Міністерство освіти і науки України
Національний університет «Запорізька політехніка»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання лабораторних робіт з дисципліни
«**Цифрова обробка сигналів та зображень, сигнальні процесори»**
для студентів спеціальності
172 «Електронні комунікації та радіотехніка»
(G5 «Електроніка, електронні комунікації,
приладобудування та радіотехніка»)
усіх форм навчання

Дискретне перетворення Фур’є й вагові вікна

2026

Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з дисципліни «Цифрова обробка сигналів та зображень, сигнальні процесори» для студентів спеціальності 172 «Електронні комунікації та радіотехніка» (G5 «Електроніка, електронні комунікації, приладобудування та радіотехніка») усіх форм навчання. Дискретне перетворення Фур'є й вагові вікна / Укл. М.П. Чорнобородов, А.В. Тіменко, Є.І. Колеснікова. Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2026. – 40 с.

Укладачі: М.П. ЧОРНОБОРОДОВ, к.т.н., доцент
А.В. ТІМЕНКО, ст. викладач
Є.І. КОЛЕСНІКОВА, зав. навч. лабораторії

Рецензент: С.С. САМОЙЛИК, к.ф-м.н., доцент

Відповідальний за випуск: А.В. ТІМЕНКО, ст. викладач

Затверджено
на засіданні кафедри РТТ
Протокол № 2 від 01.09.2026 р.

Затверджено
на засіданні НМК факультету ФІБЕК
Протокол № 2 від 25.09.2026 р.

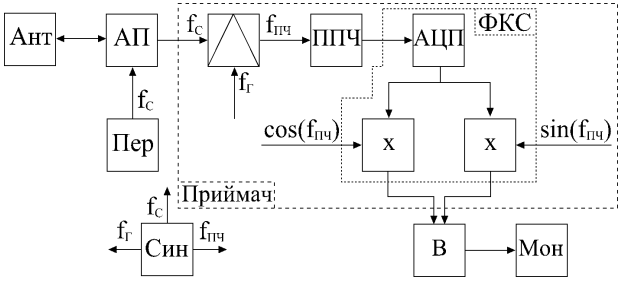
ЗМІСТ

С.
1 Лабораторна робота №1. Дискретне перетворення Фур'є й вагові вікна....4
1.1 Фізичні основи радіолокації....4
1.2 Алгоритм дискретного перетворення Фур'є....9
1.3 Характеристики фільтрів ДПФ....16
1.4 Вагові функції....17
1.4.1 Причини виникнення вагових функцій....17
1.4.2 ДПФ з ваговою обробкою сигналів....20
1.4.3 Методи розрахунку відомих вагових функцій....21
1.4.4 Основні параметри оптимальності вагових функцій....24
1.4.5 Особливості застосування вікон у радіолокації....26
1.5 Підвищення роздільної здатності ДПФ....30
1.6 Швидке перетворення Фур'є....33
1.7 Двовимірне ДПФ і обробка зображень....34
1.8 Порядок виконання роботи....36
1.9 Контрольні запитання....38
1.10 Зміст звіту....38
Перелік джерел посилань....39

1 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №1
ДИСКРЕТНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є Й ВАГОВІ ВІКНА

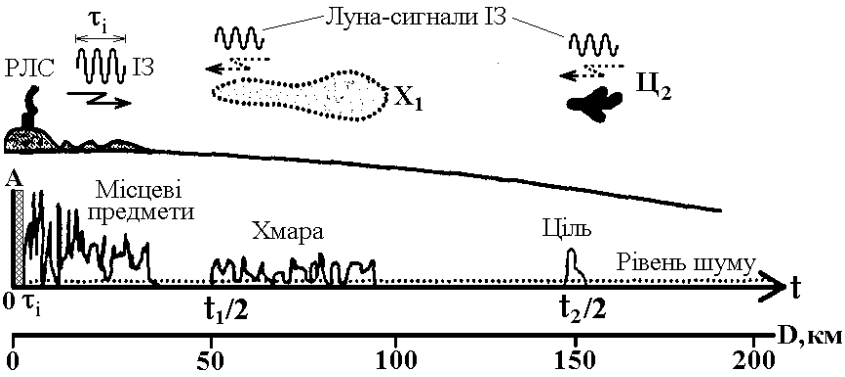
1.1 Фізичні основи радіолокації

Спрощено, структурну схему когерентно-імпульсної РЛС можна подати у вигляді семи основних складових частин (див. рис. 1.1): антени, антенного перемикача (АП), передавача, приймача, пристрою виявлення й пристрою відображення, а також системи синхронізації. Після того, як сформований у передавачі сигнал зондування тривалістю τ_i (див. рис. 1.2) було випромінено, антенний перемикач переводиться у режим прийому, й з виходу антени на вхід приймача надходить радіолокаційний сигнал (електромагнітні хвилі, відбиті від об'єктів, опромінених імпульсами зондування). У приймачі відбувається перенесення спектру прийнятого сигналу з робочої частоти f_0 (деци-, санти- або міліметровий діапазони хвиль) на проміжну $f_{ПЧ}$ (більш низьку – придатну для обробки: 24 або 32 МГц) й підсилювання прийнятого сигналу. У РЛС метрового діапазону застосування сучасної радіоелементної бази дозволяє проводити обробку радіолокаційних сигналів безпосередньо на частоті випромінення f_0.



Ант – антена; АП – антенний перемикач; Пер – передавач;
ППЧ – підсилювач проміжної частоти;
АЦП – аналого-цифровий перетворювач; В – виявлювач;
Мон – монітор (індикатор); Син – система синхронізації.

Рисунок 1.1 – Спрощена структурна схема РЛС



ххх – інтервал випромінювання ([0; τ_i]) імпульсу зондування (ІЗ).

Рисунок 1.2 – Принцип радіолокаційного зондування

Інформаційні параметри луна-сигналів (амплітуда й фаза) визначаються за допомоги фазового детектора – пристрою, на виході якого формується амплітуда, пропорційна фазі гармонійного коливання. Для підвищення ефективності обробки сигналів, у сучасних РЛС роль фазового детектора виконує цифровий формувач квадратурних складових (ФКС). Далі оцифрована радіолокаційна інформація надходить до виявлювача (В) у вигляді багатопроцесорних систем первинної й вторинної обробки інформації. Система первинної обробки здійснює виявлення радіолокаційних цілей й розрахунок їх координат. Система вторинної обробки здійснює трасову обробку руху цілей й виведення їх на індикатор (монітор Мон) робочого місця оператора РЛС.

З моменту перемикання АП в режим прийому (у момент часу τ_i – див. рис. 1.2), з виходу антени на вхід приймача надходять сигнали, відбиті від рухомих цілей (літаки, вертольоти, ракети, міни, снаряди), рельєфу місцевості (гори, будівлі), хмар й метеоявищ (опади у вигляді дощу, снігу, граду), які знаходяться на відстані D_{Oi} від кожного і-об'єкта до РЛС. Оскільки поширення радіохвиль на дальність D_{Oi} у просторі відбувається не миттєво, то відбитий сигнал (тієї ж тривалості τ_i, але істотно меншої амплітуди – див. рис. 1.2) від об'єкта X_1 надходить на вхід приймача через час $t_1=2\cdot D_{X1}/c$, а від об'єкта $Ц_2$ – через час $t_2=2\cdot D_{Ц2}/c$ так, що $t_1<t_2$ (див. рис. 1.2), де $c=3\cdot 10^8$ м/с.

У режимі прийому аналого-цифровий перетворювач (АЦП) безперервно оцифровує радіолокаційний сигнал протягом часу $t_{пр}$ (див. рис. 1.3). Кожен відлік АЦП (відповідно до формули Ейлера) помножується на відліки $\sin(\omega_{пч}\cdot t)$ й $\cos(\omega_{пч}\cdot t)$, де $t\in[0;\ T_п]$, а $T_п=1/F_п=2\cdot D_{max}/c$ – період повторення імпульсів зондування (див. рис. 1.3), де D_{max} – дальність дії РЛС (максимальна дальність виявлення цілей). На інтервалі $[m\cdot\tau_i;\ (m+1)\cdot\tau_i]$, де m – номер елемента розділення дальності (дискрета), здійснюється формування sin- й cos-квадратурних складових з метою перетворення інформативних параметрів радіолокаційного сигналу (амплітуди й фази луна-сигналів, відбитих від різних об'єктів) на більш зручний для подальшої обробки вигляд. З інформації луна-сигналів, відбитих від випроміненого імпульсу зондування, у ФКС утворюється масив комплексних чисел $\{A_m\}$. Кількість елементів масиву $M=T_п/\tau_i$, де $m\in[0;\ M]$. Таким чином, для кожного елемента розділення дальності формується одне комплексне число, а вся робоча дальність є масивом таких чисел.

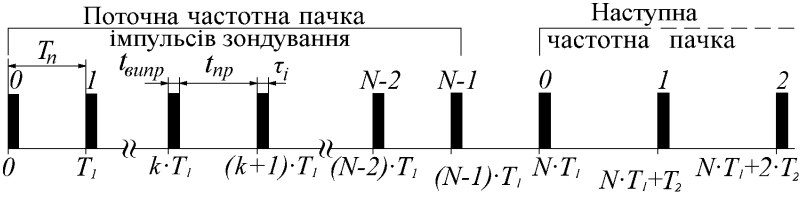


Рисунок 1.3 – Частотна пачка імпульсів зондування РЛС

Значення кожного елемента масиву $\{A_m\}$ складається з амплітуд внутрішніх шумів приймального каналу РЛС та шумів ефіру $A_ш$, а також луна-сигналів, відбитих від пасивних завад $A_{п.з.}$ та цілей $A_ц$: $A_m=A_{ш\ m}+A_{п.з.\ m}+A_{ц\ m}$. На відміну від шумів, які вносять свій внесок до сумарної амплітуди A_m у кожному m-елементі дальності, пасивні завади й/або цілі у деякому m-елементі дальності можуть бути відсутні. У такому разі $A_{п.з.\ m}=0$ й/або $A_{ц\ m}=0$.

Амплітуди шумів працездатної РЛС звичайно становлять 2..3 розряди АЦП, тобто $(2^2-1)..(2^3-1)$ або до 3..7 абс. од. Одним із способів розрахунку порогу виявлення корисних сигналів є рівень шумів: величина порогу задається у 1,5..3 рази вищою від

середньоквадратичного значення шумів. Наприклад, у виявлювачеві РЛС 35Д6 застосовується поріг «за шумами» у 8 абс. од. Амплітуди А й фази φ квадратурних складових шумів – випадкові величини. Масив відліків шуму аналітично можна подати так: $A_ш=\{A_{ш\ m}\cdot e^{-j\cdot\varphi_{ш\ m}}\}$, де $m\in[0; M]$ – номер елемента розділення дальності.

Оскільки дальність радіолокаційного виявлення зворотно пропорційна кореневі четвертого ступеню з імпульсної потужності передавача, то чим далі від РЛС знаходиться ціль, тим складніше її виявлення на тлі шумів. З метою підвищення відношення сигнал/шум виявлення здійснюють не за інформацією від одного імпульсу зондування (як у некогерентних РЛС), а за інформацією, отриманою від кількох випромінених сигналів. Кілька імпульсів зондування, випромінених з однією частотою повторення $F_п=1/T_п$, називається частотною пачкою (див. рис. 1.3). $T_п=t_{випр}+t_{пр}$, де $t_{випр}$ – час роботи РЛС в режимі випромінювання радіоімпульсу зондування, $t_{пр}$ – час роботи РЛС в режимі приймання луна-сигналів.

Завдяки застосуванню внутрішнього високостабільного генератора опорних сигналів, у когерентно-імпульсних РЛС кожний імпульс випромінюється із сталою початковою фазою φ_0 (принаймні, в межах однієї частотної пачки – див. рис. 1.3). Частина енергії електромагнітної хвилі, відбитої від об'єкту, опроміненого імпульсом зондування, повертається в бік РЛС. За цього, початкова фаза луна-сигналу (відносно фази випроміненого імпульсу зондування) набуває зміни на суму величин ψ_0, що залежить від відстані до опроміненого об'єкту й φ_k, що залежить від швидкості руху об'єкту та номера імпульсу зондування $k\in[0; N-1]$ частотної пачки. Для нерухомих пасивних завад (гори, будівлі, тощо) $\varphi_0=\varphi_1=\ldots=\varphi_{N-1}=const$, тобто міжперіодний зсув початкової фази сигналів, відбитих від одного й того ж об'єкту, $\Delta\varphi=\varphi_{k+1}-\varphi_k=0$. Такі завади називають місцевими предметами (див. рис. 1.4).

Луна-сигнали від рухомих об'єктів набувають ненульового значення фазового зсуву $\Delta\varphi$. Якщо об'єкт рухається лінійно й рівномірно, то закон зміни фази прийнятого антеною сигналу є лінійним, тобто $\Delta\varphi=const$. Якщо ж ціль рухається з пришвидшенням, то $\Delta\varphi\neq const$ (див. рис. 1.4). Класична теорія радіолокації ґрунтується на лінійному законі зміни $\Delta\varphi$ й сталості амплітуди А луна-сигналів протягом опромінення об'єкта, що спостерігається, імпульсами

зондування однієї частотної пачки. Тому масив відліків таких сигналів аналітично можна подати так: $A_{c\,m}=\{A\cdot e^{-j\cdot k\cdot\Delta\varphi}\}$, де k – номер імпульсу зондування, m – номер елемента дальності.

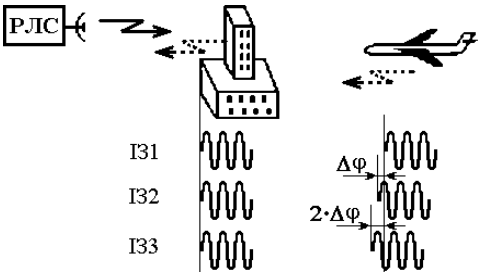


Рисунок 1.4 – Фази луна-сигналів, відбитих від нерухомих й рухомих об’єктів

Через наявність міжперіодного фазового зсуву Δφ, у спектрі сигналу рухомого об’єкта з’являється частота Доплера:

$$f_д=\Delta\varphi/T_п. \qquad (1)$$

Цей параметр дозволяє здійснювати селекцію рухомих цілей (СРЦ) у системах первинної обробки радіолокаційної інформації в РЛС з метою виявлення рухомих (з великими швидкостями) цілей на тлі малорухомих пасивних завад.

Раніше, за аналогового здійснення апаратури систем первинної обробки, радіолокаційний сигнал аналізували за допомоги гребінкових фільтрів накопичення. Це – набір вузькосмугових фільтрів (спрощено – коливальних контурів), що перекривають заданий діапазон доплерівських частот. Луна-сигнал, відбитий від радіолокаційного об’єкта з міжперіодним зсувом фази Δφ, накопичується лише в одному з фільтрів [відповідно до ()]. У решті фільтрів сигнал не накопичується, оскільки не потрапляє до їх смуг пропускання. Для підвищення роздільної здатності за доплерівською частотою, застосовують фільтри з більш вузькою смугою пропускання. Але це призводить до необхідності збільшення кількості фільтрів (для перекриття заданого діапазону доплерівських частот). З

метою зменшення кількості фільтрів, їх виконують з різною шириною смуги пропускання: чим більша швидкість, тим ширша смуга.

За цифрового здійснення апаратури систем первинної обробки, визначення частоти Доплера (за інформацією луна-сигналів однієї частотної пачки) виконується методами спектрального аналізу. Широко поширеним методом цифрового спектрального аналізу є дискретне перетворення Фур'є (ДПФ). ДПФ – це математичний аналог гребінки фільтрів з однаковими характеристиками (шириною смуги пропускання, рівнями бічних пелюсток, коефіцієнта передачі, тощо).

1.2 Алгоритм дискретного перетворення Фур'є

Розглянемо випадок чотирьох випромінених імпульсів зондування. Для визначеності, покладемо, що прийняті луна-сигнали від різних імпульсів зондування деякого елемента дальності мають амплітуду A й зсув фаз (від імпульсу до імпульсу) $\Delta\varphi=90°$. На комплексній площині, в полярних координатах, вектори прийнятих сигналів матимуть таке розташування, як показано на рисунку1.5, а).

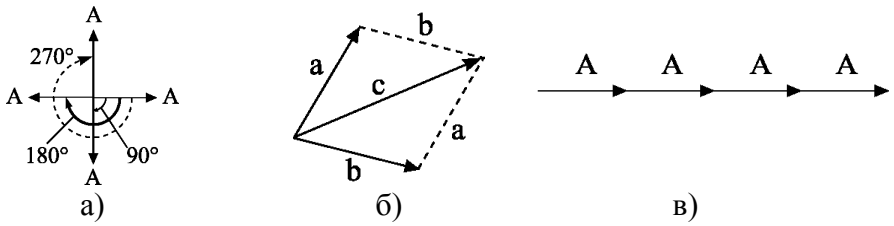


Рисунок 1.4 – Векторна сума

Як обчислити сумарний вектор? Якщо ці вектори просто скласти, то в підсумку отримаємо нуль: як відомо, вектори додаються за правилом паралелограма (див. рис. 1.5, б)). Також відомо, що третій бік трикутника abc не може бути більшим за суму решти двох, тобто $c<a+b$. Для розглянутого випадку $a=b=A$, а підсумковий вектор $c<2\cdot A$. Максимальне значення $c=2\cdot A$ можливе тоді, коли кут (ab) набуває нульового значення. Тобто, якщо за додавання кожний k-вектор повертати рівно на кут $\Delta\psi_k=-k\cdot\Delta\varphi$ (у даному випадку – на $-k\cdot 90°$, де $k=0...3$), то вектори когерентно накопичаться з підсумковою

амплітудою $A_\Sigma=N\cdot A=4\cdot A$, де N – кількість векторів або імпульсів зондування (див. рис. 1.5, в)). За $\Delta\psi_k\neq -k\cdot\Delta\varphi$ $A_\Sigma<N\cdot A$.

Оскільки швидкість руху літака відносно РЛС – невідома, то значення $\Delta\varphi$ може набувати довільної величини. З цієї ж причини, значення довертального множника $\Delta\psi$ є теж заздалегідь невідомим (на відміну від розглянутого на рис. 1.5 випадку), а функція $A_\Sigma(\Delta\psi_k)$ матиме лише один максимум (за $\Delta\psi_k=-k\cdot\Delta\varphi$).

Таким чином, визначення частоти Доплера є задачею одновимірної лінійної оптимізації (пошук максимуму), яка може бути розв'язана методами перебору, дихотомії (ділення відрізку навпіл), золотого перетину, тощо. Але в умовах обмеженості часу на проведення обробки сигналів, з метою пошуку максимуму функції когерентного накопичення, весь діапазон можливих значень зсуву фаз $\Delta\varphi$ (від 0° до 360°) розбивають на N інтервалів й для кожного інтервалу (фільтра) застосовують свій довертальний множник. Така математична операція або метод цифрової обробки сигналів називається дискретним перетворенням Фур'є:

$$G(n)=\sum_{k=0}^{N-1}A_k\cdot e^{-j\cdot(\varphi_k-2\cdot\pi\cdot k\cdot n/N)}, \qquad (2)$$

де n=0..N-1 – номер фільтра;

N – кількість фільтрів або імпульсів зондування;

$A_k\cdot e^{-j\cdot\varphi_k}$ – комплексна амплітуда k-відліку.

Центральній частоті n-фільтру f_n відповідає зсув фаз $\Delta\varphi=2\cdot\pi\cdot n/N$.

Луна-сигнали з зсувом фаз $\Delta\varphi$, кратним $2\cdot\pi/N$ (наприклад, для N=8 це 0°, 45°, 90°, 135°, 180°, 235° або -135°, 270° або -90°, 315° або -45°), накопичуються з коефіцієнтом когерентного накопичення N.

Якщо $\Delta\varphi_ц=45$, то сигнал накопичуватиметься лише у фільтрі №1: $\Delta\varphi_ц/(360°/N)=45°/(360°/8)=1$, якщо ж $\Delta\varphi_ц=180°$ – то у фільтрі № 4: $\Delta\varphi_ц/(360°/N)=180°/(360°/8)=4$.

Через те, що функції sin й cos – періодичні, у перших N/2 фільтрів накопичуються сигнали з $0°<\Delta\varphi<180°$ (за $\Delta\varphi>0$ ціль віддаляється від РЛС), а у другій половині фільтрів накопичуються сигнали з $0°>\Delta\varphi>-180°$ (за $\Delta\varphi<0$ ціль наближується до РЛС).

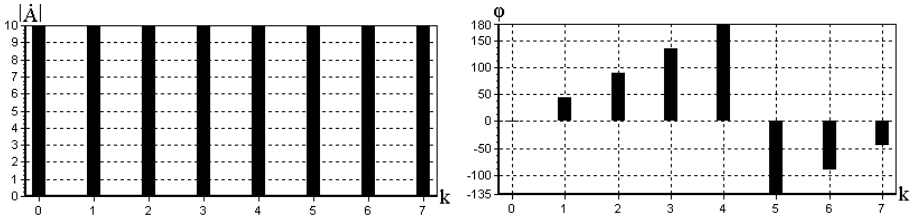
Таким чином, коефіцієнт когерентного накопичення луна-сигналів з лінійним законом зсуву фаз від імпульсу (зондування) до імпульсу:

а) становить максимальну величину N за $\Delta\varphi$, кратного $2\cdot\pi/N$, – тобто, коли частота сигналу f_c збігається з центральною частотою f_n одного з фільтрів ДПФ: $f_c=f_n$;

б) становить мінімальну величину $N\cdot 0{,}631$ за $\Delta\varphi$, кратного π/N, – тобто, за $f_c=(f_{n+1}+f_n)/2$.

Оскільки шумовий процес описується нормальним законом розподілу, то обчислення ДПФ збільшує середньоквадратичне значення шумів у $\sqrt{N}$ разів. У той же час, амплітуда корисного сигналу за когерентного накопичення збільшується у N разів. Тому максимальний виграш у відношенні сигнал/шум після виконання ДПФ становить $N/\sqrt{N}=\sqrt{N}$ разів у випадку $\Delta\varphi$, кратного $2\cdot\pi/N$.

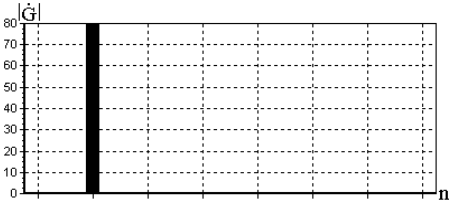
На рисунках 1.6, а) й б) подані амплітуди й фази цілі ($A_ц=10$, $\Delta\varphi_ц=45°$) для випадку 8 імпульсів зондування (N=8), а на рисунку 1.6, в) – їх спектр. На рисунку 1.6, б) можна побачити, що різниця фаз між сусідніми імпульсами становить задані 45°, а зсув фаз – лінійний. На рисунку 1.7 подано випадок суміші луна-сигналів, відбитих від цілі ($A_ц=10$, $\Delta\varphi_ц=180°$), що рухається на тлі місцевого предмету ($A_{м.п.}=100$, $\Delta\varphi_{м.п.}=0°$).



а) б)

а – амплітуда; б – фаза;

Рисунок 1.6 – Луна-сигнали цілі у часовій області



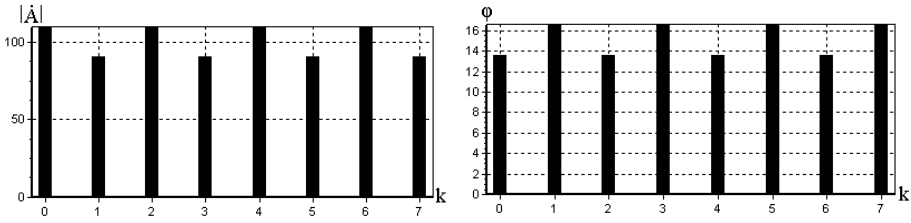
в)

в – їх спектр.

Рисунок 1.6, аркуш 2

Через наявність в одному елементі дальності кількох радіолокаційних об’єктів, на виході приймальної антени утворюється суміш (векторна сума) цих сигналів. Відповідно до амплітудно-фазових співвідношень між складовими, амплітуди (див. рис. 1.7, а)) й фази (див. рис. 1.7, б)) сумарних сигналів для різних імпульсів зондування відрізнятимуться (на відміну від рис. 1.6, а)).

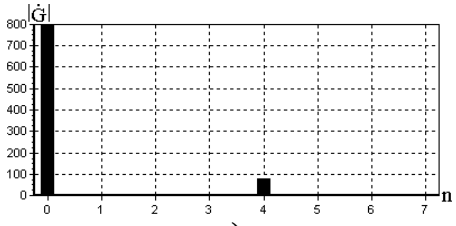
Завдяки тому, що задані $\Delta\varphi_{ц}$ й $\Delta\varphi_{м.п.}$ пропорційні 360°/N=360°/8=45°, сигнали накопичуються лише у фільтрах № 0 й 4 (див. рис. 1.7, в)).



а) б)

а – амплітуда; б – фаза;

Рисунок 1.7 – Луна-сигнали цілі й пасивної завади у часовій області



в)

в) – їх спектр.

Рисунок 1.7, аркуш 2

Для цих фільтрів довертальні множники забезпечують синфазність векторів, що додаються. А у решті фільтрів ці множники розвертають вектори таким чином, що останні залишаються попарно протифазними й за додавання взаємно знищуються (попарно віднімаються).

За рахунок того, що фазові зсуви сигналів, наведених на рисунках 1.6 та 1.7, відповідають центральним частотам фільтрів Фур'є, амплітуди сигналів когерентно накопичуються з коефіцієнтом

$$N: G_{м.п.}=G(0)=N\cdot A_{м.п.}=8\cdot 100=800,$$

$$G_{ц}=G(1)|_{рис.\ 0.6}=G(4)|_{рис.\ 0.7}=N\cdot A_{ц}=8\cdot 10=80.$$

Звичайно зсув фаз між складовими пасивної завади $\Delta\varphi\neq 0$. Це призводить до того, що за довертання векторів вхідного сигналу на кути, пропорційні $2\cdot\pi\cdot n/N$ (n – номер фільтру), вектори попарно не віднімаються (взаємно не знищуються). Але підсумковий вектор тим ближчий до нуля, чим ближче $\Delta\varphi$ до 0°.

Задамося $\Delta\varphi_{м.п.}=5°$ й подивимося (на рис. 1.8 як зміниться спектр суміші з рисунку 1.7. Через те, що $\Delta\varphi_{м.п.}=5°$ не є цілим кратним до 360°/N (але є близьким до 0°), то пасивна завада переважно накопичиться у фільтрі № 0 (з коефіцієнтом накопичення, близьким до N) амплітудою 784 (див. рис. 1.8) замість $N\cdot A_{м.п.}=8\cdot 100=800$.

На відміну від рисунку 1.7, в), за такого фазового зсуву у решті фільтрів теж накопичуються деякі амплітуди. Їх величини

визначаються параметрами сигналу $A_{м.п.}$, $\Delta\varphi_{м.п.}$ й амплітудно-частотною характеристикою (АЧХ) фільтрів ДПФ.

Це накопичення може бути не лише синфазним, а й протифазним, що визначається початковими фазами луна-сигналів, відбитих від різних об'єктів. Так, через наявність пасивної завади, амплітуда цілі у фільтрі № 4 з 80 од. (див. рис. 1.7, в)) зменшилася до 40 од. (див. рис. 1.8).

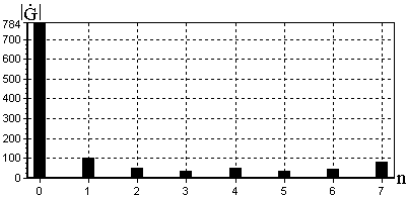


Рисунок 1.8 – Спектр суміші пасивної завади й цілі

Чим ближче зсув фаз $\Delta\varphi$ до значення $\pi \cdot n/N$ (тобто, $f_c=(f_{n+1}+f_n)/2$), тим меншою стає ефективність ДПФ. У крапках $\Delta\varphi=\pi \cdot n/N$ роздільна здатність спектрального аналізу методом ДПФ є найгіршою. Для ілюстрації, на рисунку 1.9 наведено спектр сигналу з амплітудою {A}=100 од. й зсувом фаз $\Delta\varphi=\pi/N=22{,}5°$. Довертальні множники у двох сусідніх фільтрах (№ 0 й 1) стають однаковими, внаслідок чого у цих фільтрах накопичуються рівноамплітудні значення. Коефіцієнт когерентного накопичення знижується до мінімального значення $N \cdot 0{,}631$ (втрати становлять 4 дБ), а у решті фільтрів істотно підвищується рівень шумів. Це відбувається через непрямокутність АЧХ фільтрів ДПФ й наявність бічних пелюсток (див. рис. 1.10).

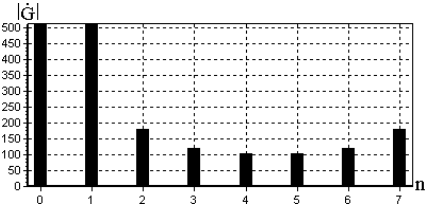
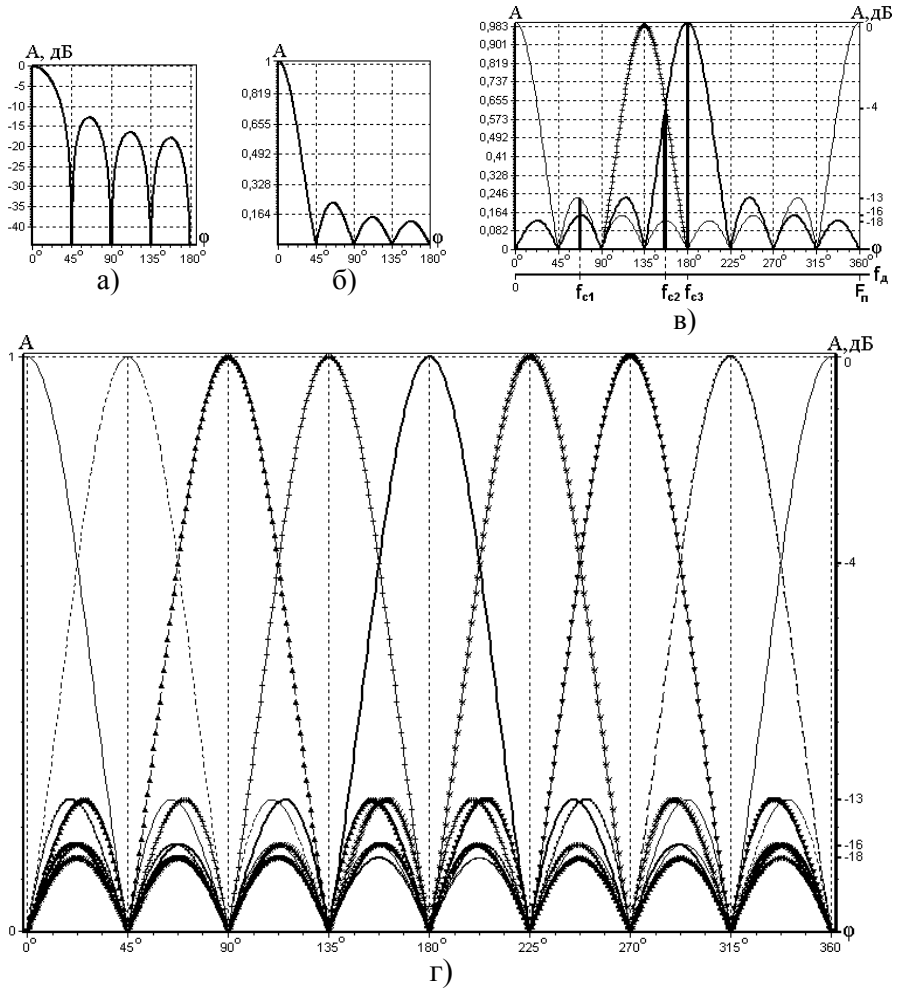


Рисунок 1.9 – Спектр сигналу з найгіршим $\Delta\varphi$ для ДПФ



а, б – нормовані АЧХ одного фільтру ДПФ у логарифмічному й звичайному масштабах; в – повні АЧХ двох фільтрів – нульового й четвертого, для третього фільтру – центральна пелюстка;
г – АЧХ фільтрів.

Рисунок 1.10 – АЧХ фільтрів ДПФ

1.3 Характеристики фільтрів ДПФ

На рисунках 1.10, а) й б), відповідно, наведено нормовані АЧХ одного фільтру ДПФ [див. (1.2)] у логарифмічному й звичайному масштабах. Внаслідок симетричності АЧХ, діапазон фазових кутів від 0º до -180º або від 180º до 360º на малюнках не наводиться. Рівень першої пелюстки становить -13 дБ, що є недостатньо низьким значенням для здійснення первинної обробки сигналів. АЧХ фільтрів ДПФ наведено на рисунку 1.10, г).

З метою розвантаження ілюстративного матеріалу, на рисунку 1.10, в) наведено повні АЧХ лише двох фільтрів – нульового й четвертого, а для третього фільтру – лише центральну пелюстку. Через наявність бічних пелюсток фільтрів та перетинання їх центральних пелюсток, у кожному фільтрі накопичуватимуться не лише сигнали з відповідним фазовим зсувом $\Delta\varphi$, а й сигнали іншого частотного діапазону (решти фільтрів ДПФ, хоча й дещо ослаблені). Вплив сигналів одного діапазону частот на амплітуди, накопичені в інших фільтрах, називається міжфільтровим просочуванням.

На рисунку 1.10 вертикальними лініями координатної сітки позначені центральні частоти фільтрів ДПФ. Завдяки тому, що нулі АЧХ кожного фільтра збігаються з центральними частотами головних пелюсток сусідніх фільтрів, місцеві предмети (у яких $\Delta\varphi=0$) накопичуються лише в нульовому фільтрі. Це саме має місце для усіх сигналів з $\Delta\varphi$, кратним $2\cdot\pi/N$.

Для решти значень $\Delta\varphi$ має місце ефект міжфільтрового просочування. Так, гармонійний сигнал з частотою f_{c3}, що відповідає фазовому зсуву $\Delta\varphi=180°$ (див. рис. 1.10, в)), накопичуватиметься у фільтрі № 4 без втрат.

Через те, що сигнал з частотою f_{c2} не збігається з центральною частотою жодного з фільтрів, накопичення сигналу у фільтрі № 4 супроводжуватиметься ослабленням його амплітуди на 4 дБ (у 1,5 рази – внаслідок непрямокутності головної пелюстки), а у фільтрі № 0 – на 18 дБ (у 8 разів – внаслідок наявності бічних пелюсток).

Перетинання головних пелюсток фільтрів призводить до того, що сигнал з частотою $f_{c2}=(f_3+f_4)/2$ одночасно накопичуватиметься у двох фільтрах (№ 3 й 4) з однаковими амплітудами.

1.4 Вагові функції

1.4.1 Причини виникнення вагових функцій

За обробки сигналів звичайно доводиться розв’язувати задачі двох типів: задачу виявлення й задачу оцінювання. За виявлення потрібно дати відповідь на питання, чи спостерігається деякий сигнал з апріорно відомими параметрами. Оцінювання – це задача вимірювання значень параметрів, що описують сигнал. Сигнал часто зашумлений, на нього можуть накладатися сигнали, що заважають. Тому, для спрощення зазначених задач, сигнал звичайно розкладають за базисними складовими простору сигналів. Найцікавішими є періодичні сигнали. Цілком природно, що розв’язання задач виявлення й оцінювання подібних сигналів пов'язано з їхнім розкладанням за базисом, що складається з простих періодичних функцій sin й cos. Таке розкладання можна виконати за допомоги класичного перетворення Фур'є.

Кожен сигнал, що обробляється, мусить мати кінцеву тривалість. Тривалість сигналу може змінюватися, але вона обов'язково мусить бути кінцевою. За обробки сигналів кінцевої тривалості виникають цікаві й взаємозалежні питання, які необхідно враховувати в ході гармонійного аналізу. Кінцівка інтервалу спостереження впливає на можливість виявлення тонів (гармонійний сигнал однієї частоти) у присутності близьких сильних тонів, на можливість розділення тонів мінливої частоти й на точність оцінок параметрів усіх вищезгаданих сигналів.

Внаслідок міжфільтрового просочування сигнал на частоті f_{c3} накопичуватиметься не лише у фільтрі № 1 (на рис.1.10, в) його АЧХ не показано), а й у решті фільтрів: у нульовому й третьому – ослаблений на 13 дБ (у 4,5 разів, оскільки потрапляє до першої бічної пелюстки АЧХ), у четвертому – на 16 дБ (у 6,3 разів, оскільки потрапляє до другої бічної пелюстки АЧХ) тощо.

На практиці оброблюваний масив даних складається з N еквідистантних (рівновіддалених) відліків прийнятого сигналу. Гармонійні оцінки, отримані за допомоги дискретного перетворення Фур'є (ДПФ), – це N еквідистантних відліків відповідних періодичних спектрів. На жаль, на практиці для отримання задовільних результатів часто приходиться шукати компромісний розв’язок між точністю оцінки й швидкістю обробки. Один з неминучих у таких випадках

компромісів пов'язаний з тим, що послідовність відліків сигналу доводиться множити на вікна (вагові функції) чи, що еквівалентно, згладжувати спектральні відліки.

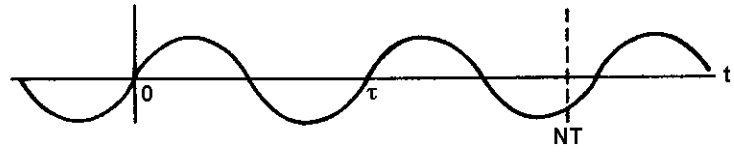
Таким чином, дані звичайно піддаються двом виконуваним у довільному порядку операціям – дискретизації й згладжуванню за допомоги вікон. Вибір вагової функції може дуже сильно вплинути на результат спектрального аналізу.

Гармонійний аналіз кінцевих послідовностей даних зв'язаний із задачею проекції сигналу, що спостерігається, на базисні вектори, на які натягнуто інтервал спостереження NT (сек), де T – зручний часовий інтервал. Синуси й косинуси з періодами, кратними інтервалові NT, утворять ортогональний базис для неперервних сигналів тривалістю NT.

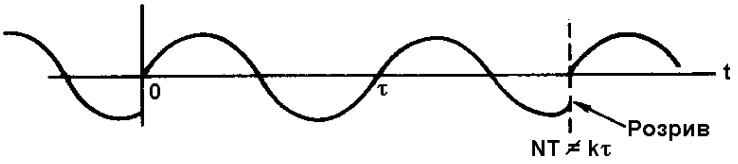
Тригонометричні функції унікальні у тому, що послідовності їх еквідистантних відліків (на інтервалі, рівному цілому числу періодів) взаємно ортогональні. Еквідистантні відліки довільних ортогональних функцій не утворюють ортогональних послідовностей.

Вибір кінцевого часового інтервалу тривалістю NT секунд й ортогонального тригонометричного базису (неперервного чи дискретного) на цьому інтервалі обумовлює цікаву особливість спектрального розкладання. З множини можливих частот, лише ті, що збігаються з частотами базису, проектуватимуться на єдиний базисний вектор. А всі інші частоти матимуть ненульові проекції на кожний з векторів базисної множини. Це явище, що звичайно називають розмиванням чи просочуванням спектральних складових, виникає через кінцеву тривалість записів сигналів, що обробляються. Хоча частота відліків й впливає на ступінь розмивання, сама по собі дискретизація не є його причиною.

Щоб зрозуміти причину розмивання, досить зауважити, що сигнали з частотами, відмінними від базисних, – неперіодичні у вікні спостереження. Якщо природний період сигналу τ не є кратним тривалості інтервалу спостереження $N \cdot T$, то періодичне продовження сигналу матиме розриви на межах інтервалу. Ці розриви (див. рис. 1.11) дають спектральні внески на всіх базисних частотах (тобто відбувається розмивання).



а)



б)

а – періодичний сигнал; б – спектральний аналіз.

Рисунок 1.11 – Періодичний сигнал та неперіодичне продовження синусоїди в інтервалі спостереження NT за спектрального аналізу

Вікна – це спосіб зменшення розмивання спектральних компонентів, обумовлений кінцівкою інтервалів спостереження. Так, можна вважати, що вплив вікна на масив даних (як мультиплікативної вагової функції) полягає у зменшенні порядку розриву на межі періодичного продовження. Цього домагаються шляхом узгодження на межі можливо більшого числа похідних зважених даних. Найпростіше забезпечити таке узгодження – зробити ці похідні рівними чи, принаймні, близькими до нуля. Таким чином, поблизу меж інтервалу, зважені дані плавно прагнуть до нуля, так що періодичне продовження сигналу виявляється неперервним аж до похідних вищих порядків.

З іншого боку, можна вважати, що вікно мультиплікативно впливає на базисну множину так, щоб сигнал довільної частоти мав значні проекції лише на ті базисні вектори, частоти яких близькі до частоти сигналу.

1.4.2 ДПФ з ваговою обробкою сигналів

У гармонійному аналізі вікна використовуються для зменшення небажаних ефектів просочування спектральних складових. Вікна впливають на багато показників гармонійного аналізу, у тому числі – на можливість виявлення чи розділення, динамічний діапазон, ступінь ймовірності й легкість здійсненності обчислювальних операцій. Щоб мати можливість порівнювати характеристики вікон, необхідно знати, які з їхніх параметрів є основними. Легше за все виявити найістотніші параметри, розглянувши, як впливають різні типи вікон на підсумки гармонійного аналізу.

З метою зменшення міжфільтрового просочування, за обчислення ДПФ застосовують вагову обробку:

$$G(n)=\sum_{k=0}^{N-1} K_k \cdot A_k \cdot e^{-j\cdot(\varphi_k - 2\cdot\pi\cdot k\cdot n/N)}, \qquad (3)$$

де K_k – коефіцієнти вагового вікна.

Вікно з коефіцієнтами $K_k=1$ – прямокутне або вікно Дирихле. У цьому разі вирази (2) й (3) – тотожні.

Широке використання вагових функцій за обчислення ДПФ пов’язане з задачами виявлення й оцінки параметрів гармонійних коливань. Застосування цих функцій дозволяє зменшити рівень бічних пелюсток фільтрів ДПФ. Але це призводить до обов’язкового погіршення решти показників: розширення головної пелюстки, втрати у когерентному накопиченні, тощо. Наявність великої кількості віконних функцій, що мають різну ступінь впливу на АЧХ фільтрів ДПФ, пояснюється тим, що не існує універсальної функції, яка б повністю задовольняла усім вимогам задач обробки сигналів. Тому за розв’язання певної задачі або вибирають наявну вагову функцію, або вдаються до розрахунку нової, яка б якнайбільше задовольняла висунутим вимогам.

1.4.3 Методи розрахунку відомих вагових функцій

На початкових етапах розробки вагових функцій їх авторами переслідувалася мета побудови вікон, які б описувалися простими математичними функціями. Так, отримання вікон у вигляді добутків, сум чи згорток простих функцій чи вікон (або їх окремих ділянок) обумовлювалося можливостями тогочасної цифрової елементної бази та електронних обчислювальних машин: додавання, віднімання, зсув на m двійкових розрядів (як еквівалент операцій ділення чи множення на 2^m).

Найяскравішим прикладом є вікно Ханна (або Хенінга), перетворення якого становить суму трьох масштабованих й зсунутих (одне відносно одного) ядер Дирихле (спектральне перетворення прямокутного вікна) з метою взаємного пригнічення бічних пелюсток (див. рис. 1.12): операція згортки для вагової функції Ханна $F_X(k)=[F_П(k)-[F_П(k-1)+F_П(k+1)]/2]/2$, де $F_П(k)$ – відліки спектра, отримані за використання прямокутного вікна. Це дало можливість отримати пригнічення бічних пелюсток до рівня -31,5 дБ, але розширило головну пелюстку вдвічі (за рівнем першого нуля АЧХ відносно прямокутного вікна – докладніше про необхідність такого способу визначення ширини головної пелюстки фільтра див. п. 0). Надалі, позначатимемо такі вікна «2х» – як множник кратності.

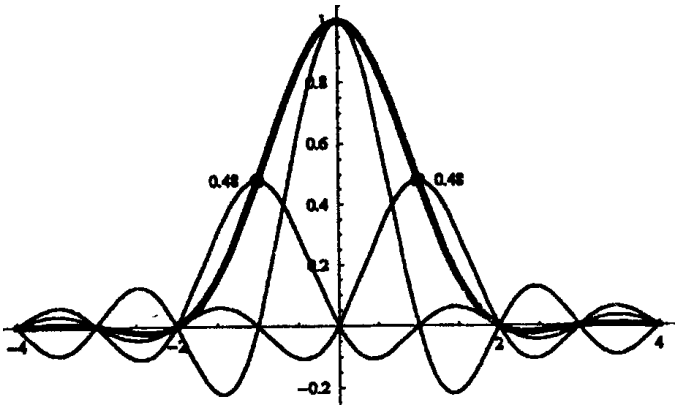


Рисунок 1.12 – Утворення вікна Ханна (Хенінга)

Швидко стало зрозумілим, що за таких умов синтезу, отримувані вагові функції не можуть мати високих характеристик. Тому подальші роботи велися у двох напрямках: оптимізації наявних функцій шляхом відходу від елементарних математичних операцій та синтезу нових вікон, які б задовольняли певним критеріям оптимальності.

Вагові коефіцієнти функції Ханна для ДПФ описуються наступним виразом:

$$a_n=b+(1-b)\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot[n+c]/N), \qquad (4)$$

де n=0...N-1, N – кількість фільтрів ДПФ;

b=0,5;

c=0 для непарних N й c=0,5 для парних N.

Хемінг, шляхом оптимізації величини b у (4), досяг збільшення рівня пригнічення бічних пелюсток до -35...-41 дБ для N=8...16 (тобто для різних N – різні значення РБП з розкидом цієї величини на 6 дБ в діапазоні застосовуваної у наявних РЛС виявлення цілей кількості імпульсів зондування N).

Херіс, оптимізуючи значення b у (4), за b=0,53856 досяг збільшення рівня пригнічення бічних пелюсток до -43 дБ (-41...-42 дБ для N=8...16) у 2-членному вікні Блекмана-Херіса [1].

Блекман, провівши оптимізацію величин масштабних коефіцієнтів п’яти ядер Дирихле, досяг збільшення рівня пригнічення бічних пелюсток до -58 дБ ціною розширення головної пелюстки втричі (відносно прямокутного вікна).

Слепян, Полак й Ландау розв’язували задачу пошуку функції обмеженої тривалості, що має максимальну енергію у смузі частот. Вони отримали розв’язок у вигляді сімейства хвильових функцій, параметром якого є добуток тривалості на ширину смуги частот. Кайзер відшукав просту апроксимацію цього розв’язку за допомоги модифікованої функції Беселя.

Взявши за прототип вікно Кайзера-Беселя, Херіс методом градієнтного пошуку виконав оптимізацію вагової функції Блекмана. Отримані мінімальні 3-членні й 4-членні вікна Блекмана-Херіса мають ширину головної пелюстки у тричі й четверо ширшу за прямокутне вікно, відповідно (надалі, позначатимемо такі вікна як «3х» й «4х»). Процедура оптимізації практично не вплинула на характеристики

головної пелюстки відносно прототипу, але дозволила зменшити РБП до -67 дБ й -92 дБ, відповідно (за N>30), а також забезпечила розташування нулів АЧХ на центральних частотах решти фільтрів ДПФ. Через те, що вікно-прототип є функцією з максимальною енергію у смузі частот, то вагові функції Блекмана-Херіса не стали оптимальними за критерієм мінімуму міжфільтрового просочування.

Вікно Дольфа-Чебишова є розв'язком задачі мінімізації ширини смуги частот за заданої кінцевої тривалості функції. Застосування цього вікна забезпечує мінімальну ширину головної пелюстки для заданого рівня бічних пелюсток (або мінімальний рівень бічних пелюсток для заданої ширини головної пелюстки). Але нулі АЧХ фільтра такої функції не збігаються з центральними частотами решти фільтрів ДПФ (докладніше, див. п. 1.4.5). Більше того, бічні пелюстки розширюються в міру віддаленості від центральної частоти фільтра. Тому це вікно теж не є оптимальним для радіолокаційного застосування.

У [2] синтез вагової функції розглядається як «задача нелінійного програмування, що дозволяє врахувати усі необхідні протирічні параметри віконних функцій в обмеженнях й цільовій функції». Але в отриманих в [2] вікнах досягаються гірші характеристики, ніж у функціях Блекмна-Херіса: нулі АЧХ не збігаються з центральними частотами фільтрів ДПФ, РБП – недостатньо низький, а головна пелюстка – заширока.

У [3] запропоновано два методи синтезу вагових вікон. Перший варіант передбачає мінімізацію рівня бічних пелюсток шляхом оптимізації масштабних коефіцієнтів, величин зсуву (одного відносно іншого) ядер Дирихле та їх кількості з метою взаємного пригнічення бічних пелюсток. Другий варіант ґрунтується на розрахунку фахових фінітних функцій u(x), форма яких близька з заданою точністю до форми їх же спектрів F(y), й розв'язанні системи нелінійних рівнянь, укладеної із застосуванням похідних u'(x) й F'(y). Отримані розв'язки для вікон 2x, 3x й 4x збігаються з функціями Хана, Хемінга та Блекмана-Херіса. Отже, такий метод розрахунку теж не дозволяє отримувати оптимальні вагові функції.

Таким чином, практично усі відомі методи синтезу вагових функцій ґрунтуються на нелінійних методах багатовимірної оптимізації чи розв'язанні систем нелінійних рівнянь. Тому ФЧХ фільтра ДПФ з таким вікном відрізнятиметься від ФЧХ фільтра з

прямокутним вікном та може мати нелінійний характер. А через це, ці вагові функції не можуть бути оптимальними за критерієм мінімуму міжфільтрового просочування [4].

1.4.4 Основні параметри оптимальності вагових функцій

1 **Міжфільтрове просочування** призводить до зміщення оцінок амплітуд й положень гармонійних складових сигналу. Цей вплив є найсильнішим й найнеприємнішим за виявлення слабких сигналів у присутності сильних завад близької частоти. Для зменшення неприємних наслідків через спектральне просочування амплітуда бічних пелюсток вдалині від головної центральної пелюстки частотної характеристики вікна мусить бути малою, а перехід від центральної пелюстки до низькоамплітудних бічних пелюсток – дуже швидким. Основними чинниками ступеня пригнічення міжфільтрового просочування для вікна є наступні параметри:

а) **ширина головної пелюстки** або **коефіцієнт розширення головної пелюстки** за рівнем першого нуля АЧХ відносно прямокутного вікна. У прямокутного вікна головна пелюстка – найвужча, а будь-якого іншого вікна – ширша;

б) **максимальний рівень бічних пелюсток** (РБП) відносно рівня основної пелюстки. У прямокутного вікна РБП – найбільший, а будь-якого іншого вікна – менший, ніж у прямокутного;

в) **асимптотична швидкість спадання бічних пелюсток** (дБ/октаву) – характеризує зменшення максимального рівня бічних пелюсток за збільшення частоти у 2 рази.

2 **Еквівалентна шумова смуга** (ЕШС) – ширина смуги пропускання прямокутного фільтра з тим же максимальним підсиленням за потужністю, який накопичує ту ж саму потужність шуму, що й дане вікно (див. рис. 1.13):

$$\text{ЕШС}=(\sum K^2_k)/(\sum K_k)^2, \text{ раз} \qquad (5)$$

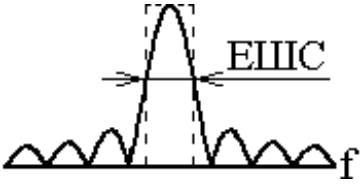


Рисунок 1.13 – Еквівалентна шумова смуга вікна

3 **Підсилення перетворення** (ПП) – величина, зворотня до еквівалентної шумової смуги: ПП=1/ЕШС. Таким чином, збільшення еквівалентної шумової смуги призводить до зменшення підсилення перетворення. чим ширша смуга пропускання, тим більша потужність шуму, що пройшов крізь вікно й робить внесок до спектральної оцінки.

4 **Коефіцієнт когерентного накопичення** $K_{КН}=(\sum K_k)/N$, раз. Для прямокутного вікна $K_{КН}=1$. Підсилювання будь-якого іншого вікна – менше, оскільки вагова функція поблизу меж вікна спадає до нуля. Пов'язане з цим зменшення коефіцієнта пропорційності характеризує похибку (зміщення) оцінювання амплітуд спектральних складових.

5 **Паразитна амплітудна модуляція** (ПАМ) спектра – це відношення когерентного підсилення сигналу з $\Delta\varphi$, кратним π/N (тобто, за $f_c=(f_{n+1}+f_n)/2$), до когерентного підсилення сигналу з $\Delta\varphi$, кратним $2\cdot\pi/N$. Тобто, це максимальні втрати за найнесприятливішої для ДПФ частоті сигналу.

6 **Максимальні втрати перетворення** [МВП=(ПАМ[дБ]+|ПП[дБВт]|), дБ] – це сума максимальних втрат через паразитну амплітудну модуляцію спектра для даного вікна (у дБ) й втрат перетворення, обумовлених формою цього вікна. Цей параметр характеризує зменшення вихідного відношення сигнал/шум внаслідок впливу вікна за найгіршого розташування частоти сигналу. Його величина впливає на мінімальну інтенсивність сигналу з $\Delta\varphi$, кратним $2\cdot\pi/N$, за якої він ще може бути виявлений у широкосмуговому шумі. Рівень максимальних втрат завжди лежить між 3,0 й 4,3 дБ. Вікна, для яких максимальні втрати перетворення ПП перевищують 3,8 дБ, геть незадовільні й їх не варто застосовувати для спектрального аналізу.

На жаль, ці й інші параметри вікон залежать від кількості відліків сигналу (фільтрів або крапок перетворення Фур'є). Наочно побачити цю проблему можна під час виконання лабораторної роботи.

7 **Коефіцієнт прямокутності** головної пелюстки – відношення ширини смуги пропускання за рівнем 3 дБ до ширини смуги пропускання за рівнем 20 дБ: $К_П=(2\cdot\Delta f_{3дБ})/(2\cdot\Delta f_{20дБ})$, раз.

8 **Шумова смуга пропускання** віконної функції завжди ширша за її смугу пропускання на рівні 3 дБ. Різниця цих двох параметрів, віднесена до ширини спектра вікна за рівнем 3 дБ, $\delta=100\%\cdot(ЕШС-\Delta f_{3дБ})/\Delta f_{3дБ}$ є достатньо чутливим показником якості віконної функції.

1.4.5 Особливості застосування вікон у радіолокації

Однією з важливих тактико-технічних характеристик радіолокаційних станцій (РЛС) є рівень пригнічення пасивної завади.

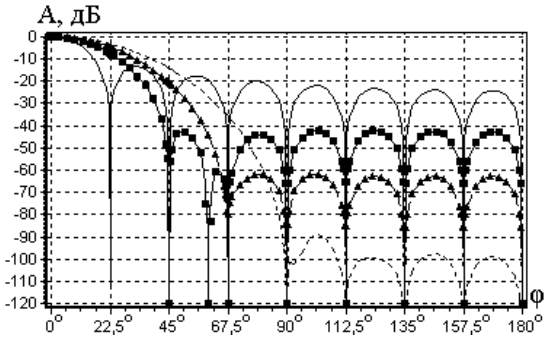
Наприклад, у гірській місцевості, рівень відношення (пасивна завада)/шум може становити більше 60 дБ (1000 разів). За таких умов рівень міжфільтрового просочування функції вікна стає одним з найвпливовіших чинників подальшої процедури виявлення корисних сигналів.

Оскільки зменшення рівня бічних пелюсток вагової функції досягається за рахунок розширення головної пелюстки, то у відомих [1-4] функцій з рівнем пригнічення бічних пелюсток -60 дБ й нижче, першого нуля АЧХ розташовано за центральною частотою другого чи навіть третього фільтрів ДПФ. Таким чином, якщо для прямокутного вікна основним джерелом міжфільтрового просочування є рівень бічних пелюсток, то для згаданих вікон ширина центральної пелюстки стає основним джерелом просочування. Через це місцевий предмет (пасивна завада з нульовим доплерівським зсувом частот $\Delta\varphi=0$) починає накопичуватися й у інших фільтрах, а не лише у нульовому.

Одним із способів зменшення рівня міжфільтрового просочування є розташування нулів АЧХ на центральних частотах фільтрів ДПФ. Тоді рівень просочування визначається лише шириною центральної пелюстки. Вагові функції з такими властивостями в [1] названі «напрочуд хороші». На рисунку 1.14 наведено АЧХ фільтрів 8- й 16-крапкового ДПФ без вікна та з застосуванням вагових функцій: Блекмана-Херіса [1] з заявленим рівнем першої бічної

пелюстки -67 дБ й -92 дБ, а також Чорнобородових [4] з -42 дБ й -90 дБ.

На рисунку 1.14, а) можна побачити, що на центральній частоті другого фільтра, що відповідає значенню $2\cdot\pi\cdot n/N=360^{\circ}\cdot 2/16=45^{\circ}$, функція Блекмана-Херіса (-92 дБ) забезпечуватиме пригнічення тієї пасивної завади лише на 12 дБ, а на частоті третього фільтра (або 67,5º) – на 30 дБ. Для N=8 рівні пригнічення на центральній частоті другого й третього фільтрів становлять -14 дБ й -36 дБ відповідно (див. рис. 1.14, б)). Таким чином, пасивна завада середньої потужності матиме настільки вагомий внесок в амплітуди, які накопичуватимуться у фільтрах номер N-2, N-1, 0, 1 й 2, що унеможливить виявлення цілі у цих фільтрах.

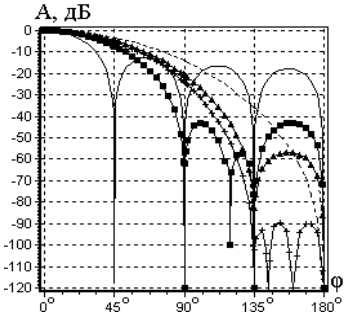


а)

а – N=16;
– без вагової функції;
- - з функцією Блекмана-Херіса (-92 дБ1);
-▲- з функцією Блекмана-Херіса (-67 дБ [1]);
-■- з функцією Чорнобородових (-42 дБ);
+ з функцією Чорнобородових (-90 дБ);

Рисунок 1.14 – АЧХ фільтрів ДПФ

1 заявлений в [1] рівень першої бічної пелюстки



б)

б – N=8.

Рисунок 1.14, аркуш 2

Оскільки параметр «максимальний рівень бічних пелюсток» не відбиває основних недоліків вагової функції, класифікацію вікон ДПФ інформативніше подавати за шириною центральної пелюстки:

а) одинарної ширини (1х) – прямокутне вікно;

б) подвійної ширини (2х) – вікна Блекмана-Херіса (-40 дБ), Дольфа-Чебишова (-45 дБ), Кайзера-Беселя (-40 дБ), трикутне (-26 дБ), Чорнобородових (-42 дБ); Хемінга (-41 дБ), Хенінга (-41 дБ), тощо;

в) потрійної ширини (3х) – Блекмана-Херіса (-67 дБ), Дольфа-Чебишова (-90 дБ), Кайзера-Беселя (-67 дБ) й Чорнобородових (-90 дБ);

г) четверної ширини (4х) – Блекмана-Херіса (-92 дБ), Натола (-99 дБ) тощо.

З прикладами вікон 5х-7х можна ознайомитися, наприклад, в [2]-[3].

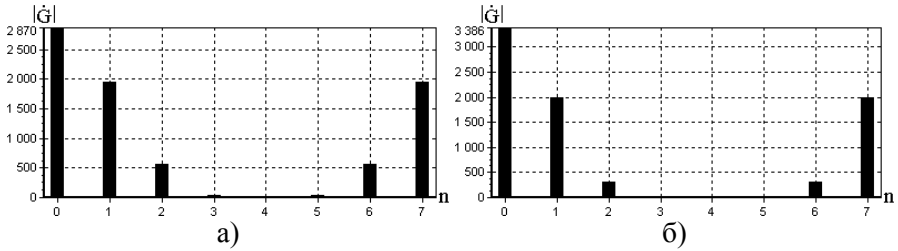
В літературі (див., наприклад, [1]) описано багато вагових функцій, нулі АЧХ яких не збігаються з центральними частотами решти фільтрів ДПФ. Такі функції мають значно вищий рівень міжфільтрового просочування й, як наслідок, не забезпечують достатнього рівня пригнічення місцевих предметів.

На жаль, інтервал спостереження (радіолокаційного зондування) цілі істотно обмежується вимогами до часу оновлення інформації на екрані робочого міста оператора РЛС. Тому кількість випромінюваних станцією імпульсів зондування тотожна кількості фільтрів ДПФ й становить величину N=8...16. Через це, вагові функції 3х й ширше, що забезпечують дуже низькі рівні бічних пелюсток АЧХ (а, отже, дуже широку центральну пелюстку), стають малопридатними для застосування у системах первинної обробки радіолокаційної інформації в умовах впливу пасивних завад (див. рис. 1.15).

Для випадку N=8, $A_{м.п.}$=1000 (60 дБ) й $\Delta\varphi_{м.п.}$=0° на рисунку 1.15 показано, що чим ширша головна пелюстка фільтру ДПФ, тим:

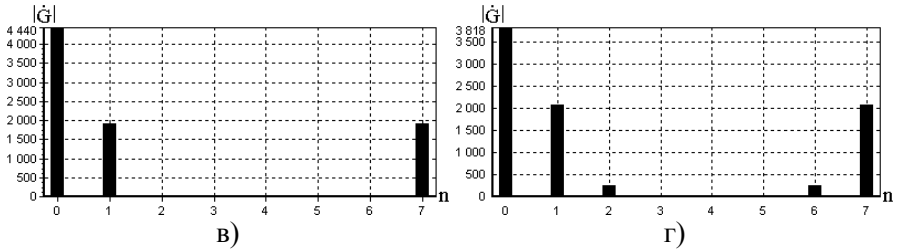
а) менше відрізняються амплітуди першої бічної пелюстки (фільтри № 1 й 7) від амплітуди центральної пелюстки (фільтр № 0) пасивної завади;

б) менше залишається фільтрів, вільних від впливу пасивної завади: для вікна Блекмана-Херіса (-92 дБ) це лише один фільтр (№ 4 – див. рис. 1.15, а)), для вікон Блекмана-Херіса (-67 дБ) й Чорнобородових (-90 дБ) це три фільтри (№ 3..5 – див. рис. 1.15, б)), для вікна Чорнобородових (-42 дБ) – п’ять фільтрів (№ 2-6).



а) 4х-вікно Блекмана-Херіса (-92 дБ);
б) 3х-вікно Блекмана-Херіса (-67 дБ);

Рисунок 1.15 – Вплив вагової функції на ступінь міжфільтрового просочування



в) 2х-вікно Чорнобородових (-42 дБ);
г) 3х-вікно Чорнобородових (-90 дБ).

Рисунок 1.15, аркуш 2

Окрім того, практично усі функції мають дуже великий розкид параметрів в залежності від кількості крапок ДПФ. Наприклад, вони здатні забезпечувати заявлені в літературі рівні бічних пелюсток лише для довгих частотних пачок (N>20), які практично не застосовуються в основних режимах роботи РЛС.

Для малого числа імпульсів зондування (наприклад, N=8) вікна 3х-7х, мають надто великий рівень міжфільтрового просочування через збільшену ширину головної пелюстки фільтру ДПФ з ваговим вікном (3) відносно випадку відсутності вагової обробки (2). Чим більший цей рівень, тим нижча ймовірність виявлення цілі, що рухається на тлі потужної пасивної завади.

1.5 Підвищення роздільної здатності ДПФ

Розширення головної пелюстки можна компенсувати шляхом переходу до обчислення ДПФ на більшу кількість крапок, тим самим збільшуючи роздільну здатність. Але для цього треба мати більше відліків сигналу. В умовах сталих ширини діаграми спрямованості й періоду повторення імпульсів зондування, збільшення кількості випромінюваних сигналів в РЛС може досягатися або шляхом зниження швидкості руху антени, або шляхом зниження дальності дії РЛС. У першому випадку це означає зниження темпу оновлення інформації, що є критичним для швидкісних цілей й систем керування

повітряним рухом, що мусять відповідати нормам ІСАО (Міжнародна організація цивільної авіації).

Існує хибна думка про те, що збільшення роздільної здатності ДПФ можна досягти шляхом штучного додавання «відліків» з нульовою амплітудою й обчислення перетворення Фур'є на бажану кількість крапок. На рисунку 1.16, а) наведено АЧХ фільтрів ДПФ з різними ваговими функціями для випадку восьми відліків сигналу, штучно доповнених ще вісьмома нульовими відліками. Порівнюючи рисунки 1.17, а) й 1.16, а), можна побачити, що за такої операції штучного збільшення кількості фільтрів перетворення:

а) для вікон 1х, 2х:

– не відбувається звуження центральної пелюстки – її ширина залишається або сталою (1х), або, навіть, дещо розширюється (2х). Так само розширюються й бічні пелюстки;

– через розширення бічних пелюсток нулі АЧХ фільтрів у загальному випадку не збігаються з центральними частотами решти фільтрів ДПФ (їх позначено вертикальними лініями координатної сітки). Якщо за цього для вікна 1х нулів АЧХ вдвічі меншає, то для вікна 2х нулі АЧХ розбігаються з центральними частотами усіх фільтрів ДПФ, але ця розбіжність зменшується по мірі віддалення від центральної частоти фільтру;

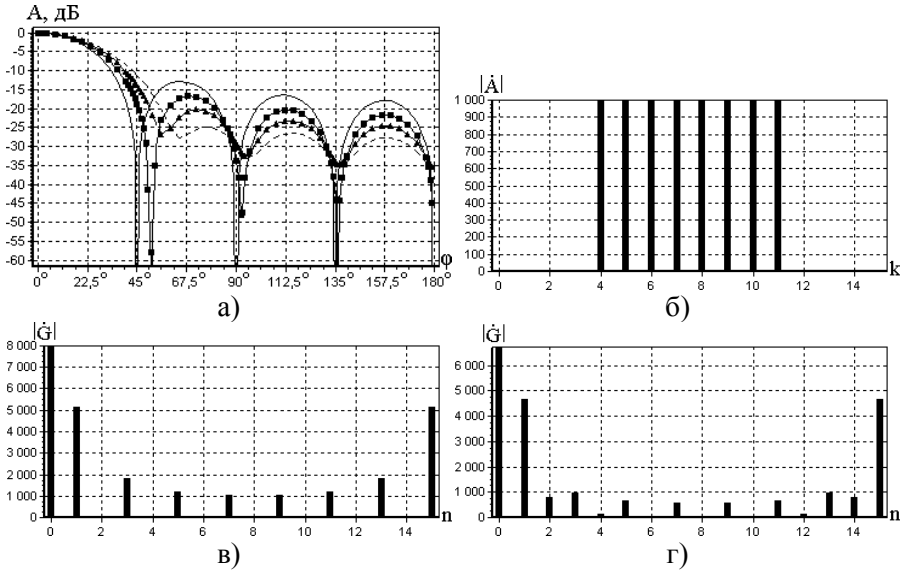
– спостерігається істотне збільшення рівня бічних пелюсток для функції 2х з -42 дБ до -17 дБ;

б) для решти вагових функцій (3х й ширше):

– має місце зникнення нулів АЧХ як таких. Через це зникає й поняття центральної пелюстки;

– якщо під бічними пелюстками тепер розуміти локальні максимуми АЧХ, то спостерігається істотне збільшення їх рівня. Наприклад, для вікна Блекмана-Херіса 3х: з -62 дБ до -21 дБ.

На рисунку 1.16, б) наведено 8 відліків (k=4..11), отриманих для місцевого предмету на виході формувача квадратурних складових, й штучно доданих 8 нульових амплітуд (k=0..3,12..15). Підсумки обчислення 16-крапкового ДПФ над такими вхідними даними подано на рисунку 1.16, в), г). На рисунку 1.16 в) наведено спектр місцевого предмету для прямокутного вікна, а на рисунку 1.16, г) – для вікна із ваговими функціями Чорнобородових 2х.



а – АЧХ вікон ДПФ; б – амплітуди відліків місцевого предмету;
в – спектр місцевого предмету для прямокутного вікна;
г – спектр місцевого предмету для вікна Чорнобородових 2х.

Рисунок 1.16 – Шістнадцяти крапковий ДПФ за штучного доповнення восьми відліків вхідного сигналу вісьмома нульовими амплітудами

Порівнюючи рисунки 1.15 й 1.16, можна зробити висновок про погіршення можливості виявлення мало- й середньорозмірних цілей на фоні потужної (60 дБ) пасивної завади: якщо для 8-крапкового ДПФ (див. рис. 1.15, в)) наявні 5 фільтрів, вільних від впливу завади, то для штучно створеного 16-крапкового ДПФ (див. рис.1.16, г)) – лише 3 фільтри. У випадку прямокутного вікна (див. рис.1.16, в) та1.15, в)) вільна від впливу лише половина фільтрів. Для вікон 3х й ширше місцевий предмет впливатиме на амплітуди, що накопичуватимуться у кожному фільтрі.

1.6 Швидке перетворення Фур'є

Незважаючи на те, що гармонійний аналіз є чи не найдавнішим розділом прикладної математики, широкого практичного застосування він отримав лише з розвитком цифрової імпульсної техніки. Операція ДПФ безпосередньо за формулою (2) вимагає виконання достатньо великої кількості математичних операцій (N^2), перш за все – множення. Поява інтегральних суматорів дала поштовх до розробки ефективних алгоритмів гармонійного аналізу, що дозволяють зменшити кількість обчислювальних операцій не лише до $N \cdot \log_2 N$, а, подекуди, й до N.

З метою пришвидшення обчислення ДПФ, розроблено багато способів, які об'єднують під однією загальною назвою – швидке перетворення Фур'є (ШПФ). Розвиток прикладного гармонійного аналізу йшов таким шляхом: алгоритм Кулі-Т'юкі, алгоритм простих множників Томаса-Гуда, алгоритм Рейдера, алгоритм Тоома-Кука, алгоритм Винограду й алгоритм простих множників.

Ідея ШПФ полягає в наступному: оскільки домножування на довертальні множники $e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot k \cdot n/N}$ (див. (2) й (3)) – це домножування на функції $\sin(2 \cdot \pi \cdot k \cdot n/N)$ й $\cos(2 \cdot \pi \cdot k \cdot n/N)$, то, в силу відомих тригонометричних формул приведення [$\sin(\alpha \pm 90^\circ)$, $\sin(\alpha \pm 180^\circ)$], кількість операцій множення можна або скоротити, або замінити додаванням чи відніманням (за $2 \cdot \pi \cdot k \cdot n/N = 0, \pm 90^\circ, \pm 180^\circ$). Окрім того, переважна кількість операцій застосовується для обчислення значень вихідного сигналу не одного фільтра, а кількох одночасно.

Проте, використання вагової обробки збільшує число операцій множення: вхідний сигнал спочатку підлягає помноженню на коефіцієнти вікна K_k, лише після чого проводиться процедура обчислення ШПФ.

Таким чином, метод ШПФ за проведення гармонійного аналізу є ефективним в обчислювальному плані й забезпечує отримання задовільних результатів для багатьох сигналів. Окрім зазначених переваг, гармонійний аналіз шляхом ДПФ має три суттєві недоліки:

а) обмеження на можливість розділення двох й більше сигналів близької частоти;

б) наявність ефекту «перетікання» енергії спектральної лінії з головної пелюстки до бічних пелюсток (міжфільтрове просочування), що призводить до спотворення спектральних ліній інших сигналів.

Правильний вибір вагової функції дозволяє зменшити рівень бічних пелюсток, але винятково за рахунок зниження роздільної здатності;

в) ДПФ вказує лише на спектральний склад вхідного сигналу. Оскільки будь-який сигнал можна подати у вигляді нескінченної суми синусоїд різної амплітуди (показано у 1822 р. французьким математиком Дж. Фурьє), то ДПФ надає інформацію про частоти цих синусоїд та їх спектральну щільність. Але ні у який момент часу виник сигнал тієї чи іншої частоти, ні коли він закінчився – на ці питання відповідь отримати не вдасться.

Отже, ми можемо аналізувати сигнали або лише у часовій області (вхідні сигнали), або лише у частотній області (після ДПФ). Тобто, частотну інформацію не можна витягти з часової, а часову – з частотної.

Справжні сигнали характеризуються тим, що високочастотні коливання тривають короткий час, а низькочастотні коливання – досить довгі. Отже, необхідно, аби за збільшення частоти коливань сигналу f ширина вікна зменшувалася в часовій області й збільшувалася в частотній області і навпаки.

У випадку, якщо потрібно часова локалізація спектральних компонентів, необхідно звернутися до частотно-часового подання сигналу. Цим займається сплеск-перетворення (СП).

1.7 Двовимірне ДПФ і обробка зображень

Для обробки поверхні, заданої функцією f(x,y) (зображення розміром M×N крапок), використовується двовимірне ДПФ:

$$G(u,v)=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\cdot e^{-j\cdot 2\cdot \pi(u\cdot x/M+v\cdot y/N)}. \quad (6)$$

Зворотне перетворення задається виразом:

$$f(x,y)=\frac{1}{M\cdot N}\cdot\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)\cdot e^{j\cdot 2\cdot \pi(u\cdot x/M+v\cdot y/N)}. \quad (7)$$

Нехай є зображення розміром A×B і його фрагмент розміром C×D (C<A, D<B). Положення фрагмента на картинці відповідатимуть координати максимуму кореляційної функції:

$$K(x,y) = F^{-1}[s_к(x,y)\cdot s^*_ф(x,y)] = F\text{-}1\{G(x,y)\},$$

де F^{-1} – символ зворотного перетворення Фур'є;

матриці $S_к$ й $S_ф$ – двовимірні спектри картинки й фрагмента, відповідно;

* – символ комплексного сполучення;

$s_к(x,y)\cdot s_ф(x,y)$ – операція по-елементного перемножування двовимірних масивів $S_к$ й $S_ф$.

Алгоритм обробки полягає у наступному:

а) спочатку треба відцентрувати сигнал фрагмента (у розумінні теорії імовірності). Це означає порахувати середнє арифметичне усіх елементів масиву фрагмента, а потім відняти його з кожного із цих елементів. Цим ми доможемося того, що сума всіх елементів дорівнюватиметься нулеві. Якщо цього не зробити, то максимум кореляційної функції K(x,y) вказуватиме не на положення фрагменти на картинці, а на найбільш яскраві області на ній;

б) створити два нових масиви розмірністю A+C-1 на B+D-1. У них ми починаючи з лівого верхнього пикселя копіюємо значення з картинки із фрагмента (картинку – до першого масива, а фрагмент – до другого). Всі інші елементи робимо рівними нулеві. Іншими словами, мусимо сформувати два зображення, у лівих верхніх кутах яких будуть картинка (на першому зображенні) і фрагмент (на другому), а усе інше на них буде чорним. Надалі обробка здійснюватиметься лише над цими масивами;

в) розрахувати спектри нових масивів відповідно до (6). Отримаємо два двовимірних масиви комплексних чисел розмірністю A+C-1 на B+D-1;

г) тепер беремо спектр фрагмента і кожному елементу привласнюємо його ж комплексно сполучене. Тобто у кожного з елементів змінюємо знак мнимої частини на протилежний;

д) далі вважаємо взаємний спектр, що одержуємо заелементним перемножуванням двох, що вже маються в нас, спектрів. Т.е. вважаємо новий масив по формулі G(i, j) = Sк(i, j) * Sф*(i, j);

е) тепер осталось зробити зворотне перетворення Фур'є від отриманого взаємного спектра і знайти максимум функції, що вийшла. Його координати і будуть відповідати положенню фрагмента на картинці.

Можна ще зміщати сигнал не тільки фрагмента, але і самої картинки, але воно і так нормально працює.

1.8 Порядок виконання роботи

Для виконання роботи необхідно:

– персональний комп'ютер;

– MATLAB або GNU Octave;

– Python (NumPy, SciPy, Matplotlib) або інше програмне середовище цифрової обробки сигналів.

Завдання 1. Аналіз гармонійного сигналу методом ДПФ.

Сформувати сигнал з параметрами:

– амплітуда $A = 1$;

– частота $f = 100$Гц;

– частота дискретизації $F_s = 1000$Гц;

– кількість відліків $N = 128$.

Необхідно:

– побудувати часову форму сигналу;

– обчислити ДПФ;

– побудувати амплітудний спектр;

– визначити частоту максимуму спектра.

Завдання 2. Дослідження спектрального просочування.

Змінити частоту сигналу на f=105 Гц та повторити спектральний аналіз.

Необхідно:

– побудувати спектр сигналу;

– порівняти результати з попереднім випадком;

– пояснити появу спектрального просочування.

Завдання 3. Використання вагових вікон.

Для сигналу з частотою 105 Гц послідовно застосувати:

– прямокутне вікно;
– вікно Ханна;
– вікно Хемінга;
– вікно Блекмана.
Для кожного випадку:
– побудувати форму вікна;
– побудувати спектр сигналу;
– визначити:

$$\Delta f = F_S/N,$$

а) ширину головної пелюстки;
б) рівень бічних пелюсток;
в) вплив на точність визначення частоти.

Завдання 4. Вплив довжини вибірки.
Провести аналіз сигналу для:
а) N = 64;
б) N = 128;
в) N = 256;
г) N = 512.
Необхідно:
– побудувати спектри;
– порівняти частотну роздільну здатність;
– розрахувати: де Δf – частотний крок спектра;
– результати внести до Таблиці 1.

Таблиця 1 – Результати

Вікно	Частота сигналу, Гц	N	Ширина головної пелюстки	Рівень бічних пелюсток, дБ
Прямокутне				
Hann				
Hamming				
Blackman				

1.9 Контрольні запитання

1. Що називається дискретним перетворенням Фур'є?
2. Яке призначення ДПФ у системах цифрової обробки сигналів?
3. Що таке спектральне просочування?
4. Чому виникає ефект просочування спектра?
5. Для чого використовуються вагові вікна?
6. Які переваги та недоліки прямокутного вікна?
7. Чим відрізняються вікна Ханна та Хемінга?
8. Як впливає довжина вибірки на спектральну роздільну здатність?
9. Що таке головна та бічні пелюстки спектральної характеристики?
10. У чому полягає компроміс між шириною головної пелюстки та рівнем бічних пелюсток?

1.10 Зміст звіту

Звіт повинен містити:
– назву та мету роботи;
– теоретичні відомості;
– початкові дані;
– лістинг програми;
– графіки сигналів та спектрів;
– таблиці результатів;
– відповіді на контрольні запитання.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАНЬ

1. Richards M. A. *Fundamentals of Radar Signal Processing*. 2nd ed. New York : McGraw-Hill Education, 2014.

2. Skolnik M. I. *Radar Handbook*. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 2008.

3. Самборський І. І., Шолохов С. М., Юрченко О. В., Ніколаєнко Б. А. Основи цифрової обробки сигналів : навчальний посібник. Київ : ІСЗЗІ КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 171 с. URL: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/63620/1/posibnyk_Osnovy_TsOS.pdf (дата звернення: 19.10.2026).

4. Чорнобородова Н. П., Чорнобородов М. П. Синтез вагових функцій з малим рівнем міжфільтрового просочування для дискретного перетворення Фур'є. Запорізький національний технічний університет. URL: https://eir.zp.edu.ua/bitstreams/a6b37477-9277-43c9-a114-49c376d59fd9/download (дата звернення: 19.10.2026).

5. Самборський І. І., Шолохов С. М. Цифрове оброблення сигналів: конспект лекцій, навчальний посібник. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2025. 191 с. URL: https://ela.kpi.ua/bitstreams/74fd6a12-ffe3-4504-bce3-d2e63edd7e89/download (дата звернення: 19.10.2026).

6. Микитенко В. І., Тимчик Г. С. Цифрова обробка сигналів та зображень : навчальний посібник. 2-ге вид., перероб. і допов. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2025. 181 с. URL: https://ela.kpi.ua/server/api/core/bitstreams/088f39f7-9d23-48fe-91a1-e7c166569f16/content (дата звернення: 19.10.2026).

7. Івашко А. В., Лунін Д. О. Цифрові фільтри: методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з курсу «Цифрова обробка сигналів». Харків : НТУ «ХПІ», 2023. 40 с. URL: https://repository.kpi.kharkov.ua/bitstreams/3f509050-fc22-4ea4-9589-96c6f154b8d0/download (дата звернення: 19.10.2026).

8. Gonzalez R. C., Woods R. E. *Digital Image Processing*. 4th ed. New York: Pearson, 2018.

9. Кравченко І. В., Микитенко В. І. Цифрова обробка сигналів та зображень. Частина 1 : практикум : навчальний посібник. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2025. 76 с. URL: https://ela.kpi.ua/bitstreams/ad78abbd-2b28-4636-afaf-9279353209bd/download (дата звернення: 19.10.2026).

10. NumPy Developers. Discrete Fourier Transform (numpy.fft): офіційна документація. URL: https://numpy.org/doc/stable/reference/routines.fft.html (дата звернення: 19.10.2026).

11. SciPy Developers. Window Functions (scipy.signal.windows): офіційна документація. URL: https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/signal.windows.html (дата звернення: 19.10.2026).