризующих колебания и напряженно-деформированное состояние оболочечных систем, обычно применяется принцип начала возможных перемещений. В данном случае используется вариационный

принцип Остроградского-Гамильтона, в котором дифференциальные уравнения колебаний получаются из условия экстремума соответствующего функционала Лагранжа, характеризующего полную энергию механической системы. Применение этих методов сопряжено с необходимостью построения координатных функций, удовлетворяющих заданным краевым условиям.

Среди численных методов для решения задач динамического поведения оболочечных конструкций с локальными неоднородностями наиболее широкое применение получили метод конечных разностей (МКР) [9, 87, 138], основанный на дискретизации систем дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, и метод конечных элементов (МКЭ).

Применение МКЭ к расчету неоднородных оболочечных конструкций является одним из наиболее перспективных. В большинстве случаев полученные на нерегулярных сетках решения имеют высокое качество, что делает данный метод особенно удобным при решении динамических задач для конструкций сложной геометрической формы.

Метод конечных элементов достаточно полно представлен в работах Г. Галлагера [24], К. Батэ [153], О. Зенкевича [57, 58, 176], Е. Митчелла и Г. Уэйта [94], В.И. Мяченкова [96], И.Ф. Образцова [100], Л.А. Розина, А.С., Сахарова [117], Г. Стренга и Дж. Фикса [131] и других. В последнее время МКЭ получил широкое использование для решения задач механики благодаря развитию сертифицированных программных пакетов. таких как: FEMAP ANSYS, ADINA, NASTRAN, PATRAN, ABAQUS, LS-DYNA, PRO/ENGINEER, COSMOS, HyperWorks, FORTU и других [2, 16, 116].

При решении сложных задач, например, для усиленных перекрестной системой ребер оболочек с отверстиями, применение МКЭ связано с необходимостью использования очень большого числа элементов. В связи с этим вопрос о достоверности численных результатов, полученных на основе данного метода, как правило, требует дополнительного обоснования.

1.3 Экспериментальные методы

Обзор экспериментальных исследований динамического поведения тонких упругих оболочек приведен в работах [6, 8, 9, 11, 51, 52, 54, 146]. Наиболее полно изучены свободные колебания конструктивно однородных шарнирно опертых оболочек, изготовленных из изотропных и ортотропных материалов. Различные применяемые методики и полученные экспериментальные результаты колебаний, устойчивости и напряженно-деформированного состояния оболочек представлены в работах [85, 88, 101, 111, 113, 114, 119, 121-126, 133, 135, 136, 145, 146, 147, 151, 153, 156, 157, 170]. Для исследования амплитудно-частотных характеристик и НДС применялись как контактные, так и бесконтактные методы, среди которых следует выделить тензометрический [107, 146], акустический [106], голографической и спекл-голографической интерферометрии [22, 73, 102].

Тензометрический метод широко применяется при исследовании НДС поверхности и связан с определением деформации с помощью тензорезисторов и тензорезисторных преобразователей. В акустическом методе для измерения динамических характеристик моделей используется измерительный тракт, состоящий из виброщупа звуковых частот, струнного анализатора и усилителя, к которому подключается катодный и шлейфовый осциллографы.

Наиболее эффективными методами исследования вибраций объектов сложной конфигурации являются методы голографической интерферометрии и спекл-интерферометрии. Они имеют ряд существенных преимуществ по сравнению с другими экспериментальными методами, но достаточно трудоемкие. Среди публикаций, посвященных применению метода голографической интерферометрии для определения динамических характеристик оболочечных конструкций, выделим работы Ю.М. Селиванова [41, 121-124, 147], А.Л. Попова [111], В.Д. Будака и Ю.Г. Золотова [22].

Из исследований собственных колебаний оболочек нулевой и положительной гауссовой кривизны, подкрепленных продольными и поперечными ребрами, следует выделить работы [5, 9, 115, 119, 125, 135, 146].

Приведенные в них результаты свидетельствуют о необходимости учета дискретного размещения ребер при вычислении собственных частот колебаний, особенно если оболочка усилена относительно небольшим числом жестких ребер.

Результаты исследования влияния осевой сжимающей силы и начальных погибей на собственные частоты и формы колебаний подкрепленных ребрами цилиндрических и усеченных конических оболочек приведены в [5, 52, 60, 74, 78]. Показано, что с ростом нагружения собственные частоты колебаний уменьшаются.

Экспериментальному исследованию собственных колебаний оболочек с отверстиями посвящено незначительное число работ. Наиболее значимыми в данном вопросе являются работы [104, 122], в которых рассмотрены колебания гладких цилиндрических оболочек с большими прямоугольными и круглыми вырезами. Отмечено, что наличие вырезов существенно влияет на собственные частоты и формы колебаний оболочек.

Низшие частоты и формы колебаний цилиндрических, конических и сферических оболочек с жестко присоединенным твердым телом рассматривались в [9, 11, 134, 145]. В основном исследовались гладкие оболочки. Указано, что наличие присоединенного тела приводит к снижению минимальной собственной частоты, к локализации форм колебаний и к смещению узловых линий.

Небольшое количество экспериментальных работ связано с изучением вынужденных колебаний оболочек при кинематическом нагружении [70, 135, 153]. Одной из известных работ, посвященных данной проблеме, является [153], где рассмотрены гладкие и ребренные оболочки, а также оболочки, несущие локально присоединенные тела. Обнаружен порог возбуждения параметрических колебаний, обусловленный рассеиванием энергии.

Исследованию устойчивости и динамического поведения оболочек при импульсном нагружении посвящено сравнительно небольшое число работ. Наиболее значимыми из них являются работы [11, 145, 51], в которых изучается

динамическая устойчивость подкрепленных ребрами жесткости цилиндрических оболочек при нестационарном внешнем давлении.

1.4 Основные задачи исследования

Анализ работ, посвященных рассматриваемой проблеме, свидетельствует о том, что наиболее полно исследованы динамические процессы в упругих гладких оболочках на основе использования различных прикладных теорий. Вместе с тем, на практике применяются сложные неоднородные конструкции с включениями различной жесткости. Поэтому в настоящее время существует целый ряд актуальных прикладных задач, имеющих важное научное и практическое значение, требующих глубокого всестороннего изучения и дальнейшего развития применяемых расчетных моделей для их решения. Данный класс задач включает в себя исследование влияния конструктивных неоднородностей, характерных для реальных конструкций, на динамическое поведение оболочечных систем и выбор их оптимальных параметров. К числу неоднородностей относятся дискретно размещенные подкрепляющие ребра, вырезы и присоединенные твердые тела, усложняющие расчетную модель.

Частотные характеристики и НДС дискретно подкрепленных оболочек с локальными неоднородностями требуют более глубокого изучения. Существующие исследования отдельных аспектов данной проблемы не позволяют комплексно в полном объеме оценить влияние неоднородностей на динамическую устойчивость при нестационарном динамическом нагружении и на собственные колебания оболочечной системы сложной структуры. Несмотря на важность учета указанных факторов, многие аспекты данной проблемы в научной литературе освещены недостаточно.

Цель данной работы состоит в исследовании амплитудно-частотных характеристик собственных колебаний и НДС упругих конструктивно неоднородных оболочечных систем при динамическом нагружении. Важное

место в диссертации занимают математические модели и методики решения задач вынужденных и свободных колебаний, а также НДС оболочечных систем с дискретными включениями в рамках линейной теории тонких оболочек.

В диссертации для достижения цели исследования поставлены следующие основные задачи:

- разработка эффективных расчетных методик, математических моделей, алгоритмов и программного обеспечения для решения задач НДС, свободных и вынужденных колебаний тонких упругих цилиндрических оболочек на основе линейной теории дискретно подкрепленных оболочек, позволяющих учитывать их конструктивную неоднородность (наличие отверстий, подкрепляющих ребер, присоединенных твердых тел) и сложную геометрию;

- получение численных результатов решения основных классов исследуемых динамических задач для различных типов граничных условий;

- разработка методики экспериментального исследования методом голографической интерферометрии амплитудно-частотных характеристик колебаний и НДС оболочек и получение новых результатов, характеризующих влияние конструктивных неоднородностей.

1.5 Выводы

В данном разделе выполнен аналитический обзор публикаций по теме диссертации и анализ современного состояния исследования динамики тонких упругих конструктивно неоднородных оболочек. Основное внимание уделено методам расчета, численным и экспериментальным исследованиям колебаний и напряженно-деформированного состояния оболочек под действием динамических нагрузок. Рассмотрены применяемые математические модели и методы решения различных классов динамических задач. Исходя из приведенного обзора можно сделать вывод, что в современных публикациях наиболее полно изучены задачи свободных и вынужденных колебаний

конструктивно однородных оболочек, но практически отсутствуют исследования динамического поведения подкрепленных цилиндрических оболочек с отверстиями различной формы и присоединенными твердыми телами при учете дискретного размещения ребер.

На основе выполненного анализа приведенных в обзоре научных работ обоснована актуальность темы диссертации, сформулированы цель и задачи исследования, которые состоят в дальнейшем развитии эффективных численных методов расчета НДС и вибродинамических характеристик конструктивно неоднородных оболочек при различных граничных условиях, в решении конкретных задач данного класса и анализе полученных результатов.

РАЗДЕЛ 2

РАЗРЕШАЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ И НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ДИСКРЕТНО ПОДКРЕПЛЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

2.1 Основные соотношения упругого напряженно-деформированного состояния теории тонких оболочек

Рассматривается задача о собственных колебания и напряженно-деформированном состоянии замкнутой цилиндрической оболочки вращения конечной длины ($0 \leq \alpha_1 \leq L$; $0 \leq \alpha_2 \leq 2\pi$) и радиуса R , изготовленной из однородного изотропного материала, ослабленной отверстиями со свободным и подкрепленным контуром и несущей присоединенные твердые тела. Оболочка подкреплена системой N_1 дискретно расположенных продольных ребер (стрингеров) и N_2 поперечных ребер (шпангоутов) произвольного сечения (рис. 2.1) и находится под действием нормальной равномерно распределенной поверхностной нагрузки $\{F\}$, изменяющейся во времени по гармоническому закону.

Геометрия срединной поверхности оболочки задана в криволинейной ортогональной глобальной системе координат $(\alpha_1, \alpha_2, \xi)$, ось α_1 которой направлена вдоль оси цилиндра, ось α_2 – в окружном направлении, а ось ξ – по нормали к срединной поверхности. Оси α_1 , α_2 и система координат подкрепляющих ребер совпадают по направлению с линиями главных кривизн. Оболочка и ребра работают в упругой стадии деформирования.

В основе линейной теории оболочек лежат гипотезы, физический смысл которых показывает общность принципиальной постановки задачи для балок, пластин и оболочек. Для перехода от трехмерных соотношений теории упругости к двумерным соотношениям теории оболочек принимаются упрощающие гипотезы Кирхгофа-Лява, которые накладывают ограничения на поля деформаций и напряжений. Гипотезы применимы (погрешность менее 5%) только для относительно тонких и однородных оболочек, у которых толщина стенки мала по сравнению с радиусом срединной поверхности [30, 103]. Условная граница между толстыми и тонкими оболочками определяется соотношением $h/R \leq 0,05$; где h – толщина оболочки; R – радиус срединной поверхности.

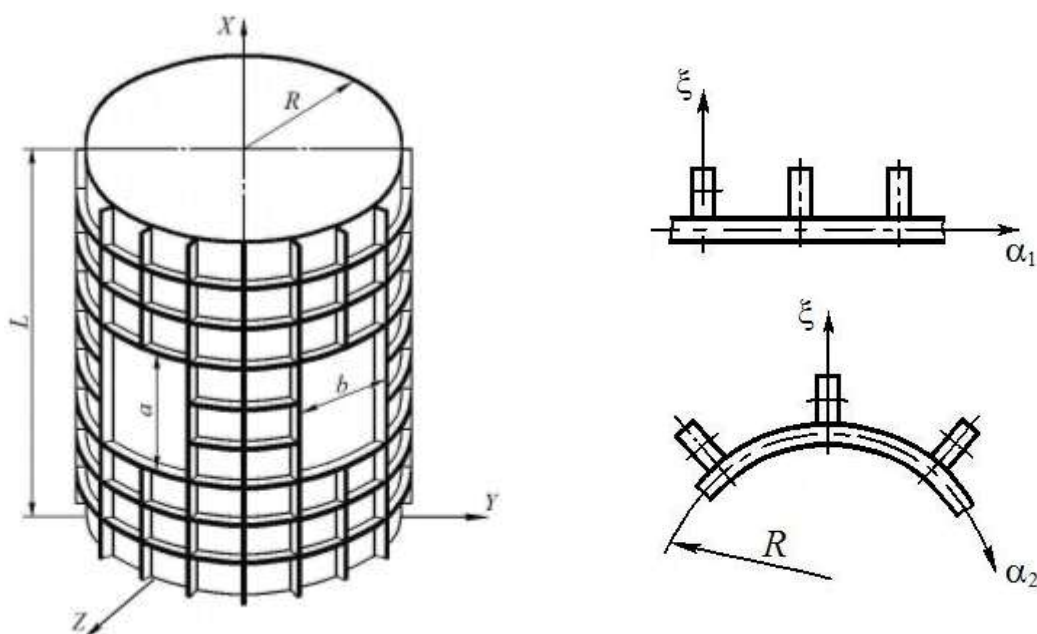


Рисунок 2.1 – Расчетная схема оболочки.

В ортогональных криволинейных координатах $(\alpha_1, \alpha_2, \xi)$ дифференциал квадрата длины дуги определяется выражением

$$ds^2 = H_1^2 d\alpha_1^2 + H_2^2 d\alpha_2^2 + H_3^2 d\xi^2, \quad (2.1)$$

где величины $H_1(\alpha_1, \alpha_2, \xi)$, $H_2(\alpha_1, \alpha_2, \xi)$, $H_3(\alpha_1, \alpha_2, \xi)$ – коэффициенты Ляме, определяемые по формулам:

$$H_1 = A_1 \left(1 + \frac{\xi}{R_1} \right), \quad H_2 = A_2 \left(1 + \frac{\xi}{R_2} \right), \quad H_3 = 1, \quad (2.2)$$

где $A_1(\alpha_1, \alpha_2)$, $A_2(\alpha_1, \alpha_2)$ – коэффициенты первой квадратичной формы выбранной координатной системы срединной поверхности;

ξ – расстояние от срединной поверхности вдоль нормали ($-h/2 \leq \xi \leq h/2$);

h – толщина оболочки;

R_1, R_2 – главные радиусы кривизны срединной поверхности оболочки.

Величины A_1 и A_2 определяются прямоугольными декартовыми координатами (x, y, z) по формулам:

$$A_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha_1} \right)^2}, \quad A_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha_2} \right)^2} \quad (2.3)$$

Для круговой цилиндрической оболочки получаем $A_1 = 1$, $A_2 = R$, $R_1 = \infty$, $R_2 = R$, где R – радиус срединной поверхности. При переходе от криволинейной ортогональной системы координат α_1, α_2, ξ к декартовой компоненты вектора перемещений $\{u\} = \{u_1, u_2, u_3\}^T$ преобразуются с использованием соотношений (2.1)–(2.3) [27, 99].

Предполагается, что напряженно-деформированное состояние упругой оболочечной системы, ввиду малости амплитуд колебаний, может быть

определено на основе линейной теории тонких упругих оболочек и стержней в рамках гипотез Кирхгофа-Лява [30, 103].

С учетом принятых допущений перемещения произвольной точки толщины оболочки, отстоящей на расстоянии ξ от срединной поверхности ($-h/2 \leq \xi \leq h/2$), выражаются уравнениями:

$$u_1^{(\xi)}(\alpha_1, \alpha_2, \xi) = u_1(\alpha_1, \alpha_2) + \xi \theta_1(\alpha_1, \alpha_2), \quad (2.4)$$

$$u_2^{(\xi)}(\alpha_1, \alpha_2, \xi) = u_2(\alpha_1, \alpha_2) + \xi \theta_2(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$u_3^{(\xi)}(\alpha_1, \alpha_2, \xi) = u_3(\alpha_1, \alpha_2),$$

где $u_1(\alpha_1, \alpha_2)$, $u_2(\alpha_1, \alpha_2)$, $u_3(\alpha_1, \alpha_2)$ – компоненты вектора перемещений срединной поверхности в направлениях α_1, α_2, ξ соответственно; α_1, α_2, ξ – оси ортогональной криволинейной системы координат; $\theta_1(\alpha_1, \alpha_2)$, $\theta_2(\alpha_1, \alpha_2)$ – углы поворота нормали к срединной поверхности относительно тангенциальных осей в плоскостях $\alpha_1 = const$ и $\alpha_2 = const$,

$$\theta_1 = -\left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} - \frac{u_1}{R_1} \right), \quad \theta_2 = -\left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2} - \frac{u_2}{R_2} \right) \quad (2.5)$$

Учитывая линейный закон распределения перемещений по толщине, который выражен зависимостями (2.4), соответствующие компоненты деформации $\varepsilon_1^{(\xi)}$, $\varepsilon_2^{(\xi)}$, $\varepsilon_3^{(\xi)}$ можно представить в виде [27]:

$$\varepsilon_1^{(\xi)} = \varepsilon_1(\alpha_1, \alpha_2) + \xi \varepsilon_4(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$\varepsilon_2^{(\xi)} = \varepsilon_2(\alpha_1, \alpha_2) + \xi \varepsilon_5(\alpha_1, \alpha_2), \quad (2.6)$$

$$\varepsilon_3^{(\xi)} = \varepsilon_3(\alpha_1, \alpha_2) + 2\xi \varepsilon_6(\alpha_1, \alpha_2)$$

Деформированное состояние оболочки описывается линейными геометрическими уравнениями связи между относительными деформациями и перемещениями координатной поверхности [27, 99]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{u_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + \frac{u_3}{R_1}, & \varepsilon_2 &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{u_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{u_3}{R_2}, \\ \varepsilon_3 &= \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{u_1}{A_1} \right) + \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{u_2}{A_2} \right), & \varepsilon_4 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \theta_2, \\ \varepsilon_5 &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \theta_1,\end{aligned}\tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}2\varepsilon_6 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \theta_1 + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \theta_2 \right) + \\ &+ \frac{1}{R_1} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_2 \right) + \frac{1}{R_2} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_1 \right),\end{aligned}$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – деформации растяжения-сжатия, характеризующие относительные удлинения в направлении координатных осей α_1 и α_2 ;

ε_3 – относительный сдвиг, характеризующий изменение косинуса угла между координатными линиями;

$\varepsilon_4, \varepsilon_5$ – деформации изгиба, характеризующие изменение кривизны срединной поверхности;

ε_6 – относительная деформация кручения.

После подстановки коэффициентов первой квадратичной формы A_1, A_2 и главных радиусов кривизны R_1, R_2 в уравнения (2.5) и (2.7) получим для цилиндрической оболочки следующие зависимости:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1}, & \varepsilon_2 &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + u_3 \right), & \varepsilon_3 &= \frac{1}{R} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}, \\ \varepsilon_4 &= -\frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha_1^2}, & \varepsilon_5 &= -\frac{1}{R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha_2^2} - \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} \right), & 2\varepsilon_6 &= \frac{2}{R} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} \right), \\ \theta_1 &= -\frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1}, & \theta_2 &= -\frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2} - u_2 \right)\end{aligned}\tag{2.8}$$

Поскольку при деформациях оболочки ее координатная поверхность должна оставаться цельной, то шесть компонент деформации координатной поверхности, приведенные в (2.8) и выраженные через три компоненты вектора перемещения, должны удовлетворять дополнительно уравнениям неразрывности или совместности деформаций [27, 99]:

$$R \frac{\partial \varepsilon_5}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial \varepsilon_6}{\partial \alpha_2} = 0, \quad -\frac{1}{R} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \varepsilon_4}{\partial \alpha_2} - R \frac{\partial \varepsilon_6}{\partial \alpha_1} = 0,$$

$$\frac{1}{R} \left(-\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial \alpha_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + \varepsilon_4 \right) - \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} = 0 \quad (2.9)$$

Напряженное состояние оболочек рассматривается в пределах сделанных допущений как результат взаимодействия различных напряженных состояний. Первое допущение касается напряжений в срединной поверхности, второе отвечает нормальным и касательным напряжениям изгиба, изменяющимся вдоль толщины по линейному закону. Нейтральный слой, в котором напряжения изгиба равны нулю, совпадает со срединным. В рамках принятых гипотез Кирхгофа-Лява можно пренебречь величиной нормального напряжения σ_{33} по отношению к величинам σ_{11} и σ_{22} , а также, учитывая допущения о поперечных касательных напряжениях, принимаем $\sigma_{13} = 0$, $\sigma_{23} = 0$. Не учитываются сдвиги, связанные с напряжениями σ_{13} и σ_{23} . Прогиб не зависит от поперечной координаты ξ .

Согласно обобщенному закону Гука нормальные и касательные напряжения в срединной поверхности связаны с относительными деформациями зависимостями:

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2), \quad \sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1), \quad (2.10)$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = G \varepsilon_3,$$

где E , G – модули упругости материала на растяжение и сдвиг;

ν – коэффициент Пуассона.

Напряжения поверхностного слоя оболочки на расстоянии ξ от ее срединной поверхности запишутся через действующие усилия и моменты в виде:

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^{(\xi)} &= \frac{E}{1-\nu^2} [(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) + \xi(\varepsilon_4 + \nu\varepsilon_5)], \\ \sigma_{22}^{(\xi)} &= \frac{E}{1-\nu^2} [(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1) + \xi(\varepsilon_5 + \nu\varepsilon_4)], \\ \sigma_{12}^{(\xi)} &= \sigma_{21}^{(\xi)} = G(\varepsilon_3 + 2\xi\varepsilon_6)\end{aligned}\quad (2.11)$$

Основное напряженное состояние представляет собой сумму безмоментного и чисто моментного напряженных состояний поверхности. Это значит, что приведенные уравнения в равной мере применимы к построению как безмоментных, так и чисто моментных напряженных состояний. Уравнения безмоментной теории оболочек получаются, если все моменты в уравнениях состояния приравнять нулю. При этом напряженное состояние будет характеризоваться лишь нормальными и сдвиговыми усилиями, действующими в касательной плоскости к срединной поверхности. Например, безмоментное напряженное состояние является невырожденным для коротких оболочек, но при увеличении их длины – вырождается, так как значительно возрастут напряжения от моментов сил.

В соответствии с основной идеей приведения трехмерной динамической задачи теории упругости к двумерной задаче о движении срединной поверхности вместо напряжений вводятся статически эквивалентные им величины внутренних усилий и моментов (рис. 2.2):

$$N_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} \left(1 + \frac{\xi}{R}\right) d\xi, \quad N_{22} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} d\xi,$$

$$\begin{aligned}
N_{12} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} \left(1 + \frac{\xi}{R}\right) d\xi, & N_{21} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{21} d\xi, \\
Q_{11} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{13} \left(1 + \frac{\xi}{R}\right) d\xi, & Q_{22} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{23} d\xi, \\
M_{11} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} \left(1 + \frac{\xi}{R}\right) \xi d\xi, & M_{22} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} \xi d\xi, \\
M_{12} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} \left(1 + \frac{\xi}{R}\right) \xi d\xi, & M_{21} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{21} \xi d\xi
\end{aligned} \tag{2.12}$$

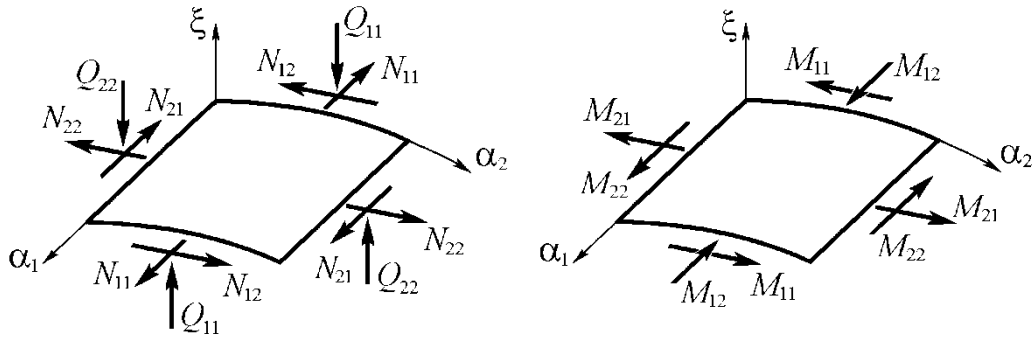


Рисунок 2.2 – Элемент оболочки под действием внутренних удельных усилий и моментов.

Тогда уравнения движения элемента координатной поверхности оболочки, при учете (2.4), (2.6) и (2.12), примут вид, аналогичный приведенному в работах [27, 99]:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{21}}{\partial \alpha_2} + P_1 &= 0, \\
\frac{1}{R} \frac{\partial N_{22}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial N_{12}}{\partial \alpha_1} + \frac{Q_{22}}{R} + P_2 &= 0, \\
\frac{\partial Q_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_{22}}{\partial \alpha_2} - \frac{N_{22}}{R} + P_3 &= 0,
\end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial M_{12}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{22}}{\partial \alpha_2} - Q_{22} = 0,$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial M_{21}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial M_{11}}{\partial \alpha_1} - Q_{11} = 0,$$

$$N_{12} - N_{21} - \frac{M_{21}}{R} = 0$$

В выражениях (2.11) – (2.12) N_{11} , N_{22} – нормальные усилия растяжения-сжатия; N_{12} , N_{21} – сдвиговые усилия; Q_{11} , Q_{22} – поперечные усилия; M_{11} , M_{22} – изгибающие моменты; M_{12} , M_{21} – крутящие моменты; P_k – компоненты вектора внешней нагрузки по направлениям осей α_1, α_2, ξ ($k = \overline{1, 3}$).

Система дифференциальных уравнений (2.13) используется для решения динамических задач для тонкостенных оболочек в рамках классической теории. Из уравнений (2.13) определяются поперечные силы Q_{11} , Q_{22} . Основную роль в формировании напряженного состояния оболочки играют деформации срединной поверхности и изгиба, а деформации поперечного сдвига несущественны. Учет поперечного сдвига важен при изучении деформации оболочки вблизи опор и при исследовании высших форм колебаний.

Внешние силы состоят из объемных сил, приходящихся на элемент поверхности оболочки, и поверхностных сил, приложенных к его поверхностям и отнесенных к осям криволинейной системы координат. Внутренними силами являются напряжения, действующие на боковые грани элемента, которые заменены статически эквивалентными усилиями и моментами. В динамических задачах теории оболочек, в общем случае, в значения компонентов вектора внешней нагрузки P_k входят значения компонентов сил инерции и динамических поверхностных сил. В этом случае будем считать, что:

$$P_k = F_k - \rho h \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} \quad (k = \overline{1, 3}), \quad (2.14)$$

где F_k – компоненты внешних поверхностных сил (для свободных установившихся гармонических колебаний $F_k = 0$);

t – время;

ρ – плотность материала оболочки.

Объемные силы инерции ввиду малости толщины оболочки h считаются равномерно распределенными по толщине и их моментами относительно срединной поверхности с точностью до слагаемых порядка $h/R \ll 1$ можно пренебречь (R – радиус кривизны поверхности в окружном направлении). Положительные направления усилий и моментов указаны на рис. 2.2.

Следуя В.В.Новожилову [99], можно принять $N_{12} = N_{21} = S$ и $M_{12} = M_{21} = H$. При этом вносимая погрешность будет того же порядка, что и погрешность других соотношений теории тонкостенных оболочек.

При выводе физических уравнений, связывающих внутренние усилия и моменты с деформациями считается, что деформации при колебаниях оболочки лежат в пределах упругости, т.е, выполняется закон Гука. Тогда погонные внутренние нормальные и касательные силы ($N_{11}, N_{22}, N_{12}, N_{21}$), входящие в уравнения колебаний (2.13), определяются через компоненты деформации зависимостями:

$$N_{11} = \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2), \quad N_{22} = \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1), \quad (2.15)$$

$$N_{12} = N_{21} = S = Gh \varepsilon_3 = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \varepsilon_3$$

Связь погонных внутренних изгибающих и крутящих моментов ($M_{11}, M_{22}, M_{12}, M_{21}$) с относительными деформациями и изменениями кривизны срединной поверхности изотропной оболочки выражается физическими соотношениями [27, 99]:

$$M_{11} = D(\varepsilon_4 + \nu\varepsilon_5), \quad M_{22} = D(\varepsilon_5 + \nu\varepsilon_4), \quad (2.16)$$

$$M_{12} = M_{21} = H = G \frac{h^3}{6} \varepsilon_6,$$

где $D = E h^3 / (12(1-\nu^2))$ – цилиндрическая жесткость оболочки при изгибе.

Последнее уравнение в (2.13) можно тождественно удовлетворить, приняв гипотезу Новожилова, согласно которой [99]:

$$\bar{S} = N_{12} - \frac{M_{21}}{R} = N_{21}, \quad H = M_{12} = M_{21} \quad (2.17)$$

При достаточно малой толщине оболочки наибольшие абсолютные значения имеют напряжения, обусловленные моментами, и напряженное состояние больше соответствует чисто моментному напряженному состоянию. В данном случае в первом приближении можно положить:

$$N_{11} = N_{22} = N_{12} = N_{21} = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0 \quad (2.18)$$

Тогда компоненты тангенциальной деформации обращаются в тождественный ноль.

2.2 Основные соотношения теории прямых и криволинейных стержней

Исходя из конструктивной схемы оболочечной системы и принятых допущений в рамках теории Кирхгофа-Лява, напряженно-деформированное состояние оболочки при малых гармонических колебаниях описывается уравнениями упругих тонких оболочек, а ребер – уравнениями упругих стержней. Предполагается, что ребра деформируются как одномерные упругие стержни, расчет которых выполняется на основе гипотез Кирхгофа-Клебша. При этом выполняется гипотеза недеформируемости поперечного сечения стержня. Соединение ребер с обшивкой не препятствует их продольным деформациям и обеспечивает равенство соответствующих перемещений и

прогибов на линиях контакта. Принимается, что ребра работают на растяжение-сжатие и изгиб в своих плоскостях. Деформированное состояние ребер, кроме осевых и нормальных составляющих перемещений и углов поворота, определяется также углами закручивания. Условия жесткого соединения ребер и оболочки позволяют установить зависимости между компонентами их векторов перемещений [8, 9]. Согласно принятым гипотезам радиальные прогибы ребер и оболочки постоянны по высоте сечений, а соответствующие углы поворота нормали к оболочке и закручивания ребер равны.

Локальная криволинейная ортогональная система координат ребер совпадает с оболочечной. Начало координат размещается в центре тяжести плоскости поперечного сечения ребра, причем ось α_1 направим вдоль оси стрингера (продольное ребро), а ось α_2 – вдоль оси шпангоута (поперечное ребро). Таким образом, параметры Ляме для стрингеров в выбранной координатной системе имеют вид:

$$H_1 = A_1(\alpha_1) \left(1 + \frac{\xi}{R_1} \right), \quad H_2 = 1, \quad H_3 = 1 \quad (2.19)$$

Аналогично параметры Ляме для шпангоутов принимают значения:

$$H_1 = 1, \quad H_2 = A_2(\alpha_2) \left(1 + \frac{\xi}{R_2} \right), \quad H_3 = 1, \quad (2.20)$$

где $A_1(\alpha_1)$, $A_2(\alpha_2)$ – коэффициенты первой квадратичной формы одномерной поверхности;

R_1 , R_2 – радиусы кривизны осей продольных и поперечных стержней, которые проходят через центр тяжести поперечного сечения. Линия центра тяжести проектируется на срединную поверхность оболочки в системе координат $\alpha_1 \alpha_2 \xi$.

Учитывая равенства перемещений на соответствующей поверхности оболочки и внутренней грани ребра, запишем условия контакта между

компонентами обобщенных векторов перемещений срединной поверхности оболочки и центра тяжести поперечного сечения продольного ребра:

$$\begin{aligned} u_{1i}^{(\alpha_2 \xi)}(\alpha_1, 0, \xi_{1i}) &= u_1^{(\xi)}(\alpha_1, \alpha_{2i}, h/2), \\ u_{2i}^{(\alpha_2 \xi)}(\alpha_1, 0, \xi_{1i}) &= u_2^{(\xi)}(\alpha_1, \alpha_{2i}, h/2), \\ u_{3i}^{(\alpha_2 \xi)}(\alpha_1, 0, \xi_{1i}) &= u_3^{(\xi)}(\alpha_1, \alpha_{2i}, h/2), \end{aligned} \quad (2.21)$$

где ξ_{1i} – эксцентриситет i -го подкрепляющего ребра;

α_{2i} – координата линии проекции центра тяжести поперечного сечения ребра, направленного вдоль оси α_1 на координатную срединную поверхность оболочки.

Исходя из соотношений (2.4), (2.21) с учетом жесткого соединения ребер с оболочкой и равенства соответствующих углов закручивания согласно принятым гипотезам получим зависимости для продольного ребра:

$$\begin{aligned} u_{1i}(\alpha_1) &= u_1(\alpha_1, \alpha_{2i}) \pm \xi_{1i} \theta_1(\alpha_1, \alpha_{2i}), \\ u_{2i}(\alpha_1) &= u_2(\alpha_1, \alpha_{2i}) \pm \xi_{1i} \theta_2(\alpha_1, \alpha_{2i}), \\ u_{3i}(\alpha_1) &= u_3(\alpha_1, \alpha_{2i}), \\ \theta_{1i}(\alpha_1) &= \theta_1(\alpha_1, \alpha_{2i}), \quad \theta_{\text{кpli}} = \theta_2(\alpha_1, \alpha_{2i}) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Соответственно запишутся условия контакта между компонентами обобщенных векторов перемещений поверхности оболочки и центра тяжести поперечного сечения ребра, направленного вдоль оси α_2 :

$$\begin{aligned} u_{1j}(\alpha_2) &= u_2(\alpha_{1j}, \alpha_2) \pm \xi_{2j} \theta_2(\alpha_{1j}, \alpha_2), \\ u_{2j}(\alpha_2) &= u_1(\alpha_{1j}, \alpha_2) \pm \xi_{2j} \theta_1(\alpha_{1j}, \alpha_2), \\ u_{3j}(\alpha_2) &= u_3(\alpha_{1j}, \alpha_2), \\ \theta_{1j}(\alpha_2) &= \theta_2(\alpha_{1j}, \alpha_2), \quad \theta_{\text{кп2j}} = \theta_1(\alpha_{1j}, \alpha_2) \end{aligned} \quad (2.23)$$

В уравнениях (2.21)–(2.23) приняты следующие обозначения: $u_1(\alpha_1, \alpha_{2i}), u_2(\alpha_1, \alpha_{2i}), u_3(\alpha_1, \alpha_{2i})$ – компоненты перемещений срединной поверхности оболочки на линии контакта продольного ребра; $u_1(\alpha_{1j}, \alpha_2), u_2(\alpha_{1j}, \alpha_2), u_3(\alpha_{1j}, \alpha_2)$ – аналогичные компоненты для поперечного ребра; ξ_{1i}, ξ_{2j} – эксцентриситеты продольных и поперечных ребер ($\xi_{1i} = h/2 + b_{1i}, \xi_{2j} = h/2 + b_{2j}$); b_{1i}, b_{2j} – расстояния от их центров тяжести до поверхности оболочки; α_{2i}, α_{1j} – координаты линий проекции центра тяжести поперечных сечений сопрягаемых ребер на координатную поверхность оболочки; $\theta_{кpli}, \theta_{кp2j}, \theta_{1i}, \theta_{2j}$ – углы закручивания ребер и поворота их поперечных сечений относительно координатных линий α_1 и α_2 . Знаки \pm соответствуют случаям внешнего и внутреннего подкрепления.

При построении математической модели деформирования i -го продольного стрингера, линия центра тяжести поперечного сечения которого расположена вдоль оси α_1 , будем исходить из следующих предположений.

Исходя из принятой гипотезы недеформируемости поперечного сечения стрингера, направленного вдоль оси α_1 , компоненты деформации определяются согласно линейного варианта теории стержней [8]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1i} &= \frac{\partial u_{1i}}{\partial \alpha_1}, & \varepsilon_{4i} &= \frac{\partial \theta_{1i}}{\partial \alpha_1}, & \varepsilon_{6i} &= \frac{\partial \theta_{кpli}}{\partial \alpha_1}, \\ \theta_{1i} &= -\frac{\partial u_{3i}}{\partial \alpha_1}, & \theta_{кpli} &= -\frac{1}{R} \frac{\partial u_{3i}}{\partial \alpha_2} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Аналогичным образом компоненты деформации записываются для j -го шпангоута, направленного вдоль оси α_2 :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2j} &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_{2j}}{\partial \alpha_2} + u_{3j} \right), & \varepsilon_{5j} &= \frac{1}{R} \frac{\partial \theta_{2j}}{\partial \alpha_2}, & \varepsilon_{6j} &= \frac{1}{R} \frac{\partial \theta_{кp2j}}{\partial \alpha_2}, \\ \theta_{2j} &= -\frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_{3j}}{\partial \alpha_2} - u_{2j} \right), & \theta_{кp2j} &= -\frac{\partial u_{3j}}{\partial \alpha_1} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Обобщенный закон Гука для i -го стрингера имеет вид:

$$\sigma_{11i} = E_{1i} \varepsilon_{1i}^{(\alpha_2 \xi)}, \quad \sigma_{12i} = G_{1i} \varepsilon_{6i}^{(\alpha_2 \xi)}, \quad (2.26)$$

где $\varepsilon_{1i}^{(\alpha_2 \xi)} = \varepsilon_{1i} + \xi_{1i} \varepsilon_{4i}$, $\varepsilon_{6i}^{(\alpha_2 \xi)} = \xi_{1i} \varepsilon_{6i}$

Аналогично записываются соотношения для j -го шпангоута:

$$\sigma_{21j} = G_{2j} \varepsilon_{6j}^{(\alpha_1 \xi)}, \quad \sigma_{22j} = E_{2j} \varepsilon_{2j}^{(\alpha_1 \xi)}, \quad (2.27)$$

где $\varepsilon_{6j}^{(\alpha_1 \xi)} = \xi_{2j} \varepsilon_{6j}$, $\varepsilon_{2j}^{(\alpha_1 \xi)} = \varepsilon_{2j} + \xi_{2j} \varepsilon_{5j}$

Связь между усилиями, моментами и соответствующими деформациями для i -го стрингера и j -го шпангоута, расположенных вдоль координатных осей, выражается следующими зависимостями:

$$\begin{aligned} N_{11i} &= E_{1i} S_{1i} \varepsilon_{1i}, & N_{22j} &= E_{2j} S_{2j} \varepsilon_{2j}, \\ M_{11i} &= E_{1i} I_{1i} \varepsilon_{4i}, & M_{22j} &= E_{2j} I_{2j} \varepsilon_{5j}, \\ M_{12i} &= G_{1i} I_{\text{кр } 1i} \varepsilon_{6i}, & M_{21j} &= G_{2j} I_{\text{кр } 2j} \varepsilon_{6j} \end{aligned} \quad (2.28)$$

В формулах (2.28) N_{11i} , M_{11i} , M_{12i} – нормальные усилия, изгибные и крутящие моменты i -го подкрепляющего стрингера по площади поперечного сечения; N_{22j} , M_{22j} , M_{21j} – аналогичные характеристики j -го шпангоута; S_{1i} , I_{1i} , $I_{\text{кр } 1i}$ – площади поперечного сечения, собственные осевые изгибающие моменты инерции относительно поперечной координатной оси и моменты инерции кручения стрингеров; S_{2j} , I_{2j} , $I_{\text{кр } 2j}$ – аналогичные характеристики шпангоутов; E_{1i} , E_{2j} , G_{1i} , G_{2j} – модули нормальной упругости и сдвига материала подкрепляющих ребер.

2.3 Учет присоединенных твердых тел

При учете присоединенных тел предполагается, что они абсолютно твердые и жестко присоединены к поверхности оболочки. Ввиду ограниченного своего объема, конструкционной жесткостью тела не обладают, а интерпретируются как сосредоточенные в точках $\Omega_{\nu}(\alpha_{1\nu}, \alpha_{2\nu})$ массы M_{ν} ($\nu = 1, 2, \dots, N_3$), где $\alpha_{1\nu}, \alpha_{2\nu}$ – координаты точек крепления ν -го твердого тела, N_3 – количество присоединенных тел. В общем случае центры тяжести тел не совпадают с плоскостью срединной поверхности, поэтому они обладают определенными моментами инерции вращения относительно координатных осей. Учитываются нормальная и касательные составляющие перемещений присоединенного тела, а также вращение относительно координатных осей.

Компоненты перемещений центров масс присоединенных тел запишутся в виде:

$$\begin{aligned} u_{1\nu} &= u_1(\alpha_{1\nu}, \alpha_{2\nu}) \pm \xi_{\nu} \theta_1(\alpha_{1\nu}, \alpha_{2\nu}), \\ u_{2\nu} &= u_2(\alpha_{1\nu}, \alpha_{2\nu}) \pm \xi_{\nu} \theta_2(\alpha_{1\nu}, \alpha_{2\nu}), \quad u_{3\nu} = u_3(\alpha_{1\nu}, \alpha_{2\nu}), \end{aligned} \quad (2.29)$$

где $u_k(\alpha_{1\nu}, \alpha_{2\nu})$ ($k = 1, 2, 3$), $\theta_1(\alpha_{1\nu}, \alpha_{2\nu})$, $\theta_2(\alpha_{1\nu}, \alpha_{2\nu})$ – компоненты смещений срединной поверхности оболочки и углы поворота нормали к ней относительно координатных линий в точке присоединения тела;

$\xi_{\nu} = h/2 + b_{\nu}$ – расстояние от срединной поверхности оболочки до центра тяжести тела (принято положительным при наружном расположении тела, при внутреннем – отрицательным);

b_{ν} – расстояние от центра тяжести тела до поверхности оболочки.

Условия соединения твердого тела с несущей поверхностью записаны на основании предположения равенства значений компонент перемещения его центра тяжести и точки крепления, а также углов поворота консоли связи и нормали к поверхности оболочки.

2.4 Постановка задач колебаний и НДС дискретно подкрепленных оболочек

Анализ приведенных основных разрешающих зависимостей свидетельствует о том, что для исследования колебаний и напряженно-деформированного состояния рассматриваемой неоднородной оболочечной системы более предпочтительным является использование метода конечных элементов. Также, с учетом того, что оболочки являются упругими тонкостенными телами сложной геометрической формы, целесообразно использовать изопараметрическую концепцию МКЭ. Для удобства дальнейших выкладок будем рассматривать данную задачу и основные зависимости НДС в матричном виде.

Решение задач о собственных колебаниях и напряженно-деформированном состоянии тонких упругих дискретно подкрепленных оболочек с отверстиями и присоединенными твердыми телами выполняется с использованием вышеприведенных зависимостей (2.1)–(2.29). Для вывода уравнений колебаний и определения амплитудно-частотных характеристик неоднородной дискретно подкрепленной оболочки применяется вариационный принцип Лагранжа [175], согласно которому:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q} = F \quad (2.30)$$

где $\mathcal{E} = \Pi - T$ – функция Лагранжа;

Π, T – потенциальная и кинетическая энергии деформации и колебаний дискретно подкрепленной оболочки;

q – вектор узловых перемещений конечно-элементной модели конструкции;

F – вектор внешних сил, приложенных к узлам. При исследовании свободных колебаний принимаем $F = 0$.

Потенциальная энергия деформации оболочечной системы определяется как сумма потенциальных энергий КЭ объемом V , моделирующих деформации оболочки, стрингеров, шпангоутов и отверстий. Потенциальную энергию деформации оболочки представим в виде:

$$\Pi = \frac{1}{2} \iiint_V \{\varepsilon\}^T [D_\sigma] \{\varepsilon\} dV, \quad (2.31)$$

где $\{\varepsilon\} = [B]\{q\}$ – вектор деформаций оболочки;

$[B] = [D_\varepsilon][N]$ – матрица градиентов конечного элемента;

$[D_\varepsilon]$ – матрица дифференциальных операторов;

$[N]$ – матрица функций формы, определяющая положения узлов элемента;

$\{q\}$ – вектор обобщенных узловых перемещений конечно-элементной модели;

$[D_\sigma]$ – матрица упругости.

Дифференциальный оператор $[D_\varepsilon]$ для цилиндрической оболочки, полученный на основе геометрических соотношений Коши, представляется в виде:

$$[D_\varepsilon] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} & \frac{1}{R} \\ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial}{\partial \alpha_1} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} \\ 0 & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} & -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} \\ 0 & \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} & -\frac{2}{R} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Связь деформаций с перемещениями поверхности согласно (2.8) определяется зависимостью:

$$\{\varepsilon\} = [D_\varepsilon] \{u\} = [B^*] \{\alpha\}, \quad (2.33)$$

где $[B^*] = [D_\varepsilon][A^*]$ – матрица преобразований;

$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6\}^T$ – вектор компонентов деформации;

$\{u\} = \{u_1, u_2, u_3\}^T$ – вектор перемещений точек срединной поверхности;

$\{\alpha\}$ – вектор коэффициентов аппроксимирующих полиномов;

$[A^*]$ – матрица координатных функций аппроксимирующих полиномов.

Вектор перемещений точек элемента представим в виде:

$$\{u\} = [A^*] \{\alpha\} \quad (2.34)$$

После преобразований уравнение потенциальной энергии деформации оболочки примет вид:

$$\Pi = \frac{1}{2} \iiint_V \{q\}^T [B]^T [D_\sigma] [B] \{q\} dV \quad (2.35)$$

Кинетическая энергия рассматриваемой оболочечной системы определяется как сумма кинетических энергий КЭ оболочки, ребер и присоединенных тел. Кинетическая энергия колебаний рассматриваемой оболочечной системы в матричном виде определяется по формуле:

$$T = \frac{1}{2} \rho \iiint_V \{q\}^T [N]^T [N] \{q\} dV \quad (2.36)$$

Напряженно-деформированное состояния оболочки определяется вектором напряжений $\{\sigma\} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}\}^T$ с учетом малых упругих деформаций [57]:

$$\{\sigma\} = [D_\sigma] \{\varepsilon\}, \quad (2.37)$$

Матрицу упругости для цилиндрической оболочки можно представить в виде:

$$[D_\sigma] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Перемещения и напряжения в любой точке области могут быть найдены по вычисленным значениям вектора узловых перемещений $\{q\}$ и вектора $\{\alpha\}$ с использованием зависимостей (2.32)–(2.38).

Внутренние усилия и моменты на срединной поверхности оболочки вычисляются согласно зависимостей (2.15)–(2.16), на наружной поверхности – согласно (2.12).

2.5 Граничные и начальные условия

Разрешающие уравнений колебаний и напряженно-деформированного состояния оболочки и ребер (2.30)–(2.36) дополняются граничными условиями, которые зависят от вида закрепления торцов оболочки и определяются соотношениями, связывающими усилия, моменты сил и перемещения срединной поверхности. Граничные условия могут быть динамическими, кинематическими или смешанного вида. Кинематические граничные условия задаются перемещениями u_1, u_2, u_3 и углами поворота нормали θ_1, θ_2 на контурах оболочки, а также стрингеров и шпангоутов.

Динамические условия задаются обобщенными силами N_{11}^*, N_{22}^* , изгибающими моментами M_{11}^*, M_{22}^* и комбинациями приведенных усилий [99]:

$$\begin{aligned}
N_{12}^* &= N_{12} + \frac{M_{12}}{R_2}, & Q_{11}^* &= Q_{11} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial M_{12}}{\partial \alpha_2}, \\
N_{21}^* &= N_{21} + \frac{M_{21}}{R_1}, & Q_{22}^* &= Q_{22} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial M_{21}}{\partial \alpha_1}
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Таким образом, на каждом торце в верхнем и нижнем основаниях оболочки ($\alpha_1 = 0$ и $\alpha_1 = L$) вдоль окружной координаты α_2 и на краях стрингеров может быть задана одна из комбинаций следующих динамических граничных условий, определяемых обобщенными силами N_{11}^* , N_{12}^* , Q_{11}^* , M_{11}^* , или кинематических граничных условий, определяемых обобщенными смещениями u_1^* , u_2^* , u_3^* , θ_1^* :

$$\begin{aligned}
N_{11} &= N_{11}^* && \text{или } u_1 = u_1^*, \\
N_{12} + \frac{M_{12}}{R_1} &= S^* && \text{или } u_2 = u_2^*, \\
Q_{11} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial M_{12}}{\partial \alpha_2} &= Q_{11}^* && \text{или } u_3 = u_3^*, \\
M_{11} &= M_{11}^* && \text{или } \theta_1 = \theta_1^*
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Ниже приведены наиболее распространенные виды граничных условий на контуре, рассматриваемые в исследуемых задачах:

- жестко закрепленный торец (C): $u_1^* = u_2^* = u_3^* = \theta_1^* = 0$;
- шарнирно закрепленный торец (S): $u_1^* = u_2^* = u_3^* = M_{11}^* = 0$;
- шарнирно опертый торец со свободным смещением в продольном направлении (S^0): $u_2^* = u_3^* = N_{11}^* = M_{11}^* = 0$;
- свободный торец (F): $N_{11}^* = N_{12}^* = M_{11}^* = Q_{11}^* = 0$.

Для свободных краев отверстия граничные условия будут:

- 1) для горизонтальных краев: $N_{11}^* = N_{12}^* = M_{11}^* = Q_{11}^* = 0$;
- 2) для вертикальных краев: $N_{22}^* = N_{21}^* = M_{22}^* = Q_{22}^* = 0$.

К приведенным краевым условиям для замкнутой круговой оболочки к этим условиям необходимо добавить требование периодичности решений по координате α_2 :

$$u_1(\alpha_2) = u_1(\alpha_2 + 2\pi k), \quad u_2(\alpha_2) = u_2(\alpha_2 + 2\pi k), \quad u_3(\alpha_2) = u_3(\alpha_2 + 2\pi k) \quad (2.40)$$

Данные условия полностью определяют напряженно-деформированное состояние и перемещения на торце оболочки. Аналогичным образом задаются граничные условия в плоскости $\alpha_2 = const$, которые определяются предварительно заданными значениями кинематических и силовых параметров: $u_1^*, u_2^*, u_3^*, \theta_2^*, N_{22}^*, N_{21}^*, Q_{22}^*, M_{22}^*$.

При интегрировании основных уравнений колебаний должны быть удовлетворены также начальные условия, относящиеся к перемещениям и скоростям точек срединной поверхности оболочки. Начальные условия задаются для перемещений u_1, u_2, u_3 , углов поворота θ_1, θ_2 и их частных производных по времени. Будем полагать, что в начальный момент времени система находится в покое, то есть, при $t = 0$ обобщенные координаты и скорости равны нулю. Таким образом, уравнения (2.30)–(2.36) при $t = 0$ дополняются следующими нулевыми начальными условиями вида:

$$u_1 = u_2 = u_3 = \theta_1 = \theta_2 = 0, \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{\partial u_3}{\partial t} = \frac{\partial \theta_1}{\partial t} = \frac{\partial \theta_2}{\partial t} = 0$$

В итоге, система соотношений (2.30) – (2.41) представляет собой полную систему уравнений, которая позволяет вычислять основные динамические характеристики дискретно подкрепленных цилиндрических оболочек с конструктивными особенностями и соответствующими граничными и начальными условиями в рамках линейной теории оболочек и стержней.

2.6 Выводы

В данном разделе на основе линейной теории тонких упругих оболочек с использованием МКЭ выполнена постановка задачи и выведены основные уравнения напряженно-деформированного состояния и колебаний дискретно подкрепленных ребрами цилиндрических оболочек вращения с отверстиями и присоединенными твердыми телами. Получены основные зависимости напряженно-деформированного состояния конструктивно неоднородных оболочек и соотношения упругости, положенные в основу построения математической модели колебаний в перемещениях и в смешанной форме. Для вывода уравнений колебаний неоднородной оболочечной структуры используется вариационный принцип стационарности Лагранжа. Приведены выражения для потенциальной и кинетической энергий оболочки и соответствующих дискретных подкрепляющих элементов, а также кинематические условия их контакта. Уравнения колебаний дополнены соответствующими граничными и начальными условиями для оболочки и подкрепляющих ребер.

Применение метода конечных элементов позволяет с достаточной степенью точности исследовать спектр собственных частот и форм свободных колебаний цилиндрических оболочек.

РАЗДЕЛ 3

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ТОНКИХ УПРУГИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С КОНСТРУКТИВНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

3.1 Численный алгоритм решения задачи о свободных колебаниях конструктивно неоднородных цилиндрических оболочек

Решение задачи о свободных колебаниях для оболочечной системы выполняется при помощи метода конечных элементов с использованием вариационного принципа Лагранжа [175]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q} = 0, \quad (3.1)$$

где $\mathcal{E} = \Pi - T$ – функция Лагранжа;

q – вектор обобщенных узловых перемещений конечно-элементной модели.

Потенциальная энергия деформации оболочечной системы в матричном виде определяется как сумма потенциальных энергий составляющих КЭ объемом V

$$\Pi = \frac{1}{2} \iiint_V \{q\}^T [B]^T [D_\sigma] [B] \{q\} dV = \frac{1}{2} \left(\{q\}^T [K] \{q\} \right), \quad (3.2)$$

откуда матрица жесткости конечно-элементной модели оболочечной системы определяется зависимостью

$$[K] = \iiint_V [B]^T [D_\sigma] [B] dV \quad (3.3)$$

Кинетическая энергия колебаний оболочечной системы определяется как сумма кинетических энергий составляющих КЭ:

$$T = \frac{1}{2} \rho \iiint_V \{q\}^T [N]^T [N] \{q\} dV = \frac{1}{2} (\{q\}^T [M] \{q\}), \quad (3.4)$$

откуда матрица масс оболочечной системы определяется зависимостью

$$[M] = \rho \iiint_V [N]^T [N] dV \quad (3.5)$$

Для дискретизации упругой оболочечной системы связанная с глобальной системой координат (α_1, α_2) область срединной поверхности (см. рис. 2.1) разбивается на N конечных элементов, в каждом из которых вводится локальная система координат (ξ_1, ξ_2, ξ_3) . Таким образом, положительно определенные матрицы жесткости $[K]$ и масс $[M]$ оболочечной системы, используя стандартную процедуру, формируются из матриц жесткости и масс КЭ, а те, в свою очередь, включают в себя подматрицы жесткости и масс узлов.

Из условий стационарности функции Лагранжа (3.1) при использовании метода конечных элементов с учетом (3.2)–(3.5) получаем систему разрешающих уравнений колебаний оболочечной конструкции в перемещениях. При этом геометрические и физико-механические соотношения записываются в глобальной криволинейной ортогональной системе координат $(\alpha_1, \alpha_2, \xi)$, а дифференцирование и интегрирование выполняются в локальной системе (ξ_1, ξ_2, ξ_3) . Построенный таким образом КЭ удовлетворяет условиям непрерывности первых производных при переходе через его границы и точно описывает поступательные перемещения элемента как жесткого целого.

Матричная форма уравнений свободных колебаний без затуханий для исследуемой оболочки имеет вид:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{0\}, \quad (3.6)$$

где $\{\ddot{q}\}$, $\{q\}$ – векторы обобщенных узловых ускорений и перемещений всей конструкции.

Матрицы жесткости и масс узлов элемента (e) объемом V_e вычисляются по формулам:

$$[K^{(e)}] = \iiint_{V_e} [B^{(e)}]^T [D_\sigma] [B^{(e)}] dV_e, \quad [M^{(e)}] = \rho \iiint_{V_e} [N]^T [N] dV_e \quad (3.7)$$

Формулы (2.7) для компонент деформации КЭ оболочки примут вид:

$$\{\varepsilon^{(e)}\} = [B^{(e)}]\{q^{(e)}\}, \quad (3.8)$$

где $[B^{(e)}]$ – матрица дифференцирования функций формы КЭ;
 $\{q^{(e)}\}$ – вектор обобщенных перемещений узлов элемента (e).

Несовпадение деформаций в сопрягаемых узлах на стыке элементов приводит к несовпадению в усилиях и напряжениях. Несовпадающие величины следует заменять средними их значениями. Таким образом осуществляется обратный переход от дискретной системы к континуальной.

Решение системы линейных уравнений (3.6) ищем в виде:

$$\{q\} = \{q_o\}_i \cos(\omega_i t + \varphi_i), \quad (3.9)$$

где $\{q_o\}_i$ – i -ый собственный вектор, представляющий амплитуду колебаний на i -ой собственной частоте (i -ую форму колебаний);

ω_i – i -ая собственная круговая частота;

t – время;

φ_i – сдвиг фаз для перемещений.

Уравнения (3.6) с учетом зависимости (3.9) приводятся к виду:

$$(-\omega_i^2 [M] + [K])\{q_o\}_i = \{0\} \quad (3.10)$$

Полученное матричное выражение представляет собой систему однородных линейных алгебраических уравнений, решение которых дает вектор собственных частот и матрицу форм колебаний оболочечной системы. Задача сводится к вычислению матриц жесткости $[K]$ и масс $[M]$ оболочки, которые формируются из матриц жесткости $[K^{(e)}]$ и масс $[M^{(e)}]$ составляющих ее конечных элементов, согласно (3.7) и (3.8).

Для существования нетривиального решения (3.10) ($\{q_o\}_i \neq \{0\}$) определитель матрицы $[-\omega_i^2[M] + [K]]$ должен быть равен нулю, т.е.

$$\det(-\omega_i^2[M] + [K]) = 0 \quad (3.11).$$

Если Θ – порядок матрицы (число степеней свободы), то уравнение (3.11) имеет Θ корней – собственных значений, которые определяют вектор квадратов круговых собственных частот: $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_\Theta^2$. Поэтому проблема собственных значений (3.10) имеет Θ собственных решений $(\omega_1^2, \{q_o\}_1)$, $(\omega_2^2, \{q_o\}_2)$, ..., $(\omega_\Theta^2, \{q_o\}_\Theta)$. Из известного свойства собственных векторов матрицы $[M]$ [17] вследствие их ортогональности

$$\{q_o\}_i^T [M] \{q_o\}_j = \begin{cases} 0; & i \neq j; \\ 1; & i = j. \end{cases} \quad (3.12)$$

Значения собственных круговых частот ω_i и собственных частот f_i связаны соотношением $f_i = \omega_i / 2\pi$.

Таким образом, задача (3.10) с учетом (3.12) представляет обобщенную проблему собственных значений, которая в общем виде сводится к определению собственных значений и векторов системы вида:

$$[\Lambda]\{x\} - \lambda[\Phi]\{x\} = \{0\}, \quad (3.13)$$

где $[\Lambda]$ и $[\Phi]$ симметричные положительно определенные матрицы;

λ – собственные значения,

$\{x\}$ – собственные векторы.

Для решения задачи (3.13) используется алгоритм Хаусхолдера- QR в сочетании с обратными итерациями, который по сравнению с методом Ланцоша позволяет сократить время решения задачи. Этот алгоритм можно применять только к стандартным задачам на собственные значения вида:

$$[\Lambda]\{x\} - \lambda[I]\{x\} = \{0\}, \quad (3.14)$$

где $[I]$ – единичная матрица.

Поэтому для решения обобщенной проблемы собственных значений по алгоритму Хаусхолдера- QR -обратных итераций, задача (3.10) приводится к стандартной форме (3.14). Это приведение выполняется с помощью разложения Холецкого для матрицы $[M]$ с последующим умножением матрицы $[K]$ слева и справа на обратные нижнюю и верхнюю треугольные матрицы. В результате получаем [17]:

$$[\Lambda] = [L]^{-1}[K][L^T]^{-1}, \quad (3.15)$$

где $[L][L^T] = [M]$ ($[L]$ – нижняя треугольная матрица с положительной диагональю в разложении Холецкого).

Разложение Холецкого существует, если матрица $[M]$ – симметричная положительно определенная. Для рассматриваемой задачи это условие выполняется. Элементы матрицы $[L]$ вычисляются, начиная с левого верхнего угла матрицы $[M]$, по формулам:

$$L_{ii} = \sqrt{M_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}^2}, \quad (i = 1, \dots, \Theta), \quad (3.16)$$

$$L_{ij} = \frac{1}{L_{jj}} \left(M_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} L_{jk} \right), \quad (i, j = 1, \dots, \Theta)$$

Основными этапами алгоритма Хаусхолдера- QR -обратных итераций являются [17]:

1) Приведение исходной матрицы $[\Lambda]$ к трехдиагональному виду с помощью преобразования Хаусхолдера с учетом (3.16).

2) Вычисление всех собственных значений с помощью QR -преобразований.

3) Вычисление собственных векторов трехдиагональной матрицы с помощью обратных итераций и переход от них к собственным векторам исходной матрицы.

Ниже приведено описание этапов рассматриваемого алгоритма. Этап приведения матрицы $[\Lambda]$ по Хаусхолдеру к трехдиагональному виду состоит из $(\Theta - 2)$ преобразований вида [137]:

$$[\Lambda]_r = [P]_r [\Lambda]_{r-1} [P]_r, \quad (r = 1, \dots, \Theta - 2) \quad (3.17)$$

При этом на начальном этапе принимаем $[\Lambda]_0 = [\Lambda]$. В процессе выполнения алгоритма r -ое преобразование (3.17) обнуляет в r -ой строке и r -ом столбце матрицы $[\Lambda]$ все элементы ниже и правее трехдиагональной части матрицы, сохраняя при этом нули, полученные на предыдущих шагах.

Матрица Хаусхолдера $[P]_r$ вычисляется по формуле [137]

$$[P]_r = [I] - \frac{\{V\}_r \{V\}_r^T}{2D_r^2}, \quad (3.18)$$

где

$$\left. \begin{aligned} V_{r,i} &= 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r), & V_{r,r+1} &= \Lambda_{r,r+1} \mp S_r, \\ V_{r,i} &= \Lambda_{r,i} & (i = r + 2, \dots, \Theta), \\ S_r &= \left(\sum_{i=r+1}^{\Theta} \Lambda_{r,i}^2 \right)^{1/2}, \\ 2D_r^2 &= S_r^2 \mp \Lambda_{r,r+1} S_r \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

В соотношениях (3.19) знак S_r берется равным знаку элемента $\Lambda_{r,r+1}$. Формулы записаны с учетом того, что запоминается только верхний треугольник элементов матрицы $[\Lambda]_{r-1}$. Текущий элемент матрицы $[\Lambda]_{r-1}$, (например, с индексом i, j), обозначаем $\Lambda_{i,j}$, опуская индекс $r-1$. Текущий

элемент вектора $\{V\}_r$ (например, с индексом i), обозначаем $V_{r,i}$. Матрицы $[P]_r$ ортогональны и симметричны для вещественных $\{V\}_r$.

Формулу (3.18) можно записать в виде:

$$[P]_r = [I] - 2\{W\}_r \{W\}_r^T, \quad (3.20)$$

$$\text{где } \{W\}_r = \frac{\{V\}_r}{2D_r}, \quad \{W\}_r^T \{W\}_r = 1.$$

Метод Хаусхолдера позволяет получить симметричную трехдиагональную матрицу, собственные значения которой совпадают с собственными значениями исходной матрицы. Количество вычислений в данном методе почти вдвое меньше по сравнению с другими аналогичными методами. Это обусловлено тем, что при его применении становятся нулевыми сразу все элементы, стоящие ниже и правее трехдиагональной части матрицы. Цель предварительных преобразований Хаусхолдера – увеличить быстродействие каждого шага QR -алгоритма.

На следующем этапе вычисляются все собственные значения полученной трехдиагональной матрицы $[\Lambda]$ с помощью QR -преобразований. Этот метод сложнее аналогов и требует больших затрат машинного времени, но его устойчивость, обусловленная использованием ортогональных преобразующих матриц, обеспечила ему репутацию лучшего метода решения задач самого общего вида.

При использовании данного метода трехдиагональная матрица $[\Lambda]$ раскладывается по Граму-Шмидту в произведение $[\Lambda] = [Q][R]$, где $[Q]$ – ортогональная матрица ($[Q]^T [Q] = [I]$), а $[R]$ – верхняя треугольная матрица.

Для вычислений матриц $[R]$ и $[Q]$ применяются преобразования Хаусхолдера с матрицами $[P]_r$ с учетом (3.20), которые ортогональны и симметричны. Это обеспечивает ортогональность $[Q]$.

Матрица $[Q]$ вычисляется по формуле $[Q] = [P]_1 [P]_2 \dots [P]_{\Theta-1}$, хранится как последовательность сомножителей и не вычисляется в явном виде. В свою очередь, матрица $[R]$ является результатом последовательности операций:

$$[P]_1 [\Lambda], [P]_2 [P]_1 [\Lambda], \dots, [P]_{\Theta-1} [P]_{\Theta-2} \dots [P]_1 [\Lambda] \quad (3.21)$$

На следующей итерации матрица $[\Lambda]$ получается умножением $[\Lambda]$, соответствующей предыдущей своей итерации, слева и справа на $[Q]$.

Данный алгоритм QR -итераций задается соотношениями [130]:

$$\begin{aligned} [\Lambda]_0 &= [\Lambda], \\ [\Lambda]_i &= [Q]_i [R]_i, \\ [\Lambda]_{i+1} &= [Q]_i^T [\Lambda]_i [Q]_i = [Q]_i^T [Q]_i [R]_i [Q]_i = [R]_i [Q]_i. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Приведенные соотношения (3.21) и (3.22) описывают алгоритм без сдвигов. Однако, для ускорения сходимости QR -алгоритма используются сдвиги α_i (числа, близкие к собственным значениям). В этом случае выражения (3.22) принимают вид (3.23) [130]:

$$\begin{aligned} [\Lambda]_0 &= [\Lambda], \\ [\Lambda]_i - \alpha_i I &= [Q]_i [R]_i, \\ [\Lambda]_{i+1} &= [R]_i [Q]_i + \alpha_i [I]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Если в качестве α_i выбрать величину, сильно отличающуюся от искомого собственного значения, то решение может сойтись к неверному результату. Поэтому на практике в качестве сдвига α_i на i -ой итерации удобно выбирать нижний правый элемент матрицы $[\Lambda]_i$.

В QR -алгоритме собственные значения матрицы $[\Lambda]$ при преобразованиях не изменяются (т.к. $[Q]$ ортогональная). Полученные в процессе преобразований матрицы $[\Lambda]_i$ сходятся к треугольной матрице и их диагональные элементы стремятся к собственным значениям, которые, в свою очередь, являются собственными значениями матрицы $[\Lambda]$. На последнем этапе

решения задачи необходимо вычислить собственные векторы трехдиагональной матрицы $[\Lambda]$ с помощью обратных итераций и перейти от них к собственным векторам исходной матрицы.

Собственные векторы трехдиагональной матрицы, полученной методом Хаусхолдера, вычисляются с помощью обратных итераций по формуле [17]:

$$([\Lambda] - \lambda_i [I])\{\psi_i\}^{(k+1)} = \{\psi_i\}^{(k)} \quad (k = 1, 2; \quad i = 1, 2, \dots, \Theta), \quad (3.24)$$

где $[\Lambda]$ – трехдиагональная матрица;

$\{\psi_i\}$ – i -ый собственный вектор трехдиагональной матрицы;

k – номер итерации.

В качестве начального выбирается вектор с единичными компонентами. Если собственные значения вычислены с высокой степенью точности, то обычно достаточно двух циклов обратных итераций (с предварительными сдвигами, равными соответствующим собственным значениям) для определения собственного вектора.

Далее собственные векторы трехдиагональной матрицы преобразуются с помощью ранее полученных матриц Хаусхолдера (3.20) в собственные векторы исходной стандартной задачи [17]:

$$\{x_i\} = [P_1][P_2] \dots [P_{\Theta-2}]\{\psi_i\} \quad (i = 1, \dots, \Theta), \quad (3.25)$$

где $\{\psi_i\}$ – i -ый собственный вектор трехдиагональной матрицы, полученной на втором этапе решения задачи согласно (3.24);

$\{x_i\}$ – i -ый собственный вектор исходной стандартной задачи;

$[P]_r$ – матрицы Хаусхолдера ($r = 1, \dots, \Theta - 2$).

После нахождения собственных векторов исходной стандартной задачи по формуле (3.25) они преобразовываются в собственные векторы расширенной задачи согласно зависимости (3.15). В результате элементы матрицы $[\Lambda]$ по

столбцам заменяются элементами вычисленных векторов $\{q_o\}_i$, определяющих собственные формы колебаний (перемещения системы).

По вычисленным значениям собственных векторов $\{q_o\}_i$ с использованием соотношения (3.9) определяются векторы узловых перемещений $\{q\}$ всей конструкции для каждой i -ой частоты колебаний f_i .

Комбинированный алгоритм Хаусхолдера- QR -обратных итераций является эффективным алгоритмом для решения задач о нахождении собственных чисел и векторов, требует приемлемых размеров оперативной и внешней памяти ЭВМ и времени на выполнение программы. При хранении информации учитывается симметричность матриц.

Проведенное тестирование разработанной методики свидетельствует о ее эффективности и возможности использования для исследования амплитудно-частотных характеристик рассматриваемых оболочек.

3.2 Описание дискретных моделей применяемых конечных элементов

Для построения уточненных математических моделей свободных и вынужденных колебаний поверхность оболочки моделируется с использованием четырехугольных изопараметрических криволинейных конечных элементов 2-го порядка с изменяющимися характеристиками (рис. 3.1), которые имеют восемь узлов на срединной поверхности [57, 92, 100, 131, 175]. Каждый узел обладает шестью степенями свободы: три перемещения, два угла поворота нормали к срединной поверхности и угол вращения [54, 55]. Эти же элементы позволяют описывать ребра [3, 117]. Используемые КЭ имеют локальные системы координат (ξ_1, ξ_2, ξ_3) и различные порядки аппроксимации перемещений по нормали (квадратичный закон) и по касательной (линейный закон) к срединной поверхности оболочки [17]. Они позволяют с помощью заданных узловых точек достаточно точно описывать как геометрическую

форму самого объекта исследования, так и распределение перемещений. Стороны конечных элементов совпадают с координатными линиями ξ_1, ξ_2 . Главное достоинство данного элемента по сравнению с аналогичными заключается в том, что при сгущении конечно-элементной сетки он обеспечивает сходимость к истинному решению. Впервые четырехузловой КЭ данного вида с 24 степенями свободы был предложен Галагером [175].

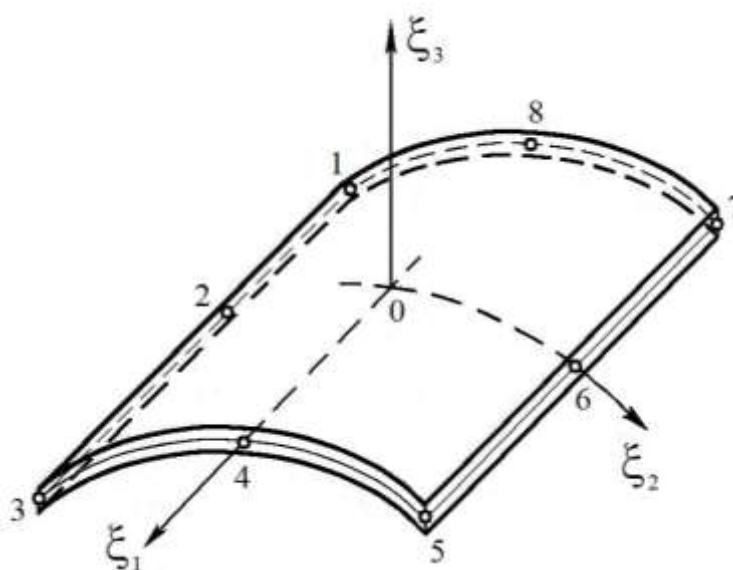


Рисунок 3.1 – Изопараметрический оболочечный конечный элемент с изменяющимися характеристиками для моделирования оболочечной системы.

Рассмотрим характеристики КЭ, применяемого для получения уточненных математических моделей процессов свободных и вынужденных колебаний, а также напряженно-деформированного состояния тонких упругих оболочек вращения с учетом их конструктивной неоднородности. Компоненты перемещения узлов элемента в направлениях координат α_1, α_2, ξ обозначаются $u_1 = u(\alpha_1, \alpha_2, \xi)$, $u_2 = v(\alpha_1, \alpha_2, \xi)$, $u_3 = w(\alpha_1, \alpha_2, \xi)$ соответственно и являются проекциями вектора перемещений \vec{u} . При этом проекции вектора перемещений КЭ на оси глобальной системы координат представляются в виде [57]:

$$u_k = \sum_{i=1}^8 u_k^{(i)} N_i(\xi_1, \xi_2) \quad (k = \overline{1,3}), \quad (3.26)$$

где $u_k^{(i)}$ – проекции вектора перемещений в i -ом узле;

$N_i(\xi_1, \xi_2)$ – функции формы элемента в локальной системе координат.

Перемещения в пределах элемента определяются с учетом (3.26) в следующем виде [3]:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi_1, \xi_2) \begin{Bmatrix} u_1^{(i)} \\ u_2^{(i)} \\ u_3^{(i)} \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^8 N_i(\xi_1, \xi_2) \cdot \xi_3 \cdot \frac{h_i}{2} \left(\begin{Bmatrix} v_1^{1i} \\ v_2^{1i} \\ v_3^{1i} \end{Bmatrix} \theta_1^{(i)} - \begin{Bmatrix} v_1^{2i} \\ v_2^{2i} \\ v_3^{2i} \end{Bmatrix} \theta_2^{(i)} \right), \quad (3.27)$$

где $\{u^{(i)}\} = \{u_1^{(i)}, u_2^{(i)}, u_3^{(i)}\}$ – вектор перемещений i -го узла конечного элемента;

h_i – толщина элемента в месте расположения узла i ;

$\bar{v}_1 = \{v_1^{1i}, v_2^{1i}, v_3^{1i}\}$, $\bar{v}_2 = \{v_1^{2i}, v_2^{2i}, v_3^{2i}\}$ – ортонормированные векторы, образующие с единичным вектором нормали к срединной поверхности правый орт в узле i ;

$\theta_1^{(i)}$ и $\theta_2^{(i)}$ – углы поворота нормали в узле i относительно векторов \bar{v}_1 и \bar{v}_2 (см. зависимости (2.8)). Здесь и далее предполагается суммирование по повторяющимся индексам.

Ниже приведены функции формы для рассматриваемого конечного элемента:

$$\begin{aligned} N_1 &= -\frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2)(\xi_1 + \xi_2 + 1), & N_2 &= \frac{1}{2}(1 - \xi_1^2)(1 - \xi_2), \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_2 - 1), & N_4 &= \frac{1}{2}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2^2), \\ N_5 &= \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2)(\xi_1 + \xi_2 - 1), & N_6 &= \frac{1}{2}(1 - \xi_1^2)(1 + \xi_2), \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$N_7 = -\frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2)(\xi_1 - \xi_2 + 1), \quad N_8 = \frac{1}{2}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2^2)$$

Каждая узловая точка четырехугольного в плане КЭ имеет 6 степеней свободы, соответствующих перемещениям u_1, u_2, u_3 , углам поворота θ_1, θ_2 и кручению $\theta_{12} = \partial u_3^2 / (R \partial \alpha_1 \partial \alpha_2)$. Вектор обобщенных перемещений узлов элемента представляется в виде:

$$\{q^{(e)}\} = \{u_1^1, u_2^1, u_3^1, \theta_1^1, \theta_2^1, \theta_{12}^1, \dots, u_1^8, u_2^8, u_3^8, \theta_1^8, \theta_2^8, \theta_{12}^8\}^T \quad (3.29)$$

Для нахождения матрицы градиентов необходимо использовать зависимости между производными функций формы элемента по глобальным координатам $(\alpha_1, \alpha_2, \xi)$ и их производными по локальным координатам (ξ_1, ξ_2, ξ_3) [57]:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial N}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial N}{\partial \xi} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi_1} & \frac{\partial N}{\partial \xi_2} & \frac{\partial N}{\partial \xi_3} \end{bmatrix}, \quad (3.30)$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \xi}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \xi}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial \xi_3} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial \xi_3} & \frac{\partial \xi}{\partial \xi_3} \end{bmatrix}, \quad (3.31)$$

где $[J]$ – матрица Якоби.

Разрешающими функциями КЭ являются проекции вектора перемещения на криволинейную систему координат, связанную с поверхностью оболочки.

Подкрепляющие ребра рассматриваются как жесткие вставки и аппроксимируются с использованием тех же КЭ, что и для аппроксимации тонкостенной оболочки. Это позволяет учесть их жесткость на растяжение (сжатие), кручение и изгиб в двух плоскостях. При изменении перемещений по толщине в качестве неизвестных узловых функций принимаются величины:

$$u_k = \frac{u_k^+ + u_k^-}{2}, \quad v_k = u_k^+ - u_k^- \quad (k = 1, 2, 3), \quad (3.32)$$

где u_k^+, u_k^- – перемещения точек граничных поверхностей оболочки при $\xi = \pm h/2$.

Условие контакта оболочки и вставки можно выразить через перемещения КЭ ребер, направленных по ξ , представляя величины u^B и v^B вставки через u и v оболочки по формулам:

$$u_k^B = u_k + \frac{v_k}{h} \eta^B, \quad v_k^B = \frac{v_k}{h} h^B \quad (k = \overline{1, 3}), \quad (3.33)$$

в матричном виде:

$$\begin{Bmatrix} u_k^B \\ v_k^B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \zeta_1 \\ 0 & \zeta_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_k \\ v_k \end{Bmatrix} = [\zeta] \begin{Bmatrix} u_k \\ v_k \end{Bmatrix}, \quad (3.34)$$

где $\zeta_1 = \eta^B / h$, $\zeta_2 = h^B / h$ – коэффициенты приведения; h – толщина КЭ оболочки; h^B – толщина КЭ вставки; η^B – эксцентриситет срединной поверхности вставки по отношению к срединной поверхности оболочки.

Процедуры получения перемещений КЭ вставки постоянной толщины и оболочки (3.26)-(3.34) аналогичны.

3.3 Оценка достоверности полученных численных результатов

Применение метода конечных элементов к решению задач колебаний и НДС конструктивно неоднородных оболочек требует исследования точности и адекватности полученных результатов. В данной работе корректность постановки задач достигается использованием уравнений линейной теории

оболочек и стержней (раздел 2 данной работы) с учетом гипотез Кирхгофа-Лява и Кирхгофа-Клебша. На основе разработанной математической модели динамического поведения получены уравнения колебаний цилиндрической оболочки, подкрепленной продольно-поперечной системой ребер, ослабленной отверстиями и несущей присоединенные твердые тела. Численные алгоритмы приближенных решений исходных уравнений базируются на использовании метода конечных элементов. Вид КЭ и их свойства подбирались с учетом сложности геометрии оболочки, а размер элементов – согласно критерию практической сходимости результатов расчета.

Достоверность и точность решений, полученных с помощью предложенной расчетной методики, проверялись по их численной сходимости, сравнением с известными решениями тестовых задач и с результатами проведенных экспериментов. Численная сходимость решения контролировалась с помощью дискретизации круговой цилиндрической оболочки сеткой конечных элементов различной размерности сравнением собственных частот и форм свободных колебаний исследуемой оболочки для различных граничных условий.

Исследуемая оболочка имеет следующие геометрические характеристики: $L/R = 2,5$; $R/h = 125$, $R = 0,075$ м. Физико-механические характеристики материала: модуль упругости Юнга $E = 200$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, плотность материала $\rho = 7,8 \times 10^3$ кг/м³. Оболочка подкреплена с наружной стороны равномерно расположенными 12 стрингерами прямоугольного сечения 4×1 мм, 2 шпангоутами 6×1 мм и несет жестко присоединенное к поверхности твердое тело ($M_1/M_0 = 0,1$) в точке с координатами $\alpha_1^{(3)} = L/2$ и $\alpha_2^{(3)} = 0$, где M_1 – масса присоединенного тела, M_0 – масса незагруженной оболочки. На торцах оболочки выполняются граничные условия: жесткое защемление $C - C$, шарнирное опирание $S - S$, консольное закрепление $C - F$. Конечно-элементная разбивка проводилась четырехугольными изопараметрическими оболочечными КЭ. В таблице 3.1 представлена зависимость вычисленных методом конечных элементов

частотных параметров $\omega_* = \omega R \sqrt{\rho(1-\nu^2)/E}$, характеризующих низшую собственную частоту свободных колебаний рассматриваемой оболочки, от густоты сетки разбиения. Формы колебаний для всех размеров КЭ совпадают.

Таблица 3.1 – Сходимость частотного параметра ω_* подкрепленной цилиндрической оболочки с присоединенным твердым телом

Частотный параметр $\omega_* \times 10^2$				
Граничные условия	Размер КЭ, мм			
	4,0	2,0	1,0	0,5
<i>C - C</i>	12,54	12,33	12,25	12,19
<i>S - S</i>	11,21	11,06	10,97	10,95
<i>C - F</i>	5,64	5,53	6,46	6,42

Необходимая точность результатов решения обеспечивается, с одной стороны точностью применяемых методов вычислений, а с другой – учетом разбиения сетки КЭ на более мелкую. Сходимость результатов вычислений устанавливалась по значениям частотного параметра при варьировании числа КЭ, на которые разбивалась поверхность оболочки, путем увеличения количества (или уменьшения размера) КЭ. Сходимость считается удовлетворительной, если приближения частотного параметра ω_* отличаются от предыдущих не более чем на 2,5 %.

В таблице 3.2 представлена зависимость изменения частотного параметра ω_* рассматриваемой оболочки, подкрепленной с наружной стороны равномерно расположенными 2 шпангоутами прямоугольного сечения 6×1 мм и ослабленной центральным квадратным отверстием 46×46 мм, от вида граничных условий и размера КЭ.

Приведенные в таблицах 3.1 и 3.2 показатели количественных характеристик сходимости полученных результатов показывают устойчивую сходимость численного решения МКЭ для рассматриваемой задачи. Также можно сделать вывод о том, что для решения задачи о колебаниях оболочек необходимой и достаточной плотностью сетки КЭ является третий вариант.

Данные, приведенные в таблицах 3.1 и 3.2 (вариант 3), сопоставлялись также с результатами расчетов, полученных с использованием лицензионного программного пакета ANSYS (использован соискателем в соответствии с договором Национального университета кораблестроения им. адмирала Макарова с ЗАО «Cadferm-CIS»). Расхождение результатов численного решения задач, полученных с использованием разработанной методики МКЭ и 3D модели пакета программ ANSYS, составляет 1,6...4,2%.

Таблица 3.2 – Сходимость частотного параметра ω_* подкрепленной шпангоутами цилиндрической оболочки с отверстием

Частотный параметр $\omega_* \times 10^2$				
Граничные условия	Размер КЭ, мм			
	4,0	2,0	1,0	0,5
<i>C - C</i>	16,81	16,58	16,49	16,43
<i>S - S</i>	14,46	14,29	14,21	14,17
<i>C - F</i>	7,62	7,52	7,46	7,43

Для проверки адекватности математических моделей и эффективности алгоритма расчета применительно к ребристым оболочкам выполнено сопоставление вычисленных частот f_B (Гц) и окружных волновых чисел n с известными теоретическими f_T и экспериментальными f_3 частотами колебаний цилиндрических оболочек, приведенными в работах [5, 9, 119].

Рассматриваются оболочки с радиусом $R = 160$ мм, длиной $L = 430$ мм и толщиной $h = 0,44$ мм, усиленные регулярной системой ребер уголкового профиля. Оболочка 1 подкреплена внутри $N_1 = 32$ стрингерами с поперечным сечением $4 \times 4 \times 0,45$ мм, а оболочка 2, кроме расположенных внутри $N_1 = 32$ стрингеров $4 \times 4 \times 0,45$ мм, снаружи подкреплена $N_2 = 4$ шпангоутами $6 \times 6 \times 0,45$ мм. Ребра соединены с несущей поверхностью узкой полкой. При вычислениях принято, что оболочки и ребра изготовлены из изотропного

материала АМГ-6М, который имеет следующие физико-механические характеристики: $E = 66,7$ ГПа; $\rho = 2,6 \times 10^3$ кг/м³; $\nu = 0,3$. Края оболочек шарнирно оперты со свободным смещением в осевом направлении, т.е. при $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_1 = L$ выполняются следующие граничные условия: $u_2^* = u_3^* = N_{11}^* = M_{11}^* = 0$. Частоты свободных колебаний оболочек приведены в табл. 3.3.

Таблица 3.3 – Частоты колебаний незагруженных цилиндрических оболочек, подкрепленных перекрестной системой ребер.

n	Оболочка 1				Оболочка 2			
	Частота колебаний. Гц			$\Delta, \%$	Частота колебаний. Гц			$\Delta, \%$
	f_3	f_T	f_B		f_3	f_T	f_B	
3	–	–	–	–	543	576	578	6,05
4	377	367	371	1,62	459	483	476	3,57
5	279	258	266	4,89	618	579	595	3,86
6	234	218	228	2,63	671	781	729	7,96
7	239	223	232	3,02	946	1020	998	5,21
8	242	260	256	5,47	–	–	–	–

Проверка достоверности вычисленных собственных частот и форм колебаний и адекватности разработанной конечно-элементной модели выполнена для гладкой неподкрепленной цилиндрической оболочки вращения с двумя жестко присоединенными внутри в среднем радиальном сечении твердыми телами. Полученные с помощью разработанной расчетной методики численные результаты сопоставляются с точным решением и экспериментальными данными, приведенными в работе [11]. Отношение массы M_1 каждого присоединенного тела к массе оболочки M_0 и низшие частоты колебаний приведены в табл. 3.4. Угол раствора между присоединенными телами составляет $\varphi_m = 60^\circ$. Оболочки изготовлены из стали Х19Н9. Геометрические и физико-механические характеристики оболочек следующие: $L = 130$ мм; $R = 71,5$ мм; $h = 0,24$ мм; $E = 200$ ГПа; $\rho =$

$7,8 \times 10^3 \text{ кг/м}^3$; $\nu = 0,3$. На торцах оболочек при $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_1 = L$ выполняются граничные условия $u_1^* = u_2^* = u_3^* = \theta_1^* = 0$.

Таблица 3.4 – Низшие частоты колебаний незагруженной (1) и с присоединенным телом (2) цилиндрических оболочек

Номер оболочки	M_1 / M_0	n	Частота колебаний. Гц			$\Delta, \%$
			$f_{\text{э}}$	$f_{\text{т}}$	$f_{\text{в}}$	
1	–	8	1122	1139	1147	2,06
2	0,048	8	604	626	640	5,62

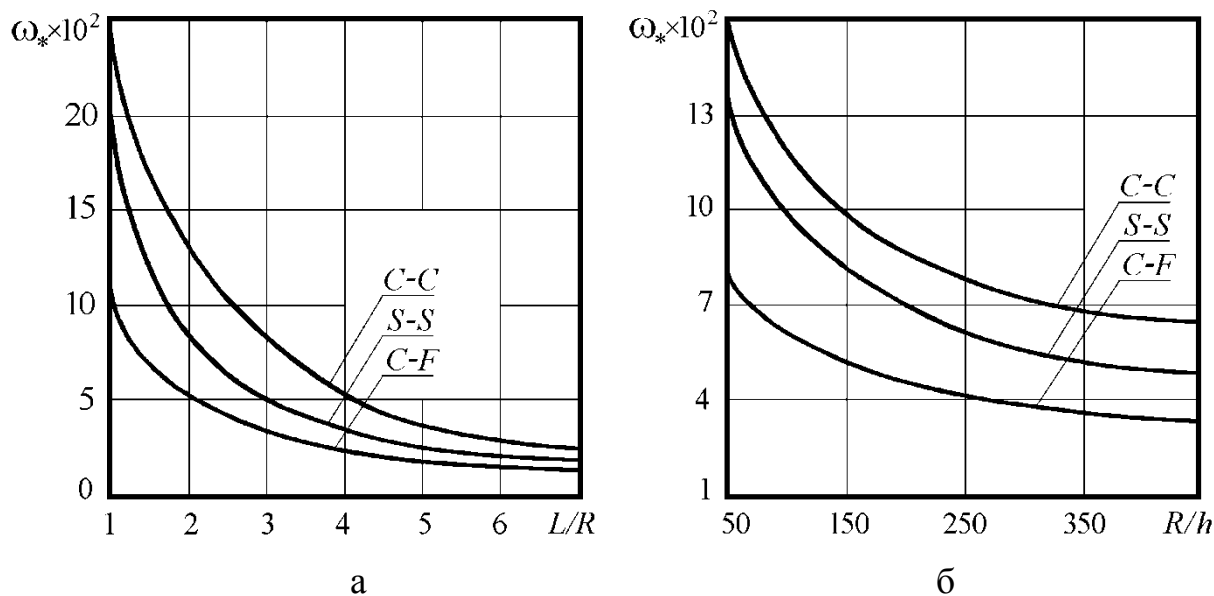
Выполненный анализ численной сходимости решений (см. табл. 3.1 и табл. 3.2), проверка адекватности разработанной конечно-элементной модели и сопоставления полученных результатов тестовых задач с известными численными и экспериментальными данными подтверждают эффективность разработанного алгоритма и используемых КЭ для решения задач анализа амплитудно-частотных характеристик тонких упругих конструктивно неоднородных оболочек.

3.4. Влияние основных геометрических параметров оболочки и дискретно подкрепляющих ребер на частоты и формы колебаний

Исследуем влияние геометрических характеристик на основную частоту свободных колебаний гладкой изотропной цилиндрической оболочки вращения, радиус срединной поверхности которой $R = 0,075$ м. Механические характеристики материала: $E = 200$ ГПа; $\nu = 0,3$; $\rho = 7,8 \times 10^3 \text{ кг/м}^3$. Численное решение задачи выполнено на основе разработанной расчетной методики методом конечных элементов.

На рисунке 3.2 для незагруженной оболочки для граничных условий $C - C$, $S - S$, $C - F$ представлена зависимость изменения частотного параметра

$\omega_* = \omega R \sqrt{\rho(1-\nu^2)}/E$, характеризующего основную частоту колебаний, от геометрических характеристик L/R и R/h . Величина отношения L/R изменяется в пределах $1 \leq L/R \leq 7$ при $R/h = 125$, а величина R/h – в пределах $50 \leq R/h \leq 450$ при $L/R = 2,5$.



а – зависимость ω_* от L/R ; б – зависимость ω_* от R/h ;

Рисунок 3.2 – Зависимость частотного параметра ω_* от основных геометрических характеристик гладкой незагруженной оболочки.

Низшая частота колебаний оболочек возбуждается при одной продольной полуволне, а количество окружных волн зависит от геометрических характеристик и упругих свойств материала. На собственные частоты и формы колебаний граничные условия оказывают существенное влияние для коротких оболочек, где данное влияние особенно велико вблизи торцов. Как следует из приведенных численных результатов, с увеличением отношения $L/R \geq 7$ влияние граничных условий на спектр частот и формы колебаний ослабевает. При этом с увеличением длины оболочки наблюдается снижение основной частоты колебаний, а формообразования характеризуются волновым числом в окружном направлении $n = 2$ и вдоль образующей – $m = 1$. Расхождение неосновных частот при $m = 1$ происходит в меньшей степени. Рассмотрим

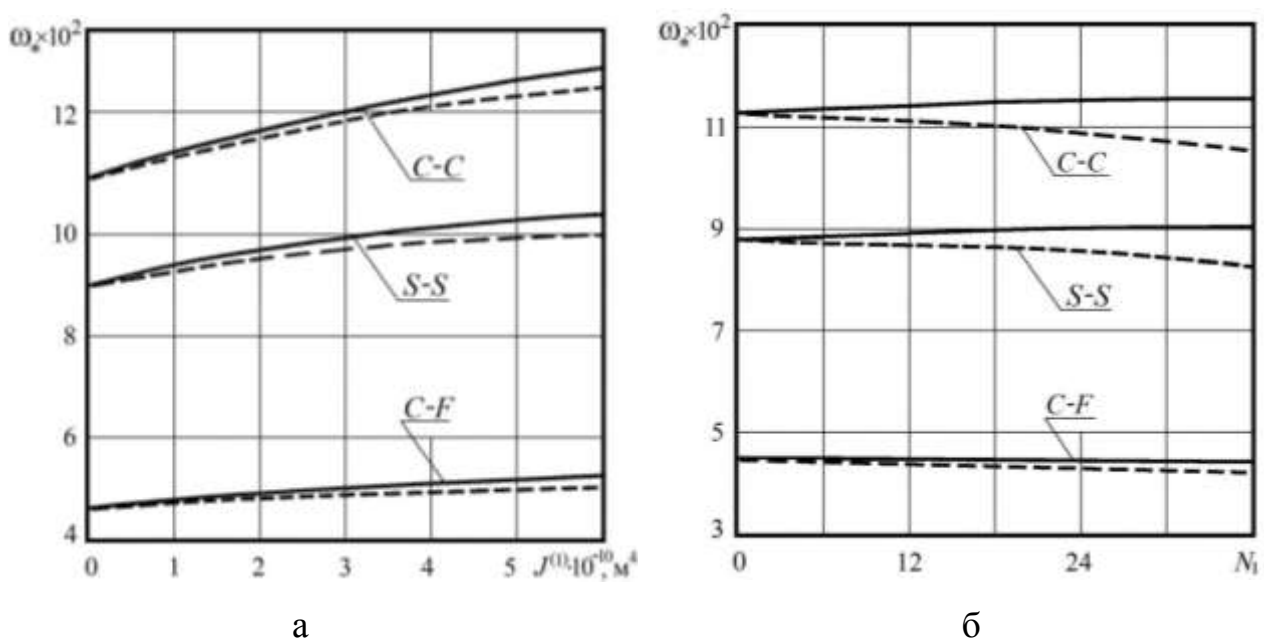
свободные колебания подкрепленных оболочек постоянной толщины с геометрическими параметрами: $L/R = 2,5$; $R/h = 125$; $h = 0,6$ мм. Основное назначение подкрепляющих ребер – повышение жесткости, распределение внешних нагрузок, снижение напряжений. Важной практической задачей является выбор оптимальных параметров подкреплений из условия минимального веса ребристой оболочки при заданных габаритных размерах [142].

Разработанный алгоритм определения собственных частот и форм колебаний основан на представлении оболочечной конструкции как дискретно-континуальной механической системы, состоящей из обшивки (гладкой оболочки), а также продольно и поперечно ориентированных ребер с различными, в общем случае, упругими свойствами. Подкрепляющие элементы рассматриваются как жестко присоединенные продольные и замкнутые в окружном направлении кольцевые стержни, обладающие жесткостью на изгиб в радиальной и осевой плоскостях, а также жесткостью на кручение и растяжение-сжатие. Соединение ребер и обшивки обеспечивает равенство перемещений и углов поворота по линиям контакта. Рассматривается общий случай деформации оболочки и ребер.

В общей постановке задачи при принятых допущениях учитываются все жесткостные параметры подкрепляющих ребер, так как моменты инерции, эксцентриситет и расположение ребер оказывают влияние не только на значения собственных частот и формы колебаний, но и на распределение внутренних напряжений и деформаций.

Оценка эффективности подкреплений по критерию минимальной материалоемкости выполнена для оболочек, подкрепленных регулярно расположенными стрингерами прямоугольного профиля. При этом варьировались жесткость, эксцентриситет и число ребер. На рисунке 3.3а показана зависимость безразмерного частотного параметра ω_* , характеризующего низшую частоту колебаний цилиндрических оболочек, от суммарного изгибающего момента инерции стрингеров $J^{(1)} = N_1 J_{\xi}^{(1)}$. Число

подкрепляющих ребер $N_1 = 24$, а их ширина в поперечном сечении – $b_1 = 1$ мм. Рисунок 3.3б характеризует для исследуемых оболочек зависимость $\omega_* = \phi(N_1)$ от количества стрингеров 4×1 мм. Сплошные кривые соответствуют оболочке с наружными, а штриховые – с внутренними ребрами. Как видно из рисунков, собственные частоты колебаний оболочки при размещении стрингеров на наружной поверхности превышают частоты колебаний оболочки с внутренними ребрами. В отдельных случаях данное расхождение достигает 3...7%.



а – зависимость частотного параметра ω_* от суммарного изгибающего момента инерции стрингеров; б – зависимость частотного параметра ω_* от количества стрингеров;

Рисунок 3.3 – Влияние суммарного изгибающего момента инерции и количества стрингеров на величину частотного параметра ω_* .

Анализ влияния жесткости ребер на собственные частоты колебаний оболочек при изгибе в осевой плоскости и кручении показал, что момент инерции $J_\xi^{(1)}$, а следовательно и эксцентриситет $\xi^{(1)}$, незначительно сказываются на значениях низших частот. С ростом N_1 расхождение низших

собственных частот колебаний оболочек с внутренними и наружными стрингерами возрастает. При этом с увеличением числа внутренних стрингеров низшая частота понижается. Это свидетельствует о том, что в данном случае влияние массы ребер превышает влияние их жесткости. С целью повышения ω_* целесообразно подкреплять оболочку достаточно большим числом наружных стрингеров, обладающих достаточной изгибной жесткостью.

Подкрепление оболочки стрингерами в большей степени сказывается для граничных условий $C - C$. При неудачном выборе жесткости постановка стрингеров может привести к понижению основной частоты колебаний, то есть слабые стрингеры влияют на колебания как присоединенные тела. Это наиболее часто наблюдается для граничных условий $C - F$ и $S - S$.

Для стрингерных оболочек, также как и для неподкрепленных, низшие частоты соответствуют изгибным формам колебаний. С ростом высоты поперечного сечения стрингеров увеличивается их изгибная жесткость и величина ω_* может незначительно возрасть по сравнению с гладкой оболочкой. Например, при увеличении отношения высоты к ширине ребра от 1 до 5 низшая собственная частота колебаний возросла всего на 2,7%, а от 5 до 10 на 7%. Следовательно, увеличение высоты сечения продольных ребер оказывает незначительное влияние на минимальную собственную частоту колебаний, но при этом материалоемкость оребренной оболочки значительно возрастает. Если за счет материала подкрепляющих ребер рассмотренной цилиндрической оболочки при $N_1 = 24$ увеличить ее толщину, то параметр ω_* увеличится по сравнению с оребренной оболочкой в 1,36 раз для граничных условий $C - F$ и в 1,47 раз для граничных условий $C - C$. Таким образом, при создании оболочки минимальной материалоемкости применение стрингеров оказывается неэффективным.

Формообразования стрингерной и гладкой оболочек практически совпадают. Окружные волновые числа основной формы колебаний в рассматриваемом примере для граничных условий $C - C$ принимают значения $n = 6$, для граничных условий $S - S - n = 5$, а для $C - F - n = 4$.

Стрингеры вносят незначительные локальные искажения в амплитудные поля перемещений поверхности, сужая их. В отдельных случаях увеличение жесткости стрингеров, их количества и эксцентриситета может привести к изменению форм колебаний и сопровождаться резким скачкообразным возрастанием частоты основного тона.

В отличие от стрингеров, шпангоуты оказывают существенное влияние на повышение собственных частот колебаний оболочечной системы, увеличивая изгибную жесткость в радиальной плоскости и понижая волновое число n для основной формы колебаний. Исследуем влияние количества и дискретного расположения шпангоутов на частоты и формы колебаний рассматриваемых оболочек ($L/R = 2,5$; $R/h = 125$).

В таблицах 3.5 и 3.6 для оболочек, подкрепленных с наружной и внутренней стороны равноотстоящими шпангоутами 6×1 мм, приведена зависимость частотного параметра ω_* и окружного волнового числа n от количества кольцевых ребер N_2 .

Таблица 3.5 – Зависимость частотного параметра ω_* от количества наружных шпангоутов

Частотный параметр $\omega_* \times 10^2$						
Граничные условия	C - C		S - S		C - F	
	$\omega_* \cdot 10^2$	n	$\omega_* \cdot 10^2$	n	$\omega_* \cdot 10^2$	n
N_2						
0	11,32	6	8,84	5	4,62	4
1	17,58	5	15,07	4	6,91	3
2	20,16	4	16,76	3	8,19	3
3	20,27	3	16,93	3	8,29	3
4	20,35	3	17,06	3	8,37	3
5	20,40	3	17,17	3	8,42	3

В случае наружного расположения шпангоутов минимальная частота колебаний оболочки ниже, чем при их внутреннем расположении. Анализ влияния эксцентриситета ребер и других параметров подкреплений на

величину низших частот выполнен в работах [61, 66] на основе методики расчета, учитывающей дискретное расположение ребер и позволяющей рассматривать особенности локальной деформации элементов конструкции. Эффект роста низшей частоты колебаний при увеличении эксцентриситета обусловлен возрастанием изгибающего момента инерции шпангоутов относительно оси, лежащей на срединной поверхности оболочки.

Таблица 3.6 – Зависимость частотного параметра ω_* от количества внутренних шпангоутов

Частотный параметр $\omega_* \times 10^2$						
Граничные условия	C - C		S - S		C - F	
	f_T	n	f_T	n	f_T	n
N_2						
0	11,32	6	8,84	5	4,62	4
1	17,94	5	15,38	4	7,04	3
2	20,58	4	17,13	3	8,34	3
3	20,76	3	17,33	3	8,46	3
4	20,88	3	17,48	3	8,57	3
5	20,97	3	17,65	3	8,62	3

Для граничных условий C - C и S - S при $N_2 = 1$ низшей собственной частоте отвечает формообразование с волновыми числами $n = 4$ и $m = 1$. Увеличение числа шпангоутов до 3 приводит к резкому возрастанию основной частоты, которой соответствует уже другая форма с $n = 3$. При этом шпангоуты в основном изгибаются, а основная частота стремится к некоторому предельному значению. Дальнейшее увеличение количества ребер (возрастание суммарного изгибающего момента инерции) при $N_2 > 4$ не оказывает существенного влияния на низшую частоту колебаний, так как шпангоуты в дальнейшем преимущественно закручиваются. Приведенные численные результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными [62]. Расхождение не превышает 7%, за исключением частот, соответствующих формам колебаний при минимальном числе волн в окружном направлении.

Следовательно, для повышения основной частоты колебаний необходимо увеличить изгибную жесткость кольцевого подкрепления.

Полученные данные свидетельствуют о том, что наряду с дискретностью ребер необходимо учитывать их эксцентриситет, поскольку при его различных значениях реализуются разные случаи деформации. Влияние знака эксцентриситета на низшую частоту колебаний в рассматриваемом диапазоне параметров незначительно, хотя подкрепление оболочек с внутренней стороны повышает частоты колебаний и является более эффективным. Обнаруженный эффект роста низшей частоты колебаний при увеличении эксцентриситета обусловлен возрастанием момента инерции шпангоутов относительно оси, лежащей в срединной поверхности оболочки. Таким образом, анализ влияния эксцентриситета ребер и других параметров подкреплений на величину низших частот в полной мере может быть выполнен только на основе методики расчета, учитывающей дискретное расположение ребер и позволяющей рассматривать особенности локальной деформации элементов конструкции.

При смещении шпангоута вдоль образующей к центру оболочки, так чтобы он размещался в пучности, низшая частота колебаний возрастает и достигает своего максимума. Например, для граничных условий $C - C$ и $S - S$ низшая частота колебаний достигает максимума при размещении ребра в сечении $\alpha_1^{(2)} = L/2$, а для граничных условий $C - F$ – вблизи верхнего основания, где наблюдаются наибольшие амплитуды колебаний. Данный эффект можно усилить, увеличив изгибную жесткость шпангоута или сосредоточив в области пучности несколько ребер, распределив их оптимальным образом.

Зависимость низшего спектра частот $\omega_* = \phi(n)$ кроме основного минимума при n_0 может иметь еще локальный минимум при n_1 , где $n_0 < n_1$. Первому отвечает изгибная форма колебаний с $m = 1$ (главный минимум при $N_2 > 1$). Для второго характерны изгибно-крутильные формы колебаний с $m > 1$, когда узловые окружные линии расположены вблизи шпангоутов. Это обусловлено тем, что при малых $n = n_0$ наименьшим собственным частотам

отвечают формообразования, когда шпангоуты преимущественно изгибаются, а при больших $n = n_1$ – закручиваются. В пределах чисел волн, соответствующих каждому из этих двух видов деформирования, имеется свой минимум частоты колебаний. Увеличивая число равномерно расположенных кольцевых ребер, удается избавиться от второго локального минимума частоты. При $N_2 = 1$ и большой изгибной жесткости низшей частоте может соответствовать форма с $m = 2$, при которой окружная узловая линия будет располагаться вблизи крепления шпангоута. В случае первого локального минимума для повышения низшей частоты собственных колебаний необходимо увеличить изгибную жесткость шпангоутов, в случае второго – их количество. Увеличивать площадь поперечного сечения шпангоутов менее эффективно.

Амплитудно-частотные характеристики оболочек зависят в основном от жесткости, количества, расположения и эксцентриситета шпангоутов. При этом на низших частотах деформация подкрепляющих шпангоутов определяется изгибными и крутильными составляющими, а составляющие растяжения-сжатия минимальны. Поэтому при расчете колебаний в ряде случаев этими составляющими можно пренебречь. Результаты, полученные для граничных условий $S - S$, хорошо согласуются с данными, приведенными в работе [9].

Подкрепление оболочек перекрестной системой ребер приводит к локализации деформаций между ребрами и к уменьшению амплитуды колебаний, но менее эффективно по сравнению с усилением оболочек шпангоутами, так как оказывает слабое влияние на низшую частоту. В данной оболочечной системе шпангоуты преимущественно изгибаются, а стрингеры закручиваются. Основные частоты для краевых условий $C - C$ и $S - S$, в отличие от шпангоутной оболочки, незначительно повышаются, а для условий $C - F$ будут несколько ниже (см. табл. 3.3). При этом спектр частот и формы колебаний подкрепленных оболочек зависят, в основном, от жесткости, количества, расположения, массы и эксцентриситета шпангоутов. В зависимости от соотношений изгибных жесткостей оболочки и ребер можно выделить три типа подкрепленных оболочек:

- 1) подкрепленные сильными стрингерами и слабыми шпангоутами;
- 2) подкрепленные сильными шпангоутами и слабыми стрингерами;
- 3) подкрепленные сильными стрингерами и шпангоутами.

В первом случае изгибная жесткость подкрепляющих ребер и их эксцентриситет оказывают незначительное влияние на величину основной частоты. Наиболее удачными являются второй и третий вид подкрепления. Низшие частоты колебаний этих оболочек существенно зависят от изгибной жесткости и абсолютного значения эксцентриситета шпангоутов, а низшая собственная частота колебаний оболочек второго типа практически не зависит от изгибной жесткости и эксцентриситета стрингеров. Слабые стрингеры в таких оболочках влияют на частоту колебаний как дополнительно присоединенные массы, что может привести к снижению основной частоты колебаний.

Как видно из приведенных выше результатов, наличие подкрепляющих ребер и их дискретное размещение оказывает существенное влияние на основные динамические характеристики оболочек.

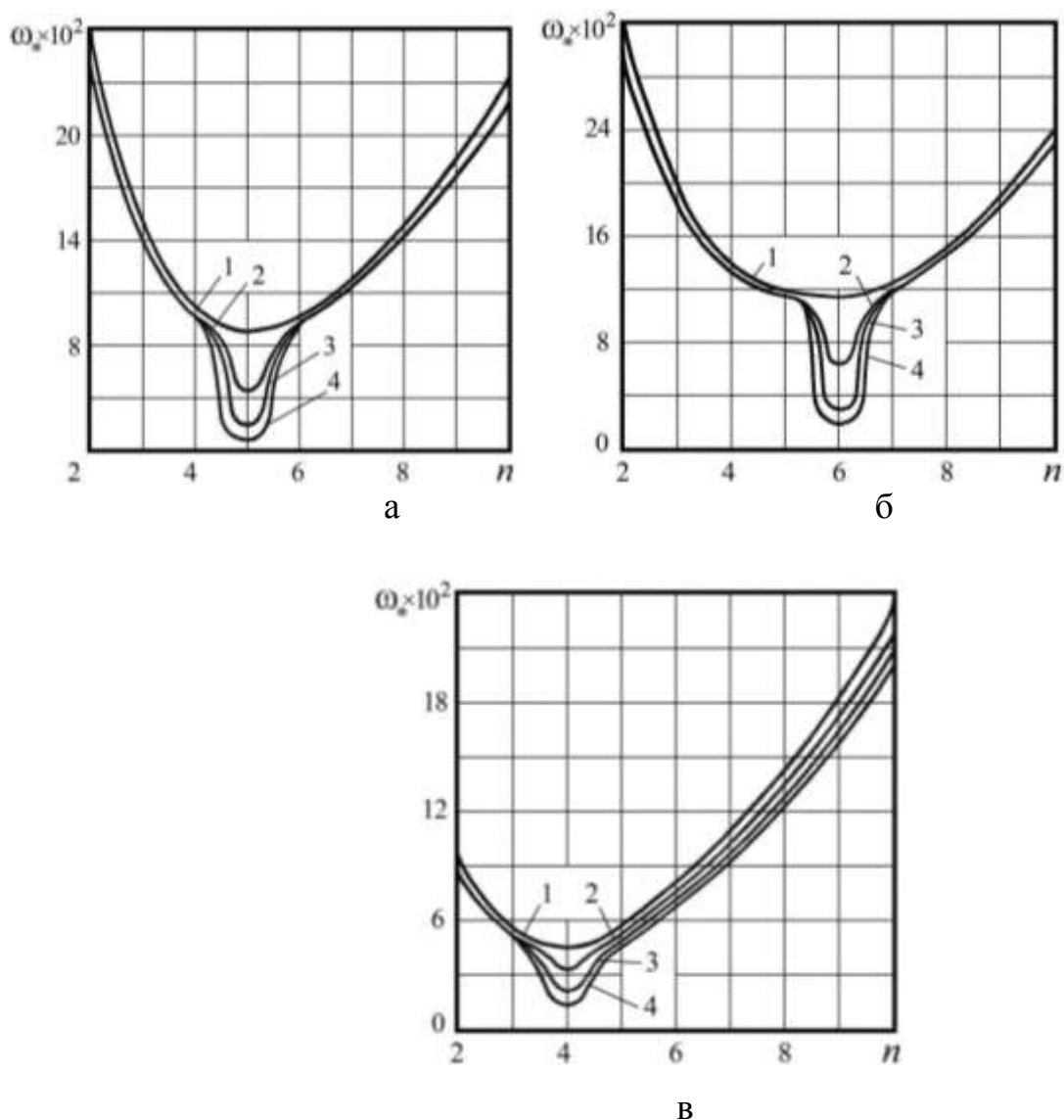
3.5 Свободные колебания оболочек с присоединенными твердыми телами

Присоединенные твердые тела изменяют амплитудно-частотные характеристики оболочек, что вызывает необходимость осуществления мероприятий по их отстройке от нежелательных резонансов. С этой целью рассмотрим влияние локально присоединенного твердого тела на собственные частоты и формы свободных колебаний замкнутой в окружном направлении гладкой цилиндрической оболочки. Масса тела M_1 сосредоточена на поверхности в точке с координатами $\alpha_1^{(3)} = L/2$ и $\alpha_2^{(3)} = 0$. Геометрические характеристики исследуемой оболочки: $L/R = 2,5$; $R/h = 125$; $R = 0,075$ м. Алгоритм получения численных результатов приведен в подразделе 3.1.

Зависимости изменения значений частотного параметра ω_* неподкрепленных цилиндрических оболочек от волновых чисел n при $m=1$ для граничных условий $C-C$, $S-S$ и $C-F$ при варьировании величины отношения M_1/M_0 приведены на рис. 3.4. Кривая 1 соответствует незагруженной оболочке ($M_1/M_0 = 0$), а кривые 2–4 – оболочкам с присоединенным телом ($M_1/M_0 = 0,1; 0,3; 0,5$). Здесь M_1 – масса присоединенного тела; M_0 – масса незагруженной оболочки.

Из приведенных результатов видно, что жестко присоединенное тело даже сравнительно небольшой массы приводит к понижению спектра частот колебаний оболочечной системы. Наибольшее влияние присоединенное тело оказывает на низшую собственную частоту, поэтому в нижней части спектра частот наблюдается характерный участок. На более высокие частоты присоединенное тело сказывается в меньшей степени. Максимальное снижение основной частоты объясняется наибольшими нормальными прогибами u_3 и связанными с ними деформациями оболочки.

С ростом величины M_1/M_0 основная частота понижается в большей степени и влияние граничных условий на колебания ослабевает вследствие усиления зависимости основной частоты от локальной жесткости оболочки в точке крепления тела. При этом высшие частоты изменяются в меньшей степени. Уже при незначительном увеличении массы присоединенного тела ($0 < M_1/M_0 \leq 0,2$) наблюдается значительное снижение низшей собственной частоты. При достижении отношения $M_1/M_0 \geq 0,5$ дальнейшее увеличение массы тела слабо влияет на понижение основной частоты. При неограниченном увеличении массы присоединенного тела низшая частота в предельном случае, соответствующем закреплению точки расположения твердого тела, выпадает из спектра, так как закрепление данной точки будет отвечать случаю наложения на оболочку дополнительной связи. При уменьшении массы тела частота колебаний увеличивается, асимптотически стремясь к значению, соответствующему частоте незагруженной оболочки.



а – зависимость для граничных условий $S - S$; б – зависимость для граничных условий $C - C$; в – зависимость для граничных условий $C - F$;

Рисунок 3.4 – Зависимость частотного параметра ω_* оболочечной системы от волновых чисел n и массы присоединенного тела для различных граничных условий.

На рисунке 3.5 для граничных условий $S - S$ представлены основные формы колебаний в радиальном сечении для незагруженной и несущей присоединенное твердое тело ($M_1/M_0 = 0,1$) оболочки. Масса твердого тела сосредоточена в точке с координатами $\alpha_1^{(3)} = L/2$ и $\alpha_2^{(3)} = 0$.

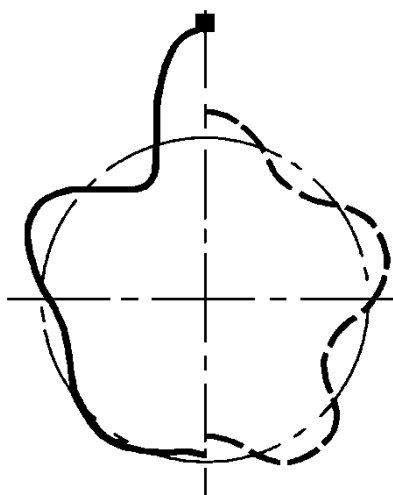


Рисунок 3.5 – Основные формы колебаний в радиальном сечении для незагруженной (пунктирная линия) и несущей присоединенное твердое тело (сплошная линия) оболочки для граничных условий $S - S$.

Границами высших частот в данном случае служат: сверху – соответствующая частота незагруженной оболочки и снизу – частота оболочки с неподвижно закрепленной точкой. Вследствие этого для оболочек с присоединенными телами изменение высших частот оказывается незначительным. Зависимости $\omega_* = \phi(n)$, приведенные на рис. 3.4, подтверждают влияние граничных условий на спектр частот колебаний, когда волновые числа сравнительно малы ($m = 1, n \leq 8$). Однако с ростом волнового числа $n \geq 9$, когда потенциальная энергия растяжения мала по сравнению с изгибной, частоты колебаний перестают зависеть от способа закрепления оболочки. При этом влияние граничных условий ослабевает и наблюдается сближение спектров частот. Это говорит о том, что граничные условия при больших n слабо влияют на частоты свободных колебаний оболочки.

В случае шарнирного опирания торцов ($S - S$) характеристики, приведенные на рис. 3.4а, находятся в хорошем соответствии с данными определения спектра собственных частот и форм колебаний, полученными методом Ритца по методике, приведенной в работе [61]. Кроме того для тех же граничных условий выполнено сопоставление амплитудно-частотных характеристик для цилиндрических оболочек, незагруженных и несущих в

центре присоединенное твердое тело, с результатами, приведенными в работах [9, 11]. Расхождение не превышает 6 %.

Теоретические результаты исследований колебаний изотропных цилиндрических оболочек хорошо согласуются с экспериментальными данными, полученными методом голографической интерферометрии, за исключением некоторых частот, соответствующих формообразованиям с малым числом окружных волн ($n \leq 3$), где наблюдается тенденция к некоторому увеличению расхождения. Это объясняется тем, что при численном определении значений частот не учитывались с необходимой степенью точности силы инерции оболочки в касательной плоскости, которые начинают играть существенную роль при колебаниях, близких к осесимметричным ($n \leq 3$). Для неосновных частот расхождение теоретических и экспериментальных данных для высших форм с $n \geq 9$ происходит за счет технологических неточностей моделей.

Численное исследование амплитудно-частотных характеристик и полученные экспериментальные данные показывают, что низшей частоте колебаний оболочечной системы с присоединенным телом соответствует изгибная форма с одной полуволной вдоль образующей ($m = 1$). Окружное волновое число превышает продольное и зависит от жесткости оболочки в окружном направлении. Общей особенностью собственных форм является локализация деформаций несущей поверхности в окрестности расположения присоединенного тела и их затухание с удалением от него. Это хорошо видно на интерферограммах форм колебаний оболочек, приведенных в разделе 5.

Формы колебаний характеризуются локальными искажениями, особенно основная форма. Увеличение массы тела не изменяет формообразований, а лишь вносит в них локальные искажения, то есть волновые числа при этом остаются неизменными. Максимальные деформации возникают в среднем сечении вблизи точки крепления твердого тела. Существенные изменения претерпевают также и соответствующие внутренние напряжения, наибольшие

значения которых соответствуют формообразованиям с максимальными амплитудами перемещений.

На неосновных частотах присоединенное тело в меньшей степени влияет на колебания. Оно демпфирует виброперемещения оболочки в своей окрестности и является гасителем колебаний для части ее поверхности. При этом амплитуды колебаний уменьшаются с ростом резонансной частоты и волновых чисел m и n . Наибольшие деформации наблюдаются вблизи контура оболочки и присоединенного тела. Это подтверждается экспериментальными данными, полученными для цилиндрических оболочек [62, 141].

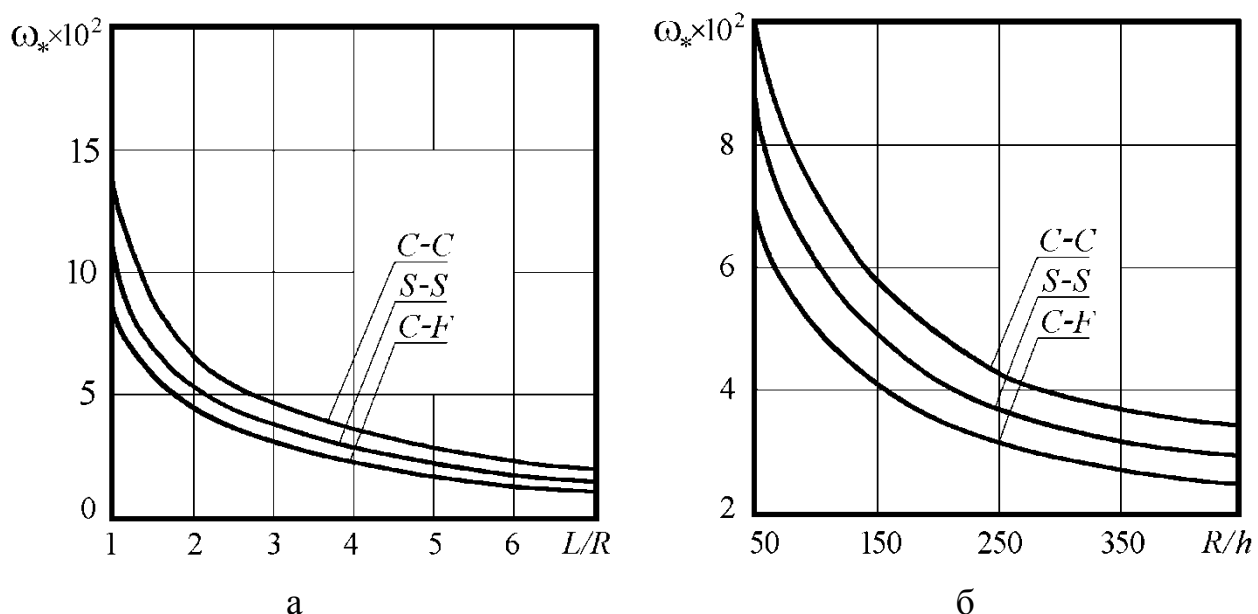
Наличие у оболочки одного присоединенного твердого тела существенно снижает лишь основную собственную частоту, а соответствующее формообразование носит характер локального искажения в области крепления тела. Полученные результаты свидетельствуют о том, что основная форма колебаний характеризуется увеличением амплитуды в окрестности расположения присоединенного тела. Амплитуда колебаний точки крепления тела, согласно расчетным и экспериментальным данным, в 10–12 раз превышает амплитуду колебаний в диаметрально противоположной точке. Возмущение будет наибольшим, если возбуждается такая форма, при которой присоединенное тело находится в пучности волны n головной гармоники по образующей. При колебаниях оболочки с отличной от основного тона частотой амплитуда в области крепления твердого тела снижается.

Частоты более высоких тонов изменяются незначительно (до 7 %) и близки к частотам незагруженной оболочки. При этом необходимо отметить, что присоединенные тела, обладающие небольшой массой, также значительно изменяют схему узловых линий формообразований, если даже влияние массы тела на собственную частоту незначительно.

Рассмотрим влияние основных геометрических параметров на спектр собственных частот и формы свободных колебаний гладких изотропных цилиндрических оболочек с присоединенным твердым телом, радиус

срединной поверхности которых $R = 0,075$ м.

На рисунке 3.6 для оболочек с присоединенным твердым телом ($M_1/M_0 = 0,1$) для граничных условий $C-C$, $S-S$, $C-F$ представлена зависимость изменения частотного параметра ω_* , характеризующего основную частоту колебаний, от геометрических характеристик L/R и R/h . Величина отношения L/R изменяется в пределах $1 \leq L/R \leq 7$ при $R/h = 125$, а величина R/h – в пределах $50 \leq R/h \leq 450$ при $L/R = 2,5$. Сопоставляя зависимости изменения параметра ω_* , приведенные на рисунках 3.2 и 3.6, необходимо отметить, что масса присоединенного тела M_1 понижает частотный параметр пропорционально варьируемому отношению M_1/M_0 .



а – зависимость ω_* от L/R ; б – зависимость ω_* от R/h ;

Рисунок 3.6 – Зависимость частотного параметра ω_* от основных геометрических характеристик гладкой оболочки с присоединенным телом.

Геометрические характеристики оказывают значительное влияние также и на формы собственных колебаний. Низшим частотам, представляющим наибольший практический интерес, соответствуют изгибные формы с максимальной амплитудой перемещений u_3 в направлении нормали к срединной поверхности. При этом вдоль образующей формируется одна полуволна прогибов ($m = 1$), а в окружном направлении количество стоячих

волн n , присущих этой форме, зависит от геометрических характеристик оболочки, механических свойств материала и граничных условий, которые, в свою очередь, существенно сказываются на ограничении перемещений u_1 на торцах оболочки в осевом направлении.

То обстоятельство, что наименьшая частота свободных колебаний наблюдается не при минимальном числе волн в окружном направлении, имеет следующее физическое объяснение. При малом числе волн в окружном направлении потенциальная энергия изгиба мала и преобладает растяжение срединной поверхности вдоль окружности, поэтому общая энергия оболочечной системы довольно велика и частота колебаний высокая. При увеличении числа n до некоторого значения n_0 , энергия изгиба растет медленнее, чем убывает энергия растяжения, и частота колебаний уменьшается, достигая своего наименьшего значения. Начиная с $n > n_0$ энергия изгиба возрастает быстрее, чем убывает энергия растяжения, и частота колебаний увеличивается. На низших частотах деформации растяжения в окружном направлении и деформации сдвига срединной поверхности малы, то есть $e_2 \rightarrow 0$ и $e_3 \rightarrow 0$.

Учет полной деформации поперечного сдвига от тангенциальных сил инерции приводит к некоторому уточнению частот, найденных в рамках гипотез Кирхгофа-Лява. При этом снижение основной частоты может достигать 5...9 %. Это уточнение тем существенней, чем меньшим числом волн n будет характеризоваться соответствующая форма колебаний и чем короче будет длина полуволны вдоль образующей, соответствующая более высоким частотам. В этом случае тангенциальные силы в осевом и окружном направлениях неравноценны.

На минимальную частоту собственных колебаний наибольшее влияние оказывают изгибные деформации в окружном направлении. Поэтому увеличение толщины h для цилиндрической оболочки повышает ее изгибную жесткость и спектр частот с перестроением числа кольцевых волн.

Рассмотрим влияние координаты расположения присоединенного тела

вдоль образующей на основные динамические характеристики оболочки. На рисунке 3.7 приведена зависимость $\bar{\omega} = \phi(\alpha_1^{(3)}/L)$ изменения безразмерного частотного параметра $\bar{\omega} = \omega_1/\omega_0$ (ω_0 – основная круговая частота колебаний незагруженной оболочки, ω_1 – основная круговая частота оболочки с присоединенным телом) от координаты расположения твердого тела вдоль образующей для исследуемой цилиндрической оболочки постоянной толщины. Из рисунка видно, что для граничных условий $C - C$, $S - S$ расположение твердого тела ближе к центру оболочки ($0,35 \leq \alpha_1^{(3)}/L \leq 0,65$) и для условий $C - F$ – ближе к верхнему основанию ($\alpha_1^{(3)}/L \geq 0$) наиболее сильно сказывается на основных частотах колебаний, снижая их, но волновые числа остаются прежними. Наблюдается лишь локальное искажение формообразований.

В общем случае центры масс присоединенных тел не совпадают с плоскостью срединной поверхности, поэтому тела обладают собственными моментами инерции вращения $J_{1v} = M_v \xi_{1v}^2$ и $J_{2v} = M_v \xi_{2v}^2$ относительно координатных осей и характеризуются соответствующими радиусами инерции ξ_{1v} и ξ_{2v} . Следовательно, при колебаниях оболочки присоединенные тела вместе с поступательным совершают также и вращательные движения относительно координатных осей поверхности. Моменты инерции вращения присоединенных тел J_{1v} и J_{2v} , в зависимости от своей величины, могут существенно влиять на частоты и формы свободных колебаний. Влияние моментов инерции вращения тела зависит от граничных условий, радиусов инерции и расположения твердого тела относительно узловых линий. Момент инерции вращения, понижая частоты свободных колебаний оболочки, может в предельном случае изменять их формообразования и волновые числа. При малых радиусах инерции влияние моментов инерции вращения тела на частоты собственных колебаний незначительно и в инженерных расчетах ими можно пренебречь.

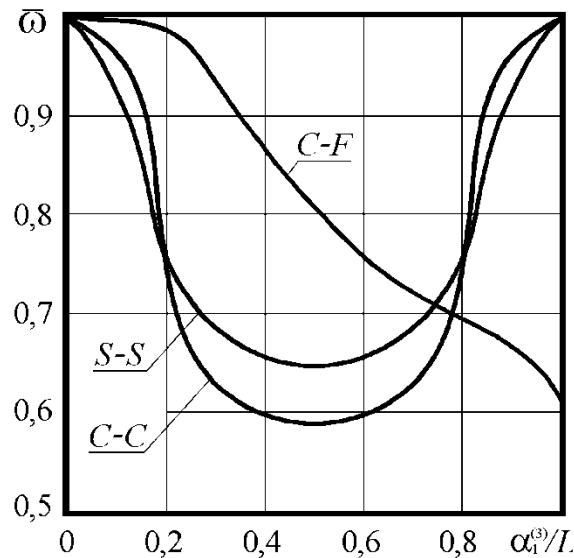


Рисунок 3.7 – Влияние координаты расположения присоединенного твердого тела на основную частоту колебаний гладкой оболочки.

Для замкнутых цилиндрических оболочек принимаем $\xi_{1v} = \xi_{2v} = \xi_v$. Тогда момент инерции вращения присоединенного тела будет $J_{ин} = M_v \xi_v^2$. Условия жесткого соединения присоединенного тела с оболочкой позволяют установить зависимость между компонентами его перемещений, которые можно выразить через перемещения срединной поверхности и углы поворота относительно координатных осей, с помощью соотношений (2.25). Тогда, подставив в уравнение кинетической энергии компоненты перемещений центров масс присоединенных тел, можно выразить в явном виде влияние их моментов инерции вращения добавкой к составляющей функции Лагранжа $\mathcal{E}^{(3)}$ для присоединенных тел:

$$\mathcal{E}^{(3)} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{v=1}^q \left\{ M_v \sum_{k=1}^3 (u_{kv}(\alpha_{1v}, \alpha_{2v}))^2 + \Delta_1 \left[J_{1v} \left(\frac{\partial u_k(\alpha_{1v}, \alpha_{2v})}{\partial \alpha_1} \right)^2 + \frac{J_{2v}}{R^2} \left(\frac{\partial u_k(\alpha_{1v}, \alpha_{2v})}{\partial \alpha_2} \right)^2 \right] \right\}, \quad (3.35)$$

где $\Delta_1 = \begin{cases} 1 & \text{при } k = 3; \\ 0 & \text{при } k \neq 3. \end{cases}$

Для анализа указанного эффекта численно исследованы свободные колебания цилиндрической оболочки из стали, несущей присоединенное тело, масса которого расположена в точке с координатами $\alpha_1^{(3)} = L/2$, $\alpha_2^{(3)} = 0$ и составляет $M_1 = 0,1M_0$. Относительные геометрические характеристики оболочки следующие: $L/R = 2,5$ и $R/h = 125$.

Зависимость ω_* исследуемой цилиндрической оболочки от величины момента инерции $J_{ин}$ присоединенного тела приведена на рис. 3.8. Изменение $J_{ин}$ осуществляется за счет варьирования величины радиуса инерции вращения ξ_v массы M_1 присоединенного тела. Зависимости 1 и 3 соответствуют волновым числам $m = 2$ ($n = 7$) и $m = 1$ ($n = 6$) для жестко закрепленной оболочки, а зависимости 2 и 4 – волновым числам $m = 2$ ($n = 6$) и $m = 1$ ($n = 5$) для шарнирно опертой оболочки.

Из приведенных зависимостей видно, что с увеличением момента инерции вращения присоединенного тела основная собственная частота колебаний оболочки уменьшается, но при определенных условиях это влияние незначительно, и, следовательно, в этих случаях можно положить $J_{ин} = 0$. Представленные зависимости подтверждают, что моменты инерции присоединенного тела, расположенного в пучности при изгибных колебаниях, практически не влияют на низшую частоту колебаний при $m = 1$, но при $m = 2$, когда тело располагается на окружной узловой линии, данное влияние оказывается существенным. Так для жестко закрепленной оболочки при $J_{ин} \geq 2,2 \times 10^5$ кг·м² частота, соответствующая форме колебаний с $m = 2$ и $n = 7$, уменьшается настолько, что становится основной. Аналогичные результаты, характеризующие влияние моментов инерции, получены и для других типоразмеров оболочек.

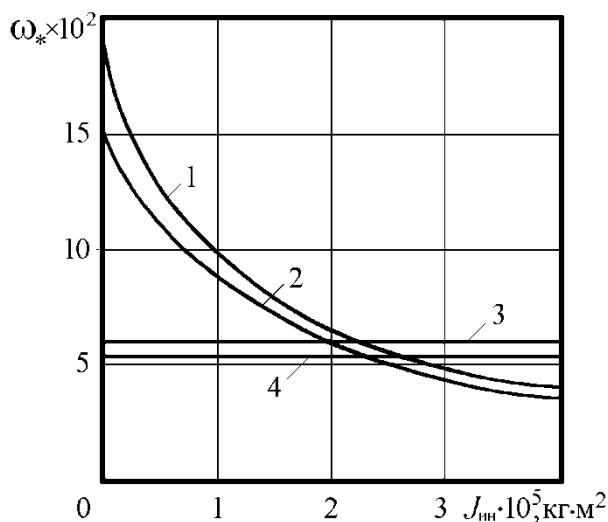


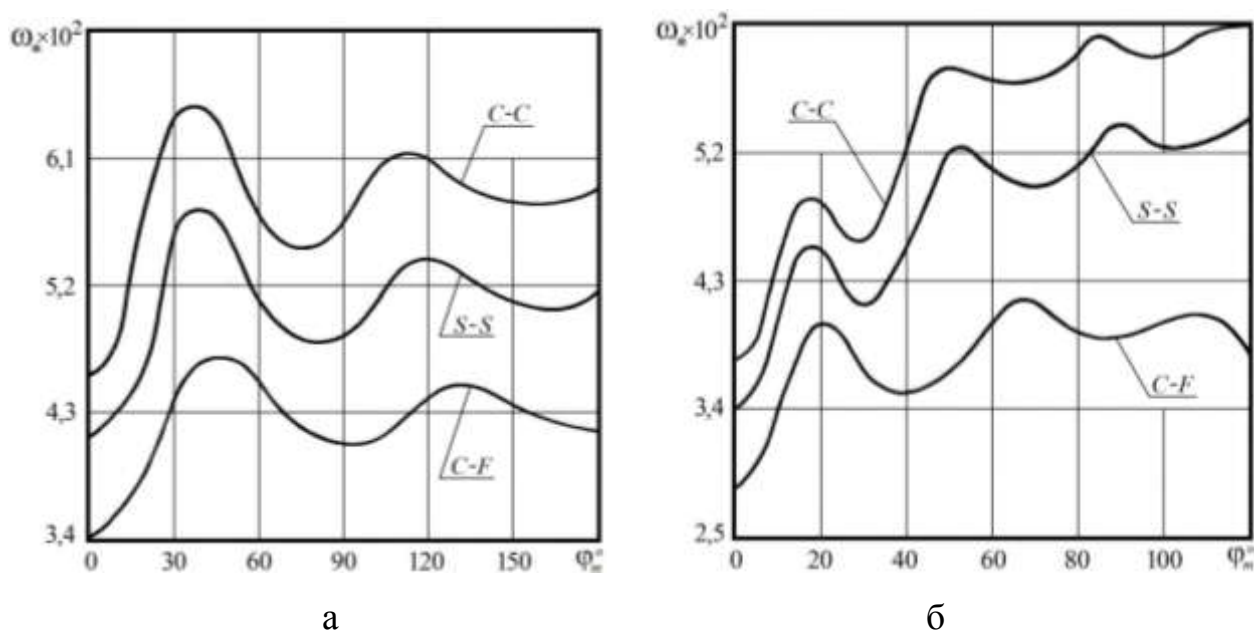
Рисунок 3.8 – Зависимость частотного параметра ω_* от момента инерции вращения присоединенного тела.

В общем случае спектр частот колебаний по признакам можно разделить на четыре группы, которые характеризуются расположением твердого тела: в пучности, на окружной узловой линии, на продольной узловой линии, а также в точке пересечения продольной и окружной узловых линий.

При условиях, относящихся к первой группе, тело совершает поступательное движение, в результате чего $J_{ин}$ сказывается слабо. На основных частотах присоединенное тело, как правило, располагается в пучностях. Это объясняется преобладанием изгибных форм колебаний. При условиях, относящихся ко второй и третьей группам, преобладает вращательное движение тела вокруг соответствующей узловой линии. Последняя группа представляет собой часть спектра частот колебаний незагруженной оболочки, так как центр массы, расположенный на пересечении узловых линий, в процессе колебаний не участвует и может совершать лишь вращательное движение вокруг нормали к поверхности.

Теоретический и практический интерес представляют динамические характеристики оболочек, несущих систему присоединенных тел. В качестве примера рассмотрим колебания гладкой изотропной цилиндрической оболочки ($L/R = 2,5$; $R/h = 125$) с двумя присоединенными телами, расположенными в ее среднем сечении вдоль окружности. Массы твердых тел сосредоточены в

точках с координатами вдоль образующей $\alpha_1^{(3)} = L/2$. Их взаиморасположение характеризуется центральным углом φ_m между центрами масс присоединенных тел. На рисунке 3.9а для граничных условий $C - C$, $S - S$ и $C - F$ представлены зависимости изменения частотного параметра ω_* от центрального угла φ_m между двумя присоединенными телами, массы которых относительно массы оболочки составляют $M_1 = M_2 = 0,1M_0$.



а – оболочка с двумя присоединенными телами; б – оболочка с тремя присоединенными телами

Рисунок 3.9 – Влияние угла φ_m между двумя присоединенными телами на величину частотного параметра ω_* оболочечной системы.

Анализ кривых $\omega_* = \varphi(\varphi_m)$ показывает, что для различных граничных условий существует такой угол φ_m между центрами масс присоединенных тел, при котором основная частота свободных колебаний может достигать своего наибольшего и наименьшего значений. Так, для граничных условий $C - C$ и $S - S$ первый пик основной частоты колебаний оболочки с двумя телами наблюдается при $\varphi_m = 34^\circ$, для $C - F$ – при $\varphi_m = 42^\circ$; следующий – при $\varphi_m = 110^\circ$ и $\varphi_m = 132^\circ$ соответственно.

Рисунок 3.9б характеризует зависимость $\omega_* = \phi(\varphi_m)$ для той же оболочки, несущей три тела. В случае присоединения трех тел первый пик основной частоты для указанных граничных условий сдвинется к $\varphi_m = 18^\circ$ и $\varphi_m = 21^\circ$, второй – к $\varphi_m = 54^\circ$ и $\varphi_m = 67^\circ$ соответственно. При этом для $N_3 = 2$ величина частоты первого пика является наибольшей, в то время как для $N_3 = 3$ второй и третий пики превышают первый. Приведенные численные результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными. Интерференционные картины основных форм колебаний обеих оболочек с двумя и тремя присоединенными телами, полученные методом голографической интерферометрии для граничных условий $C - F$, представлены на рис. 5.3. С увеличением количества равномерно расположенных присоединенных тел основная частота колебаний понижается (табл. 3.7).

Таблица 3.7 – Зависимость частотного параметра ω_* от количества равномерно распределенных присоединенных тел

Граничные условия	Частотный параметр $\omega_* \times 10^2$				
	Количество присоединенных тел N_3				
	0	1	2	3	4
$C - C$	11,32	6,21	7,76	6,20	6,19
$S - S$	8,84	5,60	5,63	5,55	5,49
$C - F$	4,62	3,71	3,82	3,66	3,62

При малых значениях угла раствора φ_m присоединенные тела оказывают большое влияние на основную частоту колебаний, но с увеличением расстояния между точками их крепления к несущей поверхности оно ослабевает. При симметричном расположении присоединенных тел основная частота колебаний приближается к частоте оболочки с одним присоединенным телом.

Взаимное расположение присоединенных тел сказывается также и на характере волнообразования в оболочке. Полученные формообразования у оболочек с несколькими присоединенными телами имеют более сильные локальные искажения структуры, чем у оболочек с одним присоединенным

телом. Исследование форм колебаний показало, что для двух первых частот системы характерна локализация перемещений в окрестности размещения тел, а на высших частотах – тела «тормозят» перемещения оболочки в своей окрестности. Зона активного взаимовлияния присоединенных тел распространяется примерно до второго узла формы колебаний. Наибольшие амплитуды колебаний поверхности для низших частот наблюдаются для граничных условий $C - C$, наименьшие – для $S - S$. При равномерном распределении присоединенных тел вдоль окружности волновое число n основной формы может изменяться. В случае четного количества присоединенных тел n принимает значение кратное 2, что подтверждается полученными численными результатами. Если N_3 соответствует числу n для незагруженной оболочки, то основная форма колебаний имеет меньшие искажения. Общей особенностью резонансных форм является локализация деформаций в области расположения присоединенных тел.

Для подкрепленных оболочек, несущих присоединенные тела, в отличие от гладких, стрингеры незначительно повышают низшие частоты колебаний, особенно, если тело расположено в окрестности ребра. Влияние присоединенного тела характеризуется локализацией области деформирования поверхности в окружном направлении между ребрами. Зависимости $\bar{\omega} = \phi(\alpha_1^{(3)}/L)$ для различных граничных условий носят аналогичный характер, что и для гладких оболочек (см. рис. 3.7). В таблице 3.8 приведен частотный параметр ω_* , характеризующий низшую частоту свободных колебаний незагруженной и с присоединенным на наружной поверхности твердым телом цилиндрической оболочки ($L/R = 2,5$; $R/h = 125$), подкрепленной снаружи $N_1 = 12$ стрингерами 4×1 мм. Масса присоединенного тела $M_1 = 0,1M_0$ сосредоточена в центре оболочки между стрингерами в точке с координатой вдоль образующей $\alpha_1^{(3)} = L/2$.

Исследуем влияние кольцевых ребер на собственные частоты и формы колебаний рассматриваемой оболочки с присоединенным телом $M_1 = 0,1M_0$.

Частотный параметр ω_* для низшей частоты свободных колебаний незагруженной и с присоединенным твердым телом цилиндрической оболочки ($L/R = 2,5$; $R/h = 125$), подкрепленной снаружи $N_2 = 2$ равноотстоящими шпангоутами 6×1 мм, приведен в табл. 3.8.

Таблица 3.8 – Зависимость частотного параметра ω_* цилиндрической оболочки от граничных условий и вида подкрепления

M_1/M_0	Вид подкрепления	12 стрингеров			2 шпангоута		
	Граничные условия	$C - C$	$S - S$	$C - F$	$C - C$	$S - S$	$C - F$
0,0	Частотный параметр ω_* $\times 10^2$	11,41	8,96	4,60	20,16	16,76	8,19
0,1		6,42	5,32	3,52	11,77	10,52	6,29
Волновое число n		6	5	4	4	3	3

Присоединенное тело вносит локальные искажения в формообразования и расположено в пучности перемещений. Стремление основной частоты подкрепленной оболочки к своему предельному значению сказывается тем сильнее, чем выше изгибная жесткость подкрепляющих ребер и окружное волновое число. Это объясняется тем, что на торцах оболочки отсутствуют продольные перемещения и низшей собственной частоте соответствует изгибная форма в радиальной плоскости. Поэтому увеличение изгибной жесткости шпангоутов сказывается на частотах колебаний оболочек сильнее, чем увеличение изгибной жесткости стрингеров.

При наличии шпангоутов амплитудно-частотные зависимости носят иной характер, чем для гладких оболочек и подкрепленных стрингерами. Искажение формообразований более локализовано между шпангоутами. Наибольшие прогибы располагаются в точке крепления тела и ограничены в осевом направлении близлежащими шпангоутами.

На рисунке 3.10 для рассматриваемой оболочки, подкрепленной снаружи $N_2 = 2$ равноотстоящими шпангоутами 6×1 мм, приведены зависимости

изменения безразмерного частотного параметра $\bar{\omega} = \omega_1/\omega_0$, характеризующие влияние расположения присоединенного тела вдоль образующей на низшую частоту свободных колебаний. Основная собственная частота для граничных условий $C - C$ и $S - S$ принимает наименьшие значения при размещении тела между ребрами, а при $C - F$ – в верхнем торце. В этих сечениях прогибы поверхности максимальны. Приближение тела к кольцевым ребрам и к торцам оболочки вызывает повышение низшей частоты колебаний оболочечной системы по сравнению со значениями, полученными при размещении тела между ребрами. На частоты и формы свободных колебаний влияет также число подкрепляющих ребер и их размещение.

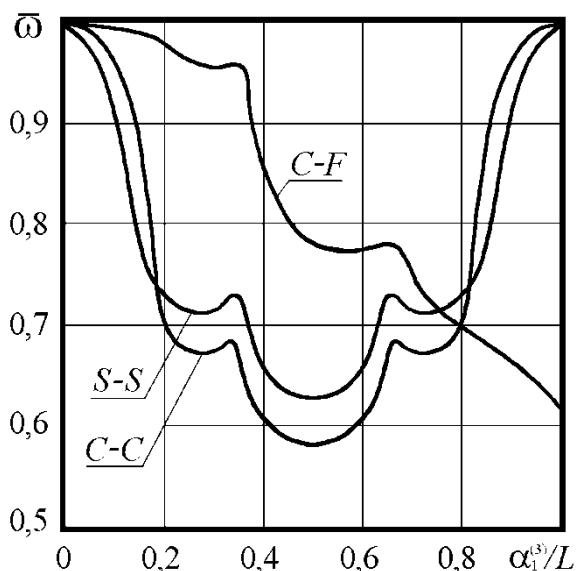


Рисунок 3.10 – Влияние координаты расположения присоединенного твердого тела на основную частоту колебаний подкрепленной шпангоутами оболочки.

Комбинированное подкрепление оболочек стрингерами и шпангоутами незначительно увеличивает основную частоту колебаний по сравнению с усилением кольцевыми ребрами (см. табл. 3.1). Наличие твердого тела характеризуется локализацией области деформирования поверхности между ребрами в окружном и продольном направлениях. Интерферограммы основных форм колебаний оболочки с присоединенным твердым телом, подкрепленной шпангоутами и перекрестной системой ребер, приведены в работе [62].

Наибольшие нормальные прогибы u_3 и минимальные значения основной частоты наблюдаются при расположении присоединенного тела между ребрами. При смещении его ближе к кольцевым ребрам низшая частота повышается, а максимальные прогибы поверхности уменьшаются. Размещение тела вблизи продольных ребер малоэффективно. В отличие от крутильной жесткости, наибольшее влияние на собственные частоты колебаний ребристой оболочки с присоединенным телом оказывает изгибная жесткость шпангоутов в радиальной плоскости. Незначительный вклад вносит также изгибная жесткость стрингеров. Наиболее оптимальным подходом при решении проблемы отстройки от резонанса является варьирование количества, жесткости и расположения подкрепляющих ребер относительно присоединенных тел.

3.6 Особенности колебаний оболочек с отверстиями различной формы

Тонкие оболочки, ослабленные вырезами, являются распространенными элементами современной техники. Характер влияния отверстий на свободные колебания оболочек достаточно сложен и имеет ряд характерных особенностей. Отверстия, также как и присоединенные твердые тела, оказывают существенное влияние на амплитудно-частотные характеристики оболочечной системы. Поэтому исследование данного влияния имеет большое практическое и научное значение, а совершенствование методов определения резонансных характеристик оболочек с вырезами, в связи с отсутствием аналитических решений, остается важной и актуальной задачей.

Математическая постановка и методы решения отдельных простейших задач данного класса для гладких оболочек с неподкрепленным отверстием представлены в ряде работ [93, 104, 113, 122, 161, 167, 172]. Однако в силу сложности разрешающей системы уравнений, в настоящее время слишком мало

работ, в которых представлены численные результаты для указанных задач в случае сложных конструктивно неоднородных оболочечных систем. Их анализ показывает, что традиционными приемами, основанными на использовании вариационных принципов, удастся определить с приемлемой точностью только низшие частоты и формы колебаний. На практике этого оказывается недостаточно.

В настоящей работе исследуются колебания как гладких, так и ребренных оболочек вращения, ослабленных отверстиями со свободными и подкрепленными контурами. Поставленная задача решается в линейной постановке методом конечных элементов. Существенное влияние на результаты расчета собственных частот и форм колебаний данной механической системы оказывает выбор оптимальных параметров конечно-элементной сетки разбиения поверхности. Процесс построения уточненной сетки состоит из двух этапов: формирование сетки сплошной оболочки S_1 и построение сетки в области S_2 , высекаемой на противоположной стороне оболочки контуром отверстия. Тогда всю поверхность оболочки с отверстием можно представить выражением $S = S_1 - S_2$. Лучшие результаты получаются, если использовать однородные конечные элементы и равномерно густую сетку.

Рассмотрим тонкую упругую конструктивно неоднородную цилиндрическую оболочку вращения (рис. 3.11), подкрепленную вдоль координатных осей (α_1, α_2) N_1 стрингерами, N_2 шпангоутами и ослабленную N_0 прямоугольными отверстиями, контуры которых расположены вдоль главных линий кривизны $(\alpha'_{01v} \leq \alpha_1^{(0)} \leq \alpha''_{01v}, \alpha'_{02v} \leq \alpha_2^{(0)} \leq \alpha''_{02v})$.

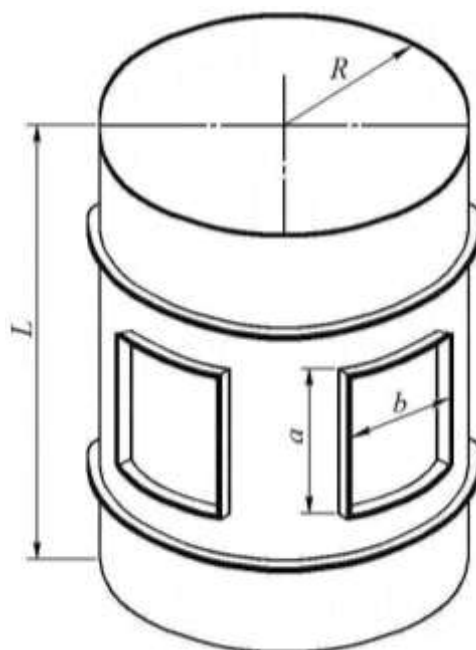


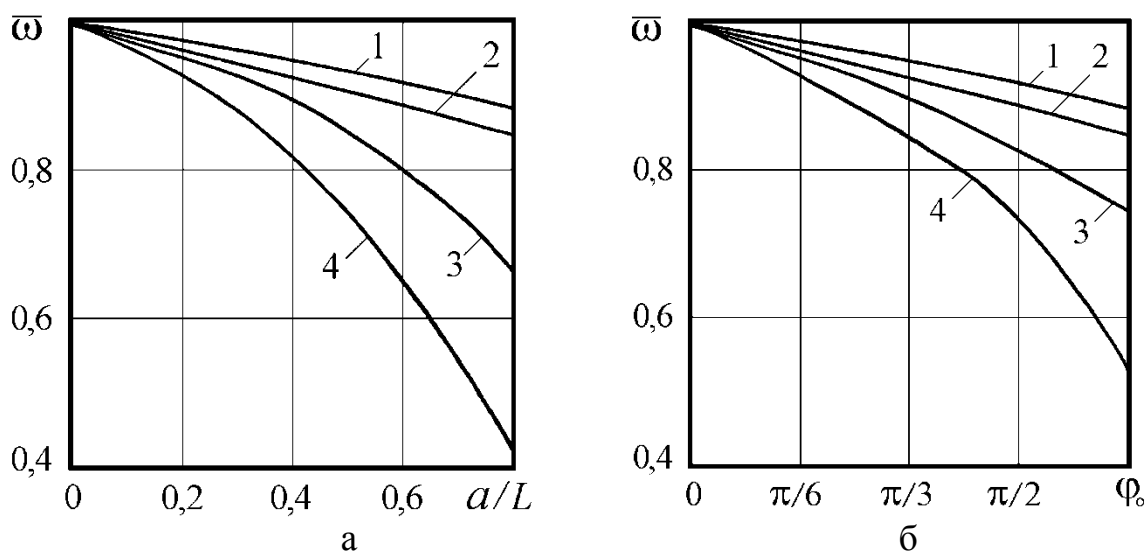
Рисунок 3.11 – Модель подкрепленной шпангоутами оболочки с прямоугольными вырезами для расчета свободных колебаний.

Отверстия имеют свободные края или подкреплены по контуру жесткими ребрами, которые рассматриваются как дискретные упругие стержни, обладающие жесткостью на изгиб в радиальной и продольной плоскостях, на растяжение-сжатие и крутильной жесткостью. На торцах оболочки заданы соответствующие граничные условия, а на контурах отверстий необходимо дополнительно удовлетворять условиям равенства нулю перерезывающих сил и изгибающих моментов ($N_{11} = N_{12}^* = M_{11} = Q_{11}^* = 0$ и $N_{22} = N_{21}^* = M_{22} = Q_{22}^* = 0$). Следует отметить, что обобщенная функция Лагранжа содержит члены, относящиеся к подкрепляющим вырезы ребрам обоих направлений. Кроме того, в нее входят координаты α'_{01v} , α''_{01v} , α'_{02v} , α''_{02v} , определяющие координатные линии, вдоль которых расположены подкрепляющие ребра v -го выреза.

Численные исследования влияния размеров прямоугольного отверстия на собственные частоты и формы колебаний выполнены для изотропной жестко закрепленной оболочки со следующими характеристиками: $R/h = 125$;

$L/R = 2,5$; $R = 0,075$ м; $E = 200$ ГПа; $\nu = 0,3$; $\rho = 7,8 \times 10^3$ кг/м³. Отверстие расположено симметрично относительно торцов оболочки.

Рассмотрим влияние изменения пропорций прямоугольного выреза на собственные частоты колебаний. Для этого, сохраняя площадь вырезаемой части поверхности S_2 , будем изменять соотношение его сторон (a и b). Ширина отверстия выражается зависимостью $b = 2R \sin \varphi_0$, где φ_0 – угол в радианах, характеризующий ширину отверстия; R – радиус оболочки. Результаты расчета представлены на рис. 3.12а, где изображена зависимость частотного параметра $\bar{\omega} = \omega/\omega_0$ от высоты отверстия a . Частотный параметр характеризует отношение низшей круговой частоты колебаний ω неподкрепленной оболочки с отверстием к частоте ω_0 сплошной оболочки. Кривые 1, 3, 4 соответствуют величине φ_0 , равной $\pi/6$, $\pi/3$, $\pi/2$. Кривая 2 соответствует оболочке с двумя диаметрально расположенными отверстиями при $\varphi_0 = \pi/6$.



а – зависимость частотного параметра от высоты отверстия; б – зависимость частотного параметра от ширины отверстия

Рисунок 3.12 – Зависимость частотного параметра $\bar{\omega}$ от размеров отверстия.

Наличие отверстия, образующего массово-жесткостную неоднородность, приводит к расщеплению собственных частот, которые для сплошной оболочки двукратны, а с вырезами начинают раздваиваться на симметричные и

асимметричные. Для парных частот формы колебаний совпадают по общей изменяемости, но сдвинуты одна относительно другой в окружном направлении на угол сдвига φ . Обнаружено значительное снижение основной частоты, сопровождающееся сильным искажением формы колебаний в окрестности отверстия с увеличением его размеров. При этом вместе со снижением основной частоты меняется порядок следования собственных частот. Одновременно наблюдаются малоизменяющиеся формы даже при больших размерах выреза, для которых снижение частоты является также незначительным. Форму колебаний для основной частоты оболочки с большим отверстием сложно идентифицировать вследствие ее сильного искажения.

Снижение собственных частот для оболочек с большими отверстиями может сопровождаться сменой форм колебаний. При этом форма колебаний сплошной оболочки трансформируется в форму, для которой максимум прогибов расположен на контуре отверстия. Эта форма сохраняется и при дальнейшем росте размера отверстия.

На рисунке 3.12б изображена зависимость частотного параметра $\bar{\omega}$ от ширины отверстия b , характеризуемой окружной координатой φ_0 . Кривые 1, 2, 3 соответствуют размерам отверстия вдоль образующей – $L/5$, $2L/5$ и $3L/5$, а кривая 4 – частоте колебаний оболочки с отверстием $2L/5$ и расположенным посреди образующей в диаметральной плоскости напротив отверстия присоединенным телом. Отношение массы присоединенного тела к массе оболочки составляет $M_1/M_0 = 0,1$.

Из приведенных зависимостей следует, что увеличение высоты отверстия приводит к понижению основной частоты колебаний неподкрепленной оболочки, а увеличение его ширины в меньшей степени сказывается на изменении частот. Понижение основной собственной частоты вызвано локальными колебаниями участков поверхности у краев отверстия. Однако наличие отверстий более существенно влияет на формы колебаний и, следовательно, распределение внутренних напряжений и деформаций, что согласуется с результатами работы [93]. При этом формы колебаний с

различными волновыми числами в окружном и осевом направлениях, полученные в результате расчетов, оказываются связанными между собой и могут отличаться от форм колебаний сплошной однородной оболочки. Максимумы прогибов достигаются в окрестности отверстия, что согласуется с экспериментальными данными, полученными для оболочек с одним и двумя отверстиями [104]. Формы колебаний при удалении от отверстия носят регулярный характер, характерный для оболочек без вырезов.

Форма отверстия (квадрат или круг) не оказывает заметного влияния на частоты и формы колебаний. Результаты вычислений для оболочки с центральным круглым вырезом радиуса r_0 оказались близкими к оболочке с квадратным вырезом одинаковой площади. С ростом размеров отверстия максимальным и довольно существенным является снижение первой собственной частоты. При этом увеличение размеров прямоугольных вырезов в направлении образующей, сильнее сказывается на значениях собственных частот, чем увеличение их размеров в окружном направлении. Характер влияния вытянутости отверстия различен для разных форм. Наибольшее влияние на частоты наблюдается в случае взаимодействий отверстий с присоединенным телом. Присоединенное тело понижает основную частоту колебаний в еще большей степени.

Исследуем теперь влияние числа отверстий на собственные частоты колебаний. Рассмотрим оболочку с N_0 ($0 < N_0 \leq 4$) квадратными отверстиями, расположенными на равном расстоянии друг от друга вдоль центральной параллели. При этом общую площадь S отверстия сохраняем постоянной.

Ослабление оболочки двумя диаметрально расположенными отверстиями незначительно понижает низшую частоту по сравнению с одним отверстием. Данная зависимость характеризуется кривой 4 на рис.3.12а. Однако наличие второго отверстия в данном случае в большей степени влияет на ее деформированное состояние, существенно искажая форму колебаний. Наибольшее влияние на частоты наблюдалось в случае кратности числа отверстий и волн в окружном направлении у соответствующей формы.

При росте числа отверстий величины собственных частот нижней части спектра достигают определенных значений и остаются на данном уровне. В случае расположения отверстий в окружном направлении частоты становятся почти кратными, и наблюдаются всплески их значений в точках кратности числа отверстий и волновых чисел соответствующих форм. Во всех случаях наблюдаются неидентифицируемые формы.

Анализ влияния подкрепления оболочки и контура отверстия, а также варьирования геометрических характеристик подкрепляющих ребер на собственные частоты и формы колебаний выполнен для оболочки с центральным прямоугольным отверстием ($a = L/3$; $\varphi_0 = \pi/4$). Оболочка подкреплена стрингерами и шпангоутами, а контур отверстия – замкнутой рамой из тонкостенных ребер прямоугольного сечения. Толщина стрингеров, шпангоутов и ребер на контуре отверстия составляет 1 мм. Оболочка и подкрепляющие ребра выполнены из однородного материала. Рассматривается общий случай деформации шпангоутов, оболочки и ребер, подкрепляющих отверстие.

Результаты численного анализа влияния подкреплений приведены на рис.3.13 в виде зависимости частотного параметра $\bar{\omega}$ от относительной высоты h_0/R подкрепляющих ребер. Кривая 1 соответствует подкреплению оболочки двумя шпангоутами ($N_2 = 2$), проходящими по контуру отверстия, кривая 4 – подкреплению восемью стрингерами ($N_1 = 8$), два из которых располагаются вдоль контура отверстия, кривая 5 – подкреплению продольных краев отверстия, кривая 2 – поперечных краев отверстия, кривая 3 – подкреплению рамой всего контура отверстия. В данном случае, имеет место усложнение форм и спектра частот колебаний оболочки.

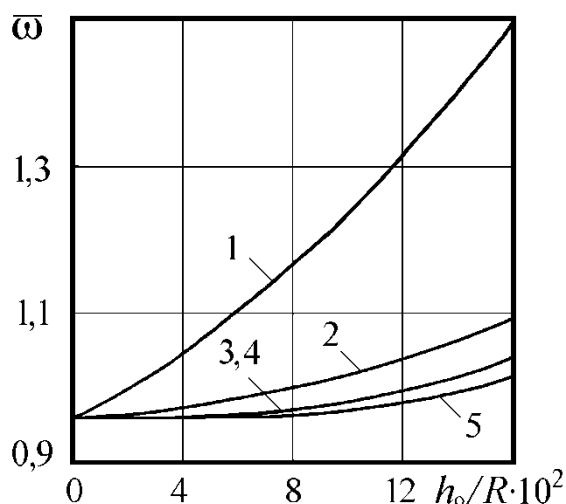


Рисунок 3.13 – Зависимость частотного параметра $\bar{\omega}$ от относительной высоты подкрепляющих отверстие ребер.

Наличие подкрепляющих ребер по контуру отверстия приводит к тому, что изгибающие моменты вдоль линии подкрепления претерпевают разрывы, плотность которых пропорциональна изгибной жесткости ребер, а крутящие моменты – разрывы, плотность которых пропорциональна жесткости ребер при кручении. Отсюда следует, что подкрепление контура отверстия приводит к незначительному повышению низшей частоты колебаний, а также других частот спектра. Однако наблюдаемое повышение в меньшей степени влияет на формообразования.

Если подкрепить оболочку двумя равномерно распределенными шпангоутами так, чтобы они располагались по поперечным краям отверстия, то частоты колебаний значительно возрастают, а волновые числа в окружном направлении уменьшаются.

Таким образом, наличие отверстий и подкрепляющих ребер оказывает существенное влияние на собственные частоты, формы колебаний оболочки, распределение внутренних напряжений и деформаций. Подкрепление контура отверстия увеличивает локальную жесткость конструкции и позволяет незначительно повысить частоты колебаний. Присоединенное к оболочке твердое тело приводит к еще большему понижению основной частоты. При этом форма колебаний характеризуется значительным преобладанием

перемещений в окрестности точки крепления тела, которые затухают с удалением от него.

3.7 Выводы

В третьем разделе представлены численные алгоритмы решения задач свободных колебаний тонких упругих цилиндрических оболочек с конструктивными неоднородностями в виде отверстий, присоединенных твердых тел и подкрепляющих ребер. Задача рассматривается на основе классической теории тонких упругих оболочек в рамках гипотез Кирхгофа-Лява с учетом дискретного размещения подкрепляющих ребер. Построена уточненная математическая модель колебаний упругой оболочечной системы и разработана методика расчета, основанная на применении вариационного принципа Лагранжа и метода конечных элементов. Приведенный алгоритм решения динамических задач на собственные значения для оболочечных систем основан на применении комбинированного метода Хаусхолдера-QR-обратных итераций с модифицированным разложением Холецкого и процесса ортогонализации Грамма-Шмидта, что позволяет повысить точность результатов, экономит время расчета и уменьшает потребности во внешней и оперативной памяти ЭВМ. При разработке алгоритма решения используются изопараметрические конечные элементы.

Достоверность разработанных математических моделей подтверждается сопоставлением численных результатов расчета с известными решениями и данными проведенного эксперимента. Выполнен анализ численной сходимости решений для различных видов граничных условий.

С использованием разработанной расчетной методики решены новые задачи по определению частот и форм собственных колебаний многосвязных неоднородных оболочечных систем, получены новые численные результаты. Исследовано влияние основных геометрических параметров оболочек,

отверстий, подкрепляющих ребер и присоединенных твердых тел, их количества, схемы подкрепления на амплитудно-частотные характеристики. Выявлены новые зависимости, закономерности и механические эффекты, обусловленные неоднородностями конструкций, для различных граничных условий и широкого диапазона изменения их геометрических, физико-механических и амплитудно-частотных параметров.

Показано, что жестко присоединенное твердое тело даже сравнительно небольшой массы приводит к понижению спектра частот колебаний оболочечной системы и, особенно, низшей частоты, вызывая искажение амплитудных полей перемещений поверхности, что обусловлено инерционной неоднородностью. Размещение на поверхности оболочки системы присоединенных тел и координаты их расположения оказывают существенное влияние на частоты и формы колебаний.

Отверстия, также как и присоединенные тела, существенно влияют на амплитудно-частотные характеристики оболочечной системы, понижая частоты колебаний и перераспределяя деформации ее поверхности. Подкрепление отверстий частично повышает спектр частот колебаний.

Подкрепление оболочек шпангоутами значительно повышает низшую частоту колебаний и спектр частот в целом и, в отличие от стрингеров, является более эффективным средством отстройки от резонансов.

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ КОНСТРУКТИВНО НЕОДНОРОДНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

4.1 Алгоритм решения задачи о вынужденных колебаниях и НДС конструктивно неоднородной оболочечной системы

Гармонический анализ вынужденных колебаний рассматриваемых оболочек проводится с целью исследования НДС путем решения уравнений движения для установившихся колебательных процессов. Оболочка имеет конструктивные неоднородности в виде подкрепляющих ребер, отверстий и жестко присоединенных твердых тел, которые вносят свой вклад в перераспределение напряжений. Колебания объекта исследований возбуждаются внешней равномерно распределенной радиально направленной силой, изменяющейся по гармоническому закону. Описание динамического поведения оболочечной конструкции проводится путем ее дискретизации системой ранее применяемых в модальном анализе изопараметрических четырехугольных конечных элементов с использованием вариационного принципа Лагранжа [175]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q} = F, \quad (4.1)$$

где $\mathcal{E} = \Pi - T$ – функция Лагранжа;

Π, T – потенциальная и кинетическая энергии деформации и колебаний дискретно подкрепленной оболочки;

q – вектор обобщенных узловых перемещений конечно-элементной модели;

F – возмущающие силы.

Используя вариационный принцип Лагранжа (4.1), получаем дифференциальные уравнения для гармонического анализа оболочечных конструкций в матричном виде. Применяя метод конечных элементов, дискретное уравнение движения конструкции в связанной с ней системе координат при возбуждении k -ой гармоникой возмущающей силы с учетом демпфирования можно представить в виде матричного уравнения:

$$[M] \left\{ \frac{d^2 q}{dt^2} \right\} + [C] \left\{ \frac{dq}{dt} \right\} + [K] \{q\} = \{F\}, \quad (4.2)$$

или

$$[M] \{\ddot{q}\} + [C] \{\dot{q}\} + [K] \{q\} = \{F\}$$

Здесь $\{q\}$ – вектор обобщенных узловых перемещений для всей оболочечной системы; $\{\ddot{q}\}$, $\{\dot{q}\}$ – векторы ускорений и скоростей в узлах оболочки; $[K]$, $[C]$, $[M]$ – матрицы жесткости, демпфирования и масс для всей оболочки; $\{F\}$ – вектор приложенных узловых возмущающих внешних усилий.

В задачах колебаний с затуханием матрица демпфирования предназначена для аппроксимации диссипации энергии. В случае, когда матрицу демпфирования сложно получить в явном виде и демпфирующий эффект может быть учтен лишь приближенно, в первом приближении принимается, что действуют вязкого типа силы, пропорциональные скорости смещения $\{\dot{q}\}$. При этом вязкие демпферы считаются приложенными в каждом узле элемента, что позволяет получить матрицу $[C]$ простой диагональной формы. В общем случае матрицу демпфирования формально можно получить, введя некоторую константу внутреннего трения и суммируя соответствующие матрицы элементов. На практике матрица $[C]$ строится путем задания величин демпфирования на различных собственных модах и аппроксимируется как линейная комбинация матриц масс $[M]$ и жесткостей $[K]$ (по Рэлею) [17]:

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (4.3)$$

Коэффициенты α и β в зависимости (4.3) определяются экспериментально для всей системы [117]. В данной задаче используются те же матрицы масс $[M]$ и жесткостей $[K]$, что и в задаче свободных колебаний.

Предполагается, что при установившемся процессе колебаний все точки конструкции движутся с одной и той же заданной частотой, но с различными сдвигами по фазе. Причиной возникновения сдвига по фазе может быть наличие демпфирования. Следовательно, перемещения можно представить в виде:

$$\{q\} = \{q_0 e^{i\varphi}\} e^{i\Omega t}, \quad (4.4)$$

где q_0 – амплитуда перемещений;

i – мнимая единица;

Ω – круговая частота внешних сил;

t – время;

φ – сдвиг фаз для перемещений.

Для формулировки проблемы вынужденных колебаний используются комплексные обозначения. В этом случае соотношение (4.4) можно представить в виде:

$$\{q\} = \{q_0 (\cos \varphi + i \sin \varphi)\} e^{i\Omega t} = (\{q_1\} + i \{q_2\}) e^{i\Omega t}, \quad (4.5)$$

где $\{q_1\} = \{q_0 \cos \varphi\}$ – действительная часть вектора перемещений;

$\{q_2\} = \{q_0 \sin \varphi\}$ – мнимая часть вектора перемещений.

Поскольку возмущающая колебания внешняя нагрузка периодична, вектор динамических сил может быть представлен в виде суммы членов тригонометрического ряда Фурье аналогично вектору перемещений:

$$\{F\} = \{F_0 e^{i\psi}\} e^{i\Omega t} = \{F_0 (\cos \psi + i \sin \psi)\} e^{i\Omega t} = (\{F_1\} + i \{F_2\}) e^{i\Omega t}, \quad (4.6)$$

где F_0 – амплитуда сил;

ψ – сдвиг фаз для сил;

$\{F_1\} = \{F_o \cos \psi\}$ – действительная часть вектора сил;

$\{F_2\} = \{F_o \sin \psi\}$ – мнимая часть вектора сил.

Подставляя (4.5), (4.6) в (4.2), получим:

$$\left(-\Omega^2[M] + \Omega[C] + [K]\right)\left(\{q_1\} + i\{q_2\}\right)e^{i\Omega t} = \left(\{F_1\} + i\{F_2\}\right)e^{i\Omega t} \quad (4.7)$$

Так как зависимость от времени ($e^{i\Omega t}$) одинакова для обеих частей уравнения (4.7), то она может быть опущена:

$$\left([K] - \Omega^2[M] + \Omega[C]\right)\left(\{q_1\} + i\{q_2\}\right) = \left(\{F_1\} + i\{F_2\}\right) \quad (4.8)$$

Задача (4.8) по определению амплитуд и силовых характеристик вынужденных колебаний может быть решена методами прямого интегрирования (методы центральных разностей, Хаболта, Вилсона или Ньюмарка), а также на основе метода разложения перемещений по собственным формам колебаний (метод суперпозиции мод). При использовании методов прямого интегрирования общее количество операций зависит от количества временных шагов и может быть достаточно велико, что требует больших затрат расчетного времени. Данные методы достаточно полно изложены в работах [17, 26, 117]. Гармонический анализ исследуемой оболочечной конструкции выполняется методом суперпозиции мод [17]. В этом случае уравнения равновесия приводятся к более эффективной для интегрирования форме. На основе данного метода разработана методика расчета амплитуд вынужденных колебаний оболочечной системы.

Метод суперпозиции мод (МСМ) использует собственные частоты и формы колебаний, вычисленные при модальном анализе, для анализа установившихся вынужденных гармонических колебаний. В основе МСМ лежит разложение неизвестного решения по собственным модам и переход к модальным координатам y_k из условия, чтобы

$$\{q\} = \sum_{k=1}^{\ominus} \{q_o\}_k y_k, \quad (4.9)$$

где $\{q_o\}_k$ – форма колебаний k -ой моды;

Θ – число используемых мод.

Подставляя выражение (4.9) в уравнение движения (4.2), получим:

$$[M] \sum_{k=1}^{\Theta} \{q_o\}_k \ddot{y}_k + [C] \sum_{k=1}^{\Theta} \{q_o\}_k \dot{y}_k + [K] \sum_{k=1}^{\Theta} \{q_o\}_k y_k = \{F\} \quad (4.10)$$

Умножив уравнение (4.10) на некоторую j -ю моду $\{q_o\}_j^T$, получим

$$\{q_o\}_j^T [M] \sum_{k=1}^{\Theta} \{q_o\}_k \ddot{y}_k + \{q_o\}_j^T [C] \sum_{k=1}^{\Theta} \{q_o\}_k \dot{y}_k + \{q_o\}_j^T [K] \sum_{k=1}^{\Theta} \{q_o\}_k y_k = \{q_o\}_j^T \{F\} \quad (4.11)$$

Как уже отмечалось выше, собственные формы матриц $[K]$ и $[M]$ ортогональны из известного свойства собственных форм [17, 137]. Например, для матрицы $[M]$:

$$\{q_o\}_j^T [M] \{q_o\}_k = 0 \quad \text{при } k \neq j; \quad (4.12)$$

$$\{q_o\}_j^T [K] \{q_o\}_k = 0 \quad \text{при } k \neq j.$$

В МСМ, разрешено только релеевское или постоянное демпфирование вследствие того, что:

$$\{q_o\}_j^T [C] \{q_o\}_k = 0 \quad \text{при } k \neq j \quad (4.13)$$

Применяя условия (4.12) и (4.13) к уравнению (4.11) получим только члены при $k = j$:

$$\{q_o\}_j^T [M] \{q_o\}_j \ddot{y}_j + \{q_o\}_j^T [C] \{q_o\}_j \dot{y}_j + \{q_o\}_j^T [K] \{q_o\}_j y_j = \{q_o\}_j^T \{F\} \quad (4.14)$$

Также всегда можно нормализовать формы:

$$\{q_o\}_j^T [M] \{q_o\}_j = M_j q_{oj}^2 = 1, \quad (4.15)$$

откуда $q_{oj} = 1/\sqrt{M_j}$

Согласно [17] получим:

$$C_j = 2\eta_j \sqrt{K_j M_j}, \quad \omega_j = \sqrt{K_j / M_j}, \quad (4.16)$$

где η_j – относительная к критическому величина демпфирования для j -ой моды;

ω_j – собственная круговая частота для j -ой моды.

Таким образом, если предположить C -ортогональность, с учетом (4.16) получим:

$$\{q_o\}_j^T [C] \{q_o\}_j = 2\eta_j \sqrt{K_j M_j} (1/\sqrt{M_j})^2 = 2\eta_j \omega_j \quad (4.17)$$

Умножив уравнение (3.10) на $\{q_o\}_j^T$, получим:

$$\{q_o\}_j^T [K] \{q_o\}_j = \omega_j^2 \{q_o\}_j^T [M] \{q_o\}_j \quad (4.18)$$

С учетом (4.15) преобразуем уравнение (4.18) к виду:

$$\{q_o\}_j^T [K] \{q_o\}_j = \omega_j^2 \quad (4.19)$$

Подставив выражения (4.15), (4.17), (4.19) в уравнение (4.14), получим систему Θ независимых друг от друга уравнений движения для модальных координат:

$$\ddot{y}_j + 2\omega_j \eta_j \dot{y}_j + \omega_j^2 y_j = F_j, \quad (4.20)$$

где y_j – модальная координата;

F_j – сила, соответствующая модальной координате, $F_j = \{q_o\}_j^T \{F\}$.

Для установившихся гармонических колебаний F_j имеет вид:

$$F_j = F_{oj} e^{i\Omega t}, \quad (4.21)$$

где F_{oj} – комплексная амплитуда силы;

Ω – круговая частота внешней силы.

Начальные условия для $y_j(t)$ получаются из равенства (4.9) и условий (2.36). Чтобы уравнения (4.20) выполнялись, модальную координату y_j необходимо представить в том же виде, что и F_j в (4.21), то есть:

$$y_j = y_{0j} e^{i\Omega t}, \quad (4.22)$$

где y_{0j} – комплексная амплитуда модальной координаты для моды j .

Тогда с учетом (4.21) и (4.22), уравнения (4.20) запишутся в виде:

$$-\Omega^2 y_{0j} e^{i\Omega t} + 2\omega_j \eta_j (i\Omega y_{0j} e^{i\Omega t}) + \omega_j^2 y_{0j} e^{i\Omega t} = F_{0j} e^{i\Omega t} \quad (4.23)$$

Собирая коэффициенты при y_{0j} и сокращая на $e^{i\Omega t}$, получим уравнения:

$$\left(-\Omega^2 + i2\Omega\omega_j\eta_j + \omega_j^2\right)y_{0j} = F_{0j}, \quad (4.24)$$

решая которые, определим y_{0j} :

$$y_{0j} = \frac{F_{0j}}{\left(\omega_j^2 - \Omega^2\right) + i\left(2\Omega\omega_j\eta_j\right)} \quad (4.25)$$

Зная модальные координаты, можно определить вклад каждой моды в решение:

$$\{C_j\} = \{q_0\}_j y_{0j}, \quad (4.26)$$

где $\{C_j\}$ – вклад j -ой моды (комплексный вектор перемещений);

$\{q_0\}_j$ – j -я собственная форма.

Определив с учетом (4.23)-(4.26) значения y_j и используя уравнение (4.9), находим перемещения $\{q\}$. То есть отдельные модальные отклики y_j накладываются друг на друга, чтобы получить фактический отклик. Окончательно, суммируя вклады каждой из мод, можно определить комплексные перемещения:

$$\{q_o\} = \sum_{j=1}^{\ominus} \{c_j\} \quad (4.27)$$

После получения значений амплитуд вынужденных колебаний во всех узлах КЭ согласно (4.27) может быть определено напряженно-деформированное состояние исследуемой оболочечной системы с учетом ее конструктивных неоднородностей. Учитывая свойство циклической симметрии исследуемой оболочечной системы, представим ее как совокупность секций КЭ, модель основной из которых представлена на рис. 3.1.

4.2 Напряженно-деформированное состояние подкрепленных оболочек

Для определения компонентов матрицы напряжений воспользуемся зависимостями (2.8–2.10). Матрица упругих деформаций $\{\varepsilon\}$ в срединной поверхности оболочки имеет структуру: $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6\}^T$.

Компоненты матрицы $\{\varepsilon\}$ определяются в следующем виде [99]:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} \\ \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + u_3 \right) \\ \frac{1}{R} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} \\ - \frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha_1^2} \\ - \frac{1}{R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha_2^2} - \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} \right) \\ \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} \right) \end{Bmatrix} \quad (4.28)$$

Связь между обобщенными перемещениями и амплитудами вынужденных колебаний узлов конечных элементов определяется зависимостями (4.5). Тогда с учетом (2.33) и (2.37) вектор напряжений $\{\sigma\}$ срединной поверхности КЭ имеет вид [175]:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = [D_\sigma] \{\varepsilon\} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix}, \quad (4.29)$$

где $[D_\sigma]$ – матрица упругости изотропной оболочки.

Таким образом, на основе (2.37), (4.5), (4.28)–(4.29) определяются динамические напряжения для рассматриваемой оболочки. С использованием данной математической модели выполняется исследование распределения напряжений и деформаций для заданных частот и форм колебаний, так как при вычислении обобщенных перемещений по формуле (4.5) и связанными с ней формулами (4.6–4.13) в рассмотрение можно принять любую j -ую гармонику возмущающей переменной динамической силы. Обобщив полученные результаты, определяются поля напряжений и деформаций для всей оболочечной системы.

Влияние подкрепляющих ребер на НДС и амплитуды при вынужденных гармонических колебаниях рассмотрено на примере жестко закрепленной цилиндрической оболочки с комбинированным продольно-поперечным подкреплением ребрами при динамическом нагружении, расчетная схема которой приведена на рис. 4.1. Оболочка подвергается действию нормально распределенной внешней нагрузки, изменяющейся по гармоническому закону с частотой $\Omega_1 = 14,1 \times 10^3 \text{ с}^{-1}$. Амплитуда возбуждающих сил составляет $F_0 = 0,12 \text{ МПа}$. Напряженно-деформированное состояние упругой оболочечной структуры описывается уравнениями колебаний оболочек и стержней на основе

линейной теории в рамках гипотез Кирхгофа-Лява. Алгоритм решения задач основывается на формулах подраздела 3.1.

Основные параметры оболочки: $L/R = 2,5$; $R/h = 125$; $h = 0,6$ мм, где R , L , h – радиус, длина и толщина оболочки. Физико-механические характеристики материала конструкции составляют: модуль Юнга $E = 200$ ГПа; коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$; плотность материала $\rho = 7,8 \times 10^3$ кг/м³. Оболочка подкреплена снаружи 8-ю стрингерами 4×1 мм и 3 шпангоутами 6×1 мм, равномерно расположенными вдоль образующей и в окружном направлении. Ребра к оболочке крепятся жестко. Граничные условия на торцах для $x = 0$ и $x = L$ имеют вид: $u_1 = u_2 = u_3 = \theta_1 = \theta_2 = 0$.

Начальные условия при $t = 0$ записываются в виде:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{\partial u_3}{\partial t} = \frac{\partial \theta_1}{\partial t} = \frac{\partial \theta_2}{\partial t} = 0 \quad (4.30)$$

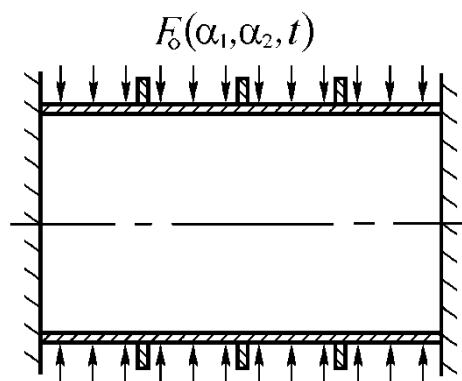
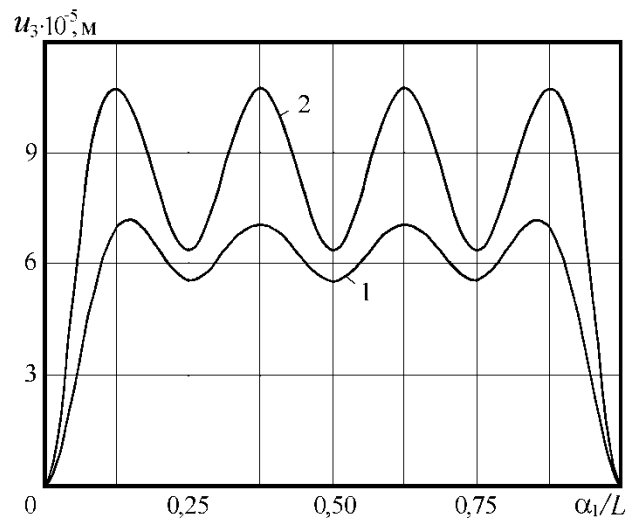


Рисунок 4.1 – Расчетная схема подкрепленной оболочки при динамическом нагружении.

В результате решения задачи получены параметры напряженно-деформированного состояния оболочки в дискретные моменты времени. Учитывая, что при распределенной радиальной нагрузке $F(\alpha_1, \alpha_2, t)$ преобладают величины $u_3, \varepsilon_{22}, \sigma_{22}$ над другими параметрами напряженно-деформированного состояния, проводился анализ вышеуказанных величин. Эпюры радиальных перемещений u_3 и окружных напряжений σ_{22} вдоль

продольной координаты α_1 показаны на рисунках 4.2 и 4.3, на которых четко видны зоны контакта оболочки с ребрами.



1 – распределение радиальных прогибов вдоль оси стрингера;
2 – распределение прогибов между подкрепляющими стрингерами;

Рисунок 4.2 – Зависимость радиальных прогибов u_3 от продольной координаты α_1 .

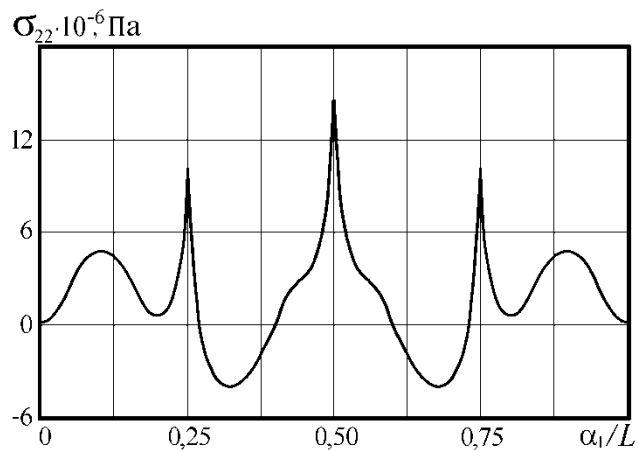


Рисунок 4.3 – Зависимость окружных напряжений σ_{22} от продольной координаты α_1 .

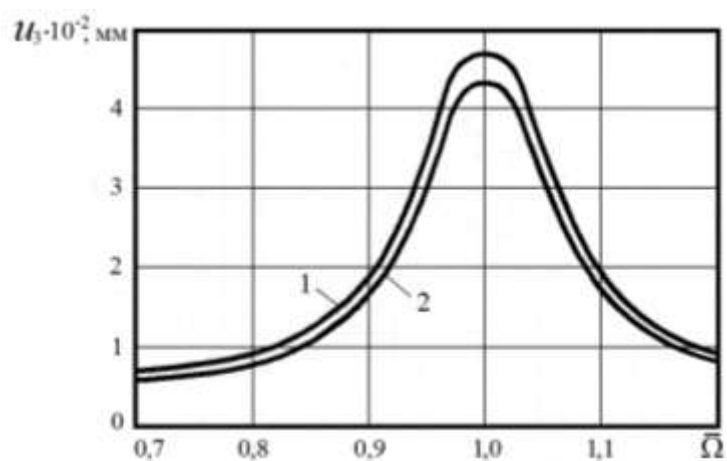
Кривая 1 характеризует распределение прогиба u_3 по длине оболочки вдоль линии расположения подкрепляющего стрингера, а кривая 2 – вдоль линии симметрии по оси между подкрепляющими стрингерами. При этом четко

прослеживается влияние подкрепляющих шпангоутов в сечениях $\alpha_1 = 0,25L$, $0,5L$, $0,75L$. Из приведенных рисунков хорошо видно существенное уменьшение радиальных перемещений и возрастание напряжений в зонах подкрепления оболочки шпангоутами. Наибольшие прогибы происходят только между ребрами. Степень прогибов определяется жесткостью ребер. Следует отметить, что максимальные значения величин u_3 и σ_{22} наблюдаются на первом резонансе. Вычисление амплитуд вынужденных колебаний проводилось методом разложения по формам свободных колебаний данной механической системы. Зная частоты собственных колебаний оболочки и проведя разложение в ряд Фурье периодической динамической силы, можно выделить гармоники, вызывающие резонансные колебания. Иная качественная и количественная картина наблюдается для параметра ε_{22} . Величина деформации ε_{22} по оси стрингера больше соответствующей деформации ε_{22} между стрингерами в точках пересечения шпангоутов и стрингеров.

Из рисунков 4.2 и 4.3 прослеживается явно явное влияние подкрепляющих шпангоутов на величину прогибов при динамическом деформировании оболочек. Можно заметить, что влияние шпангоутов на напряженно-деформированное состояние носит локальный ярко выраженный характер. С увеличением числа шпангоутов максимальные значения радиальных перемещений u_3 и окружных напряжений σ_{22} оболочечной системы уменьшаются. При этом изменяется характер распределения данных величин и наблюдается их локализация в местах расположения ребер. Продольные напряжения σ_{11} в зоне расположения ребер в 2,8 раза меньше окружных напряжений. На торцах оболочки при жесткой заделке краев определяющую роль играют продольные напряжения σ_{11} , а при шарнирном опирании эти напряжения близки к нулю. Окружные напряжения слабо зависят от граничных условий. В то же время продольные напряжения при изменении граничных условий меняются весьма сильно. Чем длиннее оболочка, тем слабее на напряжения влияет опорный контур. Перемещение шпангоутов ближе к центру оболочки может привести к улучшению ее динамических свойств. При

этом величина наибольшего прогиба u_3 и окружающих напряжений σ_{22} оболочечной системы уменьшаются. Повышение жесткости ребер также сопровождается понижением напряжений.

На рисунке 4.4 приведены результаты расчета зависимости нормальных перемещений u_3 вынужденных колебаний ($\bar{\Omega} = \Omega_i / \omega_0$) жестко закрепленной оболочки, подкрепленной 8 стрингерами 4×1 мм с учетом внутреннего демпфирования, где $\bar{\Omega}$ – относительный частотный параметр; Ω_i – частота вынужденных колебаний; ω_0 – резонансная частота колебаний.



1 – решение на основе разработанной методики; 2 – результаты, полученные с использованием пакета ANSYS

Рисунок 4.4 – Амплитуды вынужденных колебаний с демпфированием для оболочки, подкрепленной стрингерами.

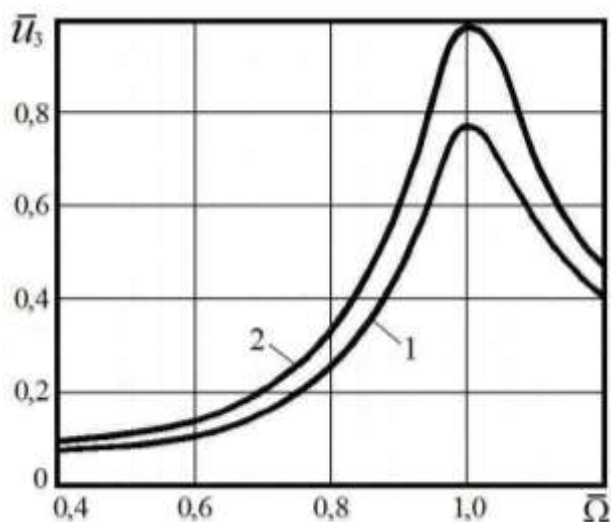
Коэффициент демпфирования принят $\eta = 0,06$. Колебания возбуждаются второй гармоникой возмущающей силы к резонансной частоте колебаний ($\Omega_2 = 7,759 \times 10^3 \text{ с}^{-1}$). Из графика видно, что максимальный пик амплитуды находится на резонансной частоте, после чего ее величина быстро убывает. Полученные на основе расчетной методики численные результаты амплитуд колебаний и динамических напряжений, возникающих в процессе вынужденных колебаний оболочки, сопоставлялись с данными расчета с использованием расчетных программ пакета ANSYS. Приведенные на рис. 4.4

данные подтверждают адекватность разработанной математической модели и эффективность разработанной расчетной методики, а также достоверность полученных результатов.

4.3 Влияние отверстий и присоединенных твердых тел на напряженно-деформированное состояние оболочек

Рассмотрим влияние присоединенного твердого тела и величины коэффициента внутреннего демпфирования на амплитуды колебаний и динамические напряжения при вынужденных колебаниях жестко закрепленной гладкой оболочки. На оболочку действует приведенная выше возбуждающая радиальная динамическая нагрузка, распределенная по гармоническому закону. Основные параметры оболочки приведены в подразделе 4.2 ($L/R = 2,5$; $R/h = 125$). Жестко присоединённое твердое тело ($M_1/M_0 = 0,1$, где M_1 – масса тела; M_0 – масса оболочки) расположено на наружной поверхности в точке с координатами $\alpha_1 = L/2$ и $\alpha_2 = 0$. Колебания возбуждаются первой гармоникой возмущающей силы к резонансной частоте колебаний ($\Omega_1 = 4,397 \times 10^3 \text{ c}^{-1}$).

На рисунке 4.5 представлены амплитудно-частотные характеристики вынужденных колебаний исследуемой жестко закрепленной оболочечной системы с учетом демпфирования. Оболочка совершает колебания на основной частоте. Кривая 1 соответствует модели с коэффициентом затухания $\eta = 0,05$, кривая 2 – с коэффициентом $\eta = 0,03$. Здесь: $\bar{u}_3 = u_{3\xi} / u_{3\max}$ – приведенная величина радиальных перемещений u_3 ; $u_{3\max}$ – максимальная величина радиальных перемещений; $u_{3\xi}$ – радиальные перемещения с заданным коэффициентом демпфирования.



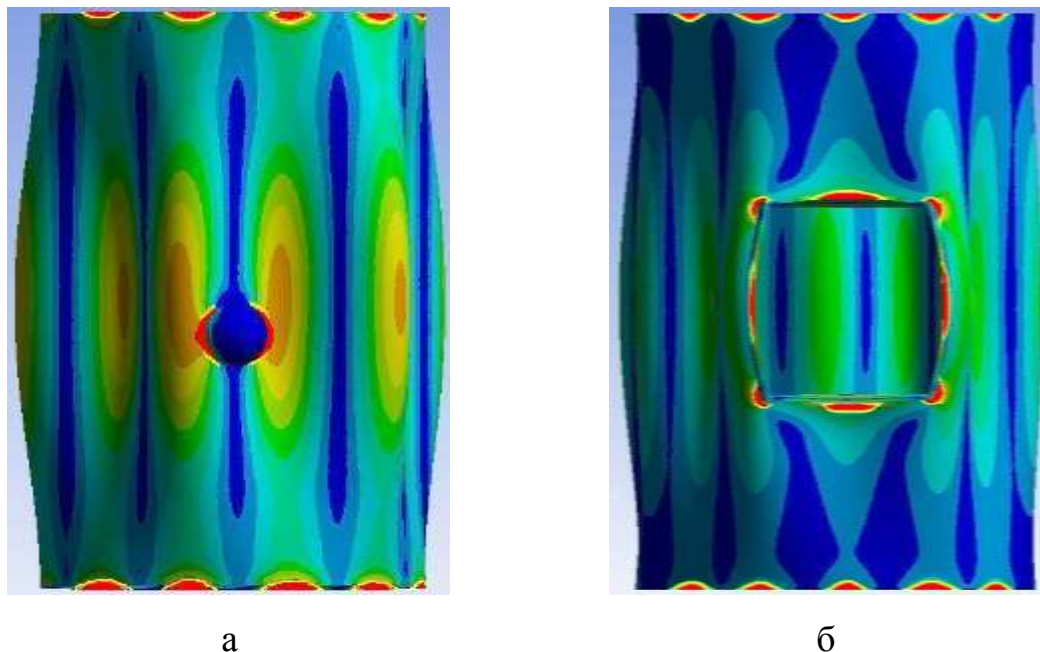
1 – колебания с коэффициентом затухания $\eta=0,05$; 2 – колебания с коэффициентом $\eta=0,03$;

Рисунок 4.5 – Амплитудно-частотные характеристики вынужденных колебаний жестко закрепленной оболочки с присоединенным твердым телом при демпфировании.

Результаты расчета, приведенные на рис. 4.5, позволяют сделать вывод о том, что с увеличением величины коэффициента демпфирования максимальная амплитуда колебаний понижается. При этом необходимо отметить, что амплитуда вынужденных колебаний плавно возрастает с увеличением частоты колебаний. Затем при достижении резонансной частоты происходит резкое возрастание, а после прохождения пика резонанса – резкое падение и в дальнейшем плавное уменьшение величины амплитуды. Знание частот собственных колебаний позволяет исключить возникновение резонанса в диапазоне рабочих частот путем увеличения жесткости механической системы. Это, в свою очередь, позволяет уменьшить переменную составляющую динамической силы, которая является основным возбудителем колебаний.

На рисунке 4.6а для рассматриваемой оболочки представлены зоны локализации динамических напряжений оболочки с присоединенным твердым телом. На рисунке видны наиболее интенсивные зоны полей концентрации напряжений в области расположения присоединенного тела и у торцов оболочки. Аналогичные результаты получены также для оболочки,

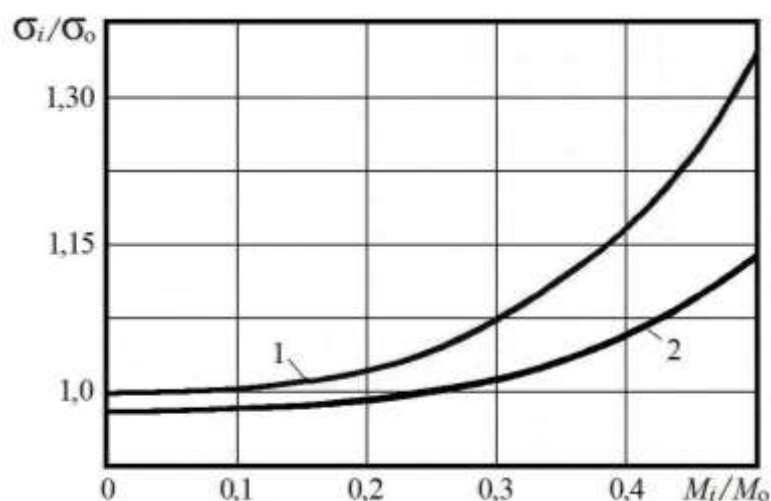
ослабленной центральным квадратным отверстием 50×50 мм, подкрепленным ребром 7×1 мм (рис 4.6б). Интенсивность напряжений здесь несколько ниже. Концентраторами напряжений являются углы отверстий.



а – оболочка с присоединенным телом; б – оболочка с квадратным подкрепленным отверстием;

Рисунок 4.6 – Зоны локализации напряжений для первой моды колебаний оболочки с отверстием и присоединенным твердым телом.

Влияние величины массы присоединенного тела на динамические напряжения с учетом коэффициента демпфирования для рассматриваемой оболочки представлено на рис. 4.7. Здесь σ_i – максимальные динамические напряжения, возникающие в конструкции с присоединенным телом при динамическом нагружении; σ_0 – максимальные динамические напряжения в оболочке без присоединенных тел. Из приведенных результатов видно, что присоединённое твердое тело оказывают существенное влияние на напряженно-деформированное состояние тонкостенной оболочки. С возрастанием массы присоединенного тела динамические напряжения возрастают.



1 – зависимость при $\eta = 0,01$; 2 – зависимость при $\eta = 0,05$;

Рисунок 4.7 – Расчетные зависимости максимальных динамических напряжений в оболочке от величины массы присоединенного тела и коэффициентом затухания η .

Результаты проведенного гармонического анализа показали, что зоны концентрации наибольших напряжений для конструктивно неоднородной оболочки находятся в районе отверстий и присоединенных тел. Это может быть объяснено тем, что отверстия и присоединенные тела являются концентраторами напряжений. Места жесткой заделки торцов оболочки также являются концентраторами напряжений.

Одним из эффективных способов улучшения амплитудно-частотных характеристик и снижения напряжений, наряду с повышением жесткости конструкции, является конструкционное и внутреннее демпфирование оболочечной конструкции за счет различных осцилляторов (демпферов). Демпфирование снижает амплитуды вынужденных колебаний и динамические напряжения. Это подтверждается зависимостями, приведенными на рисунках 4.5 и 4.7. Поэтому расчеты амплитуд вынужденных колебаний и напряжений оболочек целесообразно выполнять с учетом демпфирования. Варьируя жесткостью осциллятора от нулевого уровня до абсолютно жесткой связи можно моделировать все возможные варианты конструкционного гистерезиса.

4.4 Выводы

В четвертом разделе представлен разработанный алгоритм решения задачи вынужденных гармонических колебаний подкрепленных оболочек с конструктивными неоднородностями в виде отверстий и присоединенных твердых тел с учетом дискретности размещения ребер. Дифференциальные уравнения для гармонического анализа оболочечных конструкций получены с использованием вариационного принципа Лагранжа. Описание динамического поведения оболочек проводится путем их дискретизации системой применяемых в модальном анализе изопараметрических четырехугольных конечных элементов. Вычисление амплитуд виброперемещений выполняется методом разложения перемещений по собственным формам колебаний. Разработана уточненная математическая модель НДС и колебаний оболочечной системы на основе метода суперпозиции мод, учитывающая ее конструктивную неоднородность и демпфирование.

С использованием разработанной расчетной методики выполнены численные исследования влияния конструктивных неоднородностей, подкреплений и демпфирования на амплитуды колебаний и НДС цилиндрических оболочек при стационарном динамическом нагружении. Определены величины максимальных динамических напряжений в оболочке, варьируя ее геометрические и физико-механические параметры. Полученные численные результаты зависимостей АЧХ и НДС оболочечной системы от конструктивных особенностей объекта исследования позволили выявить новые механические эффекты. Выявлено, что отверстия и присоединенные тела являются концентраторами динамических напряжений, а подкрепляющие ребра позволяют ослабить влияние данных эффектов.

Выполненное сопоставление полученных решений с результатами расчета с использованием пакета ANSYS показало, что расхождение составляет 3...8% в зависимости от сложности оболочечной системы.

РАЗДЕЛ 5

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК РЕЗОНАНСНЫХ КОЛЕБАНИЙ ОБОЛОЧЕК С КОНСТРУКТИВНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

5.1 Методика проведения эксперимента

Для исследования динамических процессов и виброперемещений в механике тонкостенных конструкций широко применяются контактные методы, в том числе: тензометрирования, сканирования виброщупом, оптически чувствительных и хрупких покрытий. Каждый из них накладывает жесткие ограничения на проведение эксперимента. Однако, все эти методы довольно трудоемки и недостаточно надежны, особенно в области высоких частот колебаний. Поэтому для исследования амплитудно-частотных характеристик резонансных колебаний оболочек и пластин сложной конфигурации с конструктивными неоднородностями в настоящее время находят практическое применение бесконтактные неразрушающие методы голографической интерферометрии.

Методы голографической интерферометрии дают наиболее полную информацию о колебаниях исследуемого объекта. При установившихся гармонических колебаниях они позволяют регистрировать на фотоноситель распределение виброперемещений поверхности объекта с амплитудой порядка длины световой волны источника излучения, выполнять анализ НДС и являются наиболее чувствительными из существующих оптических методов исследования упругих твердых тел. Количественный анализ голографических интерферограмм позволяет получать достаточно точные числовые показатели полей перемещений, их производных и напряжений конструкции. Данные методы дают возможность более глубокого понимания механизма деформирования неоднородных тонкостенных конструкций, получения дополнительных данных и выявления эффектов, связанных с характером их деформирования при динамическом нагружении, образованием новых форм

выпучивания и колебаний. Эта информация важна для обоснования новых математических моделей в области теории и методов расчета конструкций указанного класса.

Основы методологии голографической интерферометрии применительно к исследованию упругих конструкций заложены в работах В.Б. Александрова, А.М. Бонч-Бруевича, Ю.Н. Денисюка, В.А. Жилкина, А.Г. Козачка, А.Б. Кудрина, В.Г. Бахтина, Ю.И. Островского, А.Л. Попова, А.А. Россохи, Г.Н. Чернышева, А.Е. Ennos, E.N. Leith, R.L. Powell, K.A. Stetson, J. Upatnieks, C. Vest и других.

Основные принципы голографической интерферометрии и анализ различных оптических схем при исследовании колебаний и напряженно-деформированного состояния упругих твердых тел изложены в работах [22, 25, 44, 73, 102, 158]. Каждая голографическая схема при реализации поставленной задачи имеет свои особенности.

Голографическая интерферометрия основана на использовании физического эффекта интерференции электромагнитных волн светового потока и характеризуется способом их записи и восстановления с учетом регистрации распределения интенсивности в интерференционной картине, образованной предметной волной и когерентной с ней опорной волной. Предметный луч освещает объект, совершающий гармонические колебания, и, отражаясь, несет информацию о состоянии его поверхности. Поэтому записанная на голограмме пространственная структура электромагнитных световых волн, отраженных от поверхности деформируемого объекта, характеризует ее состояние. При этом опорный луч создает когерентный фон. Интенсивность опорного луча должна превышать интенсивность предметного луча, а угол между лучами определяет максимальную частоту интерференционных полос, которые фиксируются на голограмме. На голограмме также регистрируются распределение фазы предметной волны относительно фазы опорной волны и их амплитуды.

Контраст интерференционных полос и яркость восстановленного изображения характеризуются амплитудой предметной волны, а их форма и частота – разностью фаз между предметной и опорной волнами. В результате

при освещении голограммы опорным лучом восстанавливается копия предметной волны со всеми амплитудными и фазовыми изменениями в области восстановленного интерференционного поля в виде системы темных и светлых полос, соединяющих границы полей перемещений равных амплитуд. Светлые зоны соответствуют неподвижным участкам деформируемой поверхности, темные – наибольшим амплитудным перемещениям.

Голографические методы успешно применяются в решении прикладных динамических задач механики, которые не удастся решить никакими другими методами. В то же время исследованиям задач деформирования и разрушения неоднородных тонкостенных конструкций посвящено недостаточное количество публикаций. Среди них можно выделить работы В.Д. Будака, А.Я. Григоренко, А.П. Дзюбы, А.С. Каирова, Ю.Г. Коноплева, Л.М. Лобанова, Е.А. Ларионовой, И.Ф. Образцова, Ю.М. Селиванова, В.Г. Скальского, В.А. Смирнова, А.К. Шалабанова, В.П. Щепинова, В.В. Яковлева, R.K. Erf, K. Grünewald, M. Lashkari, W. Veingarten и других, в которых изучались особенности деформирования, НДС и колебания оболочечных элементов с некоторыми конструктивными неоднородностями.

В проводимых исследованиях использовались голограммы Фурье, которые являются одним из основных типов голограмм, получаемых по методу Лейта-Упатниекса, и обладают лучшей разрешающей способностью в отличие от других типов голограмм, полученных на том же регистрирующем материале. Они могут быть получены различными методами и обладают следующими свойствами: интерференционные полосы имеют постоянную усредненную пространственную частоту, в то время как в других типах голограмм частота полос является функцией расстояния в плоскости голограммы. Требования голограмм Фурье к разрешающей способности регистрирующего материала менее жесткие. Для получения голографических интерферограмм колебаний механических систем применяются различные голографические методы: реально-временной [25, 73]; стробоголографический [101, 158]; усреднения во времени [25, 73, 102, 158]; спекл-интерферометрии [158]. Каждый из этих методов имеет свои особенности.

Метод голографической интерферометрии в реальном времени применяется для выявления резонансного состояния тонкостенных моделей и при определении собственных частот в случае, когда не требуется регистрировать фотоизображение формообразований. Модель в момент резонанса наблюдается через опорную голограмму. При этом на интерферограмме вибрирующего объекта в реальном времени образуется переменная картина интерференционных полос, характеризующая форму колебаний и расположение узловых линий. Контраст интерференционной картины определяется соотношением интенсивностей интерферирующих волн.

Метод усреднения во времени является одним из основных методов экспонирования голограмм и дает информацию о расположении узловых линий форм колебаний, но уступает стробоголографическому методу по контрастности и разрешимости интерферограмм. Идея метода для вибрирующего объекта впервые была предложена Р.Л. Пауэллом и К.А. Стетсоном [102]. Метод основан на непрерывной экспозиции объекта в процессе колебаний при освещении голограммы непрерывным световым потоком. Причем время экспозиции значительно больше периода колебаний объекта. Таким образом, голограмма регистрирует совокупность изображений, соответствующих усредненным положениям объекта в процессе колебаний. Однако в крайних амплитудных положениях колеблющийся объект находится дольше, чем в других, поэтому эти положения вносят наибольший вклад в структуру полученной голограммы. На восстановленном изображении интерферограммы неподвижные участки поверхности хорошо видны в виде ярких светлых узловых линий. Наиболее четко проявляются темные полосы в крайних амплитудных положениях. Вклад в общую экспозицию различных положений объекта определяется скоростью его прохождения через эти положения. С возрастанием амплитуды вибраций более 5 длин волн λ источника излучения ($\lambda = 6,328 \times 10^{-7}$ м) контрастность интерференционных полос резко снижается и чередующиеся светлые и темные полосы становятся неразличимыми. Данный метод не дает информации об относительных фазах колебаний поверхности и не позволяет осуществлять анализ вибрации с малой

амплитудой ($\lambda/4$). На голограмме четко просматриваются только яркие узловые (нулевые) линии, остающиеся неподвижными при колебаниях, и темные колеблющиеся зоны.

Метод стробоголографической интерферометрии повышает контрастность интерференционных полос и разрешимость фотоизображения голограммы, что позволяет увеличить предельно допустимую амплитуду колебаний модели и осуществлять расшифровку интерферограмм. Интенсивность максимумов полос уменьшается гораздо медленнее, чем в методе Пауэлла-Стетсона, и уже при небольших скважностях ($k = 10 \dots 20$) можно исследовать колебания, амплитуды которых составляют десятки длин волн λ . Данный метод является весьма эффективным для исследования динамических НДС и амплитуд гармонических колебаний.

Стробоголографический метод позволяет исследовать гармонические колебания в различных фазах. Поскольку импульсы очень короткие, можно считать, что за время импульса происходит равномерное изменение фазы. Длительность стробирующего импульса освещения задается равной части периода колебаний и синхронизируется с одним из крайних амплитудных положений исследуемой модели, в котором экспонируется голограмма. Частота стробирования выбирается кратной частоте и фазе колебаний. Таким образом, данный метод сводится к методу двойной экспозиции и обеспечивает постоянный контраст интерференционных полос независимо от амплитуды колебаний.

При исследовании амплитуд колебаний и НДС для определения трех компонент вектора перемещений отдельных узлов поверхности объекта с приемлемой точностью необходимо использовать метод трех голограмм, оптическая схема которого приведена в работе [141]. Путем сплайн-аппроксимации дискретных данных и дальнейшего дифференцирования по известным из теории оболочек и теории голографической интерферометрии формулам определяются действующие в заданных узлах напряжения и зоны локализации их экстремумов.

Метод спекл-интерферометрии может применяться при исследовании полей виброперемещений исследуемого объекта, в основе которого лежит явление зернистости лазерного излучения. Его существенный недостаток – достаточно большая трудоемкость и значительная погрешность, которая может достигать более 20%.

Для экспериментального исследования амплитудно-частотных характеристик колебаний оболочек и получения интерферограмм амплитудных полей виброперемещений в работе применялись методы стробоголографической интерферометрии и усреднения во времени, которые основаны на использовании лазеров непрерывного излучения. Методика проведения эксперимента изложена в работах [62, 141]. Применение данных методов при изучении виброперемещений и деформаций при установившихся гармонических колебаниях обусловлено их исключительно высокой точностью и надежностью.

Методика выполнения эксперимента состоит из следующих этапов:

1) Перед проведением голографического эксперимента наружные поверхности оболочки и присоединенных тел должны быть окрашены белой матовой краской для создания поверхностями хаотичной поляризации отраженного света.

2) Закрепление оболочки с опорным диском в зажимном устройстве и фиксация опорного диска на установочной плите. Сила закрепления оболочки в зажимном устройстве контролировалась по ее низшей частоте резонансных колебаний.

3) Компоновка оптической схемы голографической интерферометрии на опорной плите. При этом должен выполняться ряд основных требований к оптической схеме:

– частота пространственной структуры, регистрируемой на голограмме, не должна превышать разрешающей способности фотоэмульсии для любой точки голограммы; для этого угол между направлениями опорного и предметного лучей для любой точки голограммы не должен превышать значения, определяемого соотношением [62] $\sin \varphi_s = \lambda / 2d$, где φ_s – угол

сходимости опорного и предметного лучей; d – минимальное расстояние между интерференционными полосами, допускаемое фотоэмульсией голограммы; λ – длина волны излучения оптического квантового генератора;

– разница хода опорного и предметного лучей не должна превышать длину когерентности оптического квантового генератора (0,2 м);

– длины опорного и предметного лучей после светоделителя должны быть минимальными для уменьшения величины фазовых сдвигов, возникающих в голографическом интерферометре в результате воздействия поверхностных потоков воздуха и температурных расширений.

4) Юстировка оптического квантового генератора и стробоскопа.

5) Отладка оптической схемы.

6) Получение опорной голограммы исследуемой модели. Голограмма обрабатывается на месте экспонирования по специальной технологии проявителем Д-19, чтобы исключить усадку фотоэмульсии.

7) Настройка исследуемой оболочечной системы на резонансный режим колебаний выполняется при плавном вибровозбуждении. Момент наступления резонансных колебаний поверхности оболочки наблюдается через опорную голограмму. После настройки на резонанс по интерференционным полосам определяется форма колебаний и фиксируется ее частота.

8) Включается модуляция луча оптического квантового генератора прямоугольными стробирующими импульсами. Задается скважность стробирования в пределах 8..10 и с помощью фазовращателя обеспечивается синхронизация стробирующих импульсов с максимальными амплитудами колебаний. Для этого с помощью фазовращателя изменяются во времени стробирующие импульсы и контролируется яркость интерференционных полос, которая становится максимальной при синхронизации стробирующих импульсов с амплитудными отклонениями оболочки.

9) Регистрируется на фотоноситель интерферограмма формы колебаний на регистрируемой частоте.

10) Выполняется фотохимическая обработка экспонированной фотопластинки с помощью проявителя Д-19 и обычного кислого фиксажа.

11) Расшифровка голографических интерферограмм осуществляется по известным абсолютным порядкам интерференционных полос, наблюдаемых для каждой из исследуемых узловых точек разметочной сетки, нанесенной на поверхность модели. Полученные компоненты вектора перемещений $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$ являются исходной информацией для расчета деформаций и напряжений эффективным методом трех голограмм [22, 71, 102].

5.2 Исследование частот и форм собственных колебаний подкрепленных ребрами оболочек с присоединенными твердыми телами

Экспериментально исследовались собственные частоты и распределение амплитуд колебаний гладких и подкрепленных изотропных цилиндрических оболочек вращения с присоединенными твердыми телами. Геометрические характеристики оболочки: $L/R = 2,35$; $R/h = 130$; $R = 65$ мм. Физико-механические характеристики материала: $E = 200$ ГПа; $\nu = 0,3$; $\rho = 7,8 \times 10^3$ кг/м³.

Результаты эксперимента представлены в виде таблиц распределения собственных частот и интерферограмм форм колебаний оболочек с различными граничными условиями на контуре.

В таблице 5.1 приведены спектры собственных частот колебаний гладкой незагруженной и с присоединенным телом цилиндрических оболочек с одной полуволной вдоль образующей ($m = 1$) для граничных условий $C - C$, $S - S$ и $C - F$. В колонке « n » дано количество волн в окружном направлении, в колонке « f_T » представлены экспериментальные частоты, а в колонке « f_s » – частоты, полученные с использованием МКЭ. Частоты колебаний выражены в Гц. Параметр $\mu = M_1 / M_0$ характеризует отношение массы присоединенного тела M_1 к массе оболочки M_0 .

Таблица 5.1 – Собственные частоты колебаний гладкой незагруженной и с присоединенным телом цилиндрических оболочек (Гц)

Гранич. условия	n		2	3	4	5	6	7	8
	μ								
C - C	0,0	f_3	–	2696	1938	1573	1485	1627	1914
		f_T	3882	2765	1997	1602	1508	1658	1979
	0,1	f_3	–	2663	1892	1486	837	1543	1887
		f_T	3817	2708	1956	1538	878	1592	1928
S - S	0,0	f_3	–	1772	1167	1039	1144	1474	1842
		f_T	3208	1845	1232	1062	1177	1509	1899
	0,1	f_3	–	1716	1142	645	1070	1384	1803
		f_T	3154	1792	1188	672	1129	1454	1826
C - F	0,0	f_3	1300	749	611	717	982	1344	1783
		f_T	1375	768	618	749	1027	1388	1814
	0,1	f_3	1205	695	450	675	920	1275	1694
		f_T	1288	723	472	696	989	1337	1766

Из приведенных зависимостей и результатов работ [62, 141] видно, что граничные условия оказывают наибольшее влияние на нижнюю часть спектра частот. Как и следовало ожидать, минимальные основные частоты наблюдаются для консольно закрепленных оболочек, а наибольшие – для жестко закрепленных. Для минимальных частот колебаний жестко закрепленных оболочек количество волн в окружном направлении выше, чем для консольного закрепления. Однако, с ростом волнового числа n влияние граничных условий ослабевает и наблюдается сближение частотных спектров.

По полученным интерферограммам после расшифровки с использованием методики, приведенной в [102], определялись нормальные прогибы оболочек. Зависимость изменения безразмерной величины нормальных перемещений \bar{u}_3 от окружной координаты для основной частоты колебаний оболочки приведена на рис.5.1. Кривые 1 соответствуют жесткому закреплению, а кривые 2 – консольному закреплению торцов. Штриховыми линиями показаны аналогичные теоретические зависимости.

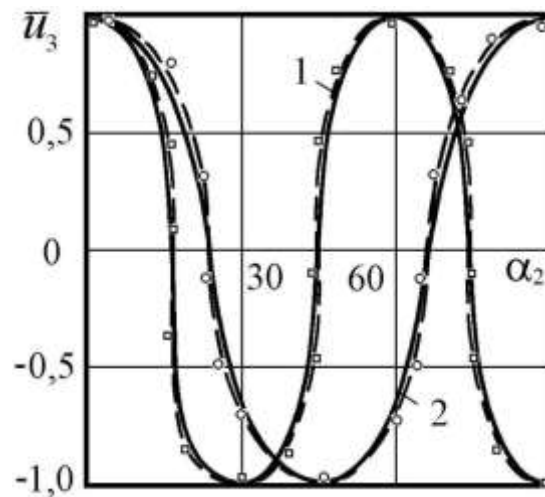


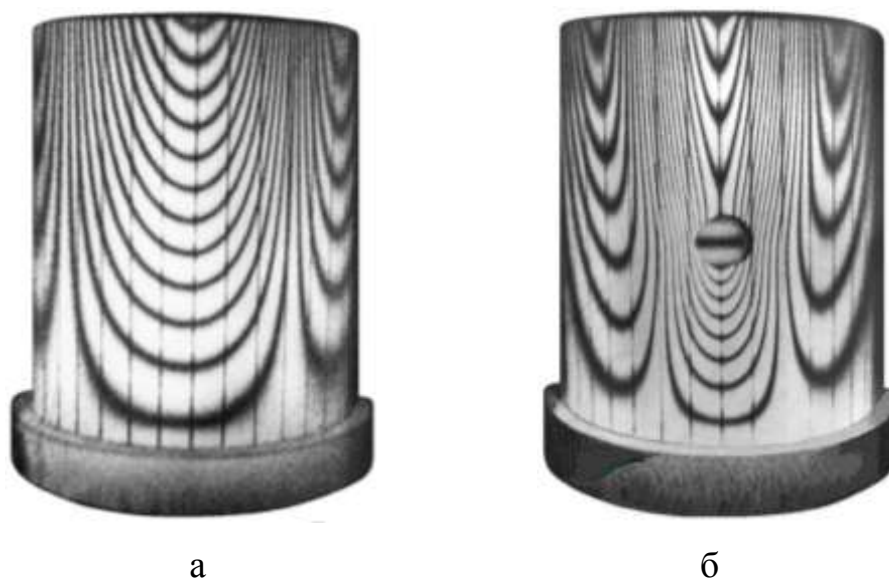
Рисунок 5.1 – Изменение нормальных перемещений вдоль окружной координаты.

На рисунке 5.2 представлены интерферограммы основных форм колебаний консольно закрепленной гладкой незагруженной и с присоединенным телом цилиндрических оболочек. Приведенные формообразования соответствуют изгибным формам колебаний с одной полуволной прогибов вдоль образующей ($m = 1$) и волновым числом в окружном направлении $n = 4$. Интерферограммы получены стробоголографическим методом.

Из приведенных интерферограмм видно, что волновые числа остаются постоянными, но происходит искажение форм колебаний. Наиболее существенные отличия наблюдаются для высших частот колебаний. Представленным формам соответствуют следующие частоты колебаний:

$$f_3 = 611 \text{ Гц} \quad (f_T = 618 \text{ Гц}), \quad n = 4 \quad - \text{ см. рис. 5.2а;}$$

$$f_3 = 450 \text{ Гц} \quad (f_T = 472 \text{ Гц}), \quad n = 4 \quad - \text{ см. рис. 5.2б.}$$



а – форма колебаний незагруженной оболочки; б – форма колебаний оболочки с присоединенным телом;

Рисунок 5.2 – Основные формы резонансных колебаний незагруженной и с присоединенным твердым телом цилиндрических оболочек.

Остановимся на рассмотрении некоторых выявленных особенностей колебаний. В нижнем диапазоне спектра частот удалось зарегистрировать несколько собственных форм, среди которых преобладают изгибные с наибольшими амплитудами перемещений в направлении нормали к срединной поверхности. Независимо от граничных условий у исследованных моделей наблюдается аналогия среди большинства зарегистрированных формообразований. Количество окружных волн зависит от физико-механических свойств материала и геометрических характеристик моделей. Как видно из приведенных данных и результатов работ [61, 62, 141], низшим частотам соответствуют простые формы колебаний с минимальным количеством волн вдоль параллели и одной полуволной вдоль образующей. Однако, необходимо отметить, что для некоторых частот наблюдалось наложение отдельных форм колебаний. Это явление характерно для формообразований с $m > 1$. В верхней части спектра частоты располагаются настолько плотно, что различные формы резко переходят одна в другую при плавном изменении частоты возбуждения. При этом формы дробятся, появляется нерегулярность формообразований.

Сопоставление полученных экспериментальных и теоретических результатов свидетельствует об их достаточно хорошем согласовании, однако можно отметить их некоторое расхождение. Например, при выполнении граничных условий $C - F$ не все краевые условия на контуре удовлетворяются точно, что вносит относительную погрешность в теоретические результаты, особенно при малых значениях n , когда возрастают тангенциальные деформации и соответствующие напряжения. Так, некоторое увеличение расхождения частот наблюдается для формообразований с малым числом волн в окружном направлении ($n \leq 3$). Это объясняется тем, что при определении теоретических значений частот не учитывались с необходимой степенью точности силы инерции оболочки в касательной плоскости, которые начинают играть существенную роль при колебаниях, близких к осесимметричным. Для низшей и средней области спектра частот, отличие расчетных значений частот от экспериментальных составляет менее 6 %. Наибольшие расхождения наблюдаются для высших частот колебаний для форм, начиная с $n > 9$ и $m > 1$, что объясняется геометрической погрешностью моделей.

Если к оболочке присоединено несколько твердых тел, то они будут оказывать взаимовлияние на амплитудно-частотные характеристики такой оболочечной системы. Для исследования данного эффекта рассмотрено влияние двух присоединенных тел на колебания гладкой оболочки. Размещенные по окружности присоединенные тела с одинаковыми массами ($M_1 = M_2 = 0,1M_0$) крепились в среднем сечении к наружной поверхности оболочки. Расположение тел в окружном направлении характеризуется центральным углом φ_m между центрами масс. В эксперименте центральный угол принимал значения: 0° , 60° , 90° , 120° , 180° . Экспериментальные основные частоты оболочки для различных граничных условий и величины угла φ_m приведены в табл.5.2 и в работе [141].

Таблица 5.2 – Зависимость основных частот собственных колебаний оболочек с двумя присоединенными твердыми телами от расположения тел в окружном направлении

Угол φ_m , град	Частота колебаний f , Гц		
	<i>C-C</i>	<i>S-S</i>	<i>C-F</i>
0	732	567	388
60	819	624	453
90	770	583	405
120	856	657	445
180	831	636	430

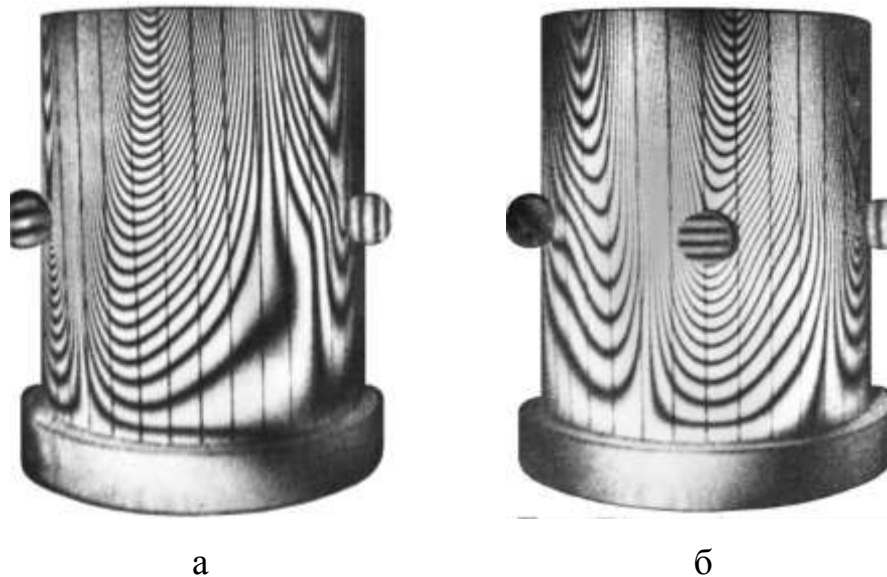
Формы колебаний, соответствующие приведенным частотам, имеют следующие волновые числа: для жестко закрепленной оболочки $m = 1$, $n = 6$; для шарнирно опертой – $m = 1$, $n = 5$; для консольно закрепленной – $m = 1$, $n = 4$.

Полученные экспериментальные данные для гладких оболочек с несколькими присоединенными телами хорошо согласуются с численными результатами, приведенными в разделе 3. Интерферограммы основных форм колебаний оболочек с двумя и тремя присоединенными телами, полученные методом голографической интерферометрии для граничных условий (*C-F*), представлены на рис. 5.3. Приведенные формы колебаний для волновых чисел $m=1$ и $n=4$. соответствуют следующим экспериментальным (f_3) и теоретическим (f_T) значениям частот:

$$f_3 = 445 \text{ Гц} \quad (f_T = 470 \text{ Гц}), \quad N_3 = 2, \quad \varphi_m = 120^\circ \quad - \text{ см. рис. 5.3а;}$$

$$f_3 = 393 \text{ Гц} \quad (f_T = 412 \text{ Гц}), \quad N_3 = 3, \quad \varphi_m = 60^\circ \quad - \text{ см. рис. 5.3б.}$$

Если присоединенные тела расположены в окружном направлении равномерно, то в процессе колебаний они взаимно влияют друг на друга, что отражается на их основных частотах. В таблице 5.3 приведены основные частоты собственных колебаний оболочек с равномерно распределенными присоединенными твердыми телами.



а – форма колебаний оболочки с двумя телами; б – форма колебаний оболочки с тремя телами и углом раствора $\varphi_m = 60^\circ$

Рисунок 5.3 – Основные формы резонансных колебаний оболочки с двумя и тремя присоединенными твердыми телами.

Таблица 5.3 – Основные частоты собственных колебаний оболочек с равномерно распределенными присоединенными твердыми телами (Гц)

Граничные условия	Количество присоединенных тел N_3				
	0	1	2	3	4
<i>C - C</i>	1485	837	985	988	984
<i>S - S</i>	1039	645	707	699	692
<i>C - F</i>	611	450	430	432	405

На основании полученных результатов необходимо отметить, что присоединенные тела на низших частотах располагаются в пучностях с наибольшими амплитудами колебаний, но формообразование имеет сильные искажения в отличие от правильной формы. При наличии нескольких присоединенных тел узловые линии на переднем плане интерферограммы между телами стянуты гуще (см. рис. 5.3).

При малых углах φ_m присоединенные тела в большей степени оказывают взаимное влияние друг на друга, и две первые низшие частоты существенно отличаются. При увеличении расстояния между телами их взаимовлияние

ослабевает, а две низшие частоты становятся близкими и практически равными основной частоте колебаний оболочки с одним телом. При $\varphi_m = 180^\circ$ система имеет очень близкие первые две низшие частоты и экспериментально разделить их не удастся. Форма колебаний при этом представляет собой наложение синфазной и антифазной форм, имеющих близкие частоты.

Часто оболочки имеют продольное или поперечное подкрепление ребрами жесткости, что изменяет их динамические характеристики. Поэтому учет влияния ребер на амплитудно-частотные характеристики имеет большое практическое значение. Для изучения влияния стрингеров рассмотрим спектр частот собственных колебаний для оболочки с геометрическими параметрами $L/R = 2,35$; $R/h = 130$, которая подкреплена 12 стрингерами 4×1 мм и имеет присоединенное тело, расположенное в центре на наружной поверхности. Стрингеры размещаются равномерно и крепятся к несущей поверхности узкой стороной. Полученные зависимости собственных частот колебаний от волновых чисел n при $m=1$ для цилиндрической оболочки при граничных условиях $C - C$, $S - S$ и $C - F$ приведены в табл. 5.4.

Таблица 5.4 – Собственные частоты колебаний подкрепленной стрингерами оболочки (Гц)

Гранич. условия	$\mu \backslash n$		2	3	4	5	6	7	8
	$C - C$	0,0	f_3	–	2714	2088	1628	1512	1806
f_T			–	2785	2143	1663	1540	1883	2001
0,1		f_3	–	2627	2036	1495	874	1779	1882
		f_T	3682	2698	2082	1546	908	1835	1925
$S - S$	0,0	f_3	–	1727	1148	1046	1108	1382	1786
		f_T	3098	1775	1182	1079	1137	1426	1840
	0,1	f_3	–	1635	1153	654	1052	1311	1723
		f_T	3011	1690	1153	682	1076	1373	1775
$C - F$	0,0	f_3	1300	740	617	730	920	1260	1680
		f_T	1362	795	635	729	914	1314	1702
	0,1	f_3	1176	698	465	654	886	1148	1530
		f_T	1116	730	497	662	895	1253	1626

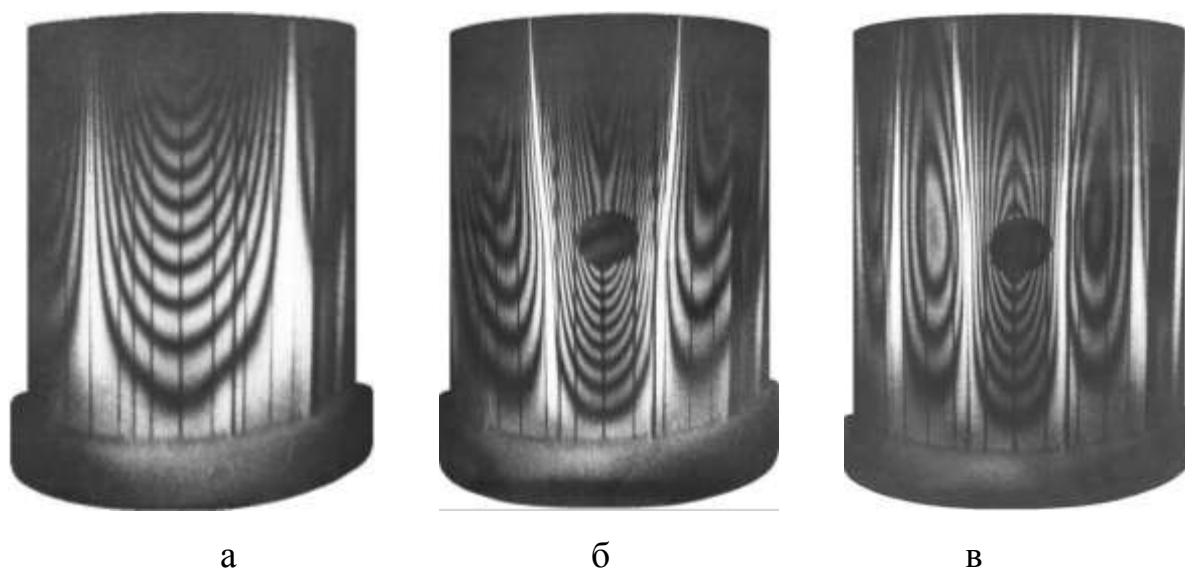
Сопоставление вычисленных частот и форм свободных колебаний с

экспериментальными дало расхождение в пределах 9%. На рисунке 5.4 представлены интерферограммы основных форм свободных колебаний для граничных условий ($C - F$). Интерферограммы получены методом усреднения во времени. Приведенным формообразованиям ($m = 1, n = 4$) соответствуют следующие частоты:

$$f_3 = 617 \text{ Гц} \quad (f_T = 635 \text{ Гц}), \quad n = 4 \quad - \text{ см. рис. 5.4а;}$$

$$f_3 = 465 \text{ Гц} \quad (f_T = 497 \text{ Гц}), \quad n = 4 \quad - \text{ см. рис. 5.4б;}$$

$$f_3 = 886 \text{ Гц} \quad (f_T = 895 \text{ Гц}), \quad n = 6 \quad - \text{ см. рис. 5.4в.}$$



а – основная форма колебаний незагруженной оболочки; б – основная форма колебаний оболочки с присоединенным телом; в – вторая форма колебаний оболочки с присоединенным телом

Рисунок 5.4 – Интерферограммы форм колебаний подкрепленной стрингерами оболочки.

Из приведенных результатов видно, что стрингеры вносят локальные искажения в амплитудные поля перемещений поверхности, сужая их, а также незначительно сказываются на частоте колебаний основного тона. В целом же формообразования стрингерной и гладкой оболочек практически совпадают. В отдельных случаях увеличение жесткости стрингеров, их количества и эксцентриситета может привести к изменению форм колебаний и

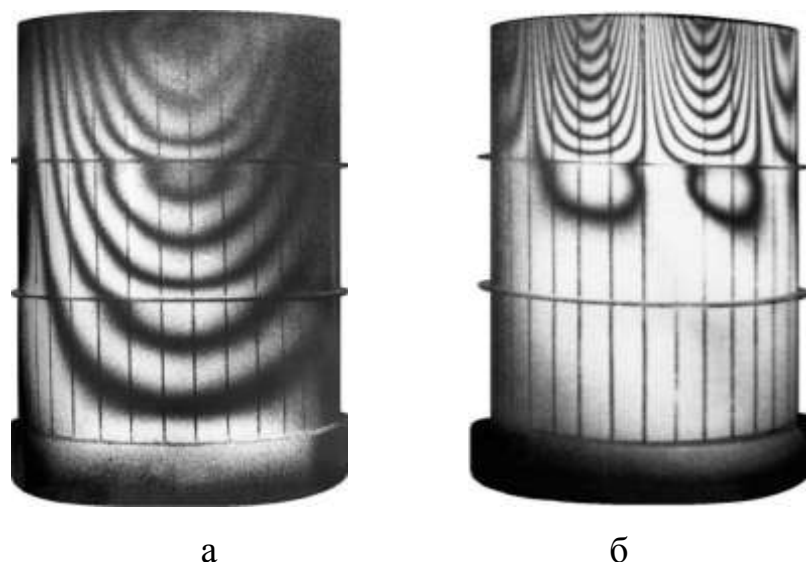
сопровождаться резким скачкообразным возрастанием частоты основного тона.

На основе полученных в разделе 3 численных результатов и данных эксперимента, приведенных в работе [141], можно сделать следующие выводы. При подкреплении стрингерами загруженных присоединенными телами оболочек, формообразования носят тот же характер, что и для незагруженных, но область виброперемещений поверхности более локализована. Низшие частоты повышаются. Например, для цилиндрической оболочки с 12 стрингерами 4×1 мм и присоединенным телом, расположенным в центре, низшая частота составляет 874 Гц, 654 Гц и 465 Гц для граничных условий $C - C$, $S - S$ и $C - F$, что на 15...35 Гц выше по сравнению с гладкой оболочкой.

Однако, более эффективным является подкрепление оболочек шпангоутами. Наличие шпангоутов может изменять формообразования и оказывает заметное влияние на повышение собственных частот. Для изучения данного эффекта выполнено исследование цилиндрической оболочки, подкрепленной снаружи двумя равноотстоящими шпангоутами 7×1 мм. Подкрепление шпангоутами позволило значительно повысить низшие частоты колебаний, включая основную частоту. При этом наблюдается сгущение спектра частот. По сравнению с гладкой оболочкой и подкрепленной стрингерами, формы колебаний подкрепленной шпангоутами оболочки значительно изменяются. Волновое число n с увеличением жесткости шпангоутов уменьшается. В некоторых формообразованиях амплитуды колебаний локализуются в отдельных поясах. Данные эффекты наблюдаются на интерферограммах форм колебаний подкрепленной двумя шпангоутами оболочки, приведенных на рис. 5.5. Приведенным интерферограммам соответствуют такие частоты колебаний:

$$f_3 = 1283 \text{ Гц} \quad (f_T = 1334 \text{ Гц}), \quad n = 3 \quad - \text{ см. рис. 5.5a};$$

$$f_5 = 1431 \text{ Гц} \quad (f_T = 1489 \text{ Гц}), \quad n = 5 \quad - \text{ см. рис. 5.5б}.$$



а – первая форма колебаний; б – третья форма колебаний

Рисунок 5.5 – Интерферограммы форм колебаний подкрепленной двумя шпангоутами оболочки.

Количество шпангоутов при равномерном их размещении оказывает заметное влияние на основные частоты и формы колебаний. Это хорошо видно из результатов, приведенных в табл. 5.5.

Таблица 5.5. Собственные частоты колебаний оболочки, подкрепленной шпангоутами (Гц)

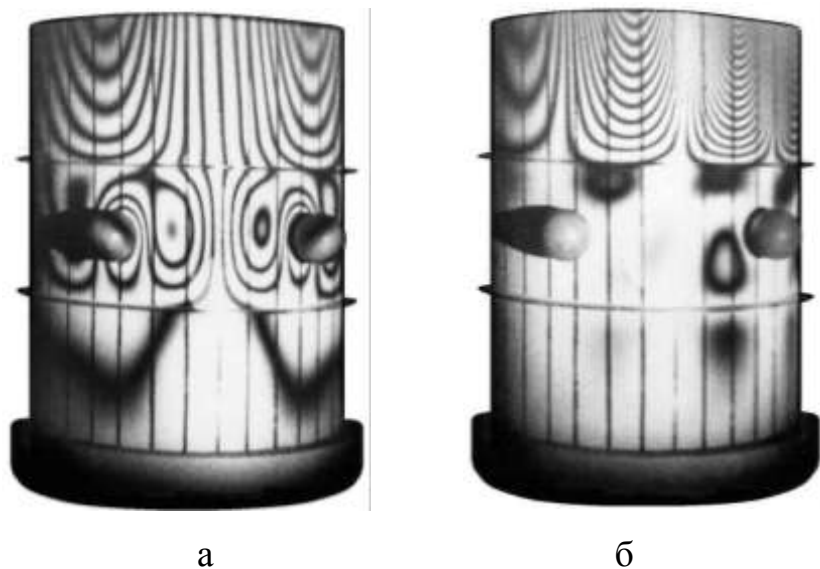
Гр. условия	<i>C - C</i>			<i>S - S</i>			<i>C - F</i>		
	$f_{\text{Э}}$	f_{T}	n	$f_{\text{Э}}$	f_{T}	n	$f_{\text{Э}}$	f_{T}	n
–	1485	1508	6	1039	1062	5	611	618	4
1	2718	2786	4	1674	1720	4	952	1017	3
2	2966	3031	3	2281	2336	3	1283	1334	3
3	3035	3089	3	2319	2381	3	1326	1398	3

Колебания оболочек с регулярно расположенными шпангоутами можно разделить на два типа: колебания всей поверхности с ребрами; локальные колебания поверхности между ребрами в неусиленной зоне. Низшей частоте в основном соответствует первый тип колебаний, а для неосновных частот может иметь место второй тип колебаний. Для колебаний первого типа отмечены существенные искажения формообразований.

При наличии присоединенных тел амплитудно-частотные зависимости носят совсем иной характер, чем для гладких или подкрепленных стрингерами оболочек. Искажение формообразований более локализовано. Наибольшие прогибы располагаются в точках крепления тел и ограничены в осевом направлении близлежащими шпангоутами. Это подтверждается представленными на рис. 5.6 формообразованиями для оболочки, подкрепленной $N_2=2$ равноотстоящими шпангоутами 7×1 мм, с двумя присоединенными телами при $\varphi_m = 60^\circ$. На торцах оболочки выполняются граничные условия (C - F). Представленным формам соответствуют следующие частоты:

$$f_3 = 1095 \text{ Гц} \quad (f_T = 1137 \text{ Гц}), \quad n = 3 \quad - \text{ см.рис. 5.6a};$$

$$f_5 = 1418 \text{ Гц} \quad (f_T = 1465 \text{ Гц}), \quad n = 5 \quad - \text{ см. рис. 5.6б.}$$



а – первая форма колебаний; б – третья форма колебаний;

Рисунок 5.6 – Интерферограммы форм колебаний подкрепленной двумя шпангоутами оболочки с двумя присоединенными телами.

В отличие от стрингеров шпангоуты значительно повышают основную частоту колебаний оболочек с присоединенными телами. При этом присоединенное тело на низшей частоте расположено в пучности. Наибольшие прогибы располагаются в точках крепления тел и ограничены в осевом

направлении близлежащими шпангоутами. Это подтверждается результатами, приведенными в работах [62, 66, 141].

Большой интерес представляет комбинированное подкрепление. Для оценки влияния перекрестной системы ребер оболочка подкреплялась снаружи 1–3 равноотстоящими шпангоутами 7×1 мм и 8 стрингерами 4×1 мм. Низшие собственные частоты ее колебаний приведены в табл.5.6. Волновые числа для них совпадают с результатами для шпангоутной оболочки, приведенными в табл. 5.5. В данном случае подкрепление модели перекрестной системой ребер сказывается на формах прогибов, локализуя их и уменьшая амплитуды колебаний. Наибольшие прогибы поверхности ограничены в осевом направлении близлежащими шпангоутами. Частоты собственных колебаний возрастают, а плотность нижней части спектра частот увеличивается, что создает некоторые трудности при возбуждении формообразований.

Таблица 5.6. Собственные частоты колебаний оболочки, подкрепленной стрингерами и шпангоутами (Гц)

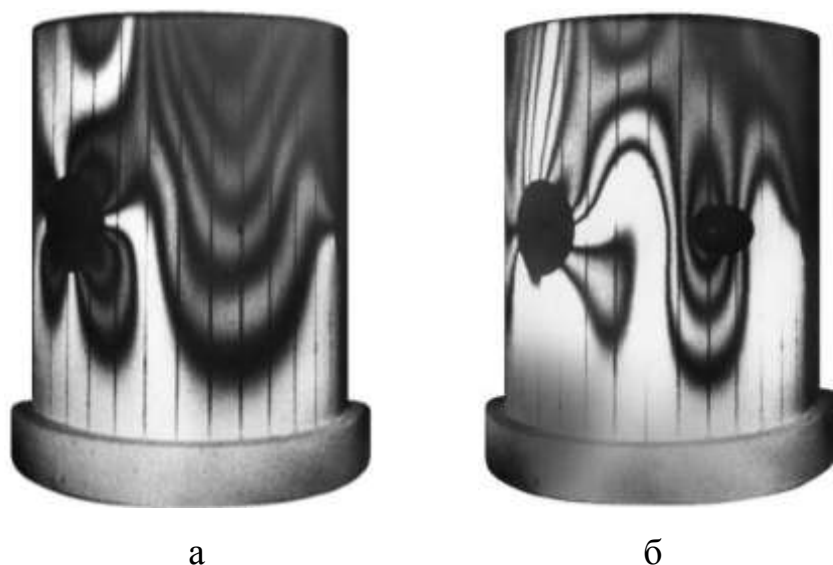
Гр. условия	<i>C - C</i>			<i>S - S</i>			<i>C - F</i>		
	$f_{\text{Э}}$	f_{T}	n	$f_{\text{Э}}$	f_{T}	n	$f_{\text{Э}}$	f_{T}	n
1	2781	2826	4	1734	1784	4	1029	1087	3
2	3028	3080	3	2332	2383	3	1308	1361	3
3	3072	3129	3	2378	2424	3	1337	1398	3

5.3 Анализ влияния отверстий на амплитудно-частотные характеристики собственных колебаний оболочек

Большой практический интерес представляет исследование колебаний оболочек с отверстиями, снижающими локальную жесткость оболочечной конструкции. Данной проблеме посвящено ограниченное число теоретических и экспериментальных исследований.

В диссертационной работе рассматриваются оболочки с прямоугольными и круглыми отверстиями, расположенными в центре, симметрично относительно торцов оболочки. Отверстия, снижая локально жесткость оболочечной конструкции, понижают основную частоту ее колебаний и нижнюю часть спектра. В свою очередь, отверстия являются концентраторами напряжений и большинство форм колебаний имеют сильные искажения за счет инерционной неоднородности конструкции. Поэтому для многих форм колебаний процесс определения волновых чисел в явном виде достаточно сложен.

Это хорошо видно на представленных на рис. 5.7 интерферограммах форм колебаний с волновыми числами $m = 1$, $n = 2$ гладкой оболочки с двумя круглыми отверстиями радиуса $r_0 = 18$ мм, расположенными посреди образующей с углом в окружном направлении между их центрами $\varphi_0 = 120^\circ$. Присоединенное твердое тело ($M_1 = 0,1M_0$) усиливает локальную интенсивность деформаций и концентрации напряжений, но на снижение частот влияет в меньшей степени, чем у оболочек без вырезов.



а – незагруженная оболочка; б – оболочка с присоединенным телом

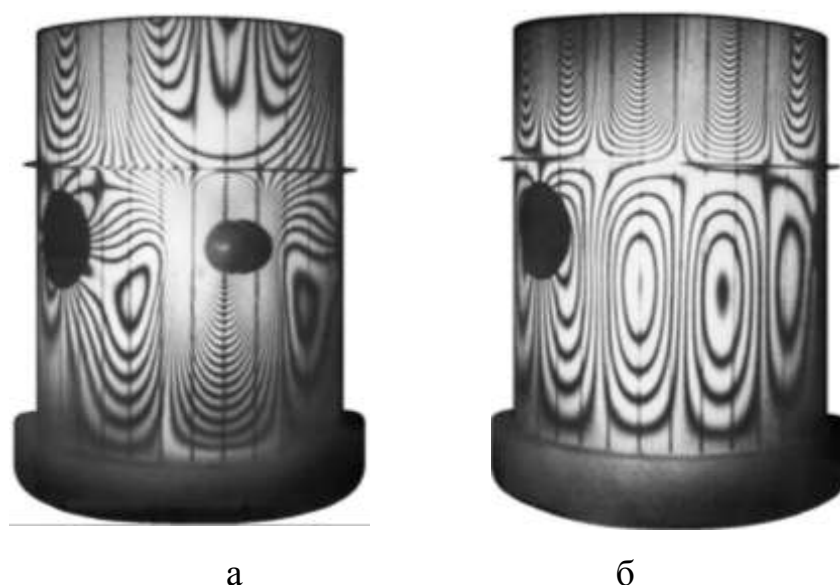
Рисунок 5.7 – Интерферограммы характерных форм колебаний гладкой оболочки с двумя круглыми отверстиями.

Представленным формам соответствуют следующие частоты:

$$f_3 = 1008 \text{ Гц} \quad (f_T = 1067 \text{ Гц}), \quad n = 2 \quad - \text{ см. рис. 5.7а;}$$

$$f_3 = 816 \text{ Гц} \quad (f_T = 878 \text{ Гц}), \quad n = 2 \quad - \text{ см. рис. 5.7б.}$$

Подкрепление оболочек с отверстиями наружными шпангоутами вносит изменения в формообразование, локализуя деформации вокруг отверстий. На рис. 5.8 для рассматриваемой оболочки с двумя круглыми отверстиями, подкрепленной шпангоутом 7·1 мм на расстоянии $L/3$ от верхнего основания, приведены интерферограммы первой и шестой форм колебаний. Анализ полученных результатов показывает, что у оболочки с отверстиями в процессе колебаний наблюдаются сильные искажения формообразований. Это объясняется значительной конструктивной неоднородностью моделей, что сказывается на их инерционной неоднородности. Для некоторых форм колебаний ребра локализуют неоднородность конструкции таким образом, что отверстия перестают влиять на колебательный процесс. Данный эффект представлен на рис. 5.9б.



а – основная форма колебаний оболочки с присоединенным телом;
 б – шестая форма колебаний незагруженной оболочки;

Рисунок 5.8 – Интерферограммы форм колебаний оболочки с двумя круглыми отверстиями, подкрепленной шпангоутом.

Присоединенное тело в еще большей степени влияет на формы колебаний, перераспределяя поля амплитудных перемещений и деформаций. Данный эффект представлен на рис. 5.8а. Однако для оболочек с

присоединенным телом отверстия влияют в меньшей степени на понижение основной частоты. Интерферограммы, приведенные на рисунках 5.7 и 5.9 получены методом усреднения по времени.

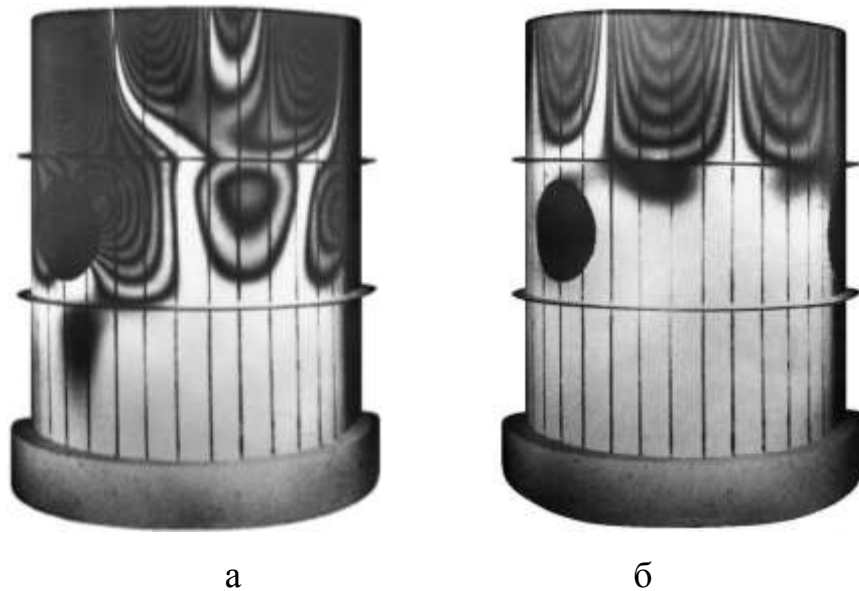
Для приведенных оболочек частотные характеристики запишутся в виде:

$$f_3 = 1095 \text{ Гц} \quad (f_T = 1137 \text{ Гц}), \quad n = 3, \quad m = 1 \quad - \text{ см. рис. 5.8а};$$

$$f_3 = 1762 \text{ Гц} \quad (f_T = 1848 \text{ Гц}), \quad n = 6, \quad m = 2 \quad - \text{ см. рис. 5.8б};$$

$$f_3 = 1336 \text{ Гц} \quad (f_T = 1380 \text{ Гц}), \quad n = 2, \quad m = 1 \quad - \text{ см. рис. 5.9а};$$

$$f_3 = 1408 \text{ Гц} \quad (f_T = 1457 \text{ Гц}), \quad n = 5, \quad m = 1 \quad - \text{ см. рис. 5.9б}.$$

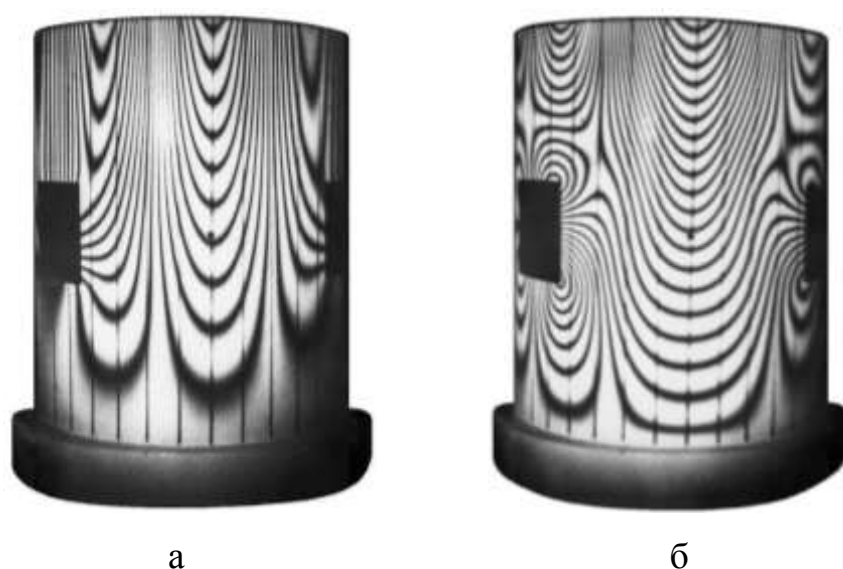


а – основная форма колебаний оболочки; б – четвертая форма колебаний

Рисунок 5.9 – Интерферограммы форм колебаний подкрепленной двумя шпангоутами оболочки с двумя круглыми отверстиями.

Квадратные отверстия с учетом геометрии формы еще в большей степени являются концентраторами напряжений. Поэтому основные частоты колебаний оболочек с квадратными отверстиями ниже, чем у оболочек с круглыми отверстиями. Например, для гладкой оболочки с двумя круглыми отверстиями радиуса $r_0 = 18$ мм основная частота колебаний составляет $f_3 = 546$ Гц ($f_T = 582$ Гц), а с двумя квадратными отверстиями 36×36 мм – $f_3 = 490$ Гц ($f_T = 528$ Гц). Форме колебаний соответствуют волновые числа $n = 4$, $m = 1$.

Интерферограммы форм колебаний гладкой оболочки с двумя квадратными неподкрепленными отверстиями приведены на рис. 5.10.



а – основная форма колебаний; б – вторая форма колебаний;

Рисунок 5.10 – Интерферограммы форм колебаний гладкой оболочки с двумя квадратными неподкрепленными отверстиями.

Представленным формам соответствуют следующие частоты:

$$f_3 = 490 \text{ Гц} \quad (f_T = 528 \text{ Гц}), \quad n = 4 \quad - \text{ см.рис. 5.10а};$$

$$f_3 = 573 \text{ Гц} \quad (f_T = 612 \text{ Гц}), \quad n = 3 \quad - \text{ см. рис. 5.10б}.$$

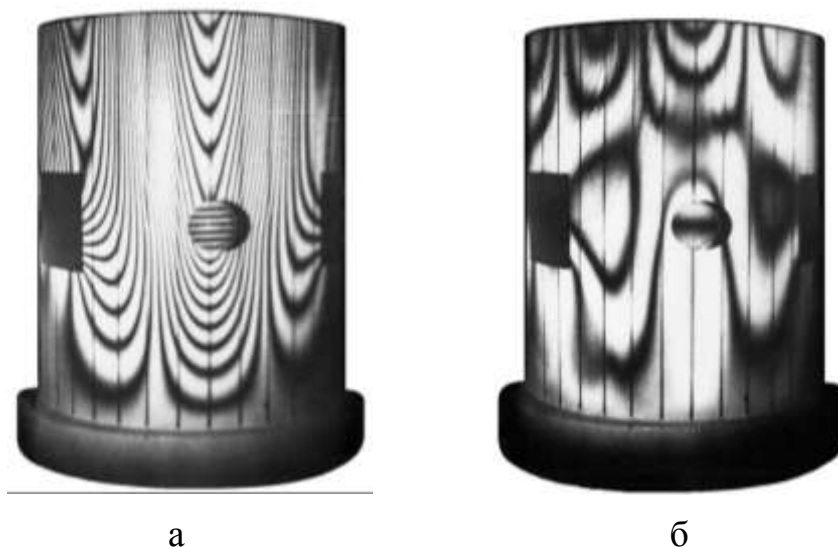
На интерферограммах оболочек возле квадратных отверстий наблюдаются сильные искажения интерференционных полос, вызванные искривлением полей перемещений, деформаций и концентрацией напряжений в углах.

При колебаниях оболочек с присоединенными телами или отверстиями изменение частоты существенно зависит от взаимного расположения тел, отверстий и подкреплений. При переходе от одной собственной формы к другой картина узловых линий изменяется, в результате чего присоединенные тела и отверстия оказываются в центре пучности. Присоединенные тела, расположенные в пучности и на узловых линиях, по-разному влияют на частоты колебаний отдельных собственных форм. На рисунке 5.11 на основной

частоте присоединенное тело расположено в пучности, а на третьей частоте – на узловой линии. Представленным формам соответствуют следующие частоты:

$$f_3 = 426 \text{ Гц} \quad (f_T = 454 \text{ Гц}), \quad n = 4 \quad - \text{ см. рис. 5.11а};$$

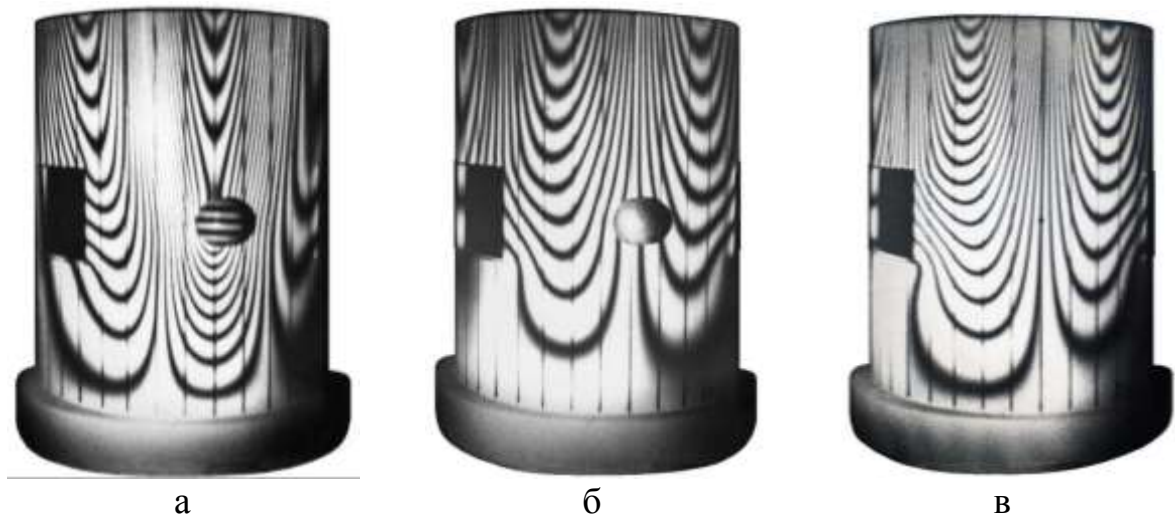
$$f_3 = 643 \text{ Гц} \quad (f_T = 672 \text{ Гц}), \quad n = 5 \quad - \text{ см. рис. 5.11б}.$$



а – основная форма колебаний оболочки; б – третья форма колебаний оболочки

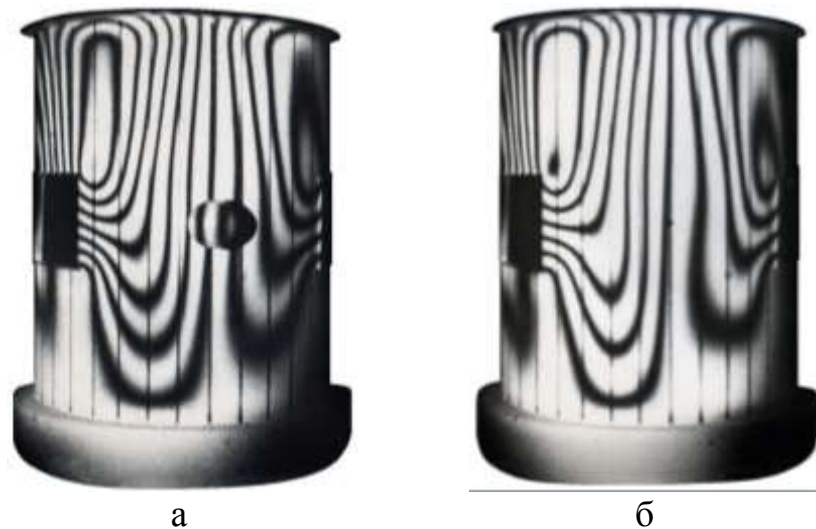
Рисунок 5.11 – Интерферограммы форм колебаний гладкой оболочки с двумя квадратными неподкрепленными отверстиями и присоединенным в центре телом.

Подкрепление контуров отверстия ребрами приводит к повышению собственной частоты колебаний и частичному снижению концентрации напряжений. Формы колебаний оболочки с двумя отверстиями, подкрепленными ребрами 7×1 мм, приведены на рис. 5.12. Подкрепление такой оболочки шпангоутом еще больше оказывает влияние на повышение низших частот колебаний и локализацию деформаций и напряжений. Формы колебаний оболочки, подкрепленной в верхнем основании шпангоутом 7×1 мм приведены на рис. 5.13.



а – основная форма колебаний оболочки с присоединенным телом;
 б – третья форма колебаний оболочки с присоединенным телом; в – третья форма колебаний незагруженной оболочки;

Рисунок 5.12 – Интерферограммы форм колебаний гладкой оболочки с двумя квадратными подкрепленными отверстиями.



а – оболочка с присоединенным телом; б – незагруженная оболочка;

Рисунок 5.13 – Интерферограммы третьей формы колебаний подкрепленной шпангоутом оболочки с двумя квадратными подкрепленными отверстиями.

Представленным формам соответствуют следующие частоты:

$$f_3 = 512 \text{ Гц} \quad (f_T = 549 \text{ Гц}), \quad n = 4 \quad - \text{ см. рис. 5.12а};$$

$$f_3 = 605 \text{ Гц} \quad (f_T = 642 \text{ Гц}), \quad n = 3 \quad - \text{ см. рис. 5.12б}.$$

$$f_3 = 598 \text{ Гц} \quad (f_T = 637 \text{ Гц}), \quad n = 3 \quad - \text{ см. рис. 5.12в};$$

$$f_3 = 910 \text{ Гц} \quad (f_T = 941 \text{ Гц}), \quad n = 4 \quad - \text{ см. рис. 5.13а};$$

$$f_3 = 918 \text{ Гц} \quad (f_T = 952 \text{ Гц}), \quad n = 4 \quad - \text{ см. рис. 5.13б}.$$

Для некоторых неосновных форм колебаний присоединенное тело располагается на узловых линиях и практически не участвует в радиальных перемещениях. В этом случае оно совершает преимущественно вращательные движения относительно узловых линий, обладая определенными моментами инерции вращения, которые оказывают незначительное влияние на частоту колебаний и на характер локального искажения формообразований в зоне контакта присоединенного тела. При этом частота колебаний оболочечной системы будет близкой к частоте незагруженной оболочки, а с увеличением момента инерции вращения присоединенного тела собственные частоты колебаний оболочки уменьшаются. Данные выводы согласуются с численными результатами, приведенными в подразделе 3.5 (см. рис. 3.8).

На представленных на рисунках 5.12б и 5.13а интерферограммах вертикальная узловая линия проходит через точку крепления присоединенного тела. Поэтому оно в нормальных перемещениях не участвует, а совершает лишь вращательные движения относительно вертикальной узловой линии.

5.4 Выводы

В пятом разделе с использованием метода голографической интерферометрии выполнены экспериментальные исследования собственных колебаний и напряженно-деформированного состояния тонких упругих круговых цилиндрических оболочек с конструктивными неоднородностями. Разработаны методика проведения эксперимента и технология изготовления оболочечных моделей, конструкция специального зажимного приспособления, усовершенствована электрооптическая схема вибростенда, что позволило повысить точность полученных экспериментальных данных. Комбинация двух

методов голографической интерферометрии и усовершенствование электрооптической схемы вибростенда позволило повысить качество получаемых результатов.

Разработанные методика проведения эксперимента и специальное зажимное приспособление позволили получить новые амплитудно-частотные характеристики оболочек в широком диапазоне спектра частот резонансных колебаний при динамическом нагружении, изменяющемся во времени по гармоническому закону. Исследовано влияние граничных условий, дискретного размещения подкрепляющих ребер, отверстий различной формы и присоединенных твердых тел на частоты и формы свободных колебаний. Выявлены характерные особенности полей амплитуд виброперемещений и напряженно-деформированного состояния моделей. К новым результатам относятся выявленные механические эффекты, которые определяют независимое и совместное влияние отверстий, присоединенных твердых тел, продольно-поперечных подкрепляющих ребер на амплитудно-частотные характеристики и напряженно-деформированное состояние исследуемых конструкций.

Выполненное сопоставление экспериментальных и полученных численных результатов свидетельствует об адекватности предложенных математических моделей динамического поведения оболочек и расчетных методик, подтверждает положения и выводы, приведенные в разделах 2 и 3, а также в работах [61, 63, 64, 66, 67, 142, 144]. Расхождение численных результатов с экспериментальными данными составляет 3...10% в зависимости от сложности исследуемой оболочечной системы.

ВЫВОДЫ

В диссертационной работе решена актуальная научная задача – разработана методика исследования амплитудно-частотных характеристик и напряженно-деформированного состояния тонкостенных оболочек с

конструктивными неоднородностями. При этом получены следующие результаты:

1. Сформулированы задачи для анализа АЧХ и НДС тонких упругих оболочек с отверстиями, присоединенными твердыми телами, подкрепляющими ребрами при различных граничных условиях в рамках линейной теории дискретно подкрепленных оболочек согласно гипотезам Кирхгофа-Лява, вариационного принципа Лагранжа и с использованием МКЭ.

2. Разработаны математические модели напряженно-деформированного состояния и колебаний упругих оболочек, которые учитывают их конструктивные особенности. Развита численные методы, разработаны алгоритмы и программы расчета с использованием изопараметрических конечных элементов. Амплитудно-частотные характеристики определяются комбинированным методом Хаусхолдера-QR-обратных итераций с использованием разложения Холецкого и процесса ортогонализации Грамма-Шмидта, что повышает точность результатов, экономит время расчета и уменьшает потребности во внешней и оперативной памяти ЭВМ.

3. На основании предложенных расчетных методик получены новые численные результаты распределения АЧХ и полей динамических напряжений конструктивно неоднородных цилиндрических оболочек, которые характеризуются наличием отверстий, присоединенных тел, подкрепляющих ребер, их количеством, расположением, неравномерностью распределения инерционных и жесткостных характеристик при различных геометрических параметрах и граничных условиях. Численно исследована достоверность разработанных математических моделей и практическая сходимость полученных решений. Выполнено сравнение результатов численного эксперимента с расчетными данными тестовых задач.

4. Используя новый подход к экспериментальному исследованию, связанный с применением методов стробоголографической интерферометрии и голографической интерферометрии усреднения во времени, получены новые результаты динамического поведения оболочек. К новым результатам относятся выявленные механические эффекты, которые определяют

независимое и совместное влияние отверстий, присоединенных твердых тел, продольно-поперечных подкрепляющих ребер на АЧХ и НДС исследуемых конструкций. Обнаружено хорошее соответствие численных и экспериментальных результатов, что подтверждает достоверность и адекватность разработанных расчетных методик.

5. Разработаны практические рекомендации для улучшения вибродинамических характеристик упругих оболочек с конструктивными неоднородностями, в частности с учетом характера расположения отверстий и ребер, взаимодействия масс присоединенных тел, что позволит улучшить их работоспособность и надежность.

6. Результаты диссертации внедрены на предприятиях ГП НПКГ «Зоря»–«Машпроект», ОАО «УкрНИИ ТСМ» и ГП «Судостроительный завод им. 61 Коммунара» для анализа НДС и АЧХ на стадии проектирования оболочечных элементов газотурбинных двигателей и специальных судовых конструкций при наличии отверстий и присоединенных приборов, для прогнозирования их вибропрочности и несущей способности. Методики расчета и экспериментальные данные использованы при выполнении госбюджетных тем и в учебном процессе в Национальном университете кораблестроения.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Абовский Н.П. Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек / Н.П. Абовский, Н.П. Андреев, А.П. Деруга. – М: Наука, 1978. – 288 с.

2. Александров В.М. Введение в механику контактных взаимодействий / В.М. Александров, М.И. Чебаков. – Ростов-на-Дону: Издательский дом ООО «ЦВВР», 2007. – 114 с.

3. Алямовский А.А. SolidWorks/COSMOSWorks. Инженерный анализ методом конечных элементов / А.А. Алямовский. – М.: ДМК Пресс, 2004. – 432 с.

4. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек / С.А. Амбарцумян. – М.: Наука, 1974. – 446 с.

5. Амиро И.Я. Методы расчета оболочек: В 5 т. / И.Я. Амиро, В.А. Заруцкий. – К.: Наук. думка, 1980. – Т. 2: Теория ребристых оболочек. – 368 с.

6. Амиро И.Я. Экспериментальные исследования устойчивости ребристых оболочек (обзор) / И.Я. Амиро // Прикл. механика. – 1996. – Т. 32, № 9. – С. 3-15.

7. Амиро И.Я. Учет дискретного размещения ребер при изучении напряженно-деформированного состояния, колебаний и устойчивости ребристых оболочек (обзор) / И.Я. Амиро, В.А. Заруцкий // Прикл. механика. – 1998. – Т. 34, № 4. – С. 3-22.

8. Амиро И.Я. Динамика ребристых оболочек / И.Я. Амиро, В.А. Заруцкий, В.Г. Паламарчук. – К.: Наук. думка, 1983. – 204 с.

9. Амиро И.Я. Колебания ребристых оболочек вращения / И.Я. Амиро, В.А. Заруцкий, В.Н. Ревуцкий. – К.: Наук. думка, 1988. – 172 с.

10. Амиро И.Я. О влиянии параметров подкрепления на амплитудно-частотные характеристики ребристой цилиндрической оболочки / И.Я. Амиро, Н.Я. Прокопенко // Прикл. механика. – 1994. – Т. 30, № 8. – С. 64-69.

11. Андреев Л.В. Динамика пластин и оболочек с присоединенными массами / Л.В. Андреев, А.Л. Дышко, И.Д. Павленко. – М.: Машиностроение, 1988. – 195 с.

12. Андрианов И.В. Метод усреднения в статике и динамике ребристых оболочек / И.В. Андрианов, В.А. Лесничая, Л.И. Маневич. – М.: Наука, 1985. – 224 с.

13. Андрианов И.В. Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций / И.В. Андрианов, Б.В. Нерубайло, И.Ф. Образцов.– М.: Машиностроение, 1991. – 416 с.
14. Бабич Д.В. О частотном спектре колебаний неоднородных цилиндрических оболочек / Д.В.Бабич // Прикл. механика. – 1995. – Т. 31, № 10. – С. 67-72.
15. Бабич Д.В. О собственных колебаниях и потере устойчивости сжатых оболочек / Д.В.Бабич // Прикл. механика. – 1996. – Т. 32, № 5. – С. 45-50.
16. Басов К.А. ANSYS: Справочник пользователя / К.А. Басов. – М.: ДМК Пресс, 2005. – 640 с.
17. Бате К. Численные методы анализа и метод конечных элементов: Пер. с англ. / К. Бате, Е. Вилсон. – М: Стройиздат, 1982. – 448 с.
18. Богданович А.Е. Собственные колебания ортотропных ребристых цилиндрических оболочек / А.Е. Богданович, В.А.Заруцкий // Прикл. механика. – 1991. – Т. 27, № 10. – С.83-90.
19. Болотин В.В. Механика многослойных конструкций / В.В. Болотин, Ю.Н. Новичков. – М.: Машиностроение, 1980. – 376 с.
20. Бреславский В.Е. Динамические перемещения цилиндрической оболочки с присоединенной массой / В.Е. Бреславский, И.Н. Гинзбург, Ю.В. Скоробогатько // Динамика и прочность машин. – Харьков: ХПИ. – 1985. – № 41. – С. 14-19.
21. Будак В.Д. Колебания круглой цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью / В.Д. Будак, Ю.Г. Золотой, А.В. Овчаренко // Зб. наук. праць УДМТУ. – Миколаїв: УДМТУ. – 1998. – № 4. – С. 210-214.
22. Вест Ч. Голографическая интерферометрия: Пер. с англ. / Ч Вест. – М.: Мир, 1982. – 504 с.
23. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем / А.С. Вольмир.– М.: Наука, 1967. – 984 с.
24. Галагер Р. Метод конечных элементов: Пер. с англ. / Р. Галагер. – М.: Мир, 1984. – 428 с.

25. Гинзбург В.М. Голографические измерения / В.М. Гинзбург, Б.М. Степанов. – М.: Радио и связь, 1981. – 296 с.

26. Голованов А.И. Введение в метод конечных элементов статики тонких оболочек / А.И. Голованов, М.С. Корнишин. – Казань: Изд-во КФТИ, 1989. – 269 с.

27. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек / А.Л. Гольденвейзер. – М.: Наука, 1976. – 512 с.

27. Гольденвейзер А.Л. Свободные колебания тонких упругих оболочек / А.Л. Гольденвейзер, В.Б. Лидский, П.Е. Товстик. – М.: Наука, 1979. – 384 с.

29. Григоренко Я.М. Решение задач теории оболочек на ЭВМ / Я.М. Григоренко, А.П. Мукоед. – К.: Вища школа, 1979. – 279 с.

30. Грин В.М. Экспериментальное моделирование физических процессов и объектов проектирования/ В.М. Грин.– М.: Изд-во «ДИАЛОГ», 1997.– 350 с.

31. Грищак В.З. Влияние начальных несовершенств на нелинейное динамическое поведение оболочечных конструкций из функционально-градиентных материалов переменной во времени толщины / В.З. Грищак, Ю.О. Фатеева // Вісник Запорізького національного ун-ту: зб. наук. праць. – Запоріжжя: ЗНУ. – 2015. – С. 58-66.

32. Грищак В.З. Нелінійний аналіз чутливості стисненої анізотропної циліндричної оболонки до недосконалостей геометричної форми та товщини / В.З. Грищак, О.О. Головань, М.Б. Соколова // Вісник Запорізького державного ун-ту: зб. наук. праць. – Запоріжжя: ЗДУ. – 2000. – № 2. – С. 37-41.

33. Грищак В.З. Про один асимптотичний підхід до дослідження вимушених коливань механічних систем з демпфіруванням, параметри яких залежать від часу / В.З. Грищак, В.М. Кабак // Вісник Запорізького державного ун-ту: зб. наук. праць. – Запоріжжя: ЗДУ. – 1998. – № 1. – С. 28-30.

34. Грищак В.З. Об эффективности гибридных асимптотических методов в прикладных задачах математической физики / В.З. Грищак // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. – Дніпропетровськ: Ліра. – 2012. – Вип. 19. – С. 80-88.

35. Грищак В.З. Гибридные асимптотические методы в задачах нелинейной динамики механических систем с переменными параметрами / В.З. Грищак // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. – Дніпропетровськ: Ліра. – 2011. – Вип. 16. – С. 101-106.

36. Грищак В.З. Гибридные асимптотические подходы к решению актуальных задач механики конструкций с переменными параметрами на базе современной компьютерной алгебры / В.З. Грищак // Вісник Дніпропетровського ун-ту: Науковий журнал. Серія: Механіка. – Дніпропетровськ: ДНУ. – 2011. – Вип. 15, т. 2. – С. 61-71.

37. Гудрамович В.С. Устойчивость упругопластических оболочек / В.С. Гудрамович. – К.: Наук. думка, 1987. – 216 с.

38. Гудрамович В.С. Предельный анализ элементов конструкций / В.С. Гудрамович, В.П. Герасимов, А.Ф. Деменков. – К.: Наук. думка, 1990. – 136 с.

39. Гудрамович В.С. Влияние отверстий на предельные состояния элементов тонкостенных металлических оболочечно-пластинчатых конструкций / В.С. Гудрамович // Вісник Дніпропетровського ун-ту: Науковий журнал. Сер.: Механіка. – Дніпропетровськ: ДНУ. – 2014. – Вип. 18, т. 22. – С. 47-60.

40. Гудрамович В. С. Конечно-элементный анализ процесса рассеянного разрушения плоско-деформированных упругопластических сред с локальными концентраторами напряжений / В.С. Гудрамович, Э.Л. Гарт // Упругость и неупругость: Материалы Межд. науч. симпозиума по проблемам механики деформ. тел, посв. 105-летию со дня рожд. А.А. Ильюшина, январь 2016 г. – М.: Изд-во МГУ. – 2016. – С. 158-161.

41. Гудрамович В.С. Голографическое исследование деформаций цилиндрической оболочки с седловыми опорами при термомеханическом нагружении / В.С. Гудрамович, Ю.М. Селиванов, В.Г. Трошин // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: зб. наук. праць. – Дніпропетровськ: Наука і освіта. – 2008. – Вип. 9. – С. 61-71.

42. Гудрамович В.С. Повышение вычислительной эффективности проекционно-итерационного варианта метода конечных элементов при использовании адаптивных сеток / В.С. Гудрамович, Э.Л. Гарт, С.А. Рябоконь // *Theoretical Foundations of Civil Engineering*. – Warsaw, 2009. – № 17. – P. 99-104.

43. Демидович Б.П. Основы вычислительной механики / Б.П. Демидович, И.А. Марон – М.: Наука, 1970. – 184 с.

44. Денисюк Ю.Н. Современное состояние и перспективы развития голографии / Ю.Н. Денисюк. – Л.: Наука, 1974. – 352 с.

45. Жигалко Ю.П. Численное решение задачи о передаче локальной динамической нагрузки через стрингер на пологую цилиндрическую оболочку / Ю.П. Жигалко, З.В. Скворцова // *Прикл. механика*. – 1985. – Т. 21, № 10. – С. 32-37.

46. Журавлева А.М. Применение метода конечных элементов для исследования вибраций некоторых типов тонкостенных конструкций / А.М. Журавлева, В.С. Лукин // *Прикл. механика*. – 1996. – Т. 32, № 3. – С. 13-19.

47. Заруцкий В.А. Приближенные формулы для вычисления минимальных собственных частот колебаний подкрепленных цилиндрических оболочек / В.А. Заруцкий // *Прикл. механика*. – 1977. – Т. 13, № 5. – С. 43-51.

48. Заруцкий В.А. Вынужденные колебания продольно подкрепленной цилиндрической оболочки, несущей локально присоединенную массу / В.А. Заруцкий // *Прикл. механика*. – 1982. – Т. 18, № 1. – С. 50-56.

49. Заруцкий В.А. Стационарные волны в многослойных ортотропных ребристых цилиндрических оболочках / В.А. Заруцкий // В кн.: *Механика композитов*: В 12 т. Т.9: Динамика элементов конструкций. – К.: А.С.К., 1999. – С. 44-82.

50. Заруцкий В.А. Особенности потери устойчивости ребристых оболочек / В.А. Заруцкий // *Прикл. механика*. – 2000. – Т. 36, № 5. – С. 3-32.

51. Заруцкий В.А. Теория и методы определения напряженно-деформированного состояния ребристых оболочек / В.А. Заруцкий // *Прикл. механика*. – 2000. – Т. 36, № 10. – С. 3-29.

52. Заруцкий В.А. О комплексных экспериментальных исследованиях устойчивости и колебаний конструктивно-неоднородных оболочек / В.А. Заруцкий // Прикл. механика. – 2001. – Т. 37, № 8. – С. 38-67.

53. Заруцкий В.А. О влиянии формы меридиана на собственные частоты и формы колебаний оболочек вращения / В.А. Заруцкий, А.С. Пальчевский, В.Ф. Сивак // Прикл. механика. – 1997. – Т. 33, № 1. – С. 59-63.

54. Заруцкий В.А. Экспериментальные исследования динамики оболочек вращения (обзор) / В.А. Заруцкий, В.Ф. Сивак // Прикл. механика. – 1999. – Т. 35, № 3. – С. 3-11.

55. Заруцкий В.А. О влиянии деформаций поперечного сдвига на собственные колебания ортотропных цилиндрических оболочек, усиленных продольными ребрами / В.А. Заруцкий, Ю.В. Скосаренко // Прикл. механика. – 1989. – Т. 25, № 2. – С. 48-55.

56. Заруцкий В.А. Колебания тонкостенных оболочек с конструктивными особенностями. Обзор экспериментальных исследований / В.А. Заруцкий, А.И. Телалов // Прикл. механика. – 1991. – Т. 27, № 4. – С. 3-9.

57. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике: Пер. с англ. / О. Зенкевич. – М.: Мир, 1975. – 541 с.

58. Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимация: Пер. с англ. / О. Зенкевич, К. Морган. – М.: Мир, 1986. – 318 с.

59. Зенкевич О. Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред: Пер. с англ. / О. Зенкевич, И. Чанг. – М.: Мир, 1974. – 240 с.

60. Исследование влияния осевых сжимающих сил на частоты и формы колебаний ребристых цилиндрических оболочек / П.И. Галака, В.А. Заруцкий, П.Г. Капля [и др.] // Прикл. механика. – 1975. – Т. 11, № 8. – С. 41-48.

61. Каиров А.С. Численное исследование свободных колебаний конструктивно неоднородных подкрепленных оболочек с присоединенными твердыми телами / А.С. Каиров, В.А. Каиров // Вісник Донецького ун-ту: Науковий журнал. Серія А. – Донецьк: ДонНУ. – 2008. – Вип. 1. – С. 170-174.

62. Каиров А.С. Экспериментальное исследование свободных колебаний подкрепленных цилиндрических оболочек с присоединенными твердыми телами / А.С. Каиров, Л.А. Латанская, В.А. Каиров // Проблемы обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. – Дніпропетровськ: ІМА-прес. – 2009. – Вип. 13. – С. 107-113.

63. Каиров А.С. Математическое моделирование и исследование свободных колебаний конструктивно неоднородных оболочек / А.С. Каиров, В.А. Каиров, М.В. Кулинич // Суднова енергетика: стан та проблеми: Матеріали III Міжнародної наук-техн. конференції, 18-19 жовтня 2007 р. – Миколаїв: НУК. – 2007. – С. 126-128.

64. Каиров В.А. Влияние отверстий на собственные колебания конструктивно неоднородных цилиндрических оболочек / В.А.Каиров, С.А. Моргун // Вісник Національного технічного ун-ту «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин: зб. наук. праць. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2015. – № 57 (1166). – С. 49-53.

65. Каиров В.А. Напряженно-деформированное состояние подкрепленных оболочек с присоединенными твердыми телами при вынужденных колебаниях / В.А. Каиров, В.П. Шевченко, С.А. Моргун // Вісник Дніпропетровського ун-ту: Науковий журнал. Серія: Механіка. – Дніпропетровськ: ДНУ. – 2015. – Вип. 19, т. 2. – С. 56-64.

66. Каиров В.А. Влияние подкрепляющих ребер на собственные колебания цилиндрических оболочек / В.А. Каиров // Проблемы обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. – Дніпропетровськ: Ліра. – 2015. – Вип. 24. – С. 114-122.

67. Каиров В.А. Численное исследование свободных колебаний подкрепленных ребрами цилиндрических оболочек вращения / В.А. Каиров // Прогресивна техніка, технологія та інженерна освіта: Матеріали XVI Міжнародної наук.-техн. конференції, 22-25 червня 2015 р. – Київ-Одеса: НТУУ «КПІ». – 2015.– С. 27-28.

68. Каиров В.О. Математичне моделювання динамічного деформування тришарових композитних циліндричних оболонок при імпульсному

навантаженні / В.О. Каіров // Актуальні проблеми інженерної механіки: Матеріали I Міжнародної наук.-техн. конференції, 25-26 жовтня 2011 р. – Миколаїв: НУК. – 2011. – С. 37-39.

69. Каіров В.А. Вынужденные колебания подкрепленных цилиндрических оболочек с отверстиями и присоединенными телами / В.А. Каіров, В.П. Шевченко // Математичні проблеми технічної механіки – 2016: Матеріали XVI Міжнародної наук.-техн. конференції, 18-21 квітня 2016 р. – Дніпро-дзержинськ-Дніпропетровськ-Київ: ДДТУ. – 2016. – С. 9.

70. Ковальчук П.С. Экспериментальное исследование вынужденных колебаний с большими прогибами стеклопластиковых оболочек вращения / П.С. Ковальчук, В.Д. Лакиза // Прикл. механика. – 1995. – Т. 31, № 11. – С. 63-69.

71. Козачок А.Г. Голографические методы исследования в экспериментальной механике / А.Г. Козачок. – М.: Машиностроение, 1984. – 176 с.

72. Коллатц Л. Задачи на собственные значения / Л. Коллатц. – М.: Наука, 1968. – 504 с.

73. Кольер Р. Оптическая голография: Пер. с англ. / Р. Кольер, К. Беркхарт, Л. Лин. – М.: Мир, 1973. – 672 с.

74. Кондрашов Н.С. Исследование спектра частот орбитальных оболочек / Н.С. Кондрашов // Проектирование и доводка авиационных газотурбинных двигателей. – М.: Машиностроение, 1981. – С. 30-36.

75. Кононенко В.О. Свободные колебания ребристой цилиндрической оболочки с присоединенной массой / В.О. Кононенко, В.Г. Паламарчук, А.М. Носаченко // Прикл. механика. – 1977. – Т. 13, № 1. – С. 40-46.

76. Кошур В.Д. Континуальные и дискретные модели динамического деформирования элементов конструкций / В.Д. Кошур, Ю.В. Немировский. – Новосибирск: Сибирское отделение изд-ва «Наука», 1990. – 200 с.

77. Кубенко В.Д. О влиянии начальной погиби на собственные колебания цилиндрических оболочек / В.Д. Кубенко, П.С. Ковальчук, Т.С. Краснопольская // Прикл. механика. – 1982. – Т. 18, № 1. – С. 43-49.

78. Кукарина А.И. О влиянии начальных погибей на собственные колебания ребристых цилиндрических оболочек / А.И. Кукарина, В.И. Мацнер, В.Ф. Сивак // Прикл. механика. – 1982. – Т. 18, № 4. – С. 58-63.

79. Кулеш Ю.Н. Установившиеся вынужденные колебания изотропной тонкой круговой цилиндрической оболочки, подкрепленной кольцевыми ребрами жесткости / Ю.Н. Кулеш, В.С. Чувиковский // Динамические нагрузки и прочность судовых конструкций: сб. науч. тр.– Л.: ЛКИ. – 1984.– С. 100-104.

80. Куранов Б.А. Применение метода суперэлементов в задачах на собственные значения / Б.А. Куранов, С.С. Гусев // Расчеты на прочность. – М.: Машиностроение. – 1988. – Вып. 28. – С. 177-186.

81. Латанская Л.А. Математическое моделирование динамики вынужденных колебаний конструктивно неоднородных трехслойных оболочек вращения / Л.А. Латанская, В.А. Каиров // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. – Дніпропетровськ: Ліра. – 2012. – Вип. 19. – С. 205-211.

82. Лейзерович Г.С. О влиянии малой присоединенной массы на расщепление частотного спектра кругового кольца с начальными неправильностями / Г.С. Лейзерович, Н.Б. Приходько, С.В. Серегин // Строительная механика и расчет сооружений. – 2013. – № 6. – С. 49-51.

83. Лесничая В.А. Собственные колебания эксцентрично подкрепленных конических оболочек / В.А. Лесничая, А.Н. Писанко // Строит. механика и расчет сооружений. – 1980. – № 2. – С. 52-57.

84. Лиходед А.И. Собственные колебания бочкообразных оболочек однородных с сосредоточенными массами / А.И. Лиходед, А.А. Малинин // Механика твердого тела. – 1972. – № 3. – С. 167-170.

85. Лиходед А.И. Об использовании механических аналогов при расчете колебаний оболочек, состыкованных со стержнями / А.И. Лиходед // Прикл. механика. – 1978. – Т. 14, № 6. – С. 16-25.

86. Луговой П.З. Динамика тонкостенных конструкций при нестационарных нагрузках / П.З. Луговой // Прикл. механика.– 2001. – Т.37, № 5. – С.44-73.

87. Луговой П.З. Нестационарная динамика неоднородных оболочечных конструкций / П.З. Луговой, В.Ф. Мейш, Э.А. Штанцель. – К.: Изд-во «Киевский университет», 2005. – 536 с.

88. Малинин А.А. Исследование динамических характеристик тонкостенных конструкций с присоединенными грузами / А.А. Малинин // Прикл. механика. – 1983. – Т. 19, № 2. – С. 64-67.

89. Малютин И.С. Устойчивость и колебания цилиндрической оболочки, дискретно подкрепленной полирегулярной системой ребер / И.С. Малютин // Труды X Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек: В 2-х т. – Тбилиси: Мецниереба. – 1975. – Т. 1. – С. 671-679.

90. Малютин И.С. Вынужденные колебания вязкоупругой слоистой цилиндрической оболочки, подкрепленной продольными ребрами / И.С. Малютин, А.Я. Недбай // Прикл. механика. – 1985. – Т.21, № 5. – С. 45-50.

91. Маневич Л.И. Собственные колебания подкрепленных конических оболочек / Л.И. Маневич, А.Н. Писанко // Строит. механика и расчет сооружений. – 1977. – № 5. – С. 39-43.

92. Математическое моделирование и исследование прочности силовых элементов конструкций космических летательных аппаратов / В.З. Грищак, Д.В. Акимов, С.И. Гоменюк [и др.] // Вісник Запорізького національного ун-ту: зб. наук. праць. – Запоріжжя: ЗНУ. – 2015. – С. 6-13.

93. Методы расчета оболочек: В 5 т. [Гузь А.Н., Чернышенко И.С., Чехов Вал.Н. и др.]; Под ред. А.Н.Гузя. – К.: Наук. думка, 1980. – Т.1: Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями. – 636 с.

94. Митчелл Э. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными. Пер. с англ. / Э. Митчелл, Р. Уэйт. – М.: Мир, 1981. – 216 с.

95. Моссаковский В.И. Контактные взаимодействия элементов оболочечных конструкций / В.И. Моссаковский, В.С. Гудрамович, Е.М. Макеев. – К.: Наук. думка, 1988. – 288 с.

96. Мяченков В.И. Расчеты машиностроительных конструкций методом конечных элементов / В.И. Мяченков – М.: Машиностроение, 1989. – 520 с.

97. Мяченков В.И. Расчет оболочечных конструкций на ЭВМ / В.И. Мяченков, И.В. Григорьев. – М.: Машиностроение, 1981. – 216 с.
98. Николаева О.И. Машиностроительные стали / О.И. Николаева, В.Н. Журавлев – М.: Машиностроение, 1991. – 396 с.
99. Новожилов В.В. Линейная теория тонких оболочек / В.В. Новожилов, К.Ф. Черных, Е.И. Михайловский. – Л.: Политехника, 1991. – 656 с.
100. Образцов И.Ф. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов / И.Ф. Образцов, Л.М. Савельев – М.: Высшая школа, 1985. – 392 с.
101. Образцов И.Ф. О перспективах применения метода голографической интерферометрии к исследованию резонансных колебаний сложных систем / И.Ф. Образцов, В.А. Смирнов // Расчеты на прочность. – М.: Машиностроение. – 1988. – Вып. 28. – С. 134-151.
102. Островский Ю.И. Голографическая интерферометрия / Ю.И. Островский, М.М. Бутусов, Г.В. Островская. – М.: Наука, 1977. – 336 с.
103. Паламарчук В.Г. Собственные колебания ребристой конической оболочки с массой, присоединенной на пружинах / В.Г. Паламарчук, А.М. Носаченко // Прикл. механика. – 1980. – Т. 16, № 1. – С. 40-46.
104. Пальчевский А.С. Свободные колебания цилиндрических оболочек с большими прямоугольными отверстиями / А.С. Пальчевский // Прикл. механика. – 1981. – Т. 17, № 5. – С. 130-133.
105. Пальчевский А.С. Колебания продольно сжатых цилиндрических и слабokonических оболочек / А.С. Пальчевский, А.А. Прядко, П.Г. Капля. // Прикл. механика. – 1980. – Т. 26, № 9. – С. 56-63.
106. Писанко А.Н. Колебания эксцентрично подкрепленных оболочек вращения / А.Н. Писанко // Пробл. прочности. – 1980. – № 3. – С. 95-97.
107. Писаренко Г.С. Экспериментальные методы в механике деформируемого тела / Г.С. Писаренко, В.А. Стрижало. – К.: Наук. думка, 1986. – 264 с.
108. Пожуев А.В. Динаміка ребристої циліндричної оболонки із зовнішнім амортизуючим шаром / А.В. Пожуев // Вісник Запорізького

державного ун-ту: зб. наук. праць. – Запоріжжя: ЗДУ. – 1999. – № 2. – С. 98-101.

109. Пожуев А.В. Компьютерный анализ динамики ребристой цилиндрической оболочки с упругим наполнителем / А.В. Пожуев // Прикладная геометрия и инж. графика. – Мелитополь, 1998. – Т. 3, № 4. – С. 45-48.

110. Пожуев А.В. Нестационарная динамика ребристой цилиндрической оболочки конечной длины / А.В. Пожуев // Вісник Запорізького державного ун-ту: зб. наук. праць. – Запоріжжя: ЗДУ. – 1999. – № 1. – С. 82-85.

111. Попов А.Л. Метод голографической интерферометрии в задачах о резонансных колебаниях оболочек вращения / А.Л. Попов, В.Е. Солодилов, Г.Н. Чернышев // Механика твердого тела. – 1977. – № 5. – С. 125-131.

112. Пременицкий Е.С. Матричный метод исследования конструкций на основе анализа подструктур / Е.С. Пременицкий – Самара: Изд-во «Фолио пресс», 2011. – 264 с.

113. Преображенский И.Н. Устойчивость и колебания пластинок и оболочек с отверстиями / И.Н. Преображенский. – М.: Машиностроение, 1981. – 192 с.

114. Преображенский И.Н. Устойчивость и колебания конических оболочек / И.Н. Преображенский, В.З. Грищак. – М.: Машиностроение, 1986. – 240 с.

115. Ревуцкий В.Н. К определению частот и форм собственных колебаний сферических оболочек с регулярным кольцевым подкреплением / В.Н. Ревуцкий, А.И. Телалов // Прикл. механика. – 1987. – Т.23, № 11. – С. 112-116.

116. Рудаков К.Н. FEMAP 10.2.0. Геометрическое и конечно-элементное моделирование конструкций / К.Н. Рудаков. – К. НТУУ «КПИ», 2011. – 317 с.

117. Сахаров А.С. Метод конечных элементов в механике твердых тел / [А.С. Сахаров, В.Н. Кислокий, В.В. Киричевский и др.]. – К: Вища школа, 1982. – 480 с.

118. Саченков А.В. Моделирование колебаний консольно подкрепленной цилиндрической оболочки / А.В. Саченков, Ю.Г. Коноплев, В.З. Майстренко //

Исслед. по теории пластин и оболочек: сб. науч. тр. – Казань: КазГУ. – 1984. – Вып. 17. – Ч. 2. – С. 128-133.

119. Свободные колебания ребристых цилиндрических оболочек / П.И. Галака, В.А. Заруцкий, В.И. Мацнер [и др.] // Прикл. механика.– 1974. – Т. 10, № 7. – С. 49-55.

120. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций / [Григоренко Я.М., Беспалова Е.Н., Китайгородский А.Б. и др.]. – К.: Наук. думка, 1986. – 172 с.

121. Селиванов Ю.М. Спекл-голографические исследования резонансных колебаний оболочек с неоднородностями / Ю.М. Селиванов // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. – Дніпропетровськ: Навчальна книга. – 1997. – Вип. 2. – С. 76-86.

122. Селиванов Ю.М. Голографический и конечно-элементный анализ собственных колебаний цилиндрической оболочки, ослабленной круговым отверстием / Ю.М. Селиванов, Д.В. Ключник // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: зб. наук. праць. – Дніпропетровськ: Наука і освіта. – 2007. – Вип. 8. – С. 140-149.

123. Селиванов Ю.М. Голографический и конечно-элементный анализ собственных колебаний конической оболочки, подкрепленной стрингерами переменной жесткости / Ю.М. Селиванов, Д.В. Ключник // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. – Дніпропетровськ: Наука і освіта. – 2006. – Вип. 10. – С. 91-100.

124. Селиванов Ю.М. Исследования неустановившихся деформаций тонкостенных структур с неоднородностями голографическим методом усреднения во времени / Ю.М. Селиванов // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: зб. наук. праць. – Дніпропетровськ: ІМА-прес. – 2009. – Вип. 10. – С. 247-256.

125. Сивак В.Ф. Экспериментальное исследование влияния ребер на собственные частоты колебаний усеченных конических оболочек / В.Ф. Сивак // Прикл. механика. – 1979. – Т. 15, № 7. – С. 40-44.

126. Сивак В.Ф. Диссипативные свойства тонкостенных цилиндрических оболочек со стрингерным подкреплением / В.Ф. Сивак, А.И. Телалов // Прикл. механика. – 1990. – Т. 26, № 8. – С. 59-65.

127. Скосаренко Ю.В. Собственные колебания ребристой оболочки нулевой гауссовой кривизны с консольно присоединенной массой / Ю.В. Скосаренко // Прикл. механика. – 1984. – Т. 20, № 2. – С. 35-41.

128. Скосаренко Ю.В. Напряженно-деформированное состояние меридионально подкрепленной цилиндрической оболочки с присоединенными массами под действием гармонической нагрузки / Ю.В. Скосаренко // Прикл. механика. – 1988. – Т. 24, № 4. – С. 122-126.

129. Статика и динамика тонких оболочечных конструкций / [Кармишин А.В., Лясковец В.А., Мяченков В.И. и др.]. – М.: Машиностроение, 1975. – 376 с.

130. Стренг Г. Линейная алгебра и ее применения: Пер. с англ. / Г. Стренг. – М.: Мир, 1980. – 455 с.

131. Стренг Г. Теория метода конечных элементов: Пер. с англ. / Г. Стренг, Дж. Фикс. – М.: Мир, 1977. – 400 с.

132. Тарануха Н.А. Динамика неправильных оболочек / Н.А. Тарануха, Г.С. Лейзерович. – М.: Дальнаука, 2005. – 423 с.

133. Телалов А.И. Экспериментальное исследование собственных частот и форм колебаний сферических оболочек / А.И. Телалов // Прикл. механика. – 1987. – Т. 23, № 6. – С. 121-125.

134. Телалов А.И. Определение минимальной собственной частоты колебаний сферической оболочки с жестко присоединенной массой / А.И. Телалов // Прикл. механика. – 1987. – Т. 23, № 7. – С. 103-105.

135. Телалов А.И. К вопросу о расчете собственных частот колебаний стрингерных оболочек / А.И. Телалов // Прикл. механика. – 1990. – Т. 26, № 9. – С. 124-128.

136. Теоретико-экспериментальное моделирование оптимального подкрепления цилиндрической оболочки при локальном поперечном нагружении / А.П. Дзюба, Ю.М. Селиванов, П.И. Булакаев [и др.] // Вісник

Дніпропетровського ун-ту: Науковий журнал. Серія: Механіка. – 2004.– Вип. 8, т. 2. – С. 89-96.

137. Уилкинсон Д.Х. Алгебраическая проблема собственных значений / Д.Х. Уилкинсон. – М.: Наука, 1970. – 564 с.

138. Фиалко С.Ю. О формах собственных колебаний ребристых конических оболочек / С.Ю. Фиалко // Прикл. механика. – 1984. – Т. 20, № 11. – С. 51-55.

139. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем / А.П. Филиппов. – М.: Машиностроение, 1970. – 736 с.

140. Флюгге В. Статика и динамика оболочек / В. Флюгге. – М.: Госстройиздат, 1961. – 307 с.

141. Шевченко В.П. Экспериментальное исследование собственных колебаний конструктивно неоднородных цилиндрических оболочек / В.П. Шевченко, О.И. Власов, В.А. Каиров // Вісник Національного технічного ун-ту України «КПІ»: Збірник наук. праць. Серія: Машинобудування. – Київ: НТУУ «КПІ». – 2013. – № 2 (68). – С. 122-127.

142. Шевченко В.П. Оптимизация подкрепленных цилиндрических оболочек при динамическом нагружении / В.П. Шевченко, В.А. Каиров // Актуальні проблеми інженерної механіки: Матеріали II Міжнародної наук.-техн. конференції, 22-24 жовтня 2012 р. – Миколаїв: НУК. – 2012. – С.4-6.

143. Шевченко В.П. Экспериментальное исследование собственных колебаний конструктивно неоднородных цилиндрических оболочек / В.П. Шевченко, О.И. Власов, В.А. Каиров // Прогресивна техніка, технологія та інженерна освіта: Матеріали XIV Міжнародної наук.-техн. конференції, 25-28 червня 2013 р. – Київ-Севастополь: НТУУ «КПІ». – 2013, Ч. 1. – С. 14-16.

144. Шевченко В.П. Собственные колебания конструктивно неоднородных цилиндрических оболочек, ослабленных круглыми отверстиями / В.П. Шевченко, В.А. Каиров // Комп'ютерне моделювання та оптимізація складних систем: Матеріали I Всеукраїнської наук.-техн. конференції, 3-5 листопада 2015 р. – Дніпропетровськ: УДХТУ. – 2015. – С. 81-82.

145. Экспериментальное исследование поведения цилиндрических оболочек с сосредоточенными массами при действии динамического внешнего давления / Л.В. Андреев, А.В. Анциферов, О.М. Дубовик [и др.] // *Механика твердого тела*. – 1983. – № 3. – С.187-191.

146. Экспериментальные исследования тонкостенных конструкций / [Гузь А.Н., Заруцкий В.А., Амиро И.Я. и др.]; Под общ. ред. А.Н. Гузя и В.А.Заруцкого. – К: Наук. думка, 1984. – 240 с.

147. Экспериментально-теоретическое исследование динамических характеристик конических оболочек, подкрепленных стрингерами переменной жесткости / В.З. Грищак, В.В. Петров, Ю.М. Селиванов // *Пробл. прочности*. – 1981. – № 11. – С. 51-55.

148. Amabili M. Rotary inertia of added masses on vibrations of empty and fluid-filled circular cylindrical shells / M. Amabili, R. Garziera, S. Carra // *Journal of Fluids and Structures*. – 2005. – V. 21. – № 5-7. – P. 449-458.

149. Amabili M. Nonlinear vibrations and stability of shells and plates / Amabili M. – New York, USA. Cambridge university press, 2008. – 374 p.

150. Bathe K.J. Numerical methods in finite element analysis / K.J. Bathe // Englewood Cliffs:Prentice-Hall, 2006. – 564 p.

151. Beskos D.E. Dynamic analysis of ring-stiffened circular cylindrical shells / D.E. Beskos, J.B. Oates // *Journal of Sound and Vibration*. – 1981.– V. 75, № 1. – P. 1-15.

152. Billionet A. A comparison of three algorithms for reducing the profile of a sparse matrix / A. Billionet, J.F. Bretean // *Operations Research*. – 1989. – V. 23. – № 3. – P. 289-302.

153. Bray F.M. An experimental investigation of the free vibration of thin cylindrical shells with discrete longitudinal stiffening / F.M. Bray, D.M. Egle // *Journal of Sound and Vibration*. – 1970. – V. 12, № 2. – P.153-164.

154. Chen J.C. Nonlinear vibration of cylindrical shells / J.C. Chen, C.D. Babcock // *AIAA Journal*. – 1975. – V. 13, № 7. – P. 868-876.

155. Chen R. Vibration of cylindrical panels ferrying a concentrated mass / R. Chen // *International Applied Mechanics* (Trans. ASME, Ser. E). – 1979. – V. 37. – № 3. – P. 874-875.

156. Elchelberger E.C. Point admittance of cylindrical shells with and without ring-stiffening / E.C. Elchelberger // *Trans. ASME Eng. Ind.* – 1981. – V. 103, № 3. – P. 293-301.

157. Hodges C.H. The low frequency vibration of a ribber cylinder: Observation and interpretation / C.H.Hodges, J. Power, J. Woodhouse // *Journal of Sound and Vibration.* – 1985. – V. 101, № 2. – Pt. 2. – P. 237-256.

158. *Holographic nondestructive testing* / Ed. by R.Erf. – New York–London: Academic Press, 1974. – 278 p.

159. Khalili S.M.R. Free vibrations of laminated composite shells with uniformly distributed attached mass using higher order shell theory including stiffness effect / S.M.R. Khalili, S. Tafazoli, K. Malekzadeh Fard // *Journal of Sound and Vibration.* – 2011. – V. 330, Issue 26. – P. 6355-6371.

160. Kim H.M. Structural dynamics analysis using an unsymmetric block algorithm / H.M. Kim, R.R. Kraig // *International Journal Num. Meth. Engineering.* – 2008. – P. 230-238.

161. Mahabalaraja V. Vibrations of stiffened cylinders with cutouts / V. Mahabalaraja, D. Boyd, R. Brugh // *Journal of Sound and Vibration.* – 1977. – V. 52, № 1. – P. 65-78.

162. Mallon N.J. Dynamic stability of a thin cylindrical shell with top mass subjected to harmonic base-acceleration / N.J. Mallon // *International Journal of Solids and Structures.* – 2008. – V. 45 (6). – P. 1587-1613.

163. Markus S. *The mechanics of vibrations of cylindrical shells* / S. Markus. – Elsevier, 1988. – 159 p.

164. Modeling of the deformation process of concrete based on a modified version of the theory of flow / V.S. Hudramovich, V.M. Levin, E.V. Samarskaja, S.V. Shabelnik // *Strength of Materials.* – 2014. – V. 46, № 5. – P. 595-600.

165. Pellicano F. Linear and Nonlinear vibration of shells / F. Pellicano // 2-nd International Conference on Nonlinear Normal Modes and Localization in Vibration Systems, Samos, June 19-23, 2006. – P. 1-12.

166. Qatu M.S. Recent research advances in the dynamic behavior of shells: 1989- 2000, Part 2: Homogeneous shells / M.S. Qatu // Appl. Mech. Rev. – 2002. – V. 55. – P. 415-434.

167. Ramamurti V. Dynamic behaviour of a cylindrical shell with a cutout / V. Ramamurti, J. Pattabiraman // Journal of Sound and Vibration. – 1977. – V.52, № 2. – P. 193-200.

168. Singer J. Influence of initial geometrical imperfections on vibrations of axially compressed stiffened cylindrical shells / J.Singer, J. Prucz // Journal of Sound and Vibration. – 1982. – V. 80, № 1. – P. 117-143.

169. Sivak V.F. Experimental investigation into the vibrations of shells of revolution with added masses / V.F. Sivak, V.V. Sivak // International Applied Mechanics. – 2002. – V. 38. – № 5. – P. 623-627.

170. Thin-shell structures. Theory, experiment and design / Ed. Y.C.Fung and A.E. Sechler. – Englewood Cliffs. – New Jersey: Prentice Hall, 1984. – 607 p.

171. Soedel W. Vibrations of Shells and Plates / Soedel W. – New York: Marcel Dekker, Inc. 3-rd edition, 2005. – 586 p.

172. Toda S. Vibrations of circular cylindrical shells with cutouts / S. Toda, K. Komatsu // Journal of Sound and Vibration. – 1977. – V. 52, № 4. – P. 497-510.

173. Trotsenko Yu.V. Frequencies and modes of vibration of a cylindrical shell with attached rigid body / Yu.V. Trotsenko // Journal of Sound and Vibration. – 2006. – V. 292. – Issues 3-5. – P. 535-551.

174. Wang Z.W. The improvement of free-mode methods in component mode synthesis technique and its accuracies / Z.W. Wang, M. Petyt // Proc. of second int. conf. of recent advances in itruct. dyn. – 2004. – P. 194-235.

175. Zienkiewich O.C. The finite element method. Fifth edition / O.C. Zienkiewich, R.L. Teylor. – Oxford: Butterworth-Heihemann Linacre House, Jordan Hill, 2000. – 348 p.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ А

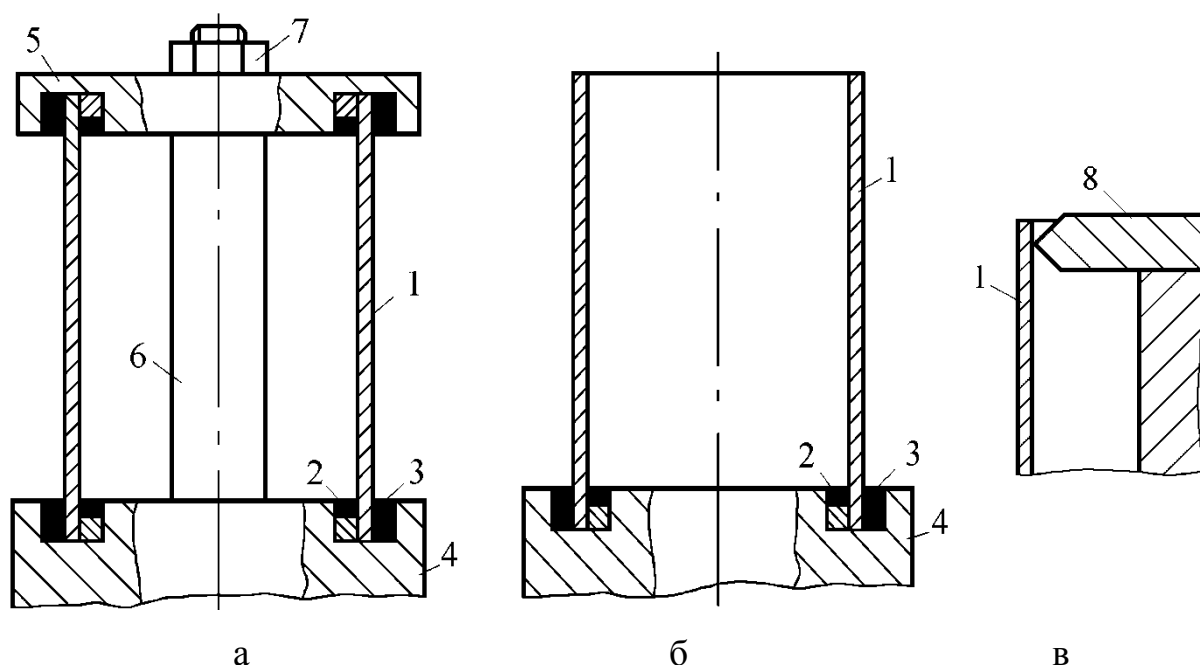
Описание вибростенда и технологии изготовления моделей

Технология изготовления объектов исследования. Анализ экспериментальных исследований тонкостенных оболочек [6, 8, 11, 52, 56, 113, 119, 121-126, 145, 146] показал, что для изготовления моделей могут быть использованы различные технологии и материалы (сплавы алюминия, латунная и медная фольга, сталь, фотоупругая пластмасса). При изготовлении моделей чаще других применяется метод свертывания, при котором края заготовки соединяются сварным швом, обычно точечным или ленточным, что вносит некоторые несовершенства и остаточные деформации.

В проводимом эксперименте оболочечные модели вытачивались на токарных станках из цельных трубчатых стальных заготовок с последующим их шлифованием на круглошлифовальных и внутришлифовальных станках. В качестве материалов моделей использовались стали 40Х, 18ХНВА, 18Х2Н4МА, близкие по физико-механическим характеристикам к материалам, применяемым для изготовления газотурбинных двигателей.

С помощью жестких фланцев, распорных колец и сменных вставок, на торцах оболочек обеспечивались различные граничные условия близкие к шарнирному опиранию со свободным смещением в продольном направлении ($S-S$), жесткому закреплению ($C-C$) обоих торцов и консольному закреплению ($C-F$). Приспособление, позволяющее обеспечить указанные виды закрепления оболочек, представлено на рис. А.1. Для жесткого защемления нижнего

основания торец оболочки 1 помещается в кольцевую канавку диска основания 4. По внутреннему диаметру устанавливается центрирующее кольцо 2 для обеспечения правильной формы оболочки в окружном направлении. Снижение краевых возмущений достигается подгонкой размеров основания модели и центрирующего кольца, посадка которого близка к скользящей. Аналогичным образом выполняется жесткое защемление верхнего основания. Для осуществления шарнирного опирания используются распорные кольца 8, которые с небольшим натягом устанавливаются в оболочку 1 по краям. Свободное пространство кольцевой канавки заполняется оловом 3.

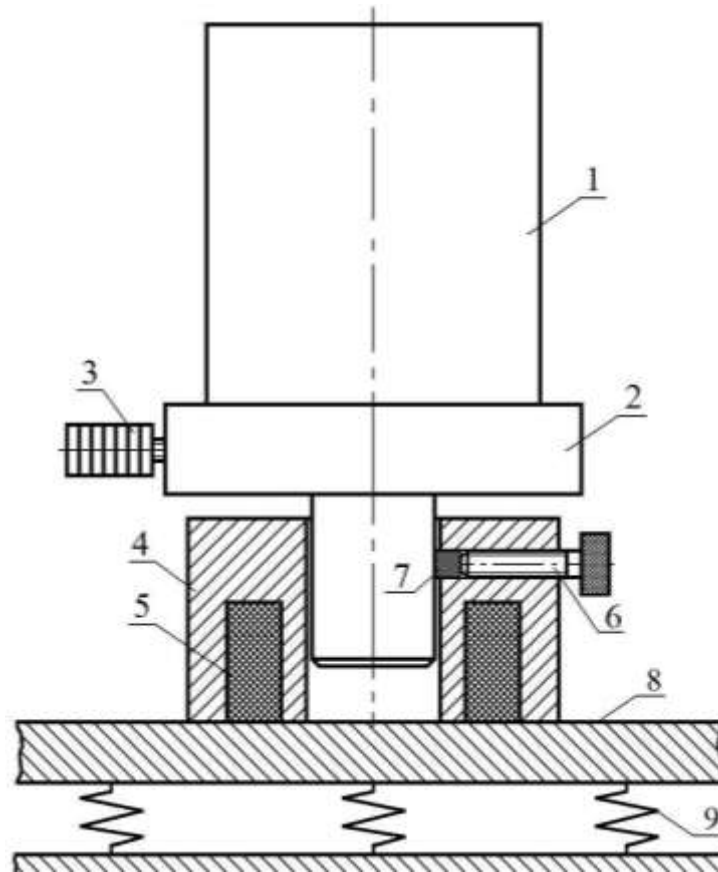


1 – оболочка; 2 – центрирующее кольцо; 3 – сплав олова, 4 – опорный жесткий диск нижнего основания; 5 – жесткий диск верхнего основания; 6 – стойка; 7 – стопорная гайка; 8 – распорное кольцо

Рисунок А.1 – Схема закрепления оболочек.

Подкрепляющие ребра соединялись с поверхностью оболочки с помощью пайки. В качестве присоединенных твердых тел использовались стальные шары, которые крепились к поверхности оболочки винтами. Модели и присоединенные тела покрывались снаружи белой матовой краской с целью обеспечения диффузного отражения света.

Зажимное устройство для крепления оболочек. Зажимное устройство обеспечивает оболочке заданные граничные условия в торцевых сечениях и позволяет жестко фиксироваться в любой точке опорной плиты вибростенда, что значительно облегчает настройку оптической схемы. Конструктивная схема зажимного приспособления представлена на рис. А.2.



1 – модель оболочки; 2 – опорный жесткий диск нижнего основания; 3 – контактный вибратор, 4 – корпус фундамента; 5 – электромагнитная катушка; 6 – зажимные винты; 7 – пробка; 8 – опорная плита; 9 – амортизаторы

Рисунок А.2 – Конструктивная схема зажимного устройства для крепления оболочек.

Для кинематического возбуждения механических колебаний модели 1 в торце нижнего опорного жесткого диска 2 крепится контактный вибратор 3, состоящий из пьезокерамических шайб, соединенных по параллельной схеме. Вибратор жестко связан с зажимным устройством, через которое модели передаются динамические нагрузки. Условия проведения эксперимента для

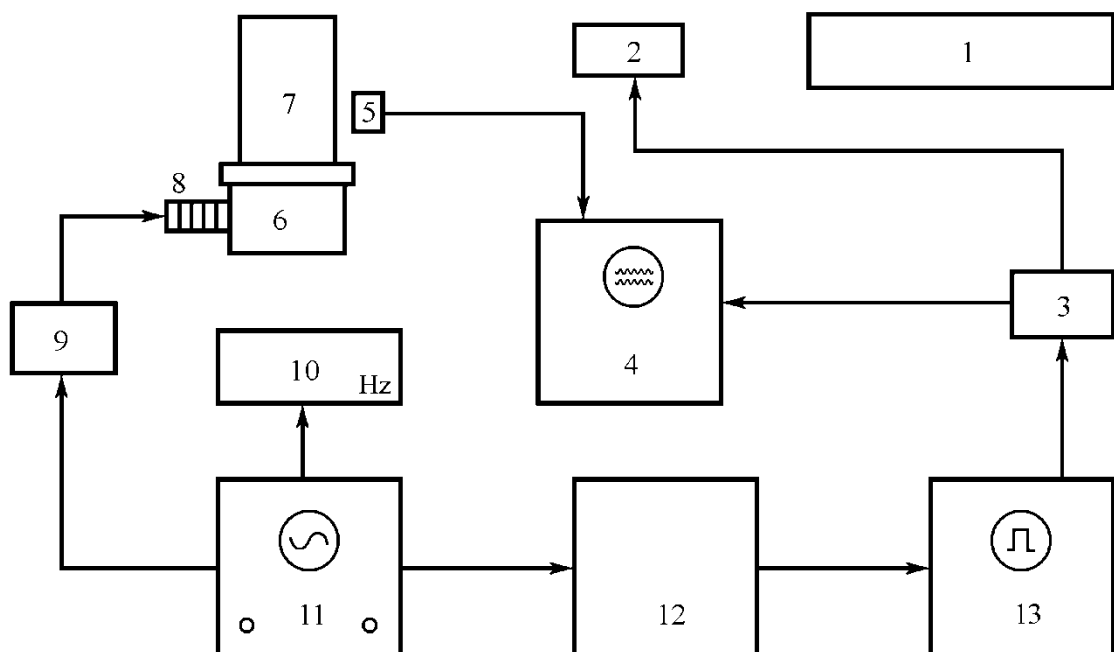
возбуждения колебаний не позволяют использовать прямое электромагнитное воздействие электромагнитной катушкой, так как в этом случае из-за действия вихревых токов на голограмме появляются паразитные интерференционные полосы. Приклеивание с этой целью пьезокристалла на поверхность оболочки также нежелательно, так как создает эффект жестко присоединенного тела и приводит к изменению собственных частот модели.

Опорный жесткий диск с моделью оболочки устанавливается в корпус фундамента 4 и фиксируется зажимными винтами 6. Также в корпус фундамента вмонтирована электромагнитная катушка 5, создающая индукционное поле, что позволяет крепить приспособление в любой точке опорной плиты вибростенда. (см. рис. А.2). Опорная плита расположена на амортизаторах для исключения колебаний от внешней среды.

Аппаратура и оборудование вибростенда. Исследование резонансных колебаний оболочек проводилось на универсальном вибростенде. Применяемое оборудование отвечает поставленным задачам и объектам исследования. Структурная модульная блок-схема вибростенда приведена на рис. А.3 [62].

Принцип работы применяемого оборудования при проведении эксперимента состоит в следующем. Модель оболочки 7 закрепляется в специальном зажимном устройстве 6 (см. рис. А2), которое обеспечивает необходимые условия закрепления. В свою очередь, зажимное устройство с оболочкой устанавливается на массивной опорной плите. Колебания модели возбуждаются контактным вибратором 8. Данный способ возбуждения в отличие от индукционного электромагнитного позволяет расширить диапазон возбуждаемых частот до 20000 Гц и обеспечивает постоянную высокую плотность частотного спектра. В отличие от возбуждения пьезоэлементом, наклеенным на поверхность оболочки, такой способ возбуждения колебаний является более эффективным. При этом источник возбуждения не входит непосредственно в состав исследуемой механической системы, позволяя возбуждать колебания значительных амплитуд, а также не влияет на частоты и формы свободных колебаний. При этом исключается пропуск некоторых неосновных частот из-за неудачного расположения пьезоэлемента

относительно узловых линий. Частоты резонансных колебаний возбуждались звуковым генератором 11 (ГЗ-118). Настройка на нужную резонансную частоту и форму колебаний осуществлялась с помощью звукового генератора варьированием синусоидального напряжения питания вибратора по частоте и амплитуде. Усиленный низкочастотным услителем 9 электрический сигнал переменного тока направлялся на контактный вибратор 8. Резонансные частоты колебаний фиксируются частотомером 10 (Ф5080).



1 – гелий-неоновый оптический квантовый генератор; 2 – стробоскоп;
 3 – высокочастотный усилитель; 4 – двухлучевой осциллограф;
 5 – индукционный датчик; 6 – зажимное устройство; 7 – модель оболочки;
 8 – контактный вибратор; 9 – виброусилитель низкочастотный;
 10 – частотомер; 11 – звуковой генератор; 12 – фазовращатель;
 13 – импульсный генератор

Рисунок А.3 – Структурная модульная блок-схема вибростенда.

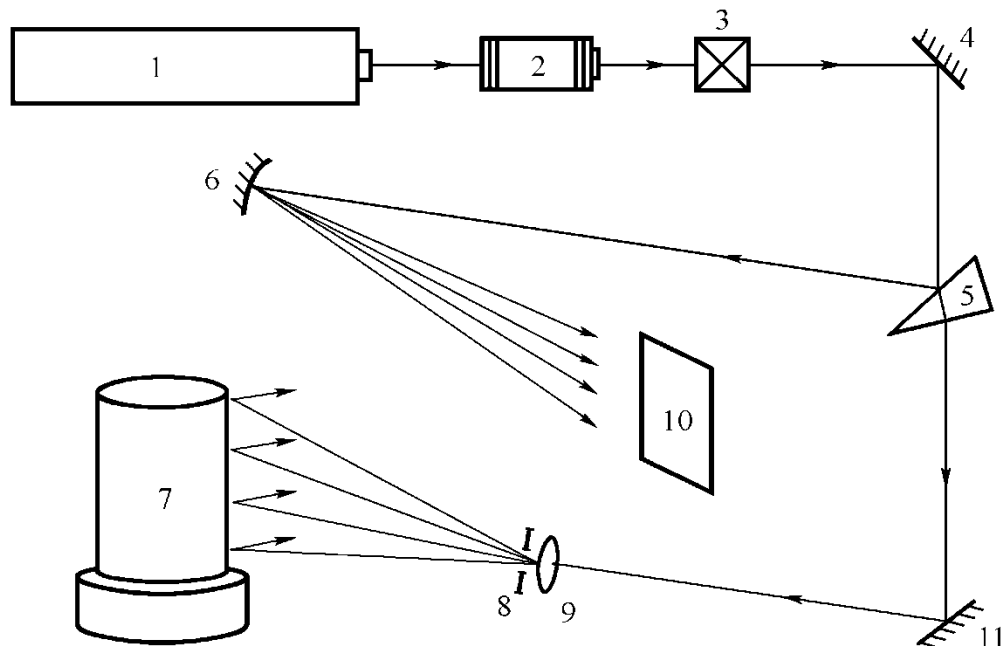
Для получения высококонтрастных интерферограмм применяется стробирование лазерного светового луча. Синхронизация стробирующих импульсов с определенной фазой колебаний оболочки осуществляется

импульсным генератором 13 (Г5-54), генерирующим прямоугольные импульсы, и контролируется двухлучевым осциллографом 4 (С1-17) по заданному периоду колебаний. Для этого электрический сигнал звукового генератора через фазовращатель 12 поступает на импульсный генератор и после усиления высокочастотным усилителем 3 подается на стробоскоп 2 (МЛ-3) и двухлучевой осциллограф 4. В данной блок-схеме фазовращатель применяется для устранения сдвига фаз между возбуждающим сигналом звукового генератора и сигналом, генерируемым индукционным датчиком 5, совпадающим по фазе со скоростью колебаний поверхности оболочки. Для фиксирования узловых линий формообразования и определения волновых чисел m и n индукционный датчик перемещается параллельно поверхности модели вдоль линий ее главных кривизн.

При выполнении эксперимента методом усреднения по времени модульная схема вибростенда упрощается. В структурной модульной блок-схеме, приведенной на рис.А.3, отключаются блоки 2, 3, 12 и 13.

Оптическая схема вибростенда. Оптическая двухлучевая схема голографической интерферометрии используемого вибростенда, собираемая на опорной плите, приведена на рис.А.4 [141]. Подобная схема для голографических исследований впервые была предложена Э. Лейтом и Ю. Упатниексом [73]. В качестве светоизлучателя используется гелий-неоновый оптический квантовый генератор ЛГН-222, работающий в непрерывном одномодовом режиме и обладающий следующими характеристиками: достаточной временной когерентностью, чтобы в плоскости интерферограммы в течение всей экспозиции существовала неподвижная интерференционная микроструктура, образованная в результате когерентного взаимодействия предметной и опорной волн; достаточной пространственной когерентностью (длина когерентности 0,2 м), чтобы предметная световая волна, рассеянная в какую-либо точку интерферограммы от различных участков вибрирующей поверхности, создавала четкую интерференционную микроструктуру с опорной волной; достаточной выходной мощностью (50 мВт) и необходимой длиной световой волны ($\lambda = 6,328 \cdot 10^{-7}$ м, красный цвет), чтобы

светочувствительный материал для записи интерферограмм за время экспозиции мог отреагировать на взаимодействие интерференционного поля.



1 – гелий-неоновый оптический квантовый генератор; 2 – стробоскоп; 3 – оптико-механический затвор; 4, 11 – плоские зеркала; 5 – светоделительный клин; 6 – сферическое зеркало; 7 – модель оболочки; 8 – диафрагма; 9 – микрообъектив ($20\times$); 10 – фотопластинка

Рисунок А.4 – Оптическая голографическая схема вибростенда.

Луч квантового генератора 1 после модулирования стробоскопом 2 попадает на светоделительный клин 5 и разделяется на проходящий и отраженный лучи. Отраженный от клина луч с помощью сферического зеркала формирует опорный освещающий пучок света, который направляется непосредственно на фотопластинку 10. Проходящий луч, отражаясь от зеркала 11, формирует освещающий предметный луч, который после расширения микрообъективом 9 попадает на оболочку и затем, диффузно отраженный от ее поверхности, также поступает на фотопластинку. Для исключения световых шумов предметный луч необходимо пространственно отфильтровать, пропустив его через отверстие точечной диафрагмы 8 ($10\dots 50$ мкм), расположенной за объективом в фокусе луча. Для расширения предметного

луча используется микрообъектив 9, позволяющий сфокусировать световой пучок.

Для обеспечения необходимых выдержек при экспонировании интерферограмм применяется оптико-механический затвор 3 светового луча с электромагнитным управлением и таймер, определяющие время экспонирования. Зеркала 4 и 11 располагаются на рычажных устройствах, способных осуществлять поворот на небольшой угол вокруг жестко фиксированных осей. В приведенной интерференционной схеме деление светового потока производится по амплитуде – в тракты предметного и опорного лучей направляются световые волны, совпадающие по форме, соотношение амплитуд которых выбирается из условий голографирования. Перед выполнением каждого эксперимента выполняется юстировка оптической схемы [22, 102].

Оптимальное соотношение между амплитудами предметной и опорной волн, которое определяется характеристиками светоделителя, выбирается исходя из светорассеивающих свойств объекта исследования и расстояния от объекта до голограммы. Для оптимальной записи голограмм данное соотношение должно соответствовать [102]: $a_n / a_o = 0,3$.

Все оптические элементы вибростенда жестко фиксируются на опорной плите с помощью магнитных устройств. При необходимости расшифровки интерферограмм в оптическую схему дополнительно вводятся две пары предметных и опорных лучей с соответствующими голограммами [141], что позволяет определить три компоненты вектора перемещения поверхности оболочки. Аналогичные оптические схемы с некоторыми особенностями с учетом рассматриваемых задач и объектов исследования использовались в работах [22, 25, 102].



**Государственное предприятие
Научно-производственный комплекс газотурбостроения
«Зоря» - «Машпроект»**



АКТ

о внедрении результатов кандидатской диссертационной работы
Каирова Владимира Алексеевича

Комиссия в составе:

председатель Кулишов С.Б. – зам. генерального конструктора ГП НПКГ
«Зоря»-«Машпроект», к.т.н.;

члены комиссии: Раимов Р.И. – руководитель проектов энергетических ГТД;
Скрицкий А.Н. – начальника отдела прочности.

составила настоящий акт о том, что результаты диссертационной работы Каирова Владимира Алексеевича «Колебания и динамическая устойчивость конструктивно неоднородных оболочек», представленной на соискание ученой степени кандидата технических наук, использованы в проектно-конструкторской деятельности ГП НПКГ «Зоря»-«Машпроект». Особая ценность данной работы в экспериментальном подтверждении методом голографической интерферрометрии разработанных алгоритмов и методов решения рассматриваемых задач. Разработанные алгоритмы и модели использовались при проведении расчетов оболочечных элементов конструкций газотурбинных двигателей с учетом их конструктивного исполнения.

Использование перечисленных алгоритмов и моделей расчета позволило повысить достоверность полученных результатов и сократить затраты на проектирование и доводку оболочечных элементов конструкций газотурбинных двигателей.

Председатель комиссии: _____ (С. Б. Кулишов)

Члены комиссии: _____ (Р.И. Раимов)

_____ (А. Н. Скрицкий)

«ЗАТВЕРДЖУЮ»
 Директор ВАТ УкрНДІТСМ,
 національний експерт України
 по лазерним і лазерним технологіям,



П.Я. Ревнюк

2012 р

АКТ ВПРОВАДЖЕННЯ

результатів дисертаційної роботи аспіранта Донецького
 національного університету Каїрова Володимира Олексійовича
 з дослідження коливань конструктивно неоднорідних
 оболонок при динамічному навантаженні

Даний акт складений у тому, що результати дисертаційної роботи Каїрова В.О. по дослідженню власних коливань неоднорідних тонкостінних оболонок використані в ВАТ «Український науково-дослідний інститут технології суднового машинобудування» (УкрНДІТСМ).

Розроблені Каїровим В.О. нові математичні моделі, методи розрахунку, пакети прикладних програм та методики експериментальних досліджень основних динамічних характеристик і напружено-деформованого стану, а також рекомендації з практичного використання сучасних чисельних методів у визначенні спектру частот і форм власних коливань підкріплених оболонкових конструкцій представляють практичний інтерес, оскільки дозволяють оцінити вплив локальних неоднорідностей на їх динамічну поведінку та технічний стан, визначити оптимальні параметри та надійність. Особливий інтерес представляють методика проведення та результати експериментальних досліджень динамічної поведінки оболонок з використанням лазерної техніки.

Отримані в роботі результати і розроблені рекомендації були використані для оцінки й аналізу технічного стану елементів суднових та машинобудівних конструкцій. Це дозволило отримати достовірний прогноз їх віброміцності та несучої здатності з урахуванням локальних конструктивних особливостей, скоротити витрати і строки проектування та виготовлення, трудомісткість проведення експертних оцінок ресурсу надійного використання та підготовки відповідної проектно-технічної документації.

Даний акт виданий для пред'явлення за місцем захисту дисертації і не може бути підставою для отримання будь-яких коштів з фондів підприємства.

Нач. науково-дослідного
 сектора

В.Д. Колеснік

ЗАТВЕРДЖУЮ
 Директор ОХСП “Універсал”
 ДП “Суднобудівний завод
 ім. 61 Комунара”
 Г.І. Мазурець
 2012 р.



АКТ ВПРОВАДЖЕННЯ
 результатів кандидатської дисертації аспіранта Донецького
 національного університету Каірова Володимира Олексійовича
 з дослідження коливань конструктивно неоднорідних
 оболонок при динамічному навантаженні

Даний акт складений у тому, що результати дисертаційної роботи В.О. Каірова, у тому числі методики і пакети прикладних програм (ППП) розрахунку коливань та несучої здатності конструктивно неоднорідних тонкостінних оболонок з урахуванням розташування та розмірів підкріплюючих ребер, прийняті до використання в практиці проектних розробок ОХСП „Універсал” ДП „Суднобудівний завод ім. 61 комунара”.

Розроблені дисертантом нові розрахункові методики та ППП були використані при проектуванні суднових конструкцій та елементів палубних пристроїв ряду проектів морських суден, що дозволило підібрати оптимальні геометричні параметри і одержати достовірні оцінки їх несучої здатності та основних динамічних характеристик і напружено-деформованого стану. Реалізація розрахункових методик дала можливість скоротити строки і трудомісткість підготовки відповідної проектно-технічної документації та виготовлення конструкцій, підвищити їх надійність та якість.

Отримані в роботі результати представляють практичний інтерес, оскільки дозволяють оцінити зниження розрахункової несучої здатності елементів суднових конструкцій в результаті накопичення експлуатаційних ушкоджень різної природи та дії зовнішніх динамічних навантажень. Практичний інтерес представляють також дані експериментальних досліджень коливань та динамічної поведінки підкріплених ребрами оболонок з приєднаними твердими тілами.

Даний акт виданий для пред’явлення за місцем захисту дисертації та не може бути підставою для отримання будь-яких коштів з фондів підприємства.

Головний технолог ОХСП “Універсал”
 ДП “Суднобудівний завод
 ім. 61 Комунара”



Є.М. Калінін

«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Проректор з наукової роботи

Нац. університету кораблебудування

д.т.н., професор

В.С. Блінцов

» жовтня 2014 р.



АКТ

про впровадження в навчальний процес результатів кандидатської дисертації аспіранта Донецького національного університету Каірова Володимира Олексійовича

Розроблені Каіровим В.О. нові алгоритми розрахунків, пакети прикладних програм, розрахункова методика та результати експериментальних досліджень коливань і динамічної стійкості тонкостінних конструктивно неоднорідних оболонок, що складають матеріали його кандидатської дисертації, використані при виконанні держбюджетних тем: «Розробка методу експериментального визначення напружено-деформівного стану елементів високоефективних газотурбінних двигунів при резонансній вібрації» (номер державної реєстрації 0110U001323) та «Розробка математичних моделей і методів дослідження коливань та напружено-деформівного стану лопаткових та оболонкових елементів газотурбінних двигунів з урахуванням конструктивних та технологічних факторів» (номер державної реєстрації 0114U002009).

Розрахункові програми та алгоритми передані в обчислювальний центр науково-дослідної лабораторії «Перспективні енергетичні технології та надійність суднових машин» кафедри «Теоретична механіка» НУК та використовуються в наукових дослідженнях та навчальному процесі.

Передані обчислювальна методика, алгоритми та програми розрахунку дозволяють визначати основні динамічні характеристики і напружено-деформований стан неоднорідних пружних оболонкових конструкцій та їх оптимальні геометричні параметри.

Завідувач кафедри
«Теоретична механіка»,
д.т.н., професор

М.Р. Ткач