

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет “Запорізька політехніка”

В.В. Солоха

ТЕКСТИ (конспект) лекцій з дисципліни

“Дослідження та випробування механічних систем”
для студентів спеціальності 133 “Галузеве машинобудування” за
освітньою програмою “Металорізальні верстати та системи”

2025

Тексти (конспект) лекцій з дисципліни “Дослідження та випробування механічних систем” для студентів спеціальності 133 “Галузеве машинобудування” за освітньою програмою “Металорізальні верстати та системи” /Укл. В.В. Солоха. - Запоріжжя: НУ “Запорізька політехніка”, 2025. - с. 122

Укладачі: В.В. Солоха, доцент, к.т.н.

Рецензенти: професор, д.т.н. Павленко Д.В.

Відповідальний

за випуск: , доцент, к.т.н. Фролов М.В.

Затверджено
на засіданні кафедри
“Металорізальні верстати та
інструменти”

Протокол № _____
від “__” _____ 2025

Рекомендовано до видання НМК
Машинобудівного факультету
Протокол № _____
від “__” _____ 2025.

Зміст

	С.
Лекція 1. Основні принципи планування експерименту.	4
Лекція 2. Види математичних моделей в експерименті	10
Лекція 3. Повний факторний експеримент	16
Лекція 4. Властивості повного факторного експерименту	21
Лекція 5. Проведення експерименту	26
Лекція 6. Обробка результатів експерименту	32
Лекція 7. Вимірювальна техніка	37
Лекція 8. Чутливі елементи для вимірювальних перетворювачів	43
Лекція 9. Вимірювання механічних коливань	51
Лекція 10. Випробування і дослідження металорізальних верстатів	57
Лекція 11. Дослідження точності позиціонування верстатів. Умови проведення та розрахунок показників (iso 210-1,2)	67
Лекція 12. Аналіз та оцінка динамічних характеристик верстатів	78
Лекція 13. Численні методи розв'язання диференціальних рівнянь	87
Лекція 14 Система інженерного аналізу “ANSUS”	106
Лекція 15. Робота в системі ANSUS	110
РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА	121

ЛЕКЦІЯ 1. ОСНОВНІ ПРИНЦИПИ ПЛАНУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТУ

1.1 Необхідність планування експериментів

Експериментальні дослідження ведуться у всіх областях науки і техніки. Мета цих експериментів — або встановити нові факти про досліджуване явище, або порівняти впливи різних умов на даний процес. Припустимо, наприклад, що інженера-металурга цікавлять ефекти двох різних процесів гарту алюмінієвого сплаву: у маслі і солоній воді. Метою експерименту в даному випадку є визначення середовища, що охолоджує, яке забезпечує найбільшу твердість даного сплаву. Інженер ухвалює рішення піддати декілька зразків сплаву гарту в кожній з рідин і заміряти твердість зразків після гарту. Середня твердість зразків, оброблених в кожному з середовищ, що охолоджують, буде використана для визначення кращого з них. Якщо задуматися над цим експериментом, то виникає ряд важливих питань:

1. Чи є ці дві рідини, що охолоджують, єдиними середовищами, що представляють інтерес?
2. Чи існують інші чинники, які можуть впливати на твердість і повинні досліджуватися або контролюватися в цьому експерименті?
3. Скільки зразків сплаву потрібно обробити в кожній з рідин, що охолоджують?
4. Як потрібно розподіляти зразки по рідинах, що охолоджують, і в якому порядку збирати дані?
5. Який метод аналізу даних повинен бути застосований?
6. Яка різниця між середніми значеннями твердості, що спостерігалися для двох середовищ, що охолоджують, вважатиметься важливою?

На всі ці питання потрібно дати задовільну відповідь ще до того, як буде проведений експеримент.

Результати будь-якого експерименту і висновки, які з них можна зробити, залежать значною мірою від того, яким чином збираються дані. Для ілюстрації цього положення допустимо, що інженер в описаному вище експерименті використовував зразки з однієї партії нагріву для обробки в маслі, а з іншої партії — в солоній воді. Тепер порівнюючи середні твердості інженер не може сказати, якою мірою різниця, що спостерігалася, обумовлена середовищем, що охолоджує, а

якою - відмінностями, властивими партіям нагріву. Таким чином, метод збору даних несприятливо вплинув на висновки, які можна зробити з цього експерименту.

1.2 Основні принципи планування експерименту

Якщо ми хочемо провести експеримент найефективніше, то необхідний науковий підхід до його планування. Під *статистичним плануванням експерименту* ми розуміємо таку організацію експериментального дослідження, яка дозволить зібрати необхідні дані, застосувати для їх аналізу статистичні методи і зробити вірні і об'єктивні висновки. Без статистичного підходу до планування експерименту не обійтися, якщо ми не хочемо, щоб висновки, отримані на основі його даних, виявилися позбавленими сенсу. Якщо дані експерименту містять помилки, то статистичні методи є єдиним об'єктивним підходом до їх аналізу. Таким чином, в будь-якій експериментальній задачі є два аспекти: планування експерименту і статистичний аналіз даних, причому ці два аспекти тісно взаємопов'язані, оскільки метод аналізу безпосередньо залежить від плану, що застосовується.

У основі планування експерименту лежать два основні принципи — *реплікація і рандомізація*. Під реплікацією ми розуміємо повторення основного експерименту. У описаному вище металургійному експерименті репліка складалася б із зразка, обробленого гартом в маслі, і зразка, обробленого гартом в солоній воді. Таким чином, якщо в кожному середовищі, що охолоджує, оброблено по п'ять зразків, то ми говоримо, що отримано п'ять *реплік*. Повторні досліді мають дві важливі властивості. По-перше, вони дозволяють експериментаторові отримати оцінку помилки експерименту (випадкової погрішності). Ця оцінка стає основною «мірою» для визначення того, чи є спостережені відмінності в даних насправді *статистично* різними. По-друге, якщо вибіркове середнє (наприклад, y) використовується для оцінювання ефекту фактору в експерименті, то повторні спостереження дозволяють дослідникові отримати точнішу оцінку цього ефекту. Якщо σ^2 — дисперсія даних, а n — число реплік, то дисперсія вибіркового середнього $\sigma_y^2 = \frac{\sigma^2}{n}$.

Таким чином, якщо реплік $n = 1$ і спостерігалось $y_1 = 145$ (гарт в маслі) і $y_2 = 147$ (гарт в солоній воді), то ми, ймовірно, не зможемо

зробити задовільного висновку щодо ефекту середовища, що охолоджує. Іншими словами, спостережена різниця може бути обумовлена випадковою експериментальною помилкою. Навпаки, якщо n достатньо велике, а експериментальна помилка достатньо мала, то для $\bar{y}_1 < \bar{y}_2$ ми могли б зробити висновок, що гарт в солоній воді приводить до вищої твердості даного алюмінієвого сплаву в порівнянні з гартом в маслі.

Рандомізація — наріжний камінь, на якому ґрунтується застосування статистичних методів в плануванні експерименту. Рандомізація означає, що розподіл експериментального матеріалу і порядок, в якому повинні проводитися окремі досліди або прогони експерименту, встановлюються випадковим чином. Для застосування статистичних методів потрібно, щоб спостереження (або помилки) були незалежними випадковими змінними. Рандомізація, зазвичай, забезпечує справедливність цього допущення. В разі відповідної рандомізації експерименту ми також «усереднюємо» можливі ефекти зовнішніх факторів. Припустимо, що в описаному вище експерименті зразки, наприклад, дещо різняться за товщиною і ефективність середовища, що охолоджує, може залежати від товщини зразка. Якщо всі зразки, піддані обробці в маслі, товщі за зразки, що гартувалися в солоній воді, то ми постійно ставитимемо одне середовище, що охолоджує, в кращі умови в порівнянні з іншим. В разі випадкового розподілу зразків за середовищами, що охолоджують, такої ситуації не виникає.

Для використання статистичного підходу до планування експериментів і аналізу даних необхідно, щоб всі учасники експерименту ще до його початку ясно розуміли, що саме належить досліджувати і яким чином потрібно збирати дані або хоча б мали уяву про те, як ці дані потрібно аналізувати. Можна рекомендувати таку схему.

Визнання факту існування задачі і її формулювання. Це положення може здатися досить тривіальним, але на практиці часто буває непросто зрозуміти, що існує проблема, яка потребує експериментальних досліджень, і виробити ясне і загальноприйняте формулювання цієї проблеми. Необхідно уточнити всі уявлення про цілі експерименту. Чітке формулювання завдання у багатьох випадках виявляється істотним для кращого розуміння явищ і вирішення задачі.

Вибір факторів і рівнів. Експериментатор повинен відібрати незалежні змінні, або *фактори*, які досліджуватимуться в експерименті. Наприклад, в описаному вище експерименті з перевірки твердості один фактор — середовище, що охолоджує. Фактори в експерименті можуть бути кількісними або якісними. У разі дослідження кількісних факторів потрібно подумати про те, як підтримувати бажані значення цих факторів і як їх вимірювати. Необхідно також вибрати значення, або *рівні*, факторів, які будуть використані в експерименті. Ці рівні можуть бути задані або вибрані випадковим чином з безлічі всіх можливих рівнів фактору.

Вибір змінної відгуку. В разі вибору відгуку, або залежної змінної, експериментатор повинен бути упевнений в тому, що відгук, який належить вимірювати, дійсно містить інформацію про досліджувану проблему. Потрібно подумати також і про те, як вимірюватиметься відгук і яка вірогідна точність цих вимірювань.

Вибір плану експерименту. Цей етап є найбільш важливим в процесі експериментування. Дослідник повинен задати величину відмінності від дійсного відгуку, яку він хоче виявити, і величину ризику, на який він може піти, з тим щоб вибрати відповідний об'єм вибірки (число реплік). Слід також визначити, в якому порядку збиратимуться дані і який метод рандомізації буде застосований. Необхідно завжди погоджувати між собою статистичну точність і вартість експерименту. Більшість планів експериментів, що рекомендуються, і статистично ефективні, і економічні, тому зусилля експериментатора з забезпечення статистичної точності зазвичай приводять і до економічної ефективності.

Повинна бути запропонована математична модель експерименту, що дозволить провести статистичний аналіз даних.

Проведення експерименту. В ході експерименту, тобто реального процесу збору даних, дослідник повинен уважно стежити за тим, щоб все відбувалось відповідно до плану. Особливу увагу потрібно звертати на рандомізацію, точність вимірювань і підтримку, по можливості, більшої однорідності зовнішніх умов експерименту.

Аналіз даних. Для аналізу даних експерименту повинні застосовуватися статистичні методи. Важливо не забувати і про точність обчислень. Сучасні засоби обчислювальної техніки багато в чому полегшили експериментаторові це завдання, одночасно

скоротивши трудомісткість обчислень. В процесі аналізу даних часто виявляються корисними і графічні методи.

Висновки і рекомендації. По завершенню аналізу даних експериментатор може зробити висновки щодо своїх результатів. Потрібно дати фізичну інтерпретацію статистичних висновків і оцінити їх практичне значення, а потім винести рекомендації щодо використання результатів. Ці рекомендації можуть включати і проведення подальших експериментів, оскільки дослідження зазвичай є ітеративним *процесом*, коли окремих експеримент, відповідаючи на деякі питання, одночасно ставить нові. Подаючи свої результати і висновки, експериментатор повинен прагнути використовувати якомога менше спеціальної статистичної термінології і формулювати своє повідомлення по можливості простіше. Використання малюнків і графіків є дуже ефективним способом представлення важливих результатів експерименту.

Експеримент проводиться в лабораторії, на виробництві, тощо. Він може бути фізичним або модельним, проводиться безпосередньо на об'єкті, або на його моделі. Модель зазвичай відрізняється від об'єкта масштабом, а іноді і природою.

Одним із можливих шляхів підвищення ефективності досліджень є застосування математичного планування експерименту.

Планування експерименту – це процедура вибору кількості та умов проведення дослідів, необхідних та достатніх для вирішення поставленої задачі з необхідною точністю. Тут суттєвим є таке:

прагнення до мінімізації загального числа дослідів;

одночасне варіювання усіма змінними, що визначають процес, за спільними правилами – алгоритмами;

використання математичного апарату, що формалізує багато дій експериментатора;

вибір чіткої стратегії, що дозволяє приймати обґрунтовані рішення після кожної серії експериментів.

Задача пошуку оптимальних умов є однією з найпоширеніших науково-технічних задач. Вона виникає тоді, коли встановлена можливість проведення процесу і необхідно знайти найкращі (оптимальні в деякому розумінні) умови його реалізації.

Завжди необхідно чітко формулювати в якому сенсі умови мають бути оптимальні. Це визначає вибір мети дослідження. Для опису

об'єкту дослідження зручно користуватися уявленням про "чорну скриню".

На виході з "чорної скрині" (рис. 1.1) одержуємо числові характеристики y_i цілей дослідження, які називаємо параметрами оптимізації (цільова функція, відгук системи).

Для проведення експерименту необхідно мати можливість впливати на поведінку "чорної скрині". Всі способи такого впливу x_i називають факторами або входами.

Кожен фактор може набувати в досліді одне або декілька значень. Такі значення називають рівнями. Може виявитися, що фактор здатний набувати нескінченно багато значень. Але на практиці точність, з якою установлюється якесь значення, не безмежна, тому правомірно вважати, що будь-який фактор має визначене число дискретних рівнів.



Рисунок 1.1 – Подання об'єкту дослідження у вигляді "чорну скриню"

Фіксований набір рівнів факторів (тобто встановлення кожного фактору на деякому рівні) визначає один з можливих станів "чорної скрині". Число різних станів визначається як p^k , де p – число рівнів кожного фактору, k – число факторів.

Планування експерименту передбачає активне втручання в процес та можливість вибору в кожному досліді тих рівнів факторів, які представляють інтерес. Такий експеримент називається активним, а об'єкт на якому можливий активний експеримент називається керованим.

На практиці немає абсолютно керованих об'єктів. На реальний об'єкт звичайно діють як керовані, так і не керовані фактори. Некеровані фактори впливають на відтворюваність експерименту і є причиною її порушення.

Експеримент слід проектувати, прагнучи до забезпечення необхідної якості досліджень. Цілі та критерії оцінки якості дослідження слід з'ясовувати, системно оцінюючи витрати, важливість

очікуваних результатів, наслідки недостатньої точності та помилкових рішень. Для визначення показників якості дослідницького процесу необхідно уміти будувати модель експерименту (та переконуватись в її вірності).

ЛЕКЦІЯ 2. ВИДИ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ В ЕКСПЕРИМЕНТІ

2.1 Статистичні і аналітичні моделі

Для ефективного аналізу механізму явищ та керування процесами слід виявляти взаємозв'язок між факторами, що визначають хід процесу, та подати їх в кількісній формі – у вигляді математичної моделі. В залежності від джерела інформації, що використовується для побудови математичної моделі розрізняють фізико-хімічні моделі (що інколи називають аналітичними або теоретичними) та статистичні чи емпіричні моделі. В першому випадку за основу беруться фізико-хімічні закономірності процесів, що моделюються. Зазвичай, моделі процесів подаються у вигляді складних систем рівнянь (системи алгебраїчних, звичайних диференціальних рівнянь або рівнянь в частинних похідних). Вони дають можливість дуже точно описати процеси, що протікають в об'єкті та допускають екстраполяцію у точки факторного простору, в яких неможливе безпосереднє спостереження цих процесів. Статистичні моделі одержують в результаті статистичної обробки експериментальних даних, одержаних на об'єкті, що досліджується. Структура статистичної моделі може вибиратися відносно довільно. Відповідність моделі об'єкту обмежується лише кількісним аспектом.

Статистичні моделі мають відносно просту структуру, дуже часто вони подаються у вигляді поліномів. Область їх застосування обмежується робочою зоною, в якій проводиться експеримент.

Статистичні моделі розрізняють статичні (стаціонарні) та динамічні (моделі динаміки). Перші описують стаціонарні, тобто незмінні в часі, співвідношення в об'єкті, інші – перехідні процеси, тобто нестаціонарний стан. Моделі динаміки найчастіше мають вигляд передавальної функції чи систем диференціальних рівнянь.

Основою теорії експерименту є математична статистика, яку можна застосувати для аналізу експерименту в тих випадках, коли його результати можна розглядати як випадкові величини чи випадкові процеси. Ця умова виконується в більшості досліджень, оскільки,

зазвичай, результати експерименту пов'язані з деякою невизначеністю. Серед причин такої невизначеності можна назвати випадковий характер процесів дослідження, вплив неконтрольованих факторів, неконтрольовані зміни умов експерименту та помилки спостережень. Сюди ж відносяться помилки вимірювання, причини яких криються в недосконалості приладів, методів вимірювання та пристроїв передачі даних. Вплив цих збурень на результати спостережень може в багатьох випадках розглядатися як випадковий.

Статистичне уявлення про експеримент створює основу для дослідження складних об'єктів та систем. Ці складні об'єкти характеризуються великою кількістю факторів, що впливають на результати експерименту. В класичному підході до експериментів дослідження впливу сукупності факторів на результати експерименту проводиться за умови, що змінюється лише один з факторів і фіксуються значення інших. В складних системах, в яких велика кількість впливів не може контролюватися або керуватися, ця умова не виконується. Вплив неконтрольованих факторів розглядається як додатковий стохастичний шум, накладений на істинні результати експериментів. Для того щоб вплив зробити випадковим, застосовують рандомізацію експерименту. Завдяки цьому вдається надійно виокремити фактори, що цікавлять експериментатора, від шумового фону, обумовленого неконтрольованими впливами.

Статистичні методи дають експериментатору можливість аналізувати дані та приймати рішення стосовно об'єкту дослідження на основі опрацьованих результатів експерименту. Ці методи враховують стохастичний характер результатів та базуються на статистичній перевірці гіпотез.

В відношенні статистичних висновків варто завжди враховувати, що позитивний результат перевірки деякої статистичної гіпотези означає лише те, що гіпотеза не суперечить результатам експерименту. Результати перевірки гіпотези ніколи не можуть служити доказом абсолютної справедливості та вірності гіпотези.

При побудові математичних моделей процесів дослідник може постулювати цілу низку гіпотез про вид моделі та експериментальним шляхом вибрати серед цих моделей ту, яка найкращим чином відповідає результатам експериментів. Якщо серед постульованих гіпотез не виявилось істинної, то за допомогою експериментів її також не вдається знайти.

Цілеспрямований вибір умов проведення експериментів передбачає можливість активного впливу на об'єкт дослідження, тобто можливість активного експерименту. В активному експерименті можна оцінити дисперсію помилки, перевірити адекватність моделі та прийняти належні заходи щодо умов, необхідних для застосування методу численного регресійного аналізу, який використовується для обробки результатів експериментів.

Кожне експериментальне дослідження складається із низки етапів, що слідують один за іншим (рис. 2.1): формулювання мети, висування гіпотези про об'єкт дослідження, планування експериментів, проведення експериментів, обробка і аналіз результатів, перевірка вірності висунутої гіпотези, висування нової гіпотези, перевірка умов закінчення експерименту, планування нового експерименту.

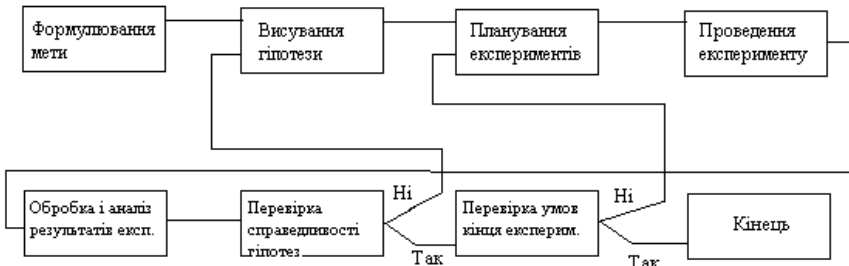


Рисунок 2.1 – Стратегія побудови математичної моделі

Із даної схеми витікає, що дослідження об'єкта складається із циклів, що повторюються, до того ж від циклу до циклу зростає обсяг знань про об'єкт, гіпотези, які висуваються, все більше наближаються до дійсності. Разом з тим зростає також ефективність планування експерименту.

Область застосування методів планування експерименту досить широка. Ці методи виявляються дуже ефективними під час проведення фізико-хімічних досліджень в лабораторних умовах, в експериментах на дослідних та промислових об'єктах.

2.2 Фактори в плануванні експерименту

Після вибору об'єкта дослідження та параметру оптимізації, до розгляду слід включити всі суттєві фактори, що можуть впливати на процес. Якщо який-небудь суттєвий фактор виявиться неврахованим, то це може призвести до небажаних наслідків. Так, якщо неврахований

фактор довільно набув випадкових значень, які експериментатор не контролював, то це значно збільшить помилку досліду. В разі підтримання фактору на деякому фіксованому рівні може бути одержано помилкове уявлення про оптимум, оскільки немає гарантії, що фіксований рівень є оптимальний.

Фактором називається вимірювана змінна величина, що набуває в деякий момент часу визначеного значення. Фактори відповідають способам впливу на об'єкт дослідження.

Так само, як і параметр оптимізації, кожен фактор має область визначення. Фактор вважається визначеним, коли разом з його назвою зазначена область його визначення. Під областю визначення розуміється сукупність всіх значень, які в принципі може набувати даний фактор. Сукупність значень фактору, яка використовується в експерименті, є підмножиною із множини значень, що утворюють область визначення.

В практичних задачах область визначення факторів, зазвичай, обмежена. Обмеження можуть носити принциповий або технічний характер.

Фактори поділяють на кількісні та якісні. Якісні фактори – це різні речовини, різні технологічні способи, апарати, виконавці тощо.

2.3 Ефект фактору

У багатьох експериментах доводиться досліджувати ефекти двох і більше факторів. В цьому випадку найбільш ефективні факторні експерименти. Факторним ми називаємо такий експеримент, в кожному повному досліді або репліці якого досліджуються всі можливі комбінації рівнів факторів. Наприклад, для a рівнів фактору A і b рівнів фактору B кожна репліка містить всі $a \cdot b$ комбінацій обробок. Фактори, що досліджуються в факторному експерименті, часто називаються пересічними.

Ефект фактору визначається як зміна відгуку, обумовлена зміною рівня фактору. Його часто називають головним ефектом, оскільки він відноситься до факторів, що представляють основний інтерес в експерименті. Розглянемо, наприклад, дані табл. 2.1. За головний ефект фактору A можна взяти різницю середніх відгуків на першому і другому рівнях A , тобто величину

$$A = \frac{40 + 52}{2} - \frac{20 + 30}{2} = 21$$

Іншими словами, зростання фактору A від рівня 1 до рівня 2 зумовлює збільшення середнього відгуку на 21 одиницю. Аналогічно головний ефект B становить

$$B = \frac{30 + 52}{2} - \frac{20 + 40}{2} = 11$$

Якщо число рівнів факторів більше двох, то наведене визначення необхідно змінити, оскільки різниці середніх відгуків можуть бути утворені багатьма способами.

Таблиця 2.1 Факторний експеримент

		Фактор B	
		B_1	B_2
Фактор A	A_1	20	30
	A_2	40	52

Таблиця 2.2 Факторний експеримент з взаємодією

		Фактор B	
		B_1	B_2
Фактор A	A_1	20	40
	A_2	50	12

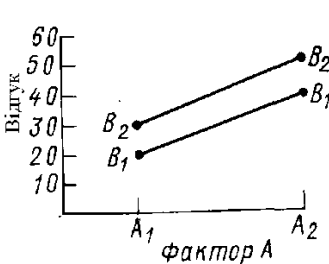
У ряді експериментів може виявитися, що різниці відгуків на деяких рівнях одного фактору неоднакові для різних рівнів інших факторів; в таких випадках кажуть, що між факторами існує взаємодія. Розглянемо, наприклад, дані табл. 2.2. На першому рівні фактору B ефект фактору A становить:

$$A = 50 - 20 = 30,$$

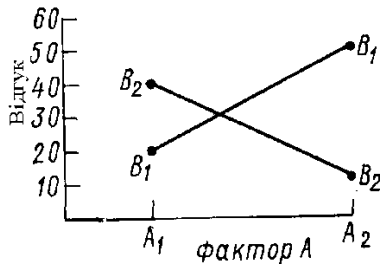
а на другому

$$A = 12 - 40 = -28.$$

Таким чином, ефект фактору A залежить від вибору рівня фактору B , отже, фактори A і B взаємодіють.



а);



б)

Рисунок 2.2- Факторний експеримент: а – без взаємодії; б – зі взаємодією

Введені поняття можна проілюструвати графічно. На рис. 2.2, а показана залежність відгуку (за даними табл. 2.1) від рівня фактору A

для обох рівнів B . Відзначимо, що лінії, відповідні B_1 , і B_2 , майже паралельні. Це свідчить про відсутність взаємодії між факторами A і B . На рис. 2.2, б показана аналогічна залежність для даних табл. 2.2. Видно, що лінії, відповідні B_1 і B_2 , тут не паралельні. Це означає, що між факторами A і B існує взаємодія. Подібні графіки часто виявляються дуже зручними для інтерпретації значущих взаємовпливів. При аналізі даних не можна, однак, обмежуватися одними графіками, оскільки їх інтерпретація суб'єктивна.

Відзначимо, що в випадку помітної взаємодії практичне значення відповідних головних ефектів невелике. Оцінюючи головний ефект A за даними табл. 2.2 ми б отримали

$$A = \frac{50 + 12}{2} - \frac{20 + 40}{2} = 1$$

тобто дуже малу величину.

Напрошується висновок про відсутність ефекту; однак коли ми розглядали ефекти A на різних рівнях фактору B , то бачили, що це не так. Ефект фактору A існує, але він залежить від рівня фактору B . Іншими словами, знати взаємодії AB виявляється більш важливим, ніж головний ефект. Значуща взаємодія може маскувати значимість головних ефектів; це ясно показують дані табл. 2.2. При існуванні значущої взаємодії експериментатор може досліджувати рівні одного фактору, скажімо, A , зафіксувавши рівні інших факторів, що допомагає зробити висновки щодо головного ефекту A .

2.4 Вимоги, що висувають до факторів під час планування експерименту

Під час планування експерименту фактори мають бути керованими. Це означає, що експериментатор, вибравши необхідне значення фактору, може його підтримувати сталим протягом всього досліджу, тобто може керувати фактором. В цьому полягає особливість "активного" експерименту. Планувати експеримент можна лише в разі, якщо рівні факторів підкоряються експериментаторові.

Щоб точно визначити фактор, необхідно зазначати послідовність дій (операцій), за допомогою яких устанавлюються його конкретні значення (рівні). Таке визначення фактору будемо називати операціональним. Введення операціонального визначення забезпечує однозначність розуміння фактору.

З операціональним визначенням пов'язані вибір розмірності фактору та точність його фіксування.

Точність замірів факторів повинна бути по можливості більш високою. Ступінь точності визначається діапазоном зміни факторів. Під час вивчення процесів, що тривають десятки годин, немає потреби враховувати частки хвилини, а в швидкоплинних процесах слід враховувати можливо навіть частки секунди.

Фактори повинні бути безпосередніми впливами на об'єкт. Фактори мають бути однозначними. Важко керувати фактором, який є функцією іншого фактору. Але в плануванні можуть брати участь складні фактори, необхідність введення яких виникає за бажання подати динамічні особливості об'єкта в статичній формі.

В плануванні експерименту зазвичай одночасно змінюються декілька факторів. Тому дуже важливо сформулювати вимоги, які висувають до сукупності факторів. Перш за все висувається вимога сумісності факторів. Сумісність факторів означає, що всі їх комбінації здійсненні та безпечні.

Несумісність факторів може спостерігатися на границях областей їх визначення. Позбутися від неї можна скороченням областей. Положення ускладняється, якщо несумісність проявляється всередині областей визначення. Одне з можливих рішень – розбиття на підобласті та рішення двох окремих задач.

Вимога незалежності факторів, передбачає можливість встановлення фактору на будь-якому рівні незалежно від рівнів інших факторів. Якщо ця умова не виконується, то неможливо планувати експеримент. З цим пов'язана вимога відсутності кореляції між факторами. Ця вимога не означає, що між факторами немає ніякого зв'язку. Достатньо, щоб зв'язок не був лінійним.

ЛЕКЦІЯ 3. ПОВНИЙ ФАКТОРНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ

3.1 Вибір виду моделі.

Під моделлю ми розуміємо вид функції відгуку

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_k).$$

Вибір моделі полягає в виборі виду даної функції та запису її рівняння. Після чого залишається спланувати та провести експеримент для оцінки числових значень констант (коефіцієнтів) даного рівняння.

3.2 Повний факторний експеримент

При виборі області експерименту мають враховуватися такі міркування.

Перш за все необхідно оцінити границі областей визначення факторів. Слід враховувати обмеження декількох типів. Перший тип: принципові обмеження для значень факторів, які не можуть бути порушені ні за яких обставин. Другий тип – обмеження пов'язані з техніко-економічними міркуваннями, наприклад, з вартістю сировини, дефіцитністю окремих компонентів, часом протікання процесу. Третій тип обмежень, з яким найчастіше приходиться мати справу, визначається конкретними умовами проведення процесу, наприклад, існуючою апаратурою, технологією, організацією.

Експеримент зазвичай розпочинається в умовах, коли об'єкт уже піддавався деяким дослідженням. Інформацію, що міститься в результатах попередніх досліджень будемо називати апіорною (тобто одержаною до початку експерименту). Апіорну інформацію ми можемо використовувати для одержання уявлення про параметр оптимізації, про фактори, про найкращі умови ведення процесу та характер поверхні відгуку, тобто про те, як сильно змінюється параметр оптимізації в разі незначних змін факторів, а також про кривину поверхні.

Отже, вибір експериментальної області факторного простору пов'язаний з ретельним аналізом апіорної інформації.

Вибір основного рівня. Найкращим умовам, що визначені з аналізу апіорної інформації, відповідає комбінація (або декілька комбінацій) рівнів факторів. Кожна комбінація є багатовимірної точкою в факторному просторі. Її можна розглядати як вихідну точку для побудови плану експерименту. Назвемо її основним (нульовим) рівнем. Побудова плану експерименту зводиться до вибору експериментальних точок, симетричних відносно нульового рівня.

В різних випадках ми маємо різні дані про область найкращих умов. Якщо є дані про координати однієї найкращої точки та немає інформації про границі визначення факторів, то залишається розглядати цю точку в якості основного рівня. Аналогічне рішення приймається, якщо границі відомі та найкращі умови лежать всередині області.

Якщо точка лежить на границі (або доволі близько до границі) області, тоді приходить ся основний рівень вибирати з деяким зсувом від найкращих умов.

Може трапитися, що координати найкращої точки невідомі, але є дані про деяку підобласть, в якій процес іде доволі добре. Тоді основний рівень вибирають або в центрі, або в випадковій точці даної підобласті. Дані про підобласть можна одержати, аналізуючи вивчені раніше подібні процеси, з теоретичних міркувань або з попереднього експерименту.

Вибір інтервалів варіювання. Інтервалом варіювання факторів називають деяке число (для кожного фактору своє), додавання якого до основного рівня дає верхній, а віднімання нижній рівні фактору.

Під час планування експерименту проводять перетворення розмірних факторів у безрозмірні, нормовані:

$$x_i = \frac{\bar{x}_i - \bar{x}_{i0}}{\Delta x_i}$$

де x_i – нормоване значення фактору;

$\bar{x}_i$ - натуральне значення фактору;

$\bar{x}_{i0}$ - натуральне значення основного рівня;

Δx_i – інтервал варіювання.

Це дає можливість легко побудувати ортогональну матрицю (область) планування та значно полегшує подальші розрахунки, оскільки в такому разі верхній і нижній рівні варіювання в відносних одиницях дорівнюють відповідно +1 та -1 незалежно від фізичної природи факторів, значень основних рівнів та інтервалів варіювання факторів Δx_i .

На вибір інтервалів варіювання накладаються природні обмеження зверху та знизу. Інтервал варіювання не може бути меншим за ті помилки, з якими експериментатор фіксує рівень фактору. В іншому випадку верхній та нижній рівні не будуть розрізнятися. З іншого боку, інтервал не може бути настільки великим, щоб верхній та нижній рівні виявилися за межами області визначення.

Вибираючи інтервал варіювання факторів варто скористатися апіорною інформацією про точність, з якою експериментатор фіксує

значення факторів, про діапазон замірів параметрів, про кривину поверхні відгуку.

3.3 Планування повного факторного експерименту

Процес знаходження моделі (ідентифікація) методом повного факторного експерименту складається з: планування експерименту; проведення експерименту на об'єкті дослідження; перевірки відтвореності (однорідність вибірових дисперсій) експерименту; одержання математичної моделі об'єкту з перевіркою статистичної значимості вибірових коефіцієнтів регресії; перевірки адекватності математичного опису.

Перший етап планування експерименту для одержання лінійної моделі ґрунтується на варіюванні факторів на двох рівнях. В разі, якщо число факторів відоме, можна знайти число дослідів, необхідних для реалізації всіх можливих поєднань рівнів факторів, яке визначається за формулою $N=2^k$, де k – число факторів. *В загальному випадку експеримент, в якому реалізуються всі можливі поєднання рівнів факторів, називається повним факторним експериментом.*

Умови експерименту можна записати у вигляді таблиці, де рядки відповідають різним дослідом, а стовпці – значенням факторів. Такі таблиці ще називають матрицями планування експерименту. Наведемо матрицю планування для двох факторів.

Таблиця 3.1 - Матриця планування експерименту 2²

№ досліду	x_1	x_2	y
1	-1	-1	y_1
2	-1	+1	y_2
3	+1	+1	y_3
4	+1	-1	y_4

Кожен стовпець в матриці планування називають вектор-стовпцем, а кожен рядок вектор-рядком. Таким чином в таблиці 3.1 ми маємо 2 вектор-стовпці незалежних змінних та один вектор стовпець параметру оптимізації. Алгебраїчна форма запису, подана в таблиці, може бути представлена геометрично. В області визначення факторів знайдемо точку, що відповідає основному рівню, та проведемо через неї нові осі координат, паралельні осям натуральних значень факторів (рис.3.1). Потім виберемо масштаб за новими осями так, щоб інтервал варіювання для кожного фактору дорівнював одиниці. Тоді умови проведення дослідів будуть відповідати вершинам квадрата, центром

якого є основний рівень, а кожна сторона паралельна одній з осей координат та дорівнює двом інтервалам. Номери вершин квадрата відповідають номерам дослідів в матриці планування. Площа, обмежена квадратом, називається областю експерименту.

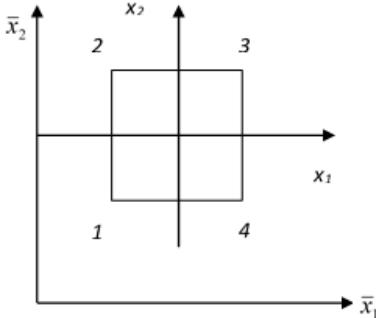


Рисунок 3.1 – Геометричне зображення повного факторного експерименту 2^2 .

Якщо для двох факторів всі можливі комбінації рівнів легко знайти прямим перебором, то зі зростанням факторів виникає потреба в деякому прийомі побудови матриці. Зазвичай використовують два прийоми, що ґрунтуються на переході від матриці меншої розмірності до матриці більшої розмірності. Розглянемо перший. З додаванням нового фактору кожна комбінація рівнів початкового плану

зустрічається двічі: в поєднанні з нижнім та верхнім рівнями нового фактору. Тому записують початковий план для одного рівня нового фактору, а потім повторюють його для іншого рівня.

Даний прийом поширюється на побудову матриці будь-якої розмірності.

Матриця планування експерименту 2^3 матиме вигляд наведений в табл. 3.2.

Таблиця 3.2. - Матриця планування експерименту 2^3

№ дослідів	x_1	x_2	x_3	y
1	-	-	+	y_1
2	-	+	+	y_2
3	+	-	+	y_3
4	+	+	+	y_4
5	-	-	-	y_5
6	-	+	-	y_6
7	+	-	-	y_7
8	+	+	-	y_8

Розглянемо другий прийом. Він ґрунтується на правилі черговості знаків. В першому стовпці знаки змінюються по чергові, в другому стовпці вони чергуються через два, в третьому – через 4, в

четвертому – через 8 і т. д. за ступенями двійки. Якщо в табл. 3.2 поміняти місцями стовпці для x_1 та x_2 то одержимо потрібну матрицю.

ЛЕКЦІЯ 4. ВЛАСТИВОСТІ ПОВНОГО ФАКТОРНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

Говорячи про властивості, ми маємо на увазі ті з них, які визначають якість моделі, тобто оцінки коефіцієнтів мають бути найкращими, а точність передбачення параметру оптимізації не повинна залежати від напрямку в факторному просторі, оскільки наперед невідому, куди слід рухатися в пошуках оптимуму.

Дві властивості витікають безпосередньо з побудови матриці. Перша з них – симетричність відносно центра експерименту. Вона формулюється таким чином: алгебраїчна сума елементів вектор-

стовпця кожного фактору дорівнює нулю, або $\sum_{i=1}^N x_{ji} = 0$, де j - номер фактору, N – число дослідів, $j = 1, 2, \dots, k$.

Друга властивість це так звана умова нормування – формулюється таким чином: сума квадратів елементів кожного стовпця дорівнює числу дослідів, або $\sum_{i=1}^N x_{ji}^2 = N$. Це наслідок того, що значення факторів у матриці задаються $+1$ та -1 .

Це були властивості окремих стовпців матриці. Тепер розглянемо властивості сукупності стовпців. Сума почленних добутків будь-яких двох вектор-стовпців матриці дорівнює нулю.

$$\sum_{i=1}^N x_{ji} x_{ui} = 0, \quad j \neq u; \quad j, u = 0, 1, 2, \dots, k.$$

Ця властивість називається ортогональністю матриці планування.

Четверта властивість називається ротатабельністю, тобто точки у матриці планування підбираються так, що точність передбачення значень параметра оптимізації однакова на рівних відстанях від центру експерименту та не залежить від напрямку.

4.1 Повний факторний експеримент та математична модель.

Для руху до точки оптимуму потрібна лінійна модель $y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$. За результатами експерименту необхідно знайти значення невідомих коефіцієнтів моделі. Можна стверджувати, що

експеримент проводиться для перевірки гіпотези про те, що лінійна модель $\eta = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$ адекватна. Грецькі літери використані для позначення "істинних" генеральних значень відповідних невідомих. Експеримент, що включає скінчене число дослідів, дає можливість лише одержати вибірові оцінки для коефіцієнтів рівняння $y = b_0 + b_1 x_1 + \dots + b_k x_k$. Їх точність та надійність залежить від властивостей вибірки та потребує статистичної перевірки. Коефіцієнти можна розрахувати за формулою

$$b_j = \frac{\sum_{i=1}^N x_{ji} y_i}{N}, j=0, 1, \dots, k.$$

Так для матриці 2^2 коефіцієнти b_1 та b_2 визначаються

$$b_1 = \frac{(-1)y_1 + (+1)y_2 + (-1)y_3 + (+1)y_4}{4},$$

$$b_2 = \frac{(-1)y_1 + (-1)y_2 + (+1)y_3 + (+1)y_4}{4}.$$

Для підрахунку коефіцієнта b_1 використовується вектор стовпець x_1 , а для b_2 стовпець x_2 . Для знаходження коефіцієнта b_0 припустимо, що якщо наше рівняння $y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$ справедливе, то воно вірне і для середніх арифметичних значень змінних $\bar{y} = b_0 + b_1 \bar{x}_1 + b_2 \bar{x}_2$. Але виходячи з властивостей симетрії $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 0$. Отже $\bar{y} = b_0$, тобто b_0 є середнє арифметичне значення параметра. Щоб його отримати, необхідно додати всі y та поділити на число дослідів. В матрицю планування зручно ввести вектор-стовпець фіктивної змінної x_0 , яка набуває в усіх дослідях значення $+1$.

Тепер лінійна модель матиме вигляд $y = b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$.

Коефіцієнти при незалежних змінних вказують на силу впливу факторів. Чим більша числова величина коефіцієнта, тим більший вплив має фактор. Величина коефіцієнта відповідає внеску даного фактору в величину параметра при переході фактору з нульового рівня на верхній або нижній.

Інколи, особливо для якісних факторів, що варіюються на двох рівнях, зручно оцінювати внесок фактору при переході від нижнього до верхнього рівня. Внесок, визначений таким чином, називають ефектом фактору.

Плануючи експеримент на першому етапі ми прагнемо одержати лінійну модель, але у нас немає жодної гарантії, що у вибраних інтервалах варіювання процес описується саме такою моделлю.

Один з таких, що часто зустрічаються, видів нелінійності пов'язаний з тим, що ефект одного фактору залежить від рівня, на якому знаходиться інший фактор. В такому випадку говорять, що має місце ефект взаємодії двох факторів. Повний факторний експеримент дає можливість кількісно оцінити ефекти взаємодії. Для цього необхідно, користуючись правилом перемножування стовпців, одержати стовпець добутку двох факторів. Обчислюючи коефіцієнт, що відповідає ефекту взаємодії, з новим вектор-стовпцем можна поступати так само, як з вектор-стовпцем будь-якого фактору. Для повного факторного експерименту 2^2 матриця планування з врахуванням ефекту взаємодії матиме вигляд поданий в таблиці 3.

Таблиця 4.1 - Матриця планування 2^2 з врахуванням ефекту взаємодії.

№ досліджу	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	y
1	+1	+1	+1	+1	y_1
2	+1	-1	+1	-1	y_2
3	+1	-1	-1	+1	y_3
4	+1	+1	-1	-1	y_4

Під час додавання стовпців ефектів взаємодії всі розглянуті раніше властивості матриць планування зберігаються.

Математична модель матиме такий вигляд

$$y = b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2.$$

Коефіцієнти b_{12} визначаються

$$b_{12} = \frac{(+1)y_1 + (-1)y_2 + (+1)y_3 + (-1)y_4}{4}.$$

Стовпці x_1 та x_2 задають планування – за ними безпосередньо визначаються умови дослідів, а стовпці x_0 та x_1x_2 використовуються лише для розрахунків.

Слід звернути увагу на те, що під час оптимізації ми прагнемо ефекти взаємодії одержати якомога меншими, а в задачах інтерполяції, навпаки, їх з'ясування часто важливе та цікаве.

Зі зростанням числа факторів число можливих впливів швидко зростає. Звернемося до повного факторного експерименту 2^3 . Побудуємо матрицю планування експерименту (табл.4.2).

Таблиця 4.2 - Матриця планування 2^3 з врахуванням ефектів взаємодії.

№ досліджу	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	y
1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	y_1
2	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	y_2
3	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	y_3
4	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	y_4
5	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	y_5
6	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	y_6
7	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	y_7
8	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	y_8

Стовпець ефекту взаємодії $x_1x_2x_3$ одержується перемноженням всіх трьох стовпців факторів та називається ефектом взаємодії другого порядку. Ефект взаємодії максимального порядку в повному факторному експерименті має порядок, на одиницю менший числа факторів. Число можливих взаємодій деякого порядку можна визначити за формулою

$$C_r^m = \frac{k!}{m!(k-m)!},$$

де k – число факторів, m – число елементів у взаємодії.

Ортогональність матриці планування дозволяє отримати незалежні одна від одної оцінки коефіцієнтів. Це означає, що величина будь-якого коефіцієнта не залежить від того, які величини мають інші коефіцієнти.

Але сформульовані вище твердження справедливі лише тоді, коли модель включає лише лінійні ефекти та ефекти взаємодії.

4.2 Дробовий факторний експеримент

Кількість дослідів в повному факторному експерименті значно переважає кількість коефіцієнтів лінійної моделі, що визначаються, тобто повний факторний експеримент має велику надмірність дослідів. Було б бажано скоротити їх кількість за рахунок тієї інформації, що не дуже суттєва під час побудови лінійних моделей.

Мінімізація числа дослідів.

Для повного факторного експерименту 2^k запишемо матрицю табл. 4.3.

Таблиця 4.3 – Матриця експерименту 2^k

№ досліду	x_0	x_1	x_2	$(x_3) x_1x_2$	y
1	+	-	-	+	y_1
2	+	+	-	-	y_2
3	+	-	+	-	y_3
4	+	+	+	+	y_4

Скориставшись таким плануванням, можна визначити чотири коефіцієнти та подати результати експерименту у вигляді неповного квадратного рівняння

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2.$$

Якщо є підстави вважати, що в вибраних інтервалах варіювання процес може бути описаний лінійною моделлю, то достатньо визначити три коефіцієнти b_0 , b_1 та b_2 . Одну ступінь вільності, що залишилася, використаємо для мінімізації числа дослідів. В разі лінійного наближення $b_{12} \rightarrow 0$ і вектор-стовпець x_1x_2 можна використати для нового фактору x_3 . Оцінки коефіцієнтів матимуть такий вигляд:

$$b_1 \rightarrow \beta_1 + \beta_{23}; \quad b_2 \rightarrow \beta_2 + \beta_{13}; \quad b_3 \rightarrow \beta_3 + \beta_{12}.$$

Але для лінійної моделі всі парні взаємодії незначні. А отже для вивчення трьох факторів замість 8 дослідів достатньо поставити чотири. При цьому матриця планування не втрачає своїх оптимальних властивостей (ортогональності, ротатабельності. тощо). Отже можна сформулювати правило: щоб скоротити число дослідів, необхідно новому фактору присвоїти вектор-стовпець матриці, що належить взаємовпливу, яким можна знехтувати. Тоді значення нового фактору в умовах дослідів визначаються знаками даного стовпця.

Дробова репліка.

Поставивши чотири досліди для оцінки впливу трьох факторів, ми скористались половиною повного факторного експерименту 2^3 , або “півреплікою”. Якби ми x_3 прирівняли до $-x_1x_2$, то одержали б іншу половину матриці 2^3 . В цьому випадку $b_1 \rightarrow \beta_1 - \beta_{23}$; $b_2 \rightarrow \beta_2 - \beta_{13}$; $b_3 \rightarrow \beta_3 - \beta_{12}$. В разі реалізації обох півреплік можна одержати окремі оцінки для лінійних ефектів взаємовпливу, як в повному факторному експерименті 2^3 . Об’єднання цих двох півреплік і є повний факторний експеримент 2^3 .

Матриця із восьми дослідів для чотирифакторного планування буде півреплікою від повного факторного експерименту 2^4 , а для

п'ятифакторного планування – чверть - реплікою від 2⁵. В останньому випадку два лінійні ефекти прирівнюються до ефектів взаємовпливу.

ЛЕКЦІЯ 5. ПРОВЕДЕННЯ ЕКСПЕРИМЕНТУ

5.1 Помилки експерименту

В процесі проведення експерименту слід пам'ятати про помилки досліду.

Кожен експеримент містить елемент невизначеності внаслідок обмеженості експериментального матеріалу. Постановка повторних (чи паралельних) дослідів не дає результатів, що повністю співпадають, тому що завжди існує помилка досліду (помилка відтворення). Цю помилку і слід оцінювати за паралельними дослідями. Для цього дослід відтворюється по можливості в однакових умовах декілька разів і потім береться середнє арифметичне усіх результатів. Середнє арифметичне $\bar{y}$ дорівнює сумі усіх n окремих результатів, поділених на кількість паралельних дослідів n

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n} = \frac{\sum_{q=1}^n y_q}{n}. \quad (5.1)$$

Відхилення результату будь-якого досліду від середнього арифметичного можна подати як різницю $y_q - \bar{y}$, де y_q – результат окремого досліду. Наявність відхилення свідчить про мінливість, варіації значень повторних дослідів. Для вимірювання цієї мінливості найчастіше використовують дисперсію. Дисперсією називають середнє значення квадрата відхилень величини від її середнього значення. Дисперсія позначається через s^2 та виражається формулою

$$s^2 = \frac{\sum_{q=1}^n (y_q - \bar{y})^2}{n-1}, \quad (5.2)$$

де $(n-1)$ число ступенів свободи, що дорівнює числу дослідів мінус одиниця. Один ступінь свободи використано для обчислення середнього.

Корінь квадратний з дисперсії, взятий з додатнім знаком, називається середнім квадратичним відхиленням, стандартом чи квадратичною помилкою.

$$s = \sqrt{\frac{\sum_1^n (y_q - \bar{y})^2}{n - 1}}. \quad (5.3)$$

Стандарт має розмірність тієї величини, для якої він обчислений. Дисперсія та стандарт – це міра розсіювання, мінливості. Чим більше дисперсія та стандарт, тим більше розсіювання значень паралельних дослідів навколо середнього значення.

Слід зауважити, що наявність результатів, що сильно відрізняються (так званих грубих спостережень) свідчить про порушення закону нормального розподілу. В разі грубих спостережень їх необхідно спочатку виключити, а потім підраховувати середнє арифметичне та дисперсію.

Похибки досліду є сумарною величиною, результатом багатьох помилок: помилок вимірювання факторів, помилок вимірювань параметру оптимізації, тощо. Кожну з цих помилок можна, в свою чергу, розділити на складові.

Всі помилки прийнято поділяти на два класи: систематичні та випадкові.

Систематичні похибки породжуються причинами, що діють регулярно, в визначеному напрямку. Часто ці помилки можна вивчити та визначити кількісно.

Систематичні помилки знаходять, калібруючи вимірювальні прилади та порівнюючи дослідні дані зі змінними зовнішніми умовами (наприклад, під час градування термопари за реперними точками чи порівнянні з еталонним приладом). Якщо систематичні помилки викликаються зовнішніми умовами (змінна температура тощо), слід компенсувати їх вплив.

Випадковими помилками називаються ті, що проявляються нерегулярно, причини виникнення яких невідомі та які неможливо врахувати наперед.

Систематичні та випадкові помилки складаються з великою кількістю елементарних помилок. Для того, щоб виключити інструментальні помилки, слід перевіряти прилади перед та після досліду.

Важливо виключити з експериментальних даних грубі помилки, так званий брак під час повторних дослідів. Для визначення браку можна скористатися критерієм Стьюдента t .

$$\frac{y - \bar{y}}{s} \geq t.$$

Значення t беруть з таблиць t – розподілу Стьюдента. Дослід вважається бракованим, якщо експериментальне значення критерію t за модулем більше табличного значення.

5.2 Дисперсія параметру оптимізації

Дисперсія в кожному досліді, підраховується в кожному горизонтальному рядку матриці планування. Матриця планування складається з серії дослідів, і дисперсія всього експерименту одержують в результаті усереднення всіх дослідів. Мова йде про підрахунок дисперсії параметру оптимізації $s_{\{y\}}^2$ або, що те ж саме, дисперсії відтворення експерименту $s_{відтв}^2$.

В разі підрахунку дисперсії параметру оптимізації квадрат різниці між значеннями y_q в кожному досліді та середнім значенням з n повторних спостережень $\bar{y}$ необхідно просумувати за числом дослідів в матриці N , а потім розділити на $N(n-1)$.

$$s_{\{y\}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{q=1}^n (y_{iq} - \bar{y}_i)^2}{N(n-1)}, \quad (5.4)$$

де $i = 1, 2, \dots, N$; $q = 1, 2, \dots, n$.

Формулою (5.4) можна користуватися в тих випадках, коли число повторних дослідів однакове в усій матриці. На практиці досить часто маємо справу з випадками, коли число повторних дослідів різне. Це відбувається внаслідок відкидання грубих спостережень, невпевненості експериментатора в достовірності деяких результатів, тощо.

В таких випадках при усередненні дисперсій слід користуватися середнім зваженим значенням дисперсій яке береться з урахуванням числа ступенів свободи

$$\bar{s}_{\{y\}}^2 = \frac{s_1^2 f_1 + s_2^2 f_2 + \dots + s_n^2 f_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n} = \frac{\sum_{i=1}^N f_i s_i^2}{\sum_{i=1}^N f_i}, \quad (5.5)$$

де S_1^2 - дисперсія першого дослідю;

S_2^2 - дисперсія другого дослідю і так далі;

f_1 – число ступенів свободи в першому досліді; дорівнює числу паралельних дослідів n_1 мінус 1, оскільки $f_1 = n_1 - 1$;

f_2 – число ступенів свободи в другому досліді і так далі.

Число ступенів свободи середньої дисперсії приймається рівним сумі чисел ступенів свободи дисперсій, з яких вона вирахована.

Формулами (5.4) та (5.5) можна користуватися лише в тому разі коли дисперсії однорідні.

Однорідність дисперсій означає, що серед усіх дисперсій, що підсумовуються немає таких, які б значно перевищували всі інші.

5.3 Перевірка однорідності дисперсій

Перевірка однорідності дисперсій виконується за допомогою різних статистичних критеріїв. Найпростішим з них є критерій Фішера, призначений для порівняння двох дисперсій. Критерій Фішера (F – критерій) являє собою відношення більшої дисперсії до меншої. Одержана величина порівнюється з табличною величиною F – критерію.

Якщо одержане значення дисперсійного відношення більше наведеного в таблиці для відповідних ступенів свободи та вибраного рівня значимості, то це означає, що дисперсії значно відрізняються одна від одної, тобто що вони неоднорідні.

Якщо кількість дисперсій, що порівнюються більше двох та одна дисперсія значно перевищує інші, можна скористатися критерієм Кохрена. Цей критерій придатний для випадків, коли в усіх точках є однакове число повторних дослідів. Для цього підраховується дисперсія в кожному горизонтальному рядку матриці

$$s^2 = \frac{\sum_{q=1}^n (y_q - \bar{y})^2}{n - 1},$$

а потім з усіх дисперсій знаходиться найбільша $s_{\max}^2$, яка ділиться на суму усіх дисперсій. Критерій Кохрена – це відношення максимальної дисперсії до суми усіх дисперсій

$$G = \frac{s_{\max}^2}{\sum_1^N s_i^2}. \quad (5.6)$$

Гіпотеза про однорідність дисперсії підтверджується, якщо експериментальне значення критерію Кохрена не перевищує табличного значення. Тоді можна усереднювати дисперсії та користуватися формулою (5.4).

F – критерієм можна скористатися навіть в тих випадках, коли число дисперсій більше ніж дві. Для цього з усіх дисперсій виділяють найбільшу та найменшу. За F – критерієм виконується перевірка, чи значимо вони відрізняються між собою. Зрозуміло, що якщо найбільша та найменша дисперсії не відрізняються значимо, то дисперсії, що мають проміжне значення, також не можуть значимо відрізнитися одна від одної. Тоді всю групу дисперсій можна вважати приналежною до єдиної сукупності.

5.4 Рандомізація

Щоб виключити вплив систематичних помилок, обумовлених зовнішніми умовами (зміна температури, сировини, дослідника тощо), рекомендується випадкова послідовність під час постановки дослідів, запланованих матрицею. Досліди необхідно рандомізувати в часі (random – випадковий).

Таблиця 5.6. Матриця експерименту для рандомізації

№ дослідів	x_1	x_2	x_3	y	№ дослідів	x_1	x_2	x_3	y
1	+	+	+	y_1	5	+	+	-	y_5
2	-	-	+	y_2	6	-	-	-	y_6
3	+	-	+	y_3	7	+	-	-	y_7
4	-	+	+	y_4	8	-	+	-	y_8

Пояснимо на прикладі матриці 2^3 , одержаної з матриці 2^2 повторенням її двічі.

Ставлячи досліди підряд, ми розіб'ємо матрицю на два блоки: до першого блоку входять досліди № 1, 2, 3 та 4, до іншого №5, 6, 7 та 8. Якщо досліди проводяться протягом двох днів, а зовнішні умови першого дня якимось чином відрізняються від зовнішніх умов іншого дня, то це сприятиме виникненню деякої систематичної помилки ϵ . Тоді чотири значення параметра оптимізації зсунуті на величину ϵ в порівнянні з істинними значеннями. Нехай це будуть параметри, що

входять до першого блоку: $y_1 + \varepsilon$, $y_2 + \varepsilon$, $y_3 + \varepsilon$, $y_4 + \varepsilon$. Але матриця побудована таким чином, що в першому блоці значення x_3 знаходяться на верхньому рівні, в другому – на нижньому рівні. Тоді під час підрахунку b_3 матимемо

$$b_3 = \frac{1}{8} [(y_1 + \varepsilon) + (y_2 + \varepsilon) + (y_3 + \varepsilon) + (y_4 + \varepsilon) - y_5 - y_6 - y_7 - y_8] \rightarrow \beta_3 + \frac{\varepsilon}{2},$$

де β – істинне значення коефіцієнта при x_3 . Таким чином, можливі відмінності в зовнішніх умовах змішалися з величиною лінійного коефіцієнту b_3 та викривило це значення. В такій послідовності дослідів ставити не можна. Досліди слід рандомізувати в часі, тобто придати послідовності дослідів випадковий характер.

Наведемо приклад рандомізації умов експерименту. В повному факторному експерименті 2^3 передбачається кожне значення параметра оптимізації визначати за двома паралельними дослідями. Необхідно випадково розмістити всього 16 дослідів. Присвоїмо паралельним дослідом номери з 9 по 16, і тоді дослід №9 буде повторним по відношенню до першого дослідів, десятій до другого і т. д. На наступному етапі рандомізації використовуються таблиці випадкових чисел, з яких в випадковому місці виписуються числа з 1 по 16 з відкиданням чисел більших за 16 та уже виписаних.

Обрану випадковим чином послідовність не рекомендується порушувати.

ЛЕКЦІЯ 6. ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ ЕКСПЕРИМЕНТУ

Для обробки статистичних даних найбільш поширеним є метод найменших квадратів (МНК).

Розглянемо просту лінійну модель з одним фактором. Функція відгуку, яка ще називається рівнянням регресії, має вигляд

$$y = b_0 + b_1 x_1.$$

Це є рівняння прямої. Необхідно визначити коефіцієнти b_0 та b_1 .

Якби всі експериментальні точки лежали на прямій лінії, то для кожної з них була б справедлива рівність

$$y_i - b_0 - b_1 x_{1i} = 0,$$

де $i = 1, 2, \dots, N$ – номер дослідів. На практиці ця рівність порушується і замість неї маємо

$$y_i - b_0 - b_1 x_{1i} = \zeta_i,$$

де ξ_i – різниця за експериментальними та розрахованими за рівнянням регресії значеннями y в i -й експериментальній точці. Цю величину інколи називають відхилом (невязкою).

Відхил виникає з двох причин: через помилки експерименту та через непридатність моделі. До того ж ці причини змішані і неможливо, не отримавши додаткової інформації, сказати, яка з них переважає.

Природнім є бажання знайти такі коефіцієнти регресії, за яких відхили будуть мінімальні.

Можна записати вимогу

$$U = \sum_{i=1}^N \xi_i^2 = \min, \quad (6.1)$$

яка приводить до методу найменших квадратів. МНК має таку властивість, що він робить визначеною будь-яку, довільну систему рівнянь. Він створює число рівнянь, що дорівнює числу невідомих коефіцієнтів.

Співвідношення (6.1) можна записати

$$U = \sum_{i=1}^N \xi_i^2 = \sum (y_i - b_0 - b_1 x_{1i})^2 = \min.$$

Мінімум деякої функції, якщо він існує досягається за одночасної рівності нулю частинних похідних за всіма невідомими, тобто

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial b_0} &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial b_1} &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Запишемо рівняння в явному вигляді

$$\left. \begin{aligned} -2 \sum_{i=1}^N (y_i - b_0 - b_1 x_{1i}) &= 0; \\ -2 \sum_{i=1}^N (y_i - b_0 - b_1 x_{1i}) x_{1i} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Для зручності розрахунків розкриємо дужки та проведемо перетворення, які дають

$$\left. \begin{aligned} Nb_0 + \sum_{i=1}^N x_{1i} b_1 &= \sum_{i=1}^N y_i \\ \sum_{i=1}^N x_{1i} b_0 + \sum_{i=1}^N x_{1i}^2 b_1 &= \sum_{i=1}^N y_i x_{1i} \end{aligned} \right\}.$$

З даного виразу знаходять коефіцієнти b_0 та b_1 .

Для ілюстрації нанесемо вихідні дані та одержане рівняння на графік (рис. 6.1). Метод найменших квадратів полягає в тому, щоб мінімізувати суму квадратів відрізків, що характеризують розходження між експериментальними даними та одержаним рівнянням.

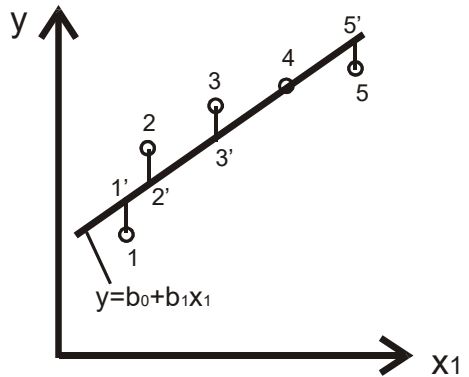


Рисунок 6.1 - Лінійне рівняння регресії

Тепер можна узнати, якою ж виявилася сума квадратів відхилів. Її ще називають залишковою сумою квадратів.

З рисунку видно, що для цього необхідно порахувати за рівнянням значення y в умовах кожного досліді. Будемо називати таке значення передбачуваним та позначимо $\hat{y}$. Потім необхідно знайти усі відхили (відрізки) $\Delta = y - \hat{y}$, піднести їх до квадрата та скласти. МНК

гарантує, що величина $\sum_{i=1}^N \Delta y_i^2$ є мінімально можливою.

Узагальнення на багатofакторний експеримент не пов'язано з якимись принциповими труднощами, за винятком значного ускладнення обчислень. Для будь-якого числа факторів коефіцієнти будуть розраховуватися за формулою

$$b_j = \frac{\sum_{i=1}^N y_i x_{ji}}{N}.$$

Тут $j = 0, 1, 2, \dots, k$ – номер фактору. Нуль записано для розрахунку b_0 .

6.1 Регресійний аналіз

Під час перевірки якої-небудь гіпотези про придатність моделі за допомогою статистики МНК переходить в регресійний аналіз.

Регресійний аналіз застосовується за визначених припущень, постулатів.

Постулат перший. Параметр оптимізації y є *випадкова величина* з нормальним законом розподілу. Однією з характеристик цього закону є дисперсія відтворення. За наявності великого експериментального матеріалу (десятки паралельних дослідів) гіпотезу про нормальний розподіл можна перевірити стандартними статистичними тестами (наприклад, χ^2 – критерієм). На жаль експериментатор рідко має такі дані, тому приходится приймати цей постулат на віру.

Другий постулат Дисперсія y не залежить від абсолютної величини y . Виконання цього постулату перевіряється за допомогою критеріїв однорідності дисперсії в різних точках факторного експерименту.

Третій постулат Значення факторів є *невипадковими величинами*. Це означає, що установлення кожного фактору на заданий рівень та його підтримання суттєво точніше, ніж помилка відтворення.

6.2 Перевірка адекватності моделі

Після розрахунку коефіцієнтів модель перевіряють на придатність. Таку перевірку називають перевіркою адекватності моделі.

Для характеристики середнього розкиду даних дослідів відносно лінії регресії можна скористатися залишковою сумою квадратів. Незручність полягає в тому, що дана сума залежить від числа коефіцієнтів в рівнянні: необхідно ввести стільки коефіцієнтів скільки проведено незалежних дослідів. Тому віддають перевагу віднесенню її на один “вільний” дослід. Число таких дослідів називають числом ступенів свободи (f).

Числом ступенів свободи в статистиці називається різниця між числом різних дослідів, результати яких використовуються для підрахунку коефіцієнтів регресії та числом коефіцієнтів (констант), що уже обчислені за результатами цих дослідів незалежно одне від іншого.

Залишкова сума, поділена на число ступенів свободи, називається залишковою дисперсією, або дисперсією адекватності ($s^2_{ад}$).

$$s_{ao}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N \Delta y_i^2}{f}.$$

Для перевірки гіпотези про адекватність моделі можна скористатися критерієм Фішера (F -критерій)

$$F = \frac{s_{ao}^2}{s_{\{y\}}^2}.$$

В чисельнику формули дисперсія адекватності, в знаменнику – дисперсія відтворюваності зі своїм числом ступенів свободи.

Перевірка адекватності полягає в порівнянні одержаного критерію Фішера з табличним значенням. Якщо розраховане значення F – критерію не перевищує табличного, то, з заданою довірчою імовірністю, модель може вважатися адекватною. В разі перевищення табличного значення цю прийняту гіпотезу слід відкинути.

Наведений спосіб розрахунку дисперсії адекватності можна використовувати в разі, якщо досліді в матриці планування не дублюються, а інформація про дисперсію відтворюваності одержують з паралельних дослідів у нульовій точці або з попередніх експериментів.

Можливі два важливих випадки: 1) досліді в усіх точках плану дублюються однакове число разів (рівномірне дублювання); 2) число паралельних дослідів не однакове (нерівномірне дублювання).

В першому випадку дисперсію адекватності слід помножити на число повторних дослідів n .

$$s_{ao}^2 = \frac{n \sum_{i=1}^N \Delta y_i^2}{f}.$$

Така зміна формули пояснюється тим, що чим більше число паралельних дослідів, тим з більшою достовірністю оцінюються середні значення. Тому вимоги до відмінності між експериментальними та розрахунковими значеннями стають більш жорсткими.

В другому випадку, внаслідок нерівномірності дублювання порушується ортогональність матриці планування, та, як наслідок,

змінюються розрахункові формули для коефіцієнтів регресії, їх помилок та дисперсії адекватності.

Для дисперсії адекватності можна записати загальну формулу

$$s_{ad}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N n_i (\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2}{f},$$

де N – число різних дослідів (число рядків матриці);

n_i – число паралельних дослідів в i – му рядку матриці;

$\bar{y}_i$ - середнє арифметичне з n_i паралельних дослідів;

$\hat{y}_i$ - передбачене за рівнянням значення в досліді.

З формули витікає, що різниця між експериментальним та розрахунковим значенням має тим більше значення, чим більше число повторних дослідів.

6.3 Перевірка значущості коефіцієнтів

Перевірка значущості кожного коефіцієнта проводиться незалежно.

Її можна здійснити двома рівноцінними способами: перевіркою за t - критерієм Стюдента або побудовою довірчого інтервалу. В разі застосування повного факторного експерименту чи регулярних дробових реплік довірчі інтервали для усіх коефіцієнтів (в тому числі і коефіцієнтів взаємодії) дорівнюють один одному.

Дисперсія коефіцієнта регресії визначається за формулою

$$s_{\{b_j\}}^2 = \frac{s_{\{y\}}^2}{N}.$$

З формули видно, що дисперсії всіх коефіцієнтів рівні одна одній, оскільки вони залежать лише від помилки досліду та числа дослідів.

Довірчий інтервал (Δb_j) визначається

$$\Delta b_j = \pm t s_{\{b_j\}}.$$

Тут t – табличне значення критерію Стюдента при числі ступенів свободи, з яким визначалась $s_{\{y\}}^2$, та вибраному рівні значущості (зазвичай 0,05); $s_{\{b_j\}}$ – квадратична помилка коефіцієнту регресії

$$s_{\{b_j\}} = +\sqrt{s_{\{b_j\}}^2}.$$

Формулу для довірчого інтервалу можна записати в такій еквівалентній формі:

$$\Delta b_j = \pm \frac{t S_{\{y\}}}{\sqrt{N}}.$$

Коефіцієнт значущий, якщо його абсолютна величина більша довірчого інтервалу.

Довірчий інтервал задається верхньою та нижньою границями $b_j + \Delta b_j$ та $b_j - \Delta b_j$.

ЛЕКЦІЯ 7. ВИМІРЮВАЛЬНА ТЕХНІКА

7.1 Засоби вимірювання температури

Основним засобом вимірювання температури є термометри. Термометрами називають вимірювальні засоби, вхідною (що вимірюється) величиною яких є температура, а вихідною може бути будь-яка величина, що однозначно залежить від температури. За способом вимірювання розрізняють контактні термометри та пірометри.

Контактні термометри під час вимірювання температури безпосередньо контактують з об'єктом, що вимірюється. Установлення термометра на об'єкт вимірювання в тій чи іншій мірі викривляє температурне поле. Вибираючи контактний термометр слід враховувати, що термометр повинен витримувати механічні, хімічні та термічні навантаження на об'єкті вимірювання.

До контактних термометрів відносяться термометри розширення, термоелектричні термометри та термометри опору.

За допомогою пірометрів випромінювання температуру вимірюваних об'єктів визначають по теплу, що ними випромінюється, не піддаючи пірометри нагріву до температури, що вимірюється. На покази пірометра перш за все впливають характеристики об'єкта вимірювання, характеристики проміжного середовища, що поглинає випромінювання між пірометром та об'єктом вимірювання, а також відбиття поверхнею об'єкта вимірювання випромінювання сторонніх джерел.

7.2 Термоелектричні термометри

В термоелектричних термометрах для вимірювання температури використовується відкрите Зеєбеком явище термоелектрики. Якщо два провідники (рис. 7.1) з різних металевих матеріалів A та B з'єднані

кінцями в замкнений контур і місця з'єднання знаходяться в різних температурах t_2 та t_1 , то в контурі виникає електричний струм. Обидва провідники, які називаються термоелектродами, утворюють термопару. Одне з місць з'єднання, що знаходиться в середовищі з температурою, що вимірюється, є робочим кінцем термопари, інше, що знаходиться в умовах сталої відомої температури, є вільним кінцем термопари.

Принципи вимірювання температури за допомогою термоелектричних термометрів

В контурі з двох різних термоелектродів, місця контактування яких мають різну температуру, термоЕРС не залежить від розподілу температури вздовж термоелектродів. Можна розімкнути термоелектричний контур в будь-якому місці та ввімкнути в нього один або декілька однакових чи різнорідних провідників. Якщо їх місця з'єднання знаходяться в однаковій температурі то не виникне жодних паразитних термоЕРС. Можна розімкнути контур в місці контактування, наприклад на вільному кінці термопари та вставити інший провідник. Необхідно лише на кінцях обох термоелектродів в

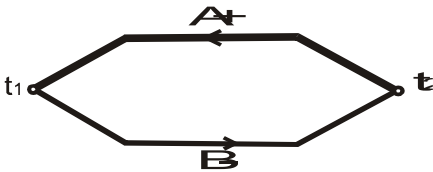


Рисунок 7.1 - Термоконтур з термоелектродами

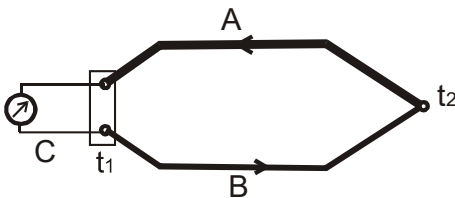


Рисунок 7.2 - Термопара з вимірювальним приладом

розімкненому місці контактування підтримувати однакові температури (рис.7.2), тоді розподіл температур вздовж установленого провідника не буде впливати на термоЕРС.

Для зручності вимірювання температури за допомогою термопар бажано, щоб термоЕРС була достатньо великою та щоб електроопір термопари був не надто високим. В такому разі можна вимірювати температуру без особливих додаткових пристроїв, таких як

підсилювачі, а також на достатньо великій відстані між термопарою та вимірювальним приладом. До того ж характеристика термопари має бути лінійною, а діапазон застосування термопари якомога більш широким.

Металеві термоелектроди для вимірювання температур до 150°C можна спаювати м'якими припаями, до більш високої температури – твердими припаями, але найчастіше їх зварюють одне з іншим в нейтральній атмосфері.

Для вимірювання температур понад 0°C найчастіше використовують термопари з таких термоелектродів: мідь – константан; залізо – константан; нікель-хром - нікель (хромель-алюмель); нікель-хром - константан (хромель-копель); платина-родій – платина.

Термопару *мідь – константан* з діапазоном температур від – 200°C до 400°C використовують до 200°C , оскільки в умовах більш високих температур мідь окислюється.

Термопара *залізо – константан* застосовується до температури 700°C . За більш високих температур залізо сильно окислюється. В вологому середовищі залізний електрод піддається корозії.

Термопари *нікель-хром - нікель (хромель-алюмель)* має найкращу температуростійкість серед термопар з неблагородних металів. Їх робочий діапазон знаходиться в діапазоні від 0°C до 1000°C . Для зменшення окислення нікелю в повітрі в нього добавляють алюміній, завдяки чому утворюється щільний окисний шар.

Термопари *нікель-хром - константан (хромель-копель)* можна використовувати до температури 700°C . Вони малочутливі до окисного впливу. Завдяки високій термоЕРС та малій теплопровідності обох термоелектродів ці термопари використовуються в основному як приймачі випромінювання в пірометрах випромінювання та для вимірювання малих градієнтів температур.

Діаметр термоелектродного дроту слід вибирати не надто великим для зменшення похибок внаслідок тепловідведення термоелектродом та зменшення інерційності показань. Для термопар з неблагородних металів зазвичай використовують дріт діаметром від 0,3 до 3 мм; для термопар з благородних металів – діаметром 0,35 та 0,5 мм.

Компенсація впливу температури вільних кінців термопари

Оскільки термопарами вимірюють різницю температур, заміряна термоЕРС залежить не лише від температури робочого спаю, але і від температури вільних кінців термопари. Виміряна температура t дорівнює температурі, визначеній за градуванням термопари, якщо температура вільних кінців термопари t_v дорівнює опорній температурі

$t_{b'}$, що покладена в основу градування термопар. В разі відхилення температури вільних кінців t_v від опорної $t_{b'}$ виміряне значення термоЕРС E_a повинно бути скоректоване на величину ΔE , що відповідає даному відхиленню. Для температури вільних кінців від 0 до 60°C термоЕРС E змінюється практично лінійно різниці температур $t_v - t_{b'}$. Тоді термоЕРС E , що відповідає температурі t , дорівнює

$$E = E_a + \Delta E = E_a + k(t_v - t_{b'}).$$

тут k - коефіцієнт температури вільних кінців термопар (для термопар *хромель-алюмель* $k=0,040$).

7.3 Термометри опору

В різноманітних пристроях для вимірювання температури використовують явище зміни електричного опору металів, електролітів та напівпровідників в залежності від температури. Термометри опору виділяються дуже високою точністю вимірювань (в разі дуже ретельних вимірювань можна отримати похибку не більшу $\pm 0,001$ К).

За допомогою термоелектричних термометрів таку чутливість вимірювань можна отримати лише в поєднанні з вимірювальними підсилювачами.

Як матеріали для термометрів опору придатні лише ті, фізичні та хімічні властивості яких не змінюються протягом часу в діапазоні температур, що вимірюються. Опір такого матеріалу повинен добре відтворюватися і зі зміною температури монотонно знижуватися або підвищуватися. Температурний коефіцієнт опору термометра повинен бути якомога більшим, так само як і питомий електроопір для того, щоб термоприймач займав найменший об'єм.

Оскільки опір майже ніколи не змінюється лінійно зі зміною температури, співвідношення між температурою та опором визначають або за математичними формулами, або за експериментально визначеними градувальними кривими.

Вимогам, що висувуються до матеріалів для термометрів опору найбільше відповідає платина. Для технічних термометрів опору використовують платину високої чистоти з відношенням опорів $R_{100}/R_0 = 1,3910$ та платину леговану невеликою кількістю добавок з меншою величиною співвідношення $R_{100}/R_0 = 1,385$. Залежність між температурою та опором платини в області вище 0° може бути описана многочленом

$$R_t = R_0(1 + At + Bt^2),$$

де R_t , R_0 – опір провідника при температурі t та 0°C відповідно. Для термометра опору з характеристичним відношенням опорів $R_{100}/R_0 = 1,385$, $A = 3,90784 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ та $B = -0,578408 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-2}$. За допомогою цієї інтерполяційної функції може бути розраховане градування в діапазоні $0-850^\circ\text{C}$.

7.4 Напівпровідникові термометри опору

Опір напівпровідників з температурою змінюється значно сильніше ніж металів. Ті напівпровідники, які при підвищеній температурі мають більшу провідність, ніж при низькій, називають резисторами з негативним температурним коефіцієнтом (термісторами). Напівпровідники, провідність яких в визначеному вузько обмеженому температурному інтервалі зменшується з підвищенням температури, називають терморезисторами з позитивним температурним коефіцієнтом (позисторами).

Температурна залежність опору термісторів може бути описана виразом

$$R_T = A e^{B/T}.$$

Величина A залежить в основному від опору термістора, а величина B , крім того, і від матеріалу термістора.

Напівпровідникові датчики термометрів опору виготовляють у формі шайб, стрижнів або сфер (рис. 7.3).

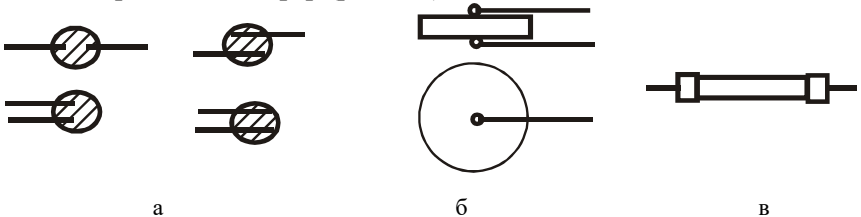


Рисунок 7.3– Конструктивні форми термометрів опорів на термісторах: а – сферична з різним розташуванням виводів; б – дископодібна; в – стрижнева

Термістори для вимірювання температури виготовляють з опором від 100 Ом до 300 КОм в відповідності до конкретних умов застосування. Переважно використовують термістори з опором від 1 до 5 КОм. За таких значень опору результати вимірювань не залежать від довжини з'єднувальних проводів. Термістори зазвичай

використовують для вимірювань в діапазоні температур від -50 до 180°C , але є термістори, що працюють до 450°C .

Завдяки високому температурному коефіцієнту термістори найчастіше використовують в мостових схемах за методом гальванометра як для тривалих випробувань у вигляді установового термометру, так і для короточасних вимірювань у вигляді ручного термометра з переносним вимірювальним приладом.

7.5 Термочутливі фарби та олівці

Для вимірювань температури за допомогою термочутливих фарб використовують їх властивість змінювати колір зі зміною температури. У деяких фарб зміна кольору відбувається безперервно, так що температуру можна визначити шляхом порівняння зі шкалою кольорів (діапазон температур $120 - 400^{\circ}\text{C}$). Однак перевага віддається фарбам, які різко змінюють колір на одній або декількох температурах та потім зберігають його при зворотному переході через точку зміни кольору.

Фарби у вигляді термочутливих олівців використовують для швидкого визначення температури поверхні. Фарбу можна наносити у вигляді штрихів і вже через $1 - 2$ с після нанесення відбувається зміна кольору, зберігаючись протягом тривалого часу.

Термоолівці виготовляють для діапазону $65-670^{\circ}\text{C}$ з градацією в 50°C . Термоолівці особливо зручні для швидкого контролю температури, в той час як термочутливі фарби застосовують переважно для дослідження розподілу температури на великій поверхні.

ЛЕКЦІЯ 8. ЧУТЛИВІ ЕЛЕМЕНТИ ДЛЯ ВИМІРЮВАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЮВАЧІВ

Вимірювальне перетворення можна здійснювати безпосередньо, коли чутливий елемент перетворює вимірювану фізичну величину у величину, придатну для подальшої її обробки (наприклад, при вимірах довжин і п'єзоелектричному методі виміру сили). В іншому випадку чутливий елемент дає на виході переміщення, що перетворюється далі в електричну чи пневматичну величину.

8.1 П'єзоелектричні чутливі елементи

Принцип дії п'єзоелектричних чутливих елементів ґрунтується на використанні властивостей деяких кристалів утворювати на своїх гранях електростатичні заряди під дією пружних деформацій. Цей ефект, що отримав назву п'єзоэффект виникає на кристалах кварцу, турмаліну, сегнетової солі (калійно-натрієва сіль винної кислоти), титанату барію і деяких інших речовин. П'єзоелектричні чутливі елементи дозволяють контролювати швидкоплинні процеси, тому що заряди утворюються практично безінерційно. Для вимірів майже завжди застосовують кварц, що має низьку температурну чутливість і великий модуль пружності ($8 \cdot 10^{10}$ Н/м²), що дозволяє здійснювати виміри дуже

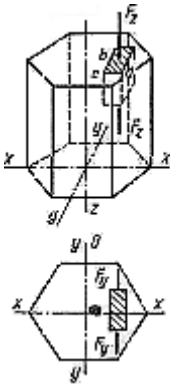


Рисунок 8.1 - Кварцевий кристали

малих переміщень. Кристали кварцу являють собою шестикутні призми (рис. 8.1) з подовжньою (оптичною) віссю z , електричною віссю x , що проходить через ребра призми і нейтральною, чи механічною, віссю y , що проходить через середини протилежних граней. Вирізаний із кварцового кристала прямокутний паралелепіпед (пластина), грані якого перпендикулярні осям y і x , має п'єзоелектричні властивості. Сила, спрямована по осі z паралелепіпеда, не збуджує електричних зарядів на його гранях. Під дією зусилля, що розтягує чи стискає, спрямованого уздовж електричної

осі x , на перпендикулярних цій осі гранях виникають заряди різного знаку (подовжній ефект). Цей заряд дорівнює

$$Q_x = d \cdot F_x,$$

де Q_x — заряд; d — постійний коефіцієнт (п'єзомодуль); F_x — сила, що діє на поверхню кристала.

Як видно з наведеного вище рівняння, Q_x не залежить від розмірів кристала кварцу. Навантаження, що діють у напрямку механічної осі кристала, зумовлюють виникнення заряду

$$Q_y = d \frac{l_y}{l_x} F_y ,$$

де l_x і l_y — розміри кристала в напрямках осей x і y .

При поперечному ефекті Q_y залежить від розмірів кристала. Умови міцності не дозволяють одержати великі заряди за рахунок збільшення l_y і зниження l_x тому практично використовують лише подовжній п'єзоэффект. В умовах температур понад 500°C п'єзоэффект зникає. Температура 537°C , за якої структура кварцу переходить у структуру, що не має п'єзоелектричного ефекту, називається точкою Кюрі.

Для виміру електричних зарядів, що виникають на гранях кварцової пластини, останні покривають металевим шаром, утворюючи конденсатор (рис. 8.2). Оскільки $Q = CU$, то напруга на кристалі

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{d \cdot F}{C_0 + C_s},$$

де C_0 — ємність кварцу; C_s — немінуча ємність проводів і підключених пристроїв.

Зазвичай ємність C_s перевищує ємність п'єзокристала C_0 , що різко знижує корисний ефект. Тому C_0 штучно збільшують паралельним з'єднанням декількох пластин; вибір їхнього числа дозволяє змінювати діапазон виміру.

Величина C_s враховує і ємність кабелю,

тому проводи, що підводять, поставляють виробники, а числове значення їхньої ємності враховують в процесі калібрування. Оскільки кожен вимірник напруги має кінцеве значення вхідного опору R_i , то збуджений на гранях кристала заряд і відповідно напруга спадають за експоненційним законом:

$$U_0 = U e^{-\frac{t}{R_i(C_0+C_s)}}$$

де $(C_0+C_s) = T$ — постійна часу.

Після завершення часу T напруга U_0 зменшується в $1/e$ разів, тобто приблизно до 37% початкового значення U . Це обмежує можливості використання п'єзокристалів контролем тільки короткочасних і швидкозмінних процесів.

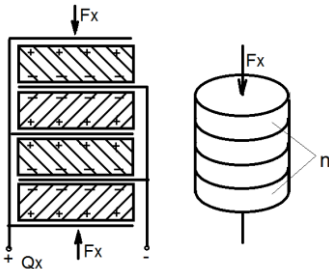


Рисунок 8.2 - Чутливий елемент с декількома n кварцовими пластинами

8.2 Тензорезистори

Внаслідок розтягу чи стиску провідника змінюються його довжина, площа перетину і питомий опір, тобто з трьох величин, що визначають значення опору, жодна не залишається сталою. Зазначені зміни залежать від напрямку прикладеної сили й у межах пружності пропорційні їй. У ненавантаженому стані опір R провідника, що має довжину l , визначається його перетином q і питомим опором ρ :

$$R = \rho l / q.$$

Внаслідок розтягу провідника його довжина стає рівною $l(1 + \Delta l / l)$, а перетин $q(1 - 2\mu \Delta l / l)$, де μ — коефіцієнт Пуассона, (для більшості металів $\mu = 0,3$). Змінюється також і питомий опір. Якщо позначити відносну зміну питомого опору $\Delta \rho / \rho$ через τ і відносну зміну розтягу $\Delta l / l$ через ε , то опір розтягнутого дроту визначається залежністю:

$$R' = \frac{l(1 + \varepsilon) \rho(1 + \tau)}{q(1 - 2\mu \varepsilon)}.$$

Вводячи в це рівняння значення опору не розтягнутого дроту, знаходимо з великим ступенем наближення:

$$R' = R(1 + \varepsilon)(1 + \tau) / (1 - 2\mu \varepsilon).$$

Виконавши множення й опустивши члени вищих ступенів малості, одержимо,

$$R' = R(1 + \varepsilon + 2\mu \varepsilon + \tau),$$

звідки відносна зміна опору дорівнює

$$r = (R' - R) / R = \varepsilon + \tau + 2\mu \varepsilon.$$

Таким чином, крутість характеристики чутливого елемента (тензочутливість), що позначається зазвичай коефіцієнтом k дорівнює

$$k = r / \varepsilon = 1 + 2\mu + \tau / \varepsilon$$

При використанні дроту з константану вплив змін об'єму і провідності підсумовується і коефіцієнт k стає рівним 2. Цей сплав щонайкраще підходить для виготовлення тензорезисторів: температурний коефіцієнт опору цього сплаву малий, а температурний коефіцієнт подовження зазвичай добре збігається з таким же коефіцієнтом досліджуваних матеріалів. ТермоЕРС, що виникає в контакт з міддю спотворює результати вимірів тільки у вимірах, проведених на постійному струмі, і за наявності великих перепадів температур. Для забезпечення достатніх для виміру змін

опору чутливого елемента останній виготовляють з тонкого дроту (рис. 8.3), що наклеюється у вигляді петель з паралельними нитками на підкладку з просоченого паперу чи штучних смол. Чутливий елемент можна також виготовити способом фотохімічного травлення покритої тонким шаром металу ізоляційної пластинки. Такі тензорезистори називають фольговими на відміну від дровових.

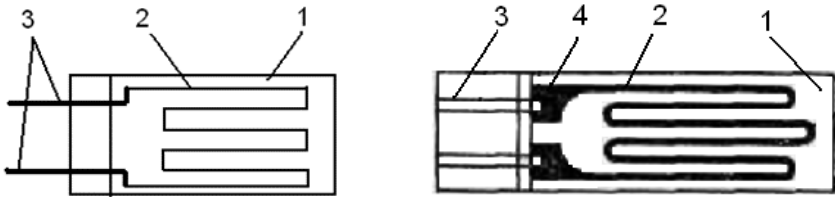


Рисунок 8.3 - Тензорезистор дрововий і фольговий: 1 — підкладка; 2 — вимірювальний дріт; 3 — приєднувальні проводи; 4 - крапкове зварювання

В конструкції дровового тензорезистора. використовують дріт діаметром 20—30 мкм, що забезпечує великий опір і достатню еластичність та дозволяє дроту слідувати за деформацією досліджуваного матеріалу.

Як підкладку використовують папір, покритий штучною смолою, у якій утоплені приєднувальні проводи і вимірювальний дріт. У фольгових тензорезисторах товщина константової фольги складає 2—10 мкм.

Для виготовлення тензочутливих елементів також застосовують напівпровідникові матеріали, у яких під навантаженням поряд зі зміною геометричних розмірів значно змінюється питомий опір, унаслідок чого тензочутливість досягає 180 і більш. На рис. 8.4, як приклад, зображений кремнієвий напівпровідниковий тензорезистор. Опір кремнієвої смужки, що міститься в ньому, приблизно дорівнює стандартним опорам дровових тензочутливих елементів. Щоб забезпечити достатню еластичність смужки, її виготовляють товщиною 10—20 мкм травленням попередньо відполірованої заготовки (при цьому поліпшуються її механічні властивості).

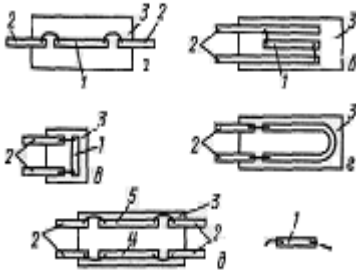


Рисунок 8.4 - Різні види напівпровідникових вимірювальних тензометрів: 1 - кремнієвий елемент; 2 - стрічковий вивід; 3 - синтетична підкладка; 4 - фосфор — кремній; 5 — азот — кремній

Недоліком напівпровідникових тензорезисторів є велика залежність коефіцієнта k від температури. У першому наближенні можна вважати $k = k_{20}(1 - \alpha_k \Delta v)$. Коефіцієнт α_k залежить від провідності напівпровідника: наприклад α_k тензорезистора, що має $k = 130$ (при $\rho = 0,02 \text{ Ом} \cdot \text{см}$), дорівнює $2,5 \cdot 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$. Дослідження механічних напружень звичайно проводять у межах пружності, тому зміна опорів дуже мала; максимальне подовження ледь досягає 0,001. При $k=2$ опір тензочутливого елемента збільшується не більше ніж на 1/500 свого початкового значення. Практично підлягають виміру менші значення подовжень і відповідно менші зміни опорів, що з погляду вимірювальної техніки дуже важко. Незважаючи на цей недолік, тензорезистори дозволяють досить просто і з великою точністю вимірювати відносні зміни лінійних розмірів за умови врахування впливу неминучих перешкод.

Основною причиною виникнення погрешностей є зміна температури. Зміна опору тензорезистора R залежить від подовження контрольованого матеріалу і від температурного коефіцієнта опору матеріалу тензорезистора. Подовження контрольованого матеріалу у свою чергу відбувається, по-перше, під дією механічного навантаження, по-друге — під впливом температури. Виміру підлягає перша з названих складових. Вплив температурного подовження досліджуваного матеріалу може бути зменшено шляхом підбору для виготовлення тензорезисторів матеріалу, що має близький коефіцієнт температурного розширення. Температурна залежність опору самого тензочутливого елемента може бути

компенсована за допомогою механічно ненавантажуваних компенсаційних тензочутливих елементів.

Характеристика тензорезисторів

Вхідна величина: переміщення.

Вихідна величина: зміна опору.

Діапазон виміру: 5 мкм (механічне розтягання чи стиск пружного елемента).

Погрішність нелінійності: 0,05%.

Частотний діапазон: 0—10 Гц.

Достоїнства: мала погрішність, універсальність застосування, невисока вартість, вібростійкість.

Недоліки: у край низька чутливість, необхідність великих навантажень, чутливість до змін вологості і температури, необхідність ретельного приклеювання.

8.3 Індуктивні чутливі елементи

Основні положення

Рівняння, що визначає індуктивність обмотки, має наступний вид:

$$L = w^2/R_m,$$

де w — число витків; R_m — магнітний опір.

В разі $R_m = l/\mu A$, $L = w^2\mu A/l$,

де A — площа поперечного перерізу магнітного ланцюга; l — його довжина; μ — магнітна проникність.

З цього рівняння випливає, що зміни індуктивності L можна досягти зміною довжини l (повітряного зазору), поперечного перерізу A чи магнітної проникності μ . Довжина і перетин магнітопроводу є геометричними розмірами; магнітна проникність може бути змінена, наприклад, шляхом додавання механічних зусиль (магнітопружні чутливі елементи).

Чутливі елементи з рухливим якорем

Внаслідок переміщення зображеного на рис. 8.5, а залізного якоря Fe у котушці S_p перерозподіляється число силових ліній, що проходять усередині якоря чи по повітрю, що викликає зміну магнітного опору R_m , а отже, індуктивності L . Зміна індуктивності залежить від переміщення якоря s не лінійно. Звичайно застосовують пристрій, показаний на рис. 8.5, б, що представляє собою диференціально включені системи. У цьому випадку в разі ходу s якоря

m індуктивність однієї котушки збільшується на $+ΔL$, а індуктивність іншої зменшується на рівне значення $-ΔL$. За допомогою, наприклад, мостової схеми різниця змін індуктивності $L_1 - L_2 = 2ΔL$ може бути перетворена в електричну напругу. Відповідне конструктивне виконання дозволяє одержати лінійну залежність напруги від переміщення якоря в межах до 80% довжини котушки.

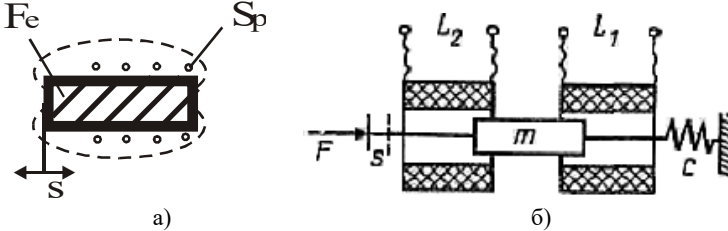


Рисунок 8.5 - Індуктивний датчик з якорем, що переміщається

На відміну від описаних індуктивних елементів, вихідною величиною яких є зміна індуктивності, що перетворюється потім за допомогою електричної схеми у напругу, чутливі елементи, засновані на диференціально-трансформаторному принципі, дозволяють безпосередньо одержати як вихідну величину напруги $ΔU$ (рис. 8.6). Чутливий елемент складається з первинної котушки Sp_I до якої прикладене змінна напруга $\sim U$, і двох вторинних котушок Sp_{II} , у яких в разі симетричної конструкції і середнього положення якоря індукуються однакові напруги. Вторинні котушки включені диференціально, і різниця напруги на вихідних клеммах дорівнює нулю. В разі зсуву якоря виникає різниця напруги $ΔU$, що лінійно залежить від ходу якоря. Відповідне профілювання котушок і якоря дозволяє використовувати чутливий елемент цього типу для виміру кутів нахилу.

Характеристика елементів

Вхідна величина: лінійне переміщення, кут відхилення.

Вихідна величина: зміна індуктивності; змінна напруга.

Діапазон виміру: 80% довжини котушки.

Погрішність від не лінійності: 1—3 %.

Частотний діапазон: 0— 10^4 Гц.

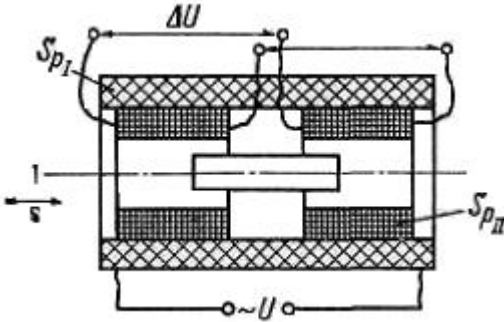


Рисунок 8.6 - Індуктивний датчик з диференціальним трансформатором

Переваги: висока чутливість, простота конструкції, відсутність зносу, можливість застосування для великих переміщень якоря.

Недоліки: не лінійність характеристики, чутливість до зовнішніх магнітних полів.

Чутливі елементи з поперечним переміщенням якоря

Індуктивний чутливий елемент із поперечним переміщенням якоря (рис. 8.7) призначений для виміру малих переміщень і їхніх змін.

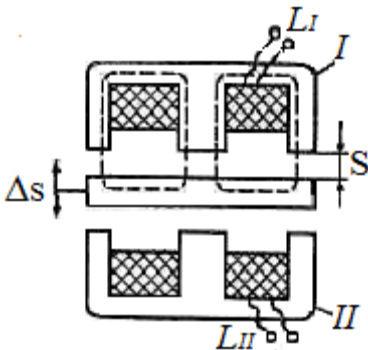


Рисунок 8.7- Індуктивний датчик з поперечним (відносно поля) переміщенням якоря

Для досягнення можливо більшої чутливості і лінійної характеристики чутливий елемент виконують у вигляді здвоєних котушок з повітряними зазорами. Котушки 1 і 2 однакові, якір розташований між двома магнітопроводами з зазором s . Наявність двох диференційно включених індуктивностей не тільки забезпечує подвоєну чутливість у порівнянні з однокотушковою системою і поліпшену лінійну характеристику, але й одночасно компенсує вплив змін температури і потоків розсіювання.

Характеристика елементів

Вхідна величина: переміщення.

Вихідна величина: індуктивність.

Діапазон виміру: до 1 мм.

Погрішність від не лінійності: 1—3 %.

Частотний діапазон: 0— 10^4 Гц.

Переваги: дуже висока чутливість, конструктивна простота.

Недоліки: не лінійність, незначний діапазон вимірів, чутливість до зовнішніх магнітних полів, велике вимірювальне зусилля.

ЛЕКЦІЯ 9. ВИМІРЮВАННЯ МЕХАНІЧНИХ КОЛИВАНЬ

Ціль виміру механічних коливань зводиться до одержання по можливості найбільш повної інформації про коливальний процес. У більшості випадків механічні коливання (вібрації) являють собою небажані явища, що часто накладаються на закономірні процеси руху. Однак коливання можуть створюватися і примусово як активні функції, наприклад у вібраційних живильниках і конвеєрах, що використовуються для транспортування матеріалів.

На рис. 9.1 схематично показані коливальні системи. Можуть вимірюватися переміщення на вільному кінці вібратора з пружинною підвіскою (а), чи вібратора зі коливанням згину (б), а також сили в опорах обох цих вібраторів.

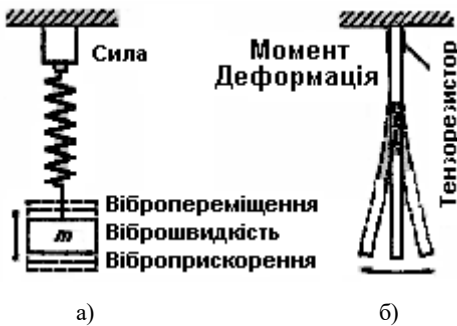


Рисунок 9.1 - Вимір механічних коливань за допомогою перетворювачів переміщень і сили: а — вібратор із пружинною підвіскою; б-вібратор зі згинальними коливаннями

У залежності від обставин вимірюють або переміщення, або силу. Знаючи значення маси і пружності пружини коливальної системи, можна математично перейти від однієї з цих величин до іншої. У той час як вимірювальні перетворювачі сили вводяться безпосередньо в ланцюг передачі сили, у вимірювальних перетворювачах переміщень весь перетворювач, чи щонайменше,

його рухливий елемент повинний бути прикріплений до об'єкта виміру. В обох випадках вимірювальний перетворювач чинить більший чи менший зворотний вплив на об'єкт виміру. Вибором відповідних методів виміру і вимірювальних перетворювачів можна створити умови, що виключають неприпустимі викривлення коливального процесу.

Це, зазвичай, відноситься і до крутильного (обертального) колювання, зокрема до виміру обертальних рухів і моментів, що крутять.

У табл. 9.1 наведені зазначені в стандарті DIN 45661 [2] параметри механічних колювань і відповідні їм одиниці виміру. Механічні параметри колювань, а саме вібропереміщення, віброшвидкість і віброприскорення, можуть бути обмірювані за допомогою перетворювачів відносного чи абсолютного переміщення.

Таблиця 9.1 - Параметри вібрацій, що можуть бути обмірювані перетворювачами руху

Прямолінійні чи поступальні колювання		Кутові чи обертальні (крутильні) колювання	
Параметри	Одиниці виміру	Параметри	Одиниці виміру
Вібропереміщення (розмах)	мкм	Кутове вібропереміщення (кут обертання)	рад
Віброшвидкість	мм/с	Кутова віброшвидкість	
Віброприскорення	мм/с ²	Кутове віброприскорення	рад/с
		1 рад=52,295°	рад/с ²

9.1 Вимірювальні перетворювачі відносних переміщень

Перетворювач відносних переміщень вимірює параметр колювань стосовно будь-який зовнішньої нерухомої (опорної) точки.

Вимірювальний перетворювач може бути по різному з'єднаний з об'єктом виміру. Найбільш суттєвими варіантами приєднання є такі.

Жорстке з'єднання (рис. 9.2, а). Рухливий шуп вимірювального перетворювача переміщення жорстко з'єднується з об'єктом виміру приклеюванням, приварюванням чи пригвинчуванням. Таке виконання з'єднання дозволяє використовувати перетворювач переміщення у всьому його частотному діапазоні.

З'єднання із силовим замиканням (рис. 9.2, б) за допомогою упорного загостреного шупа. В цьому випадку відпадає необхідність кріплення його до об'єкта виміру, однак виникає небезпека відходу загостреного шупа на високих частотах. Щоб уникнути цього необхідно, щоб сила F попереднього натягу пружини, що притискає шуп, у середньому положенні була більшою сили інерції шупа, зумовленої амплітудою коливання U , що зростає пропорційно квадрату частоти.

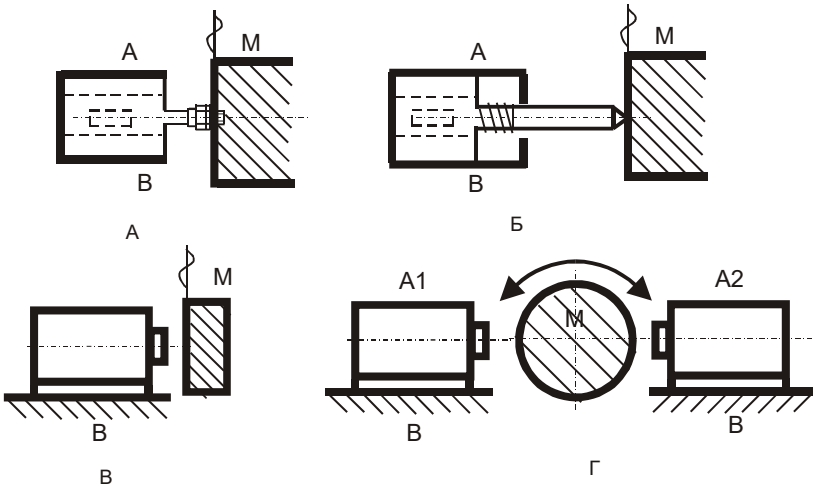


Рисунок 9.2— Схеми вимірювання відносних переміщень

Верхня гранична частота складає

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{F}{U \cdot m}},$$

де F — сила попереднього натягу пружини; U — пікове значення амплітуди коливання; m — активна маса деталей перетворювача, що рухаються.

Звідси випливає, що під час вимірів відносних переміщень маса, що рухається, повинна бути якомога меншою, а натяг пружини більшим, однак надмірно великий натяг пружини може викликати статичний зсув об'єкта виміру.

Вимірювання параметрів механічних коливань за допомогою безконтактних вимірювальних перетворювачів (рис. 9.2 в, г).

В таких перетворювачах повний опір однієї або декількох вимірювальних котушок залежить від відстані між ними та об'єктом вимірювання. Безконтактні вимірювальні перетворювачі не потребують будь-якого механічного їх з'єднання з об'єктом вимірювання і тому працюють майже повністю без зворотного впливу. Достоїнством таких перетворювачів є те, що вони дозволяють вимірювати вібрації об'єктів, що одночасно переміщуються в різних вимірах, наприклад радіальні коливання валів, що обертаються. Сам об'єкт вимірювання має бути, по можливості, виконаний з магнітного матеріалу або мати на вимірювальній поверхні покриття з такого матеріалу.

Перетворювачі відносних переміщень можуть бути використані для виміру вібропереміщень (амплітуди) чи віброшвидкостей (інтенсивності вібрацій). Особливим достоїнством виміру відносних вібропереміщень є можливість здійснення вимірів на частотах, близьких до нуля. Тому під час вимірів відносних вібропереміщень весь вимірювальний ланцюг від чутливого елемента перетворювача аж до приладу, що реєструє, може градуюватися в статичному стані. Градування залишається в силі для всього діапазону робочих частот. Зсув фаз, зумовлений підключенням підсилювачів і приладів, що реєструють, може виникнути тільки на високих частотах діапазону виміру.

Можливість статичного градування виключається в разі вимірів віброшвидкості, тому що віброшвидкість на частоті, рівній нулю, також стає рівною нулю,

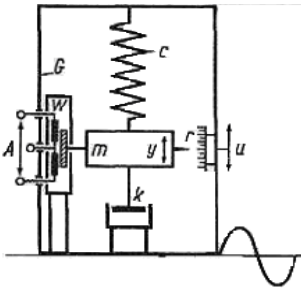
9.2 Вимірювальні перетворювачі абсолютних переміщень

У багатьох випадках не представляється можливим вимірити параметри коливань об'єкта виміру щодо нерухомої опорної точки. Це в першу чергу відноситься як до геофізичних досліджень, так і до вимірів на транспортних засобах, суднах і в будинках. На верстатах, машинах і їхніх фундаментах також часто важко вимірювати параметри коливання щодо якої-небудь опорної нерухомої точки. У цих випадках необхідно використовувати перетворювачі абсолютних переміщень.

Ці перетворювачі дозволяють вимірювати вібраційні переміщення у визначених діапазонах частот за допомогою внутрішніх коливальних систем способом, що уже давно використовується в сейсмотехніці. Це

породило широко уживані сьогодні терміни «сейсмічний датчик», «сейсмічна маса».

Вимірювальний перетворювач абсолютних переміщень (рис. 9.3) виконаний в основному у вигляді підвішеної на пружині (вільної чи сейсмічної) маси, рух якої відносно корпусу вимірюється. Корпус цього перетворювача кріпиться до об'єкта виміру і переміщається разом з останнім. Сейсмічна маса m під дією інерції прагне зберегти свій стан спокою. Однак на масу через пружину діє сила, обумовлена рухом об'єкта. Величина переміщення маси під дією цієї сили залежить від співвідношення між масою і пружністю пружини і від характеру руху. Вібрації одночасно збуджують в інерційній системі, що складається з пружини і маси, коливання на її власній частоті. Владаний пристрій, що створює демпфування, пропорційне швидкості, запобігає утворенню в діапазоні власної частоти надмірно великих амплітуд і дозволяє наблизити діапазон вимірюваних частот до частоти власних коливань.



A — електрична вихідна величина; c — пружина; G - корпус; k — демпфер; m — сейсмічна маса; W — датчик переміщення; r — відносне вібропереміщення ($u-y$); u — вібропереміщення корпусу; y — вібропереміщення сейсмічної маси

Рисунок 9.3 - Схема перетворювача абсолютних вібропереміщень і віброприскорень

Існує три основні групи вимірників коливань: вимірювальні перетворювачі вібраційних переміщень (віброметри); вимірювальні перетворювачі віброшвидкості (велосиметри); вимірювальні перетворювачі віброприскорення (акселерометри).

Вимірювальні перетворювачі вібраційних переміщень (віброметри) застосовуються для вимірювання амплітуд вібрацій, переважно на засобах транспорту, машинах та спорудах.

Вимірювальні перетворювачі віброшвидкості (велосиметри) служать в основному для вимірювання інтенсивності коливань.

Вимірювальні перетворювачі віброприскорення (акселерометри) дозволяють вимірювати прискорення, що виникають в об'єкті вимірювання. Одночасно вони служать для вимірювання інерційних навантажень, обумовлених прискореннями та пропорційних останнім.

Вимірювальний перетворювач вібраційних переміщень (віброметр). Діапазон робочих частот віброметра лежить в області вище його характеристичної частоти. В цьому діапазоні сила інерції сейсмічної маси, що зростає пропорційно квадрату частоти, настільки велика, що практично можна вважати, що ця маса нерухома. Таким чином, використовуючи відповідний датчик переміщення можна вимірювати переміщення корпусу (вібропереміщення) відносно даної маси, що знаходиться в “стані спокою”. Для можливості вимірювання також і низьких частот характеристична частота вимірювального перетворювача повинна бути низькою, тобто сейсмічна маса повинна бути по можливості великою, а пружина по можливості слабкою. Звідси витікає, що прилад повинен мати великі розміри. За оптимального демпфування ($D=0,65$) можна вимірювати частоти, що в 1,5 рази вищі за характеристичну частоту перетворювача.

Вимірювальні перетворювачі віброшвидкості (велосиметри). Велосиметри, що вимірюють абсолютні віброшвидкості, в конструктивному відношенні принципово аналогічні віброметрам. Необхідно лише замість датчик, що вимірює переміщення, владнати датчик електродинамічної системи. Електродинамічний датчик видає на виході вимірювального перетворювача сигнал, пропорційний не амплітуді механічних коливань, а його швидкості (віброшвидкості).

Вимірювальні перетворювачі віброприскорення (акселерометри). Акселерометри в конструктивному відношенні принципово аналогічні перетворювачам вібропереміщень, зображеним на рис. 14. Однак їх робочий частотний діапазон знаходиться нижче характеристичної частоти перетворювача. В цьому діапазоні сила інерції сейсмічної маси надто мала, щоб утримувати її в абсолютно нерухомому положенні, як це має місце в перетворювачах вібропереміщень. Сила інерції викликає відхилення маси, пропорційне квадрату частоти, тобто прямо пропорційне прискоренню. Воно може бути виміряне владнанням перетворювачем переміщень або за допомогою тензорезистора (деформація пружини). Для одержання

можливо більш широкого діапазону робочих частот перетворювача прискорення його характеристична частота повинна бути по можливості високою (маса невеликою, пружина дуже жорсткою). Як і у вимірювальних перетворювачах вібропереміщень, оптимальне демпфування $D=0,65$. Діапазон робочих частот оптимально демпфованих систем знаходиться в межах від 0 до 60% від характеристичної частоти перетворювача.

Вимірювальні перетворювачі обертальних (крутильних) коливань. Перетворювачі абсолютних переміщень можуть бути використані не лише для вимірювання подовжніх коливань, але також і для вимірювання параметрів обертальних (крутильних) коливань, а саме для вимірювання кутових вібропереміщень, кутових віброшвидкостей та кутових віброприскорень. Аналогічно перетворювачам прямолінійного (поступального) переміщення в перетворювачах обертальних (крутильних) коливань урівноважена осесиметрична маса розміщується по можливості без тертя, на осі обертання перетворювача. Вільна маса зв'язана з корпусом торсіонною пружиною і обертається по інерції з постійною швидкістю, в той час як корпус, жорстко зв'язаний з об'єктом вимірювання. Здійснюється вимірювання відносного руху між вільною масою та корпусом перетворювача аналогічно тому, як це відбувається в перетворювачах абсолютного прямолінійного переміщення.

ЛЕКЦІЯ 10. ВИПРОБУВАННЯ І ДОСЛІДЖЕННЯ МЕТАЛОРІЗАЛЬНИХ ВЕРСТАТІВ

10.1 Перевірка точності верстатів

Геометрична і кінематична точність верстата характеризує точність переміщення його формотворних вузлів за відсутності силових та теплових впливів. Тому ці характеристики пов'язані переважно з точністю виготовлення та складання верстата.

Точність металорізальних верстатів згідно ГОСТ8-82 визначається трьома групами показників:

- показники, що характеризують точність обробки зразків-виробів;
- показники, що характеризують геометричну точність верстатів;
- додаткові показники.

До показників, що характеризують точність обробки зразків-виробів, відносяться:

- точність геометричних форм та розташування оброблених поверхонь зразків-виробів;
- сталість розмірів партії зразків-виробів;
- шорсткість оброблених поверхонь зразків-виробів.

Конфігурація і матеріал зразка регламентується стандартом на норми точності відповідних типів верстатів. Так для токарних верстатів форма зразка має відповідати наведеній на рис. 10.1.

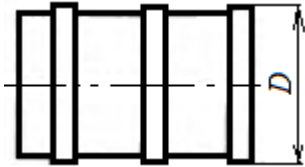


Рисунок 10.1 – Форма зразка-виробу для контролю точності обробки на токарному верстаті

Зразки рекомендується виготовляти з автоматної сталі або чавуну. Обробка повинна вестися на чистових режимах.

До показників, що характеризують геометричну точність верстата, відносяться:

- точність баз для встановлення заготовки та інструменту;
- точність траєкторій переміщень робочих органів верстата, що несуть заготовку та інструмент;
- точність розташування осей обертання та напрямків прямолінійних переміщень робочих органів верстата, що несуть заготовку та інструмент, щодо один одного та щодо баз;
- точність взаємопов'язаних відносних лінійних та кутових переміщень робочих органів верстата, що несуть заготовку та інструмент;
- точність ділильних та установлювальних переміщень робочих органів верстата;
- точність координатних переміщень (позиціонування) робочих органів верстата, що несуть заготовку та інструмент;
- стабільність деяких параметрів при багаторазовості повторень перевірки, наприклад, точність підведення на жорсткий упор, точність малих переміщень підведення.

Для різних типів верстатів властиві свої параметри, що характеризують точність. Ці параметри регламентуються стандартами

на норми точності верстатів, де передбачається визначена кількість перевірок (до 20, іноді і більше). Методи і засоби вимірювання регламентуються ГОСТ 22267. Засоби вимірювання можуть використовуватися як контактного типу, так і безконтактні.

Засоби вимірювання контактного типу (рис. 10.2, а) можуть використовуватися для досліджень точності на верстаті, що не працює, або на малих швидкостях руху. Безконтактні методи (рис. 10.2, б) дають можливість оцінити параметри траєкторії формотворних рухів.

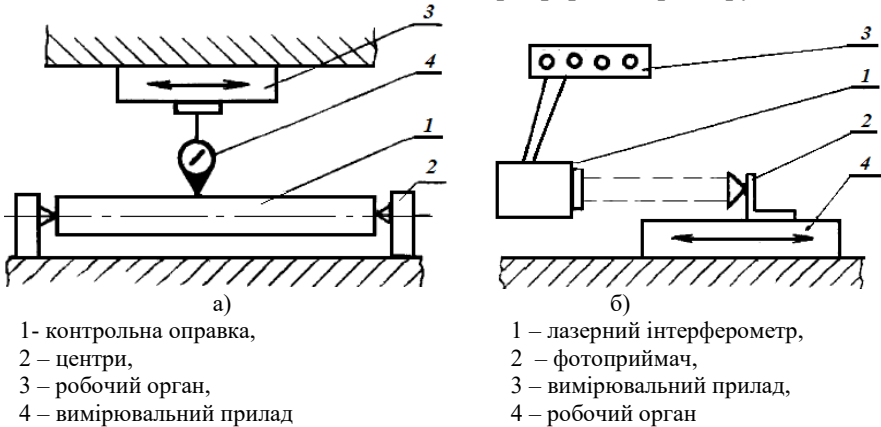


Рисунок 10.2 – Схеми вимірювання паралельності переміщення

За допомогою лазерного інтерферометра можна проводити вимірювання в напрямку п'яти з шести ступенів вільності: лінійне позиціонування, горизонтальну прямолінійність, вертикальну прямолінійність, тангаж і рискання у напрямку руху, а також перпендикулярність між осями. Усі шість ступенів вільності однаково важливі, оскільки для похибки позиціонування, що є результатом спільного впливу кутових зсувів або непрямолінійності переміщень, потенційно можуть перевершувати похибки власне лінійного позиціонування координатної осі.

При проведенні лінійних вимірювань необхідно пам'ятати, що абсолютна точність лазерного інтерферометра безпосередньо визначається станом навколишнього середовища, тобто його стабільністю. Похибка приблизно в одну мільйонну частину вимірюваної довжини виникатиме при кожному з таких факторів: зміна температури навколишнього середовища на 1°C , зміна абсолютного

тиску на 2,5 мм ртутного стовпа, зміна відносної вологості на 30%. Ці похибки можуть бути частково усунуті за допомогою компенсації вручну або за допомогою одного з автоматичних компенсаторів, які можна приєднувати до пристрою лазерного інтерферометра.

До додаткових показників точності верстата відносяться здатність збереження взаємного розташування робочих органів верстата, що несуть заготівку та інструмент, за умови:

- додавання зовнішнього навантаження (показники жорсткості);
- впливу тепла, що виникає під час роботи верстата на холостому ході;
- коливань верстата, що виникають під час роботи верстата на холостому ході.

Перелік показників точності верстатів визначається стандартами на норми точності верстатів конкретних типів та технічними умовами.

Норми точності верстата після середнього та капітального ремонту повинні відповідати вимогам стандартів та технічних умов, що діяли у період виготовлення верстата.

Значення допусків показників точності при переході від одного класу точності до іншого беруться переважно за геометричним рядом зі знаменником 1,6. Для конкретних показників геометричної точності можуть братися інші значення від 1,25 до 2,0.

Випробування верстата на точність повинно проводитись після випробування верстата на холостому ході та в роботі, та після проведення необхідних регулювань відповідно до нормативно-технічної документації на верстат.

Коливання температури оточення в період випробувань верстатів на точність не повинні перевищувати значень, зазначених у стандартах на норми точності верстатів конкретних типів, у технічних умовах або в експлуатаційних документах на верстати.

Якщо такі вказівки відсутні, то для верстатів класів точності, В, А і С коливання температури робочого простору не повинні перевищувати 2°C. Для верстатів класів точності Н і П коливання температури робочого простору не регламентуються.

Основною метою вимірювань є перевірка точності верстата в умовах, наближених до умов нормальної роботи з точки зору теплового режиму.

Перед вимірами геометричної точності верстата елементи верстата, наприклад, шпинделі та інші елементи верстата, схильні до нагрівання під час роботи і, отже, змін розташування і форми, повинні бути попередньо розігріті шляхом обкатки верстата на холостому ході відповідно до вказівок виробника.

Для оцінки **кінематичної точності** верстатів застосовують спеціальні прилади – кінематометри, які дають можливість оцінити зміни передавальних відношень, що виникають в основному за рахунок похибок зубчастих передач. Застосовуються кінематометри, що використовують магнітоелектричний, оптичний, фотоелектричний та інші принципи дії датчиків, які оцінюють точність руху (обертання) контрольованої ланки.

10.2 Випробування верстатів на статичну жорсткість

Випробування верстатів на статичну жорсткість включають оцінку деформації основних вузлів верстата, в першу чергу тих, що визначають відносне положення інструмента та заготовки. Жорсткість також є однією з основних характеристик вібростійкості верстата.

При випробуванні на **жорсткість** до частин верстата, що несуть інструмент і заготовку, додається плавно навантаження, що зростає до заданої межі, і одночасно вимірюється відносне переміщення цих частин.

Як нормовані в стандартах показники жорсткості беруться найбільші переміщення (нижні межі жорсткості) вузлів верстата, що несуть інструмент і заготовку, за певних навантажувальних сил.

Усі деталі, які в випробуванні на жорсткість необхідно переміщувати, повинні підводитись у положення перевірки рухом їх у напрямку, протилежному напрямку складової сили, що діє на них під час перевірки.

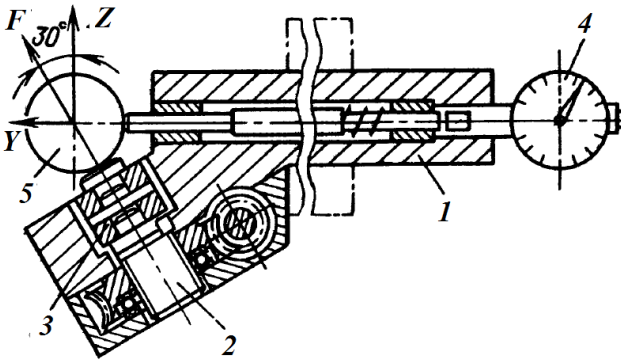
Умови випробувань на жорсткість повинні наближатися до умов навантаження для типового виду обробки. Зокрема визначаються:

- а) схеми розташування вузлів, деталей верстатів у процесі перевірки;
- б) напрями та величини навантажувальних сил та точки їх прикладення;
- в) напрями та точки, в яких повинні вимірюватися переміщення;
- г) способи завдання навантажувальних сил та засобів їх вимірювання;

д) способи та засоби вимірювання переміщень.

Як пристрої для навантаження повинні бути використані спеціальні навантажувальні пристрої або механізми верстата.

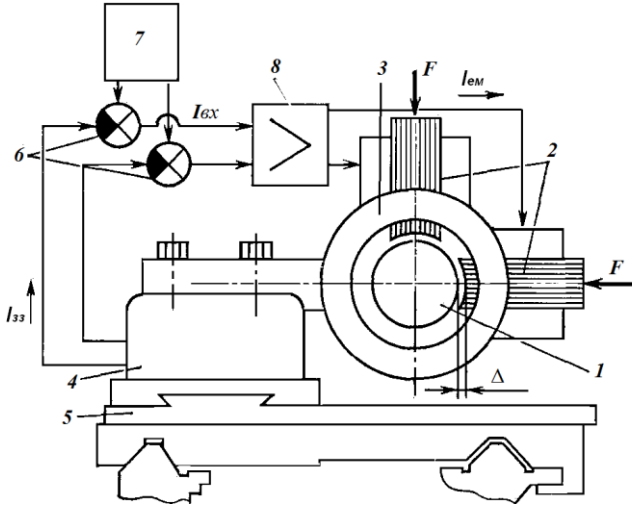
За допомогою пристрою рис. 10.3 вимірюється жорсткість верстата, що не працює. Корпус 1 пристрою закріплюється в різцетримачі супорта. Черв'ячною парою здійснюється осьовий рух гвинта 2, який через пружинний динамометр 3 створює навантаження на оправку, установлену в шпинделі верстата. Конструкція пристрою забезпечує прикладення навантаження F під кутом 30° до осі Z , тобто в напрямку дії результуючої сил F_z і F_y . Відносні переміщення системи супорт-шпиндель вимірюються в напрямку осі Y індикатором переміщень 4.



1 – корпус динамометра; 2 – гвинт; 3 – динамометр; 4 – індикатор переміщень; 5 – оправка в шпинделі

Рисунок 10.3 - Пристрій для вимірювання жорсткості системи супорт – шпиндель

Навантажувальний пристрій, наведений на рис. 10.4, забезпечує безконтактне навантаження системи супорт-шпиндель в їх відносному русі та дозволяє змінювати напрямок прикладення сили. Корпус 3, в якому встановлені електромагніти 2 закріплюється на динамометрі 4, розміщеному на супорті верстата. Динамометр визначає усі складові сили, що навантажують та видає сигнали зворотного зв'язку в ланцюги керування навантажувальним пристроєм



1 – оправка (осердя); 2 – електромагніти; 3 – корпус електромагнітів; 4 – динамометр; 5 – супорт; 6 – блоки порівняння; 7 – блок керування; 8 – підсилювач

Рисунок 10.4 - Схема навантажувального пристрою для безконтактного навантаження системи супорт - шпиндель

В ході дослідницьких випробувань на жорсткість одержують "криву жорсткості" – навантажувально–розвантажувальну характеристику пружних деформацій в координатах "сила – деформація вузла". Форма цих кривих – характер петлі гістерезису, величина запізнювання деформацій, лінійність характеристики та інше – є діагностичним сигналом про стан пружної системи верстата. Жорсткість верстата безпосередньо пов'язана з точністю обробки, можливістю застосування підвищених режимів обробки.

Жорсткість системи залежить як від пружності її ланок, так і від сил тертя та характеру контакту в стиках, і крива жорсткості буде мати різний вигляд для верстата, що працює та верстата, що не працює. Тому застосування безконтактних методів вимірювання та одержання кривих жорсткості під час роботи верстата дає більш точну інформацію про його стан.

10.3 Випробування верстатів на вібростійкість

Випробування верстатів на вібростійкість пов'язане з аналізом та оцінкою тих динамічних процесів, які виникають в верстаті під час його

роботи, особливо в процесах різання. Ці процеси безпосередньо впливають на параметри точності оброблених поверхонь (точність форми, хвилястість, шорсткість), а також можуть призвести до недопустимих явищ (резонансу, виникнення інтенсивних автоколивань), що виключають можливість роботи верстата на визначених режимах обробки. Специфіка металорізальних верстатів полягає в тім, що на виникнення коливань визначальний вплив чинить процес різання.

Найбільший розвиток одержали випробування, пов'язані з одержанням амплітудно-фазової частотної характеристики (АФЧХ), яка дозволяє оцінити запас стійкості верстата та виявити вплив основних конструкційних та технологічних факторів на динамічні характеристики верстата. Для одержання таких характеристик застосовують спеціальні вібратори (контактні та безконтактні), які забезпечують силові впливи на пружну систему верстата за заданим, зазвичай синусоїдальним законом у визначеному діапазоні частот. Відгук системи на даний вплив (її коливання з деякою амплітудою та зсувом по фазі по відношенню до сигналу впливу) дозволяє за допомогою АФЧХ виявити її динамічну характеристику.

Для проведення таких випробувань звичайно використовують безконтактні електромагнітні вібратори, прецизійні вимірювальні перетворювачі та відповідну апаратуру для вимірювання вібропереміщень.

10.4 Оцінка теплових деформацій верстатів

Оцінка теплових деформацій верстатів особливо важлива для прецизійних верстатів, коли зміни температурних полів верстата відіграють домінуючу роль в забезпеченні необхідної точності. Проявляючись в часі, теплові деформації змінюють геометричні параметри верстата, наприклад зміщують вісь шпинделя, викривляють напрямні, деформують станину та порушують взаємне положення вузлів верстата, що несуть заготовку та інструмент. Крім того, теплові деформації можуть призвести до зміни жорсткості системи, наприклад, за рахунок збільшення натягу в підшипниках кочення внаслідок їх нагрівання.

Для визначення теплових деформацій вузлів верстата часто використовують ті самі прилади, що і для оцінки геометричної точності та жорсткості верстатів. Дослідження теплових деформацій має свою

специфіка, яка полягає в тім, що необхідно досліджувати процес, оскільки деформації змінюються в часі. Тому застосовують самописні прилади, а для автоматизації експерименту цифродрукарські пристрої та дисплеї, що реєструють зміни. Для визначення характеристики температурних полів та їх зміни в часі використовують різноманітні термометри: термопари, термоопори, тощо. Для дослідження динаміки теплових полів застосовують тепловізори, що реєструють інфрачервоне випромінювання об'єкта.

Оскільки найбільший вплив на точність обробки на верстаті чинять температурні деформації вузлів і елементів, що безпосередньо входять в розмірний ланцюг інструмент – деталь, то найчастіше визначають температурні зсуви шпинделя стосовно супорта чи стола. Методологія проведення таких досліджень буде визначатися, окрім усього іншого, наявністю приладів та оснащення.

Метод дослідження, показаний на рис. 10.5 потребує мінімального набору оснащення. В шпинделі верстата 1 встановлюється точно виготовлена оправка 2. Вимірювальні прилади 3 встановлюються на деякій відстані L одне від одного, що в подальшому дасть можливість визначити не лише лінійні зсуви осі шпинделя, а і її поворот. Оскільки шпиндель обертається, то вимірювальні наконечники приладів слід встановлювати на відстані від шпинделя, а процес вимірювання виконується під час зупинки шпинделя за допомогою точного щупа. Необхідно слідкувати за тим, щоб оправка була завжди в одному і тому самому кутовому положенні.

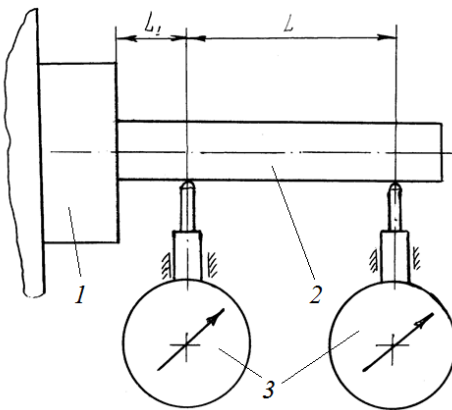
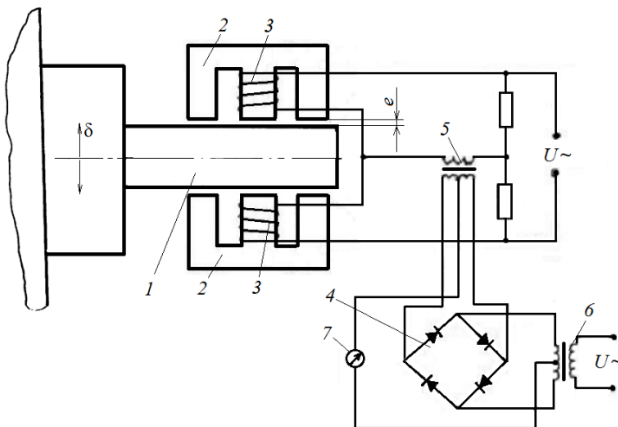


Рисунок. 10.5 – Визначення температурних зсувів шпиндельного вузла

В другому методі (рис. 10.6) для визначення температурних зсувів шпинделя використовуються диференціальні індуктивні датчики, принцип дії яких розглядався в лекції 8. Використання цього методу дозволяє виконувати вимірювання без зупинки обертання шпинделя. Результати вимірювання можуть записуватися. Форма запису визначатиметься наявним реєструючим пристроєм. Запис може здійснюватися безперервно або періодично, через деякі проміжки часу. Враховуючи характер протікання температурних деформацій шпиндельного вузла, в початковий період роботи проміжки часу доцільно вибирати невеликі, а подальшому їх можна збільшувати. Використання диференціальної схеми підвищує чутливість (в двічі) та забезпечує компенсації нагріву оправки, установленної в шпинделі.

Диференціальні індуктивні датчики (ДІД) представляють собою сукупність двох індуктивних датчиків. Виконуються у вигляді системи, що складається з двох магнітопроводів 2 із загальним осердям 1 і двома котушками 3 (рис 10.6). Зазор e між осердям (оправкою) і магнітопроводами повинен бути в межах 0,5 мм. Оправка повинна виготовлятися з матеріалу з магнітними властивостями.



1 – осердя (оправка); 2 – магнітопровід; 3 – котушки; 4 – випрямляч; 5 – вимірювальна обмотка; 6 – трансформатор живлення; 7 – вимірювальний прилад

Рисунок 10.6 – Визначення температурних зсувів шпиндельного вузла за допомогою індукційних датчиків

Використовуючи фазочутливі випрямні схеми можна отримати реверсивну характеристику з нульовою відміткою по середині шкали.

За симетричного положення осердя між обмотками повітряні зазори однакові, індуктивні опори однакові, а отже і величини струмів в котушці однакові. Як наслідок, результуючий струм від різниці магнітних потоків не створюється, в вимірювальній обмотці 5 ЕРС не індуктується. При зміщенні якоря від нейтрального положення магнітний опір в одній з обмоток, наприклад, збільшується, в іншій - зменшується, в осерді створюється різницевий магнітний потік, в вимірювальній обмотці наводиться змінна ЕРС, фаза залежить від напрямку зсуву. ЕРС подається на випрямляч 4, прилад 7 показує величину і напрямок зсуву осердя. Розглянуті ДІД застосовуються для вимірювання переміщення порядку часток і десятих часток міліметра. Мінімально можливий повітряний зазор з конструктивних умов вибирається близько 0,2 - 0,5 мм.

ЛЕКЦІЯ 11. ДОСЛІДЖЕННЯ ТОЧНОСТІ ПОЗИЦІЮВАННЯ ВЕРСТАТІВ. УМОВИ ПРОВЕДЕННЯ ТА РОЗРАХУНОК ПОКАЗНИКІВ (ISO 210-1,2)

Встановлення верстата перед вимірюванням

До проведення вимірювань верстат слід встановити на відповідний фундамент та вивірити за рівнем відповідно до інструкції виробника.

Тепловий режим перед вимірюваннями

Основною метою вимірювання є перевірка точності верстата в умовах, найбільш наближених до умов нормальної роботи з точки зору теплового режиму.

Перед вимірами геометричної точності верстата елементи верстата, наприклад, шпинделі та інші елементи верстата, схильні до нагрівання під час роботи і, отже, змін розташування і форми, повинні бути попередньо розігріті шляхом обкатки верстата на холостому ході відповідно до вказівок виробника.

Особливих жорстких вимог до умов випробувань слід дотримуватися під час перевірки високоточних верстатів і деяких верстатів з числовим керуванням, на точність яких коливання температури можуть істотно вплинути.

Необхідно враховувати зміни розмірів елементів верстата протягом нормального робочого циклу від перепаду температури навколишнього середовища. Режим попереднього прогрівання

верстата, навколишня температура та її коливання під час випробувань, у разі потреби, мають бути узгоджені між виробником верстата та замовником.

Основними елементами конструкції верстата, теплові деформації яких можуть істотно впливати на його точнісні характеристики є:

а) базові вузли (станина, полозки, шпіндельний вузол тощо), їх зміщення в площині головної осі та площині перпендикулярній до неї;

б) приводи координатних переміщень та системи позиціонування зі зворотним зв'язком, у яких точність позиціонування визначається, наприклад, ходовим гвинтом.

Умови навколишнього середовища

Рекомендується, щоб виробник/постачальник надавав вказівки щодо необхідного для верстата теплового середовища, в якому він працюватиме із заданою точністю.

Такі вказівки можуть містити, наприклад, технічні вимоги до середньої температури приміщення, максимальної амплітуди та частотного діапазону відхилень від цієї середньої температури, а також теплові градієнти навколишнього середовища.

В ідеальному випадку всі вимірювання виконують, коли і засоби вимірювання, і об'єкт, що вимірюється, знаходяться в середовищі з температурою 20°C. Якщо вимірювання проводять за температури, відмінної від 20°C, то має бути виконана корекція номінального диференціального розширення (НДР) між системою позиціонування осі або заготівлю/ елементом верстата, що несе інструмент, та випробувальним обладнанням, щоб отримати результати, скориговані на температуру 20°C.

Для цієї умови може знадобитися вимірювання температури типової деталі верстата, а також випробувального обладнання та виконання математичної корекції з використанням відповідних коефіцієнтів теплового розширення. Корекція НДР також може виконуватися автоматично, якщо типова деталь верстата та випробувальне обладнання мають однакову температуру та однаковий коефіцієнт теплового розширення.

Верстат і, якщо доцільно, засоби вимірювання повинні перебувати у випробувальному середовищі тривалий час (переважно всю ніч), щоб досягти сталого температурного стану перед випробуванням. Вони повинні бути захищені від протягів та

зовнішнього випромінювання, такого як сонячне світло, тепло від нагрівальних приладів тощо.

Для перевірки верстата за нормальних умов експлуатації необхідно попередньо провести процес прогріву, встановлений виробником/постачальником верстата або узгоджений між виробником/постачальником та користувачем.

Режим роботи

Верстат повинен бути запрограмований на рух рухомого компонента вздовж або навколо осі, що перевіряється, і на переміщення його в ряд заданих позицій, де він залишиться в спокої на час, достатній для досягнення, вимірювання і реєстрації дійсної позиції. Верстат повинен бути запрограмований на рух між заданими позиціями зі швидкістю, узгодженою між виробником/постачальником верстата та користувачем.

Типовими засобами вимірювання для визначення похибки позиціонування і повторюваності лінійних осей є лазерні інтерферометри (включаючи слідкуючі інтерферометри) і лінійні шкали, що калібрують. Також можуть бути використані калібровані сферичні матриці.

Типовими засобами вимірювання для визначення похибки позиціонування і повторюваності осей обертання є полігони з автоколіматорами, еталонні ділильні столи з лазерним інтерферометром/автоколіматором і еталонні кругові (кутові) датчики положення.

На осях верстатів з ходом до 2000 мм має бути вибрано, як мінімум, п'ять заданих позицій на метр і як мінімум п'ять заданих позицій всього.

Вимірювання мають бути виконані у всіх заданих позиціях згідно зі стандартним циклом вимірювань (рис. 11.1) Кожна задана позиція має бути досягнута по п'ять разів у кожному напрямі.

Точність позиціонування визначається статистичними показниками, які знаходять за результатами вимірювань, що виконуються в контрольних точках окремо для кожної програмованої осі руху та окремо для додатного та від'ємного напрямків руху. Контрольними точками 1, 2, 3, ..., m (рис. 11.1) є межі інтервалів, на які розбивається контрольована ділянка l_k . Інтервал між контрольними точками визначається сумою

$$l_i = l_{кр} + l_{дод.}$$

де $l_{кр}$ - величина, кратна кроку t основної періодичної складової систематичного відхилення (при використанні кругового датчика зворотного зв'язку, розташованого безпосередньо на ходовому гвинті або пов'язаного з ним через мультиплікатор, крок t береться рівним кроку ходового гвинта; при використанні лінійного датчика зворотного зв'язку, розташованого вздовж напрямних вузла, що переміщується, крок t дорівнює кроку лінійного датчика);

$l_{дод.}$ - додаткове збільшення інтервалу, рівне певній частці кроку t з ряду 0,1; 0,3; 0,7 і 0,9 (за критеріями точності та відтворюваності результатів, кращі значення 0,3 t і 0,7 t).



↑ - рух в додатному напрямі; ↓ - рух у від'ємному напрямі

Рисунок 11.1 – Схема переміщення рухомого вузла для визначення точності позиціонування

Позиція зміни напрямку руху має бути обрана з урахуванням нормального режиму роботи верстата (для можливості досягнення після реверсу швидкості позиціонування, що відповідає умові експлуатації верстата).

Випробування осей обертання до 360 °

Випробування мають бути проведені у заданих позиціях, кількість яких залежить від ходу вимірювання: якщо кут повороту $\leq 90^\circ$ - не менше як в 3 позиціях, для кута від 90° до 180° - 5 позиціях, якщо кут більший 180° - 8 позиціях. Основні позиції 0° , 90° , 180° та 270° , по можливості, повинні включатися поряд з іншими заданими позиціями.

Кожна задана позиція має бути досягнута щонайменше п'ять разів у кожному напрямі.

Для осей обертання з можливістю оберту понад 360° повний хід виміру по осі до 1800° (п'ять обертів) повинен перевірятися одним одностороннім підходом у кожному напрямі з мінімальною кількістю вісім заданих позицій на оберт.

Оцінка результатів

Для кожної заданої позиції P_i та для п'яти підходів ($n = 5$) у кожному напрямі розраховують параметри, зазначені нижче. Крім того, розраховують межі відхилень.

Позиційне відхилення (positioning deviation, deviation of position): x_{ij} визначається як різниця між дійсною позицією, досягнутою функціональною точкою, і заданою (запрограмованою) позицією за формулою:

$$x_{ij} = P_{ij} - P_i.$$

$i = 1, m$ – номер заданої позиції;

$j = 1, n$ – номер підходу до i -ої позиції.

Середнє односпрямоване позиційне відхилення на позиції (mean unidirectional positioning deviation at a position) $\bar{x}_i \uparrow$ або $\bar{x}_i \downarrow$: Середнє арифметичне позиційних відхилень, отриманих в серії n односпрямованих підходів до позиції P_i , визначається за формулами:

$$\bar{x}_i \uparrow = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{ij} \uparrow, \quad \bar{x}_i \downarrow = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{ij} \downarrow.$$

Символ $\uparrow$ означає параметр, отриманий при вимірі, зробленому після підходу у додатному напрямку, а символ $\downarrow$ - у від'ємному напрямку.

Середнє двоспрямоване позиційне відхилення позиції (mean bi-directional positioning deviation at a position) $\bar{x}_i$. Середнє арифметичне значення середніх односпрямованих позиційних відхилень $\bar{x}_i \uparrow$ і $\bar{x}_i \downarrow$ отриманих за двох напрямків підходу до позиції P_i розраховується за формулою:

$$\bar{x}_i = \frac{\bar{x}_i \uparrow + \bar{x}_i \downarrow}{2},$$

Зона нечутливості на позиції (Reversal error at a position) B_i (рис. 11.2): Різниця між середніми односпрямованими позиційними відхиленнями, отриманими для двох напрямків підходу до позиції P_i визначається за формулою:

$$B_i = \bar{x}_i \uparrow - \bar{x}_i \downarrow.$$

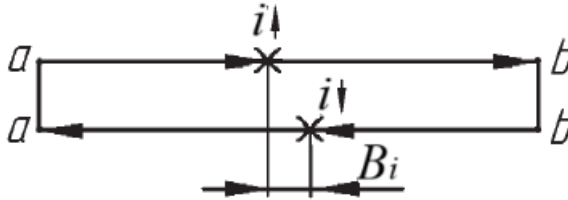


Рисунок 11.2 – Визначення зони нечутливості

Оцінка односпрямованої повторюваності позиціонування осі на позиції (estimator for the unidirectional axis positioning repeatability at a position) $s_i \uparrow$ або $s_i \downarrow$: Оцінки стандартної невизначеності відхилення (середньоквадратичне відхилення) для позиціонування, отриманого в результаті серії n односпрямованих підходів до позиції P_i , визначаються за формулами:

$$s_i \uparrow = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_{ij} \uparrow - \bar{x}_i \uparrow)^2},$$

$$s_i \downarrow = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_{ij} \downarrow - \bar{x}_i \downarrow)^2}.$$

Односпрямована повторюваність позиціонування на позиції (unidirectional positioning repeatability at a position) $R_i \uparrow$ або $R_i \downarrow$. Діапазон, отриманий з односпрямованої оцінки повторюваності позиціонування по осі на позиції P_i , з використанням коефіцієнта запасу $k = 2$ визначається за формулами:

$$R_i \uparrow = 4s_i \uparrow; \quad R_i \downarrow = 4s_i \downarrow.$$

Двоспрямована повторюваність позиціонування на позиції (bi-directional positioning repeatability at a position) R_i - розраховується за формулою:

$$R_i = \max[2s_i \uparrow + 2s_i \downarrow + |B_i \downarrow; R_i \uparrow; R_i \downarrow|].$$

Односпрямована повторюваність позиціонування осі (unidirectional positioning repeatability of an axis) $R \uparrow$ або $R \downarrow$: Максимальне значення повторюваності позиціонування у будь-якій позиції P_i вздовж або навколо цієї осі обчислюється за формулами.

$$R \uparrow = \max[R_i \uparrow]; \quad R \downarrow = \max[R_i \downarrow].$$

Двоспрямована повторюваність позиціонування осі (bi-directional positioning repeatability of an axis) R : Максимальне значення повторюваності позиціонування в будь-якій позиції P_i , уздовж або навколо осі розраховується за формулою:

$$R = \max[R_i].$$

Односпрямована систематична похибка позиціонування осі (unidirectional systematic positioning error of an axis) $E \uparrow$ або $E \downarrow$: Різниця між алгебраїчним максимумом і мінімумом середніх односпрямованих відхилень позиціонування для одного напрямку підходу $\bar{x}_i \uparrow$ або $\bar{x}_i \downarrow$ у будь-якій позиції P_i , вздовж або навколо даної осі визначається за формулами:

$$E \uparrow = \max[\bar{x}_i \uparrow] - \min[\bar{x}_i \uparrow]; \quad E \downarrow = \max[\bar{x}_i \downarrow] - \min[\bar{x}_i \downarrow]$$

Двоспрямована систематична похибка позиціонування осі (bi-directional systematic positioning error of an axis) E : Різниця між алгебраїчним максимумом і мінімумом середніх односпрямованих відхилень позиціонування для двох напрямків підходу $\bar{x}_i \uparrow$ або $\bar{x}_i \downarrow$ у будь-якій позиції P_i вздовж або навколо цієї осі обчислюється за формулою:

$$E = \max[\bar{x}_i \uparrow; \bar{x}_i \downarrow] - \min[\bar{x}_i \uparrow; \bar{x}_i \downarrow].$$

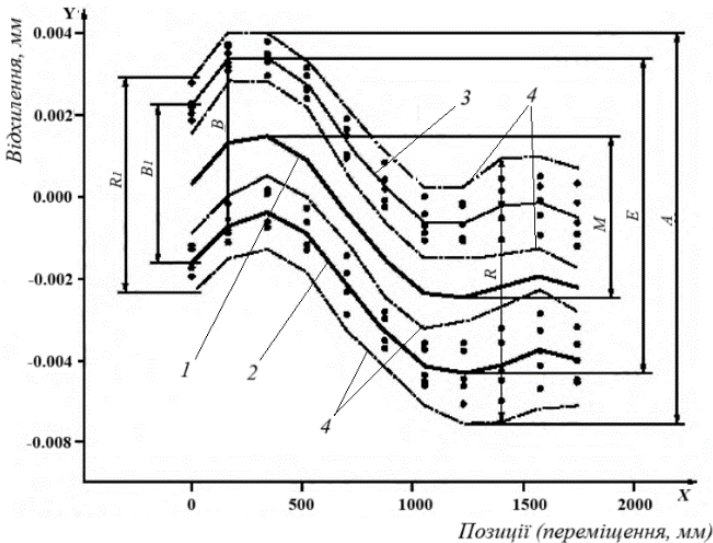
Середня двоспрямована похибка позиціонування осі (mean bi-directional positioning error of an axis) M : Різниця між алгебраїчним максимумом і мінімумом середніх двоспрямованих відхилень позиціонування $\bar{x}_i$, у будь-якій позиції P , уздовж або навколо даної осі за формулою:

$$M = \max[\bar{x}_i] - \min[\bar{x}_i].$$

Похибка односпрямованого позиціонування осі, точність односпрямованого позиціонування осі (unidirectional positioning error of an axis, unidirectional positioning accuracy of an axis) $A \uparrow$ або $A \downarrow$. Діапазон, отриманий шляхом комбінації середніх односпрямованих систематичних похибок позиціонування та оцінки односпрямованої повторюваності позиціонування осі з використанням коефіцієнта запасу до $k = 2$ за формулами:

$$A \uparrow = \max(\bar{x}_i \uparrow + 2s_i \uparrow) - \min(\bar{x}_i \uparrow - 2s_i \uparrow),$$

$$A \downarrow = \max(\bar{x}_i \downarrow + 2s_i \downarrow) - \min(\bar{x}_i \downarrow - 2s_i \downarrow).$$



B_l – зона нечутливості в позиції 1; B – зона нечутливості осі; R – двоспрямована повторюваність позиціонування по осі; R_l – двоспрямована повторюваність позиціонування на позиції 1; M – діапазон середньої двоспрямованої похибки позиціонування по осі; E – двоспрямована систематична похибка позиціонування по осі; A – похибка двоспрямованого позиціонування по осі; 1 – середнє двоспрямоване позиційне відхилення позицій; 2 – середнє односпрямоване позиційне відхилення $\bar{x}_i \uparrow$ на позиції; 3 – середнє односпрямоване позиційне відхилення $\bar{x}_i \downarrow$ на позиції; 4 – значення $\bar{x}_i \uparrow + 2s_i \uparrow$; 5 – значення $\bar{x}_i \downarrow + 2s_i \downarrow$.

Рисунок 11.3 — Двоспрямована похибка та повторюваність позиціонування

Похибка двоспрямованого позиціонування осі, точність двоспрямованого позиціонування осі (bi-directional positioning error of an axis an axis) A : Діапазон, отриманий шляхом комбінації середніх двоспрямованих систематичних похибок позиціонування та оцінки повторюваності позиціонування осі при двоспрямованому позиціонування з використанням коефіцієнта запасу $k = 2$ розраховується за формулою:

$$A = \max[\bar{x}_i \uparrow + 2s_i \uparrow; \bar{x}_i \downarrow + 2s_i \downarrow] - \min[\bar{x}_i \uparrow - 2s_i \uparrow; \bar{x}_i \downarrow - 2s_i \downarrow].$$

Характер визначення основних показників точності позиціонування показаний на рис. 11.3.

Складові невизначеності виміру

На похибку вимірювання впливають вимірювальний прилад, зсув вимірювального приладу по відношенню до осі верстата, що випробовується, похибка внаслідок компенсації температури верстата, відмінної від температури 20°C, і похибки, пов'язані зі зміною зовнішніх умов E_{VE} . Складові та припущення відповідають ISO/TR230-9 додаток C, за винятком похибки налаштування, оскільки передбачається, що налаштування знаходиться в межах 10 мм від положення, внесеного до протоколу випробування.

Розширена невизначеність, пов'язана з вимірювальним приладом, U_{DEV} .

Рекомендується використання каліброваного вимірювального пристрою. Якщо сертифікат калібрування встановлює максимальну похибку в мікрометрах (мкм), застосовують формулу (11.1). Якщо сертифікат калібрування встановлює похибку, мкм/м, то застосовують формулу (11.2).

Якщо сертифікат калібрування відсутній і виробник вказує діапазон похибки в мікрометрах на метр, то слід застосовувати формулу (11.3). Роздільна здатність вимірювального пристрою має незначний вплив і може бути перевірена відповідно до ISO/TR 230-9.

$$U_{DEV} = U_{CAL}, \quad (11.1)$$

$$U_{DEV} = U_{CAL} \cdot L, \quad (11.2)$$

$$U_{DEV} = R_{DEV} \cdot L, \quad (11.3)$$

де U_{DEV} - розширена невизначеність, пов'язана з вимірювальним приладом, мкм;

U_{CAL} - похибка калібрування відповідно до сертифіката калібрування, мкм з коефіцієнтом запасу $k = 2$:

L – довжина вимірювання, м.

R_{DEV} - діапазон похибки, заданої виробником приладу, мкм.

Розширена невизначеність внаслідок зміщення вимірювального приладу по відношенню до осі верстата, що випробовується, U_{MIS} .

Вимірювальний прилад повинен бути виставлений паралельно до осі верстата, що випробовується, інакше з'являється похибка вимірювання. Це буде впливом другого порядку, однак, якщо зміщення більше 1 мм і, якщо вісь верстата, що випробовується коротше 300 мм, цей вплив може стати значним. Формула (11.4) та таблиця 11.1 показують вплив через зміщення.

$$U_{MIS} = 0,3 \cdot R_{MIS/L}^2 \quad (11.4)$$

R_{MIS} – зсув, мм.

Таблиця 11.1 - Розширена невизначеність вимірювання внаслідок зсуву вимірювального обладнання U_{MIS}

Довжина вимірювання, мм	U_{MIS} , мкм					
	Зсув, мм					
	0,5	1,0	1,5	2,0	3,0	4,0
200	0	1	3	6	13	23
300	0	1	2	4	9	15
500	0	1	1	2	5	9
800	0	0	1	1	3	6
1000	0	0	1	1	3	5
1500	0	0	0	1	2	3
2000	0	0	0	1	1	2
4000	0	0	0	0	1	1

Невизначеність у зв'язку з компенсацією температури верстата.

Якщо вимірювання проводять за температур, відмінних від 20°C, відносне розширення між верстатом (або заготівкою) та вимірювальним приладом має бути компенсоване. Найчастіше у вимірювальному обладнанні ця похибка компенсується автоматично.

Температурні вимірювання, необхідні для цієї компенсації, мають невизначеність вимірювання, яка додається до загальної невизначеності вимірювання.

Для компенсації також необхідні коефіцієнти теплового розширення верстата (або заготівки) та вимірювального приладу. Їхні похибки мають подальший вплив на похибку вимірювання довжини.

Найбільший вплив на вимірювання температури чинить вибір точки вимірювання, яка повинна бути характерною для температури верстата (або заготовки). Рекомендується, щоб кріпильний пристрій заготовки був прийнятий як показовий. Однак точки вимірювання температури повинні бути зазначені у протоколі випробування.

До інших впливів відносяться установки датчиків температури, які мають бути міцно закріплені на елементі верстата, та похибка вимірювання самих датчиків температури.

Для практичного застосування ці впливи подані як можливий діапазон похибки вимірювання температури.

Примітка — Діапазон 1°C відповідає поданню $\pm 0,5^\circ\text{C}$.

Зазвичай датчики температури мають діапазон відхилення близько $(0,7 \pm 0,35)^\circ\text{C}$. Якщо датчики температури встановлені невірно або розміщені в нехарактерних точках, похибка вимірювання може бути більшою 4°C . Вплив похибки вимірювання датчика температури і вплив довжини положення точки датчика наведені в таблиці 11.2.

Таблиця 11.2 — Вплив похибки вимірювання температури U_M

Діапазон вимірів, мм	U_{MDEV} та $U_{MACH\ TOOL}$, мкм							
	Похибка вимірювання, °C							
	(0,1±0, 05)	(0,2±0, 1)	(0,5±0, 25)	(0,7±0, 35)	(1,0±0, 5)	(2,0±1, 0)	(3,0±1, 5)	(4,0±2, 0)
200	0	0	1	1	1	3	4	6
300	0	0	1	1	2	4	6	8
500	0	1	2	2	3	7	10	14
800	1	1	3	4	6	11	17	22
1000	1	1	3	5	7	14	21	28
1500	1	2	5	7	10	21	31	42
2000	1	3	7	10	14	28	42	55
4000	3	6	14	19	28	55	83	111
Коеф. розшире ння	12,0 мкм/(м·°C)							

Розширена невизначеність вимірювання внаслідок вимірювання температури повинна бути визначена для верстата U_{M-MT} і для вимірювального приладу U_{M-DEV} .

Більшість систем лазерних інтерферометрів автоматично компенсують похибку від розширення приладу (тобто вплив температури повітря) і включають похибку цієї компенсації у встановлену похибка вимірювального пристрою. У таких випадках слід розраховувати U_M — похибка виміру без урахування похибки з допомогою розширення вимірювального пристрою під впливом температури. Розширена невизначеність вимірювання у зв'язку з вимірюванням температури верстата залишається складовою невизначеності вимірювання довжини точки установки приладу (формула 11.5). Похибка виміру, збільшена за рахунок вимірювання температури верстата, допомагає оцінити похибку виміру довжини.

$$U_{M-MT} = 0,6 \cdot \alpha \cdot L \cdot R(\theta), \quad (11.5)$$

де U_{M-MT} розширена невизначеність вимірів, пов'язана з вимірами температури верстата, мкм;

α — коефіцієнт теплового розширення верстата за віссю, що випробовується, мкм/(м·°C);

L — довжина вимірів, м;

$R(\theta)$ — різниця температур між пристроєм закріплення заготовки і вимірювальним приладом, °C.

ЛЕКЦІЯ 12. АНАЛІЗ ТА ОЦІНКА ДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ВЕРСТАТІВ

На сьогодні велика увага приділяється дослідженню та оцінці динамічних характеристик та динамічної жорсткості верстатів. Аналіз і оцінка динаміки структури необхідні для проектування та розробки верстатів, щоб забезпечити високу продуктивність верстатів у важких і ускладнених умовах обробки. Ці питання набувають особливої ваги для багатоцільових верстатів та верстатів з ЧПК, оскільки на них повинні виконуватися різноманітні види обробки: фрезерування, свердління, обточування і розточування, нарізування різі, тощо. Ці види обробки потребують зміни режимів обробки (швидкості різання, величини подачі, глибини різання) в широкому діапазоні; властивості оброблюваних матеріалів також змінюються в широких межах. Як

наслідок, в конструкції верстата і його вузлів виникають коливання з різними частотами і амплітудами.

Дослідження власних частот коливань та відповідних режимів вібрацій конструкції верстата аналізуються зазвичай за допомогою модального і гармонічного аналізу методом скінчених елементів (МСЕ), а також імпульсного молоткового тесту.

Ударний тест - це експериментальний метод, який використовується для збудження системи верстата з метою отримання інформації про гармоніки, власні частоти, модальні маси, модальні коефіцієнти демпфування та форми мод. Зазвичай цей тест проводиться в статичних умовах, використовуючи ударний молоток (рис. 12.1) як механізм збудження та акселерометр як датчик.

Імпульс молотка складається з майже постійної сили в широкому діапазоні частот, а отже, здатний збуджувати всі резонанси в цьому діапазоні. Молоток, розмір, довжина, матеріал і швидкість удару визначають амплітуду та частоту (форму хвилі) імпульсу сили. Матеріал ударного ковпака зазвичай визначає обсяг енергії.

Молоток складається з вбудованого кварцового датчика сили ІСР, встановленого на ударному кінці головки молотка. Чутливий елемент використовується для перетворення сили удару в електричний сигнал для відображення та аналізу. Він складається з твердих кварцових кристалів і вбудованого мікроелектронного підсилювача.

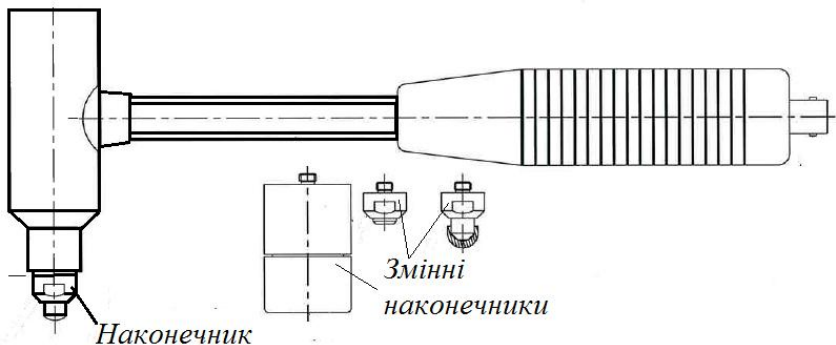


Рисунок 12.1 – Імпульсний молоток

Ударний кінець молотка має різьбовий отвір для встановлення різноманітних ударних наконечників. Наконечник призначений для

передачі сили удару на датчик і захищає поверхню датчика від пошкодження. Наконечники різної жорсткості дозволяють варіювати ширину імпульсу і частотну складову сили.

Подовжувальна маса, що постачається з більшістю молотків, дозволяє концентрувати більше енергії на нижчих частотах.

Ударні наконечники впливають на частоту імпульсу молотка, а подовжувач впливає на рівень енергії сигналу. Частотний діапазон молотка можна змінювати, змінюючи тип використовуваного наконечника. Масивні конструкції з меншою жорсткістю вимагають використання розширювача та м'якого ударного наконечника для адекватного збудження низькочастотних резонансів. Для більш високої частотної характеристики використовується більш жорсткий наконечник без розширювача маси. Для нижчих частотних характеристик доцільно використовувати м'який наконечник і встановлюють подовжувач маси. Щоб збільшити енергію сигнали руху, збільшують швидкість удару та/або масу удару.

Для дослідження передавальної функції і частотних характеристик механічної структури чутливі датчики (акселерометри) встановлюють в точках об'єкту, що представляють інтерес, та ударяють молотком по об'єкту дослідження.

На рис. 12.2 представлена *модальна тестова установка* з використанням імпульсного молотка. Дослідження проводились на конструкції 5-ти осьового багатоцільового верстата розточувального типу. Згідно з методом SISO (один вхід і один вихід), акселерометр приєднується до фіксованих точок вимірювання модуля повзуна і стояка, і прикладалась силу удару до точок збурення навколо модуля головки повзуна за допомогою імпульсного молотка для вимірювання його прискорення. Вихідний сигнал вимірюного прискорення передається на аналізатор FFT (fast Fourier transform). Після отримання функції частотної характеристики кожної точки збудження вимірюють власні частоти об'єкта.

В роботі [13] для перевірки *динамічних характеристик* та динамічної жорсткості властивих багатоцільовому верстату проаналізували та оцінили структурні динамічні характеристики, тобто власні частоти та відповідні форми моди модуля головки повзуна 5-осьового багатоцільового верстата за допомогою МСЕ і імпульсного молоткового тесту. Динамічна жорсткість модуля повзуна була

проаналізована та виміряна за допомогою МСЕ і випадкового тесту збудження з гідравлічним збудником.

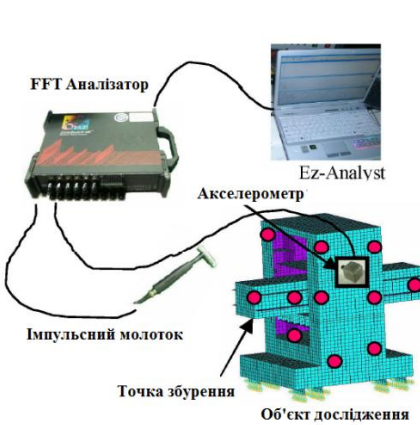


Рисунок 12.2 – Схема установки для проведення імпульсного дослідження

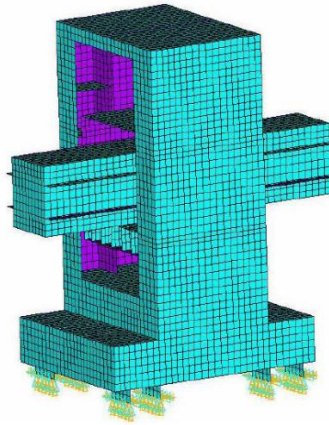


Рисунок 12.3 – Скінчено-елементна модель багатоцільового верстата

Для аналізу режимів вібрації та динамічної жорсткості 5-осьового багатоцільового верстата за допомогою МСЕ конструкція верстата розбивалась на оболонкові елементи, (18832), як показано на рис. 12.3.

Якщо структура має кілька ступенів вільності демпфованих систем, вона може бути представлена таким чином:

$$[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} + i[h]\{\dot{x}\} = \{0\} \quad (12.1)$$

де $[m]$, $[k]$, $[h]$ — матриці маси, жорсткості, структурне демпфування конструкції, відповідно.

Рівняння (1) також можна виразити як

$$([k] + i[h] - \omega^2 [m])\{X\} = \{0\}$$

Розв'язання системи матриць

$$[B(\omega)] = [k] + i[h] - \omega^2 [m]$$

дає можливість отримати значення власних частот і форм коливань.

В результаті аналізу методом скінчених елементів і експерименту отримані перші власні частоти коливань вигину 59,51 і 53,75 Гц

відповідно. Враховуючи, що максимальна робоча частота обертання шпинделя верстата складає 3000 хв.^{-1} , отримані власні частоти вищі частоти обертання (збурення), яка складає 50 Гц.

Метод скінчених елементів (МСЕ) використовується дослідниками для вивчення динамічних характеристик різних елементів конструкції верстата: несучих систем, столів шпиндельних вузлів, тощо.

Динамічні характеристики системи шпиндель – оправка – інструмент (рис. 12.4) досліджувалися в роботі [14].

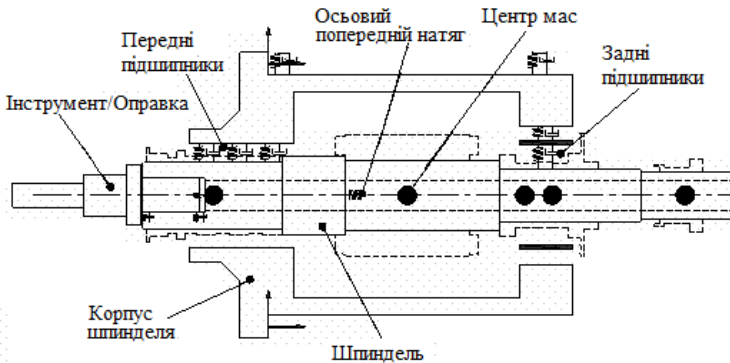


Рисунок 12.4 – Модель шпинделя для динамічного розрахунку

Для оцінки моделі скінчено-елементного аналізу (СЕА) системи шпиндель/тримач інструменту/інструмент було виконані вимірювання з використанням ударного збудження на кінці інструменту. На рисунку 12.5 показана динамічна передавальна функція (дійсна та уявна частини) досліджуваного шпинделя та імітаційна модель СЕА. Наявна різниця в результатах складає приблизно від 10 до 20%, що можна пояснити деяким спрощенням геометричної моделі. Метою моделювання та імітації СЕА є не тільки визначення тенденції, але й вплив конструктивних параметрів (жорсткість підшипника, жорсткість і демпфування поверхонь контакту шпинделя/тримача інструменту, геометрія інструменту, тощо) на продуктивність різання; наявні відхилення моделі СЕА є несуттєвими і не знижують значення аналітичних результатів.

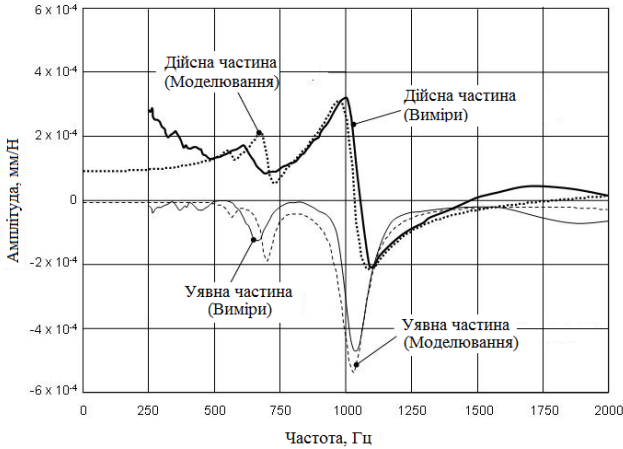


Рисунок 25 - Порівняння динамічної передатної функції між результатом ударного випробування і моделюванням моделі МСЕ

Моделюванням системи шпиндель/тримач інструменту/інструмент за методом скінчених елементів виявлені три основні форми і частоти власних коливань, (перша форма показано на рис. 12.6. Для заданих граничних умов для конструкції системи власна частота коливань першої моди 581 Гц. Ця частота є вищою за частоту збурення зумовлену обертанням шпинделя (для верстата, що піддавався аналізу $n_{\text{шп}}=24000 \text{ хв}^{-1}$, частота 400 Гц), тому резонансні явища, з цієї причини не виникатимуть.

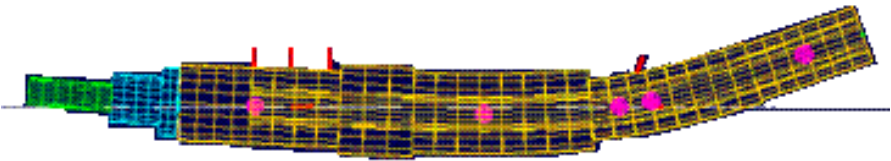


Рисунок 12.6 – Форма першої моди шпинделя

Аналіз системи шпиндель-оправка-інструмент показав значний вплив на динамічну піддатливість і частоти власних коливань оправки, що використовується для закріплення інструмента в шпинделі. Зазначається, що збільшення маси різцетримача спричиняє підвищення загальної піддатливості системи інструменту та шпинделя. Зменшення вібрації заднього кінця шпинделя (рис. 12.6) можна досягти за рахунок

використання легшого вузла інструмент-тримач інструменту, що підвищить надійність шпинделя.

Автоколивання є складною проблемою процесу обробки, яка призводить до нестабільного процесу різання, низької якості обробленої поверхні та зниження швидкості видалення матеріалу. Ця небажана проблема самозбудження вібрації є однією з головних перешкод у використанні повної потужності верстата у виробництві.

В роботі [15] розглядаються коливання системи шпиндель-оправка-інструмент (рис. 12.7), які впливають на виникнення автоколивань. Для дослідження системи застосовується теорія балки Тимошенка.

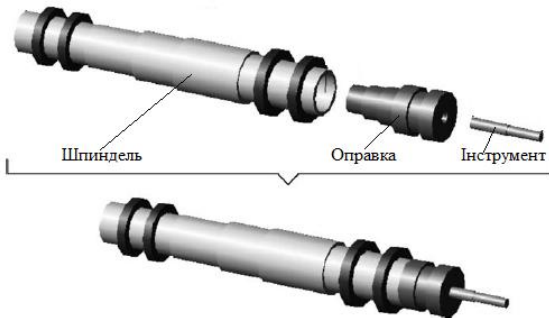


Рисунок 12.7 – Компоненти і шпиндельний вузол в зборі

Для перевірки ефективності результати моделювання порівнюються з результатами, отриманими моделюванням за допомогою методу скінчених елементів (система ANSYS). Констатується, що власні частоти коливань шпиндельного вузла (системи шпиндель-оправка-інструмент), отримані моделюванням за допомогою теорії Тимошенка та методом скінчених елементів, добре узгоджуються. Використання моделі, запропонованої для отримання інструментальної точки FRF, значно скорочує час обчислення порівняно з використанням аналізу СЕ.

В області низьких частот, де вібрації головним чином визначаються пружністю поверхонь з'єднання, а не жорсткістю складових елементів на вигин теорія балки Тимошенка може бути не ефективною.

Запропонована модель може бути використана на етапі проектування шпинделя, наприклад, для отримання максимальної динамічної жорсткості на кінці шпинделя на необхідній частоті

Дослідження динамічної якості двохосьових поворотних столів 5-координатного багатоцільового верстата в роботі [4] здійснювалось шляхом виконання модального і гармонічного аналізу конструкції за допомогою методу скінченних елементів (МСЕ).

Модальним аналізом визначилися частоти і форми власних коливань елементів системи, та системи в цілому. Гармонічний аналіз дозволив виокремити частоти власних коливань, на яких спостерігаються локальні коливання елементів поворотного стола, що суттєво не впливатимуть на точність і якість обробки.

Аналіз частот власних коливань проводився для поворотного стола 5-координатного обробного центру, що складається з каретки, яка переміщується двома лінійними напрямними кочення, передньої та задньої опор, моста та інших складових елементів (рис. 12.8). У передній опорі і мості розташовуються моментні електродвигуни для приводу обертання моста (вісь *A*) та поворотного столу (обертання за віссю *C*).

В розрахунковій моделі для реалізації МСЕ комбіновані підшипники кочення для поворотних осей, що монтуються у передній опорі і мості, а також циліндричний роликопідшипник, розташований у задній опорі, замінені кільцями з еквівалентними модулем пружності і моментом інерції, що забезпечують необхідні показники жорсткості і маси.

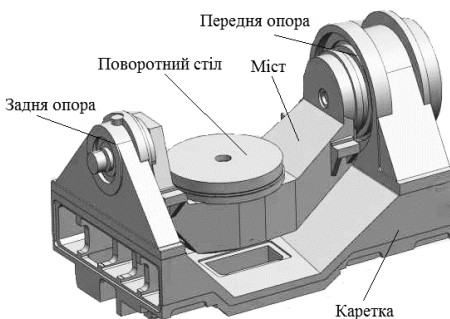


Рисунок 12.8 - Загальний вигляд поворотного стола 5-координатного обробного центру:

В скінчено-елементній моделі окремі деталі сполучені між собою контактними скінченними елементами, встановленими у зафіксоване положення (bonded).

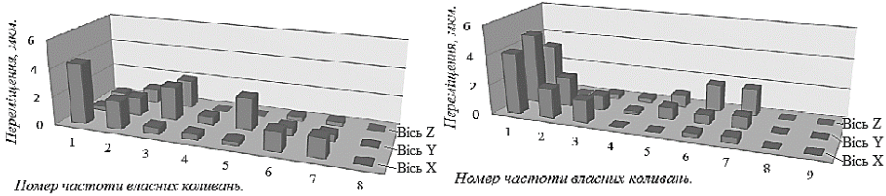
З метою оцінювання впливу положення поворотного стола на зміну частот власних коливань були змодельовані варіанти повороту моста за віссю A : в нульовому положенні ($A0$) (рис. 12.8) і поворот на 90° ($A-90$).

Максимальна частота обертів шпинделя досліджуваного верстата складає 14000 хв^{-1} , отже в роботі 4-зубою фрезою частота збурення від врізання зуба фрези в заготовку становитиме 933 Гц. Для обох положень моста у зазначеному діапазоні виявлені 19 частот власних коливань (від мінімальної 170 Гц до максимальної 924 Гц для положення стола $A0$).

Обробка на верстаті деталей із жароміцних сплавів супроводжується робочими швидкостями різання, що не перевищують 30–45 м/хв. та значними силами різання, з частотою обертання, що досягають 2000 хв^{-1} . Амплітуда коливань у такому випадку буде значно більшою, ніж при високошвидкісному різанні, яке характеризується зняттям малого припуску на великій швидкості і з малими зусиллями різання. Перша власна частота буде вищою за частоту збурення в разі обробки 4-зубою фрезою на частоті 2500 хв^{-1} (167 Гц), а отже, вузол не буде відкликатися на силове різання на середніх і низьких частотах обертання шпинделя.

Гармонічний аналіз моделі стола, за рахунок отримання амплітудно-частотної характеристики, дозволив відкинути частоти власних коливань окремих елементів досліджуваної системи, що суттєво не впливають на переміщення планшайби поворотного стола, а отже, і на якість та точність обробки. Для обох положень моста за віссю A значні переміщення спостерігалися в межах перших семи частот власних коливань (рис. 12.9). На інших частотах збурення майже не відбувалося.

Відмінності у величинах переміщень за координатними осями, вздовж яких відбуваються коливання, зумовлюються положеннями моста в яких задіяні елементи різної жорсткості.



а) - стіл в положенні А0;

б) - стіл в положенні А90

Рисунок 12.9- Амплітуда збурення коливань від гармонічної діючої сили

Виходячи з того, що частота власних коливань визначається за формулою $\omega = \sqrt{c/m}$, де c – жорсткість елемента чи системи, а m – маса, зміни власної частоти можна досягти шляхом зміни жорсткості елемента (системи). Оскільки жорсткість $c = EJ$, то для збільшення жорсткості є два шляхи: застосування матеріалу з вищим модулем пружності E , або зміна геометрії елемента, з метою підвищення моменту інерції перетину J . В аналізі системи важливо визначити елементи, які найбільшою мірою впливають на частоти власних коливань системи, з тим, щоб цілеспрямовано діяти, починаючи з етапу конструкторського проектування, в напрямку забезпечення динамічної стійкості.

Аналіз впливу різних елементів конструкції поворотного стола [7] на частоти власних коливань системи здійснювався шляхом моделювання жорсткості окремих елементів EJ . Найбільший вплив на зміну ЧВК чинить жорсткість моста, який безпосередньо передає коливання і переміщення на планшайбу, а також каретка.

Зміна жорсткості інших елементів несуттєво впливала на зміну частот власних коливань. Це може свідчити або на високу жорсткість елементів, або про те, що вони не беруть безпосередню участь у формуванні частот і форм коливань.

ЛЕКЦІЯ 13. ЧИСЛЕННІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Широке застосування для опису теплових процесів в технологічних системах знаходять численні методи розв'язку диференціальних рівнянь теплопровідності. Вони в своїй основі є наближеними методами інтегрування диференціальних рівнянь. Як будь-які наближені обчислювальні методи, вони дають можливість врахувати більше особливостей конкретного процесу, ніж в

аналітичному підході, оскільки не пов'язані з чисто математичними труднощами, що виникають в аналітичних способах розв'язання.

Разом з тим конкретність умов, для яких одержано результат обчислень, робить численний аналіз справедливим лише для даних умов (конкретний режим, конкретна конфігурація твердого тіла, тощо).

Для розв'язання задач технологічної теплофізики застосовують: метод скінчених різниць, метод скінчених елементів та метод граничних елементів.

Метод скінчених різниць ґрунтується на заміні істинних значень похідних, що входять в рівняння теплопровідності наближеними значеннями в деяких точках, що називають вузлами. Вузли є центрами елементів скінченої довжини, на які розбивається тверде тіло, що бере участь у теплообміні

Метод скінчених елементів (МСЕ) враховує той факт, що в будь-якій конкретній задачі, в тому числі технологічній, різні ділянки системи твердих тіл представляють для теорії та практики різний інтерес. Метод скінчених елементів дає можливість здійснювати різну деталізацію розв'язання в різних областях об'єкту дослідження, до того ж можуть бути використані елементарні об'єми, різні не лише за величиною, але і за конфігурацією.

Основна ідея МСЕ полягає в тому, що будь-яку неперервну величину, таку як температура, тиск та переміщення, можна апроксимувати дискретною моделлю, яка будується на множині кусково-неперервних функцій, що визначені на скінченому числі підобластей.

Для побудови дискретної моделі неперервної величини поступають таким чином:

1. В області, що розглядається, фіксується скінчене число точок. Ці точки називають вузловими точками або просто вузлами.
2. Значення неперервної величини в кожній вузловій точці вважається змінною, яка повинна бути визначена.
3. Область визначення неперервної величини розбивається на скінчене число підобластей, що називаються елементами. Ці елементи мають спільні вузлові точки і в сукупності апроксимують форму підобласті.
4. Неперервна величина апроксимується на кожному елементі поліномом, який визначається за допомогою вузлових

значень цієї величини. Для кожного елемента визначається свій поліном, але поліноми підбираються таким чином, щоб зберігалася неперервність величини вздовж границі елемента.

13.1 Метод скінчених елементів. Дискретизація області

Основну концепцію методу скінчених елементів (МСЕ) можна наглядно проілюструвати на одновимірному прикладі розподілу температури в стрижні (рис. 13.1). Розглядається неперервна величина $T(x)$, область визначення – відрізок OL вздовж осі x . Фіксовані і пронумеровані п'ять точок на осі x (рис. 13.1,б). Це вузлові точки, розміщені не обов'язково на однаковій відстані одна від одної. Можна взяти до розгляду і більше п'яти точок, але цих п'яти достатньо, що проілюструвати основну ідею методу. Значення $T(x)$ в даному випадку відомі в кожній вузловій точці. Ці фіксовані значення подані графічно на рис. 1, в і позначені у відповідності з номерами вузлових точок через $T_1, T_2, \dots, T_5$.

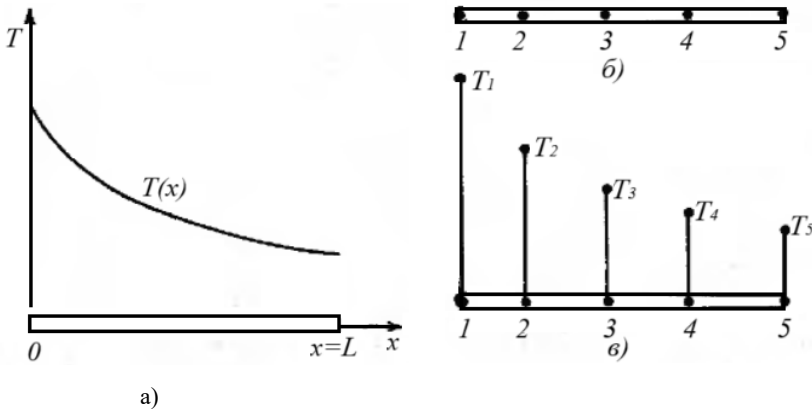


Рисунок 13.1 – Розподіл температури і вузлові точки в одновимірному стрижні

Розбиття області на елементи можна виконати двома різними способами. Можна, наприклад, обмежити кожен елемент двома сусідніми вузловими точками, утворивши чотири елементи (рис. 13.2,а) або розбити область на два елементи, кожен з яких містить три вузли (рис. 13.2,б). Відповідний елементу поліном визначається значеннями $T(x)$ у вузлових точках елемента. В разі розбиття області на чотири

елементи коли кожен елемент містить два вузли, функція елемента буде лінійною по x (дві точки однозначно визначають пряму лінію). Остаточна апроксимація $T(x)$ буде складатися з чотирьох кусково-лінійних функцій, кожна з яких визначена на окремому елементі (рис. 13.3,а).

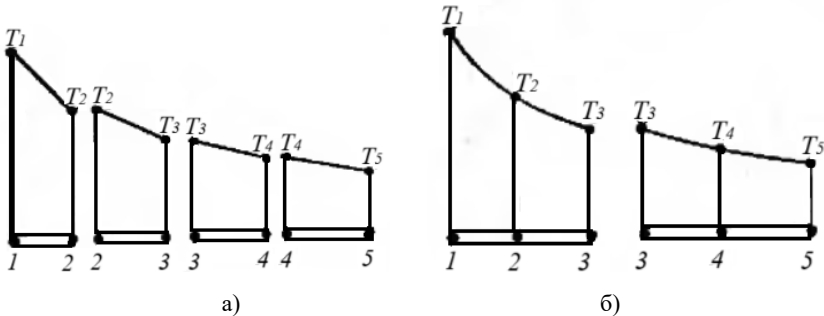


Рисунок 13.2 – Поділ області на елементи

Інший спосіб розбиття області на два елементи з трьома вузловими точками веде до подання функції елемента у вигляді поліному другого ступеня. В такому разі остаточною апроксимацією $T(x)$ буде сукупність двох кусково-неперервних квадратичних функцій. Слід зазначити, що наближення буде саме кусково-неперервним, оскільки кути нахилу графіків обох цих функцій можуть мати різні значення в третьому вузлі.

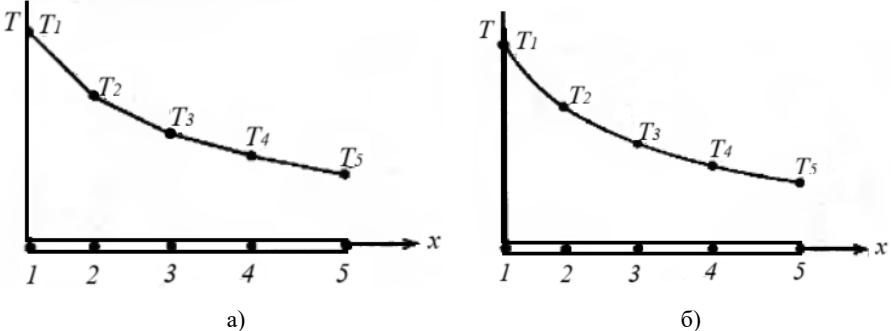


Рисунок 13.3 – Дискретні моделі для одновимірного температурного поля

В загальному випадку розподіл температури невідомий і ми прагнемо визначити значення цієї величини в деяких точках. Методика побудови дискретної моделі залишається такою, яка описана вище, але

з додаванням одного додаткового кроку. Знову визначається множина вузлів і значення температури в цих вузлах $T_1, T_2, T_3 \dots$, які тепер є змінними, оскільки вони наперед невідомі. Область розбивається на елементи, на кожному з яких визначається відповідна функція елемента. Вузлові значення $T(x)$ повинні бути «відрегульовані» таким чином, щоб забезпечувалося «найкраще» наближення до істинного розподілу температури. Це «регулювання» здійснюється шляхом мінімізації деякої величини, пов'язаної з фізичною сутністю задачі. Якщо розглядається задача розподілу тепла, то мінімізується функціонал, пов'язаний з відповідним диференціальним рівнянням. Процес мінімізації зводиться до розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь стосовно вузлових значень $T(x)$.

Для побудови дискретної моделі неперервної величини, що визначається в дво- чи тривимірній області, основна концепція методу скінчених елементів використовується аналогічно. В двовимірному випадку елементи описуються функціями від x та y при цьому найчастіше розглядаються елементи у формі трикутника або чотирикутника. Функції елементів зображуються плоскими (рис. 13.4,а) або криволінійними (рис. 13.4,б) поверхнями. Функції елемента подаються площиною, якщо для даного елемента береться мінімальне число вузлових точок, яке для трикутного елемента дорівнює трьом, а для чотирикутного – чотирьом.

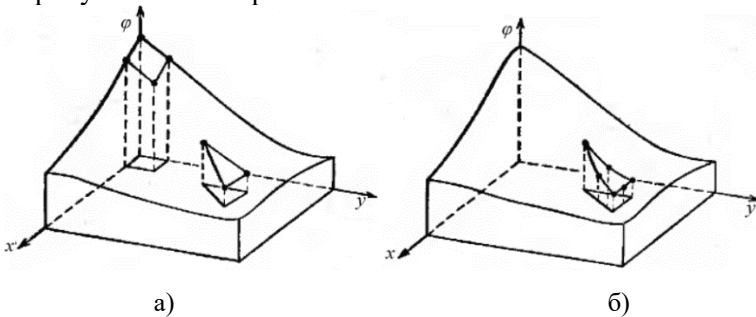


Рисунок 13.4 – Моделювання двовимірної скалярної функції

Якщо кількість вузлів, що використовується більша за мінімальну то функції елемента буде відповідати криволінійна поверхня. Крім того надмірне число вузлів дозволяє розглядати елементи з криволінійними границями. Остаточною апроксимацією двовимірної неперервної величини $\varphi(x, y)$ буде служити сукупність

кусово-неперервних поверхонь, кожна з яких визначається на окремому елементі за допомогою значень $\varphi(x, y)$ в відповідних вузлових точках.

13.2 Типи скінчених елементів

Одновимірні елементи

Найпростішим серед елементів є одновимірний елемент. Схематично він зображується у вигляді відрізка. (рис. 13.5) хоча і має поперечний перетин. Площа поперечного перетину може змінюватися за довжиною, але в багатьох задачах вона вважається постійною. Найчастіше такий елемент використовується в одновимірних задачах поширення тепла і в задачах будівельної механіки для розрахунків стрижневих елементів конструкції (типу ферм).

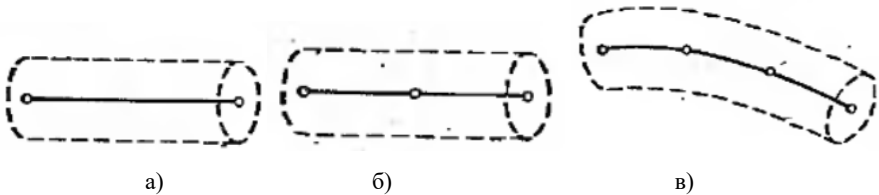


Рисунок 13.5 – Одновимірні скінчені елементи

Найпростіший одновимірний елемент має два вузли, по одному на кожному кінці. Елементи більш високих порядків, тривузлові (квадратичні) і чотиривузлові (кубічні) показані на рис. 13.5,б і в. Одновимірний елемент може бути криволінійним (рис. 13.5,в) за умови, що довжина дуги входить до рівняння, що визначає елементи.

Двовимірні елементи

Для побудови дискретної моделі двовимірної області використовують два основних сімейства елементів: трикутники і чотирикутники. Сторони лінійних елементів кожного сімейства являють собою прямі лінії (рис. 13.6, а). Квадратичні і кубічні елементи можуть мати як прямолінійні, так і криволінійні сторони або ті і інші (рис. 13.6,б). Можливість моделювання криволінійних границь досягається додаванням вузлів в середині сторін елементів. Обидва сімейства елементів можуть бути використані одночасно всередині області, якщо тільки вони мають однакову кількість вузлів на стороні (рис.13.6,в). Товщина елементу може бути або сталою, або бути функцією координат.

Тривимірні елементи

Тривимірними елементами, що зустрічаються найчастіше є тетраедр і паралелепіпед (рис. 13.7, а, б). В обох випадках лінійні елементи обмежені прямолінійними сторонами (площинами), тоді як елементи більш високого порядку можуть мати границями криволінійні поверхні. В розбитті тривимірного тіла важко наглядно уявити розташування елементів в дискретній моделі, тому, імовірно, більш бажаним з цих двох типів елементів є паралелепіпед.

На рис. 13.7, в показаний вид елементів, які використовуються для розгляду тіл циліндричної форми. Ці елементи подібні двовимірному трикутнику і дають можливість також врахувати зміни невідомої величини вздовж третьої координати.

В осесиметричних задачах широко використовується елемент, показаний на рис. 13.8. Цей елемент утворюється поворотом трикутника на 360° . Подібні елементи також можуть бути отримані поворотом чотирикутника.

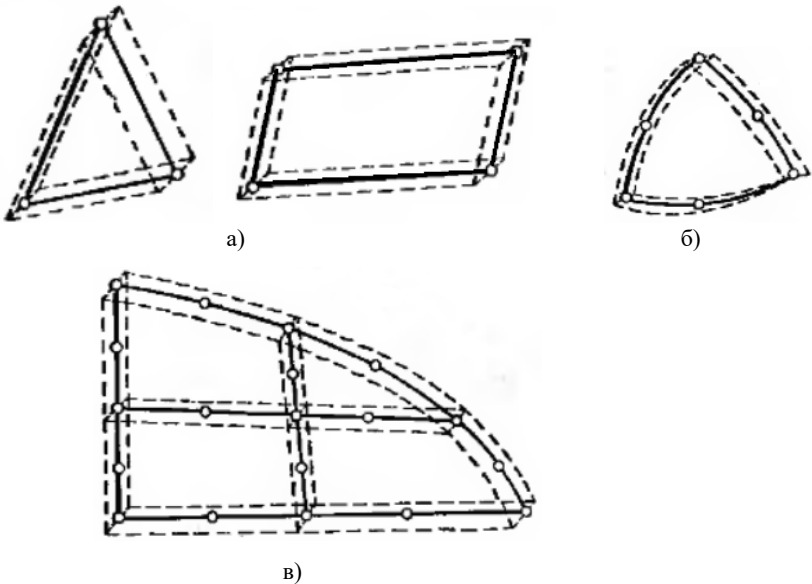


Рисунок 13.6 – Деякі двовимірні скінченні елементи

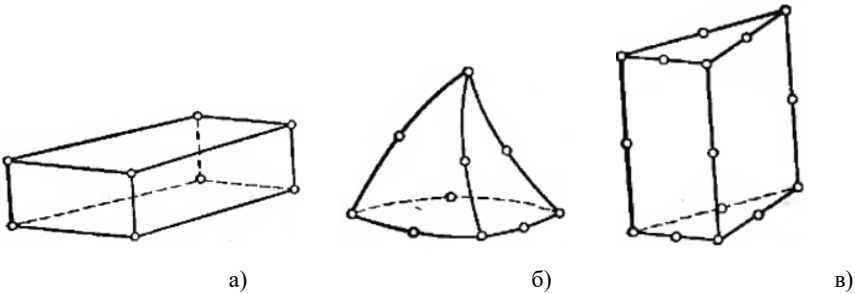


Рисунок 13.7 – Тривимірні скінчені елементи

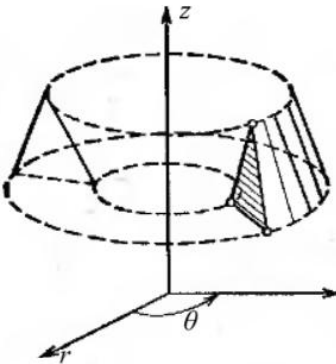


Рисунок 13.8 – Осесиметричний скінчений елемент

13.3 Розбиття області на елементи

Процес дискретизації поділяється на два етапи: розбиття тіла на елементи і нумерація вузлів. Останній етап ускладняється в зв'язку з бажанням підвищити ефективність обчислень.

Розбиття розглянемо на прикладі двовимірної області на лінійні трикутні елементи. Така область зручна для ілюстрації, до того ж ідеї розбиття можуть бути поширені на випадок тривимірного тіла.

Розбиття двовимірного тіла на трикутні елементи береться з погляду, що цей елемент найпростіший з двовимірних елементів в сенсі аналітичного формулювання.

Для розбиття будь-якої двовимірної області на елементи спочатку тіло ділиться на чотирикутні і трикутні підобласті або зони, які потім поділяються на трикутники. Границі між підобластями мають проходити там, де змінюється геометрія, прикладене навантаження або властивості матеріалу.

Найпростіше можна розбити трикутну підобласть на елементи, якщо вибрати визначене число вузлів вздовж кожної сторони та з'єднати відповідні вузли прямими лініями, а точки перетину цих ліній вважати вузлами. Трикутна зона (рис. 13.9, а) розбита на дев'ять елементів після розташування чотирьох вузлів на кожній стороні. Вузли на сторонах зони не обов'язково розміщувати на однакових відстанях. Варіювання відстані між ними дає можливість змінювати розміри елементів.

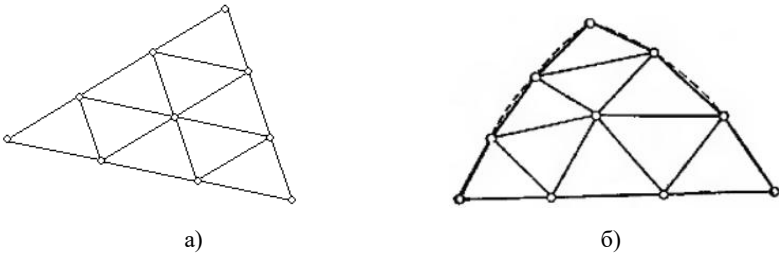


Рисунок 13.9 – Ділення області трикутного виду на трикутні лінійні елементи

Якщо трикутна підобласть криволінійна, криволінійні границі елементів замінюють на прямі відрізки (рис.13.9, б). Штриховою лінією показана початкова форма.

Чотирикутні зони зазвичай розбивають на елементи з'єднанням вузлів на протилежних сторонах (рис. 13.10, а). Перетини ліній визначають внутрішні вузлові точки. Внутрішні чотирикутники, одержані в результаті розбиття, можуть розглядатися як елементи: вони можуть бути розбиті на трикутні елементи проведенням короткої діагоналі в кожному внутрішньому чотирикутнику (рис. 13.10, б). Розбиття з використанням короткої діагоналі краще тому що елементи, близькі за формою до рівносторонніх трикутників, приводять до точніших результатів, ніж довгі вузькі трикутники.

Кількість вузлів на суміжних сторонах чотирикутника може бути різною тоді як на протилежних сторонах воно повинно бути однаковим, якщо тільки сітка розбиття на подрібнюється (або збільшується). Відстань між граничними вузлами можна варіювати для отримання елементів різних розмірів. В чотирикутній області буде $2(n-1) \cdot (m-1)$ елементів, якщо суміжні сторони мають n і m вузлів.

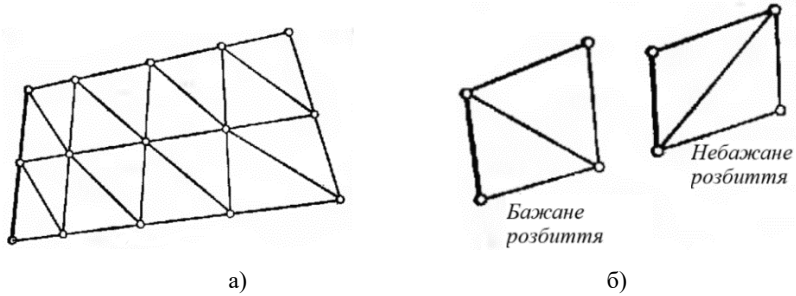


Рисунок 13.10 – Поділ чотирикутної області на трикутні елементи

Трикутна і чотирикутна підобласті можуть мати спільну границю. Число вузлів на цій границі для обох підобластей повинне бути однаковим, а відносне положення вузлів повинне співпадати. Ця вимога потрібна для збереження неперервності величин, що розглядаються, вздовж спільної границі елементів.

Застосування цих принципів дискретизації показано на рис. 13.11. Відстані між вузлами вздовж границь чотирикутної зони змінюється так, щоб елементи поблизу криволінійної частини границі були малими.

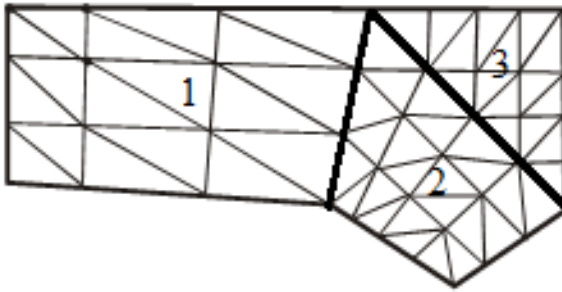


Рисунок 13.11 – Поділ на чотирикутні і трикутні зони з розбиттям на трикутні елементи

Рівномірне розбиття, коли усі елементи мають однакову форму і розміри зазвичай не виконується, тому що існують концентрації напружень, температурні градієнти тощо. Можливість варіювання розмірів елементів – важлива перевага методу скінчених елементів.

13.4 Нумерація вузлів

Нумерація вузлів впливає на ефективність обчислень, необхідних для отримання розв'язку. Використання методу скінчених елементів веде до системи лінійних алгебраїчних рівнянь, велике число коефіцієнтів яких дорівнює нулю. Розгляд матриці коефіцієнтів системи показує, що усі ненульові коефіцієнти і деякі нульові знаходяться між двома лініями, паралельними головній діагоналі матриці (рис. 13.12).

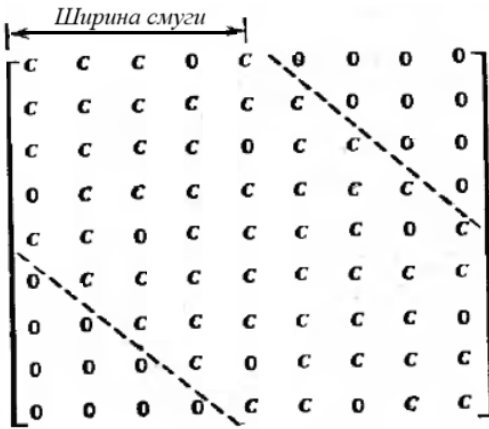


Рисунок 13.12 – Ширина смуги матриці системи рівнянь

Відстань між головною діагоналлю і цими лініями називається шириною смуги матриці. Усі коефіцієнти поза цією смугою дорівнюють нулю, і вони не повинні зберігатися в пам'яті комп'ютера. Вірна обчислювальна програма використовує лише ті коефіцієнти матриці, які знаходяться всередині зазначеної смуги. Зменшення ширини смуги веде до скорочення розмірів потрібної машинної пам'яті, а також до скорочення часу обчислень. Ширина смуги B розраховується за формулою

$$B = (R + 1) \cdot Q,$$

де R – максимальна за елементами величини найбільшої різниці між номерами вузлів в окремому елементі; Q – число невідомих (число ступенів вільності) в кожному вузлі.

Мінімізація величини B пов'язана з мінімізацією R , що, зокрема, може здійснюватися послідовною нумерацією вузлів в русі в напрямку

найменшого розміру тіла. Два різних способів нумерації вузлів в тілі показані на рис. 13.13, а і б. Найбільші різниці між номерами вузлів для перших елементів для рис. а і б складають 7 і 21 відповідно. Значення R для повних наборів елементів дорівнює 9 і 21. Ширина смуги матиме значення 10 і 22, якщо в кожному вузлі знаходиться по одній невідомій величині або значення 20 і 44, якщо в кожному вузлі розглядаються дві невідомі величини. Отже, вірна нумерація вузлів в даному прикладі скорочує машинну пам'ять більш ніж на 50%.

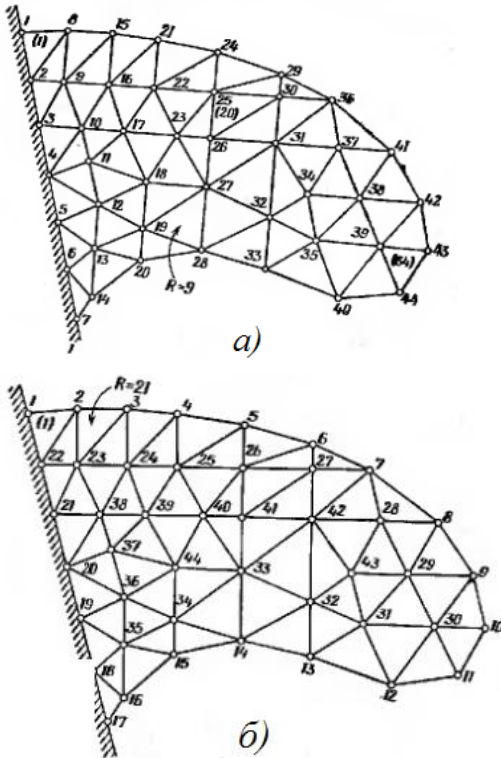


Рисунок 13.13 – Приклади нумерації вузлів розбитого на елементи двовимірного тіла

13.5 Лінійні інтерполяційні поліноми

В МСЕ розглядають три групи елементів: симплекс, комплекс - та мультиплекс – елементи.

Симплекс–елементу відповідають поліноми, що містять константу та лінійні члени. Число коефіцієнтів в такому поліномі на одиницю більше розмірності координатного простору. Поліном

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$$

представляє собою симплексну функцію для двовимірного трикутного елемента. Цей поліном лінійний по x та y і містить три коефіцієнти, тому що трикутник має три вузли.

Комплекс – елементу відповідають поліноміальні функції, що містять константу, лінійні члени, а також члени другого, третього та більш високих порядків, якщо це необхідно. Форма комплекс елемента може бути такою ж як і у симплекс–елементів, але комплекс–елементи мають додаткові граничні вузли, і, крім того, можуть мати також і внутрішні вузли. Інтерполяційний поліном для двовимірного трикутного комплекс–елементу має вигляд

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 x y + \alpha_6 y^2$$

Це співвідношення включає шість коефіцієнтів, тому елемент, що розглядається повинен мати шість вузлів.

13.6 Одновимірний симплекс – елемент

Одновимірний симплекс – елемент (рис. 13.14) представляє

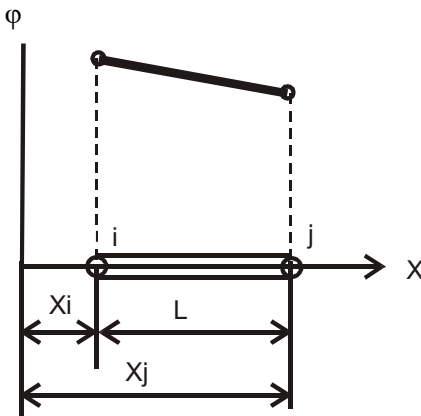


Рисунок 13.14 - Одновимірний симплекс - елемент

собою прямолінійний відрізок довжини L з двома вузлами, по одному на кінці відрізка. Вузли позначаються індексами i та j , вузлові значення через Φ_i та Φ_j відповідно.

Поліноміальна функція φ для скалярної величини має вигляд $\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x$

$$\varphi = \Phi_i \text{ для } x = X_i$$

$$\varphi = \Phi_j \text{ для } x = X_j$$

Ці вузлові умови приводять до системи двох рівнянь

$$\Phi_i = \alpha_1 + \alpha_2 X_i;$$

$$\Phi_j = \alpha_1 + \alpha_2 X_j,$$

які дають розв'язок;

$$\alpha_1 = \frac{\Phi_i X_j - \Phi_j X_i}{L}; \quad \alpha_2 = \frac{\Phi_j - \Phi_i}{L}$$

$$\varphi = \left(\frac{X_j - x}{L} \right) \Phi_i + \left(\frac{x - X_i}{L} \right) \Phi_j. \quad (13.1)$$

Лінійні функції від x в формулі (13.1) називаються функціями форми або інтерполяційними функціями. Ці функції позначаються через N

$$N_i = \frac{X_j - x}{L}; \quad N_j = \frac{x - X_i}{L}.$$

Співвідношення (12.1) може бути записане в матричному виді

$$\varphi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j = [N] \{\Phi\}, \quad (13.2)$$

де $[N] = [N_i \ N_j]$ – вектор-рядок, $\{\Phi\} = \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \end{Bmatrix}$ – вектор-стовпець.

Як витікає з формули (13.1) функція $N_i = (X_j - x)/L$ дорівнює одиниці в вузлу з номером i та дорівнює нулю в j -му вузлу. Аналогічно функція N_j дорівнює нулю в i -му вузлу та дорівнює одиниці у вузлу з номером j . Ці значення характерні для функції форми.

13.7. Двовимірний симплекс - елемент

Для двовимірного симплекс-елемента (рис. 13.15) доцільно використовувати послідовну нумерацію вузлів проти годинникової

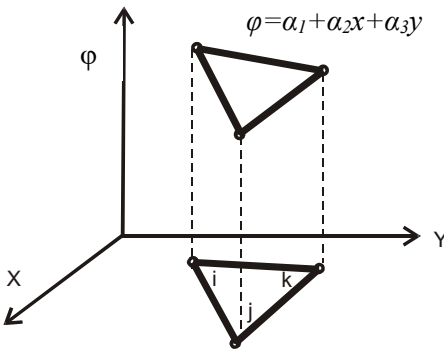


Рисунок 13.15 – Двовимірний симплекс - елемент

стрілки, починаючи з i -го вузла, який вибирається довільно. Вузлові значення скалярної величини φ позначаються через Φ_i , Φ_j та Φ_k , а координати пари трьох вузлів – через (X_i, Y_i) , (X_j, Y_j) , (X_k, Y_k) .

У вузлах виконуються наступні умови:

$$\varphi = \Phi_i \text{ для } x = X_i, y = Y_i,$$

$$\varphi = \Phi_j \text{ для } x = X_j, y = Y_j,$$

$$\varphi = \Phi_k \text{ для } x = X_k, y = Y_k,$$

Підстановка цих значень в вираз полінома веде до системи рівнянь

$$\Phi_i = \alpha_1 + \alpha_2 X_i + \alpha_3 Y_i$$

$$\Phi_j = \alpha_1 + \alpha_2 X_j + \alpha_3 Y_j$$

$$\Phi_k = \alpha_1 + \alpha_2 X_k + \alpha_3 Y_k$$

розв'язуючи яку отримаємо

$$\alpha_1 = \frac{1}{2A} [(X_j Y_k - X_k Y_j) \Phi_i + (X_k Y_i - X_i Y_k) \Phi_j + (X_i Y_j - X_j Y_i) \Phi_k]$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2A} [(Y_j - Y_k) \Phi_i + (Y_k - Y_i) \Phi_j + (Y_i - Y_j) \Phi_k]$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2A} [(X_k - X_j) \Phi_i + (X_i - X_k) \Phi_j + (X_j - X_i) \Phi_k]$$

Визначник системи пов'язаний з площею трикутника співвідношенням

$$\begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix} = 2A \quad (13.3)$$

$$\varphi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_k \Phi_k. \quad (13.3a)$$

$$\text{де } N_i = \frac{1}{2A} [a_i + b_i x + c_i y] \text{ та } \begin{cases} a_i = X_j Y_k - X_k Y_j \\ b_i = Y_j - Y_k \\ c_i = X_k - X_j \end{cases}$$

$$N_j = \frac{1}{2A} [a_j + b_j x + c_j y] \quad \begin{cases} a_j = X_k Y_i - X_i Y_k \\ b_j = Y_k - Y_i \\ c_j = X_i - X_k \end{cases}$$

$$N_k = \frac{1}{2A} [a_k + b_k x + c_k y] \quad \begin{cases} a_k = X_i Y_j - X_j Y_i \\ b_k = Y_i - Y_j \\ c_k = X_j - X_i \end{cases}$$

Значення N_i в i -му вузлу

$$N_i = \frac{1}{2A} [a_i + b_i x + c_i y] = \frac{1}{2A} (X_j Y_k - X_k Y_j + Y_j X_i - Y_k X_i + X_k Y_i - X_j Y_i)$$

Вираз в дужках представляє собою величину визначника в формулі (13.3), тому для вузла з номером i - $N_i = (1/2A) * 2A = 1$

Скалярна величина φ визначається всередині елемента функціями форми, лінійними за x та y . Це означає, що градієнти цієї величини в напрямках x та y будуть сталими. Градієнт в напрямку x визначається співвідношенням

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \Phi_i + \frac{\partial N_j}{\partial x} \Phi_j + \frac{\partial N_k}{\partial x} \Phi_k,$$

$$\text{але } \frac{\partial N_\beta}{\partial x} = b_\beta, \quad \beta = i, j, k.$$

Тому

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = b_i \varphi_i + b_j \varphi_j + b_k \varphi_k \quad (13.4)$$

Оскільки b_i , b_j , b_k , постійні (вони фіксовані як тільки задані вузлові координати) і φ_i , φ_j , φ_k не залежать від координат простору, частинна похідна в (13.4) має постійне значення. Сталість градієнту в середині кожного елемента означає, що необхідно використовувати дуже малі за величиною елементи, щоб апроксимувати функцію φ , що швидко змінюється.

Варто відзначити дві корисні властивості трикутних елементів. По-перше функція φ змінюється лінійно між двома будь-якими вузлами. Оскільки вузли визначають границі елемента, φ змінюється лінійно вздовж кожної з його сторін. Звідси витікає друга корисна властивість: будь-яка лінія, вздовж якої φ набуває однакові значення, є пряма, що перетинає дві сторони елемента.

13.8 Тривимірний симплекс - елемент

Тривимірний симплекс – елемент представляє собою тетраедр. Інтерполяційний поліном для тетраедра має вигляд

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z$$

Коефіцієнти можна визначити, використовуючи чотири умови у вузлах:

$$\Phi_i = \alpha_1 + \alpha_2 X_i + \alpha_3 Y_i + \alpha_4 Z_i$$

$$\Phi_j = \alpha_1 + \alpha_2 X_j + \alpha_3 Y_j + \alpha_4 Z_j$$

$$\Phi_k = \alpha_1 + \alpha_2 X_k + \alpha_3 Y_k + \alpha_4 Z_k$$

$$\Phi_e = \alpha_1 + \alpha_2 X_e + \alpha_3 Y_e + \alpha_4 Z_e$$

Таку систему рівнянь доцільно розв'язувати на комп'ютері. Запишемо систему у матричній формі.

$$\{\Phi\} = [c] \{\alpha\}, \quad (13.5)$$

$$\text{де } \{\Phi\}^T = [\Phi_i \Phi_j \Phi_k \Phi_e]$$

$$\{\alpha\} = [\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4]$$

$$[c] = \begin{bmatrix} 1X_i Y_i Z_i \\ 1X_j Y_j Z_j \\ 1X_k Y_k Z_k \\ 1X_e Y_e Z_e \end{bmatrix}$$

Визначник матриці $[c]$ дорівнює шести об'ємам тетраедра.

13.9 L-координати

Для трикутного елемента найбільш поширеною є натуральна система координат, що визначається трьома відносними координатами L_1, L_2, L_3 (рис. 13.16). Кожна координата представляє собою відношення відстані S від вибраної точки трикутника до однієї з його сторін до висоти h , опущеної на цю сторону з протилежної вершини. Величина L_1 змінюється в межах від нуля до одиниці ($0 \leq L_1 \leq 1$). В тих же межах змінюються L_2, L_3 . На рис. 13.16, в показані лінії, вдовж L_1 постійна за величиною. Кожна з цих ліній паралельна стороні, від якої вимірюється L_1 .

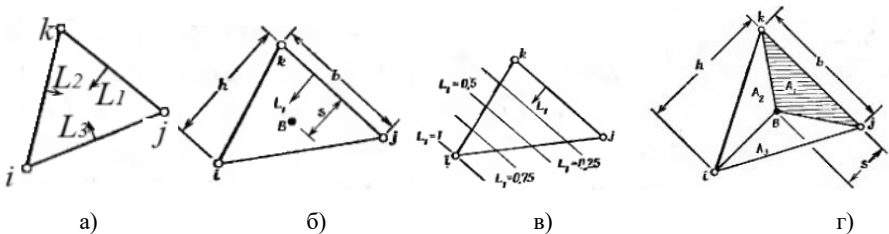


Рисунок 13.16 – L – координати для трикутника

Координати L_1, L_2, L_3 називаються L – координатами. Їх значення дають відносні величини площ трикутників на які розділено елемент. L – координати точки B (рис. 13.16, б) представляють собою площі

трикутників, показаних на рис. 13.16, г Площа трикутника задається формулою:

$$A_t = \frac{b \cdot h}{2}.$$

Отже, координата L_1 представляє собою відношення площі заштрихованого трикутника (рис. 14, г) до площі всього елемента:

$$L_1 = \frac{A_1}{A_t}.$$

Аналогічні формули можуть бути записані для L_2 , і L_3 :

$$L_2 = \frac{A_2}{A_t}; \quad L_3 = \frac{A_3}{A_t}.$$

Оскільки $A_1 + A_2 + A_3 = A_t$, то $L_1 + L_2 + L_3 = 1$.

Координатні змінні L_1 , L_2 , L_3 представляють собою функції форми для трикутного симплекс – елемента

$$N_i = L_1, \quad N_j = L_2, \quad N_k = L_3.$$

Як видно з рис. 14,

$$L_1 = \begin{cases} 1 & \text{у вузлі з номером } i \\ 0 & \text{у вузлах } j \text{ та } k \end{cases}$$

Подібні співвідношення виконуються також для L_2 і L_3 . Крім того можна стверджувати, що в довільній точці елемента функції форми завжди в сумі дорівнюють одиниці і, отже, виконується критерій сходження.

13.10 Визначення вектору вузлових значень функції

Диференціальне рівняння для фізичних процесів, які можуть бути описані диференціальним рівнянням в частинних похідних міститься в загальному квазігармонічному рівнянні

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_{xx} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_{yy} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_{zz} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + Q = 0 \quad (13.6)$$

з граничними умовами

$$\varphi = \varphi_B \text{ на } S_1$$

та (або)

$$k_{xx} \frac{\partial \varphi}{\partial x} l_x + k_{yy} \frac{\partial \varphi}{\partial y} l_y + k_{zz} \frac{\partial \varphi}{\partial z} l_z + q + h(\varphi - \varphi_\infty) = 0 \text{ на } S_2.$$

Об'єднання S_1 та S_2 утворює повну границю. Коефіцієнти k_{xx} , k_{yy} та k_{zz} , а також величина q можуть бути функціями x , y та z , але

вважаються незалежними від φ . Величини l_x , l_y , та l_z в формулі – напрямні косинуси вектору нормалі до поверхні.

Рівняння разом з граничними умовами описує поширення тепла в тривимірній області. В такому випадку k_{xx} , k_{yy} та k_{zz} – відповідні коефіцієнти теплопровідності, Q – внутрішнє джерело тепла чи стік, q – тепловий потік на частині поверхні та h – коефіцієнт тепловіддачі. Функція φ визначає температуру тіла.

З варіаційної точки зору розв’язання рівняння (13.6) з граничними умовами еквівалентно відшукуванню мінімуму функціонала

$$F = \int_V \left[\frac{1}{2} \left[k_{xx} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + k_{yy} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + k_{zz} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 - 2Q\varphi \right] dV + \int_S \left[q\varphi + \frac{1}{2} h(\varphi - \varphi_\infty)^2 \right] dS \quad (13.7)$$

Мінімізація функціонала (13.7) повинна бути здійснена на численності вузлових значень $\{\Phi\}$. З цієї метою слід мінімізувати функціонал перед обчисленням інтегралів. Такий підхід дозволяє вибрати характеристики елементів найбільш прийнятними для кожної конкретної задачі.

Співвідношення (13.7) можна записати в такому вигляді

$$F = \int_V \frac{1}{2} [\{g\}^T [D] \{g\} - 2\varphi Q] dV + \int_{S_1} \varphi q dS + \int_{S_2} \frac{h}{2} [\varphi^2 - 2\varphi\varphi_\infty^2] dS. \quad (13.8)$$

$$\text{де} \quad \{g\}^T = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right],$$

$$D = \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & k_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & k_{zz} \end{bmatrix}.$$

Оскільки функції φ не є неперервними в усій області, то замість них вводяться до розгляду функції $\varphi^{(e)}$, визначені на окремих елементах. Інтеграли в (13.8) повинні бути розбиті на інтеграли по окремих елементах.

Мінімізація по вектору Φ функціонала F приводить до системи алгебраїчних рівнянь

$$[K] \{ \Phi \} = \{ F \},$$

де $[K]$ – матриця коефіцієнтів (матриця жорсткості),
 $\{F\}$ – вектор навантаження.

ЛЕКЦІЯ 14. СИСТЕМА ІНЖЕНЕРНОГО АНАЛІЗУ “ANSUS”

Програмний комплекс ANSUS призначений для реалізації методу скінченних елементів (MCE) для розрахунку задач механіки деформованого твердого тіла, теплових задач, гідрогазодинаміки, електромагнітних полів та пов'язаних задач, в яких результати одного розрахунку використовуються як вихідні дані для іншого, наприклад результати розрахунку теплового поля деталі є вихідними даними для розрахунку температурних деформацій.

В системі ANSUS можуть розглядатися одновимірні лінійні, двовимірні плоскі чи тривимірні об'ємні об'єкти. Для роботи в системі може бути рекомендована така послідовність дій:

- побудова або імпорт геометричної моделі. Програмний комплекс має власні засоби побудови геометричної моделі, але часто зручніше користуватися імпортом моделі, виконаної в графічних редакторах;
- вибір типу скінченних елементів та визначення властивостей матеріалів;
- створення сітки скінченних елементів;
- прикладення навантажень. Під навантаженнями в системі ANSUS розуміють сили, деформації, переміщення, температури, тощо;
- зазначення опцій виконання розрахунку і виводу результатів;
- виконання власне розрахунку;
- ознайомлення з одержаними результатами.

Система ANSUS підтримує два режими роботи:

1. інтерактивний, в якому користувач використовує систему меню та діалогових вікон для виконання необхідних дій;
2. командний, коли для виконання аналізу використовується набір команд, зрозумілих системі.

Для користувача-початківця більш зручним може бути перший режим, в той же час одночасно можуть використовуватися обидва режими.

14.1 Графічний інтерфейс користувача (GUI)

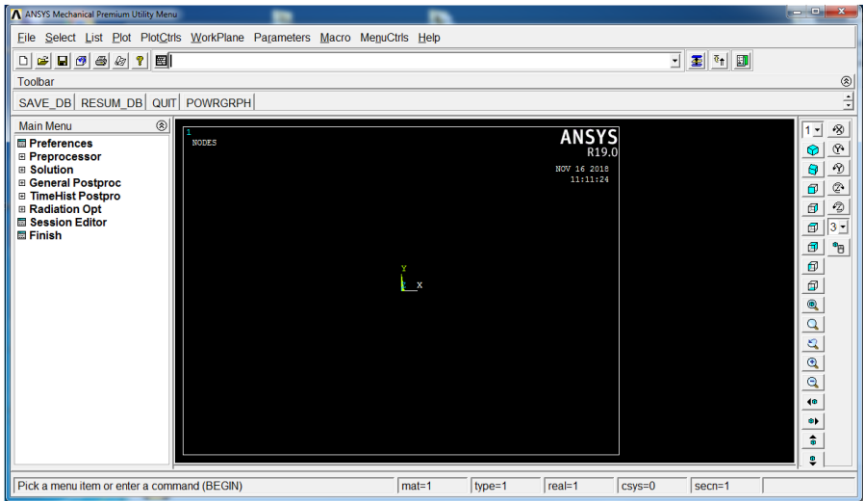


Рисунок 14.1 - Графічний інтерфейс користувача

Графічний інтерфейс користувача (рис. 14.1) складається з діалогових вікон, меню та інших компонентів, які використовуються для введення даних і виконання команд. Він включає в себе такі компоненти.

Меню утиліт системи ANSYS

Utility Menu – містить утиліти, які доступні в сесії ANSYS, такі як керування файлами, вибір, графічний контроль, і параметри.

Main Menu (головне меню) – містить основні функції, що використовуються на різних етапах скінчено-елементного аналізу.

Toolbar (панель інструментів) – містить кнопки, що виконують команди, які використовуються найчастіше.

Input Window (вікно введення), в якому можна вводити команди системи ANSYS.

Graphics Window – графічне вікно, в якому візуалізується процес створення моделі.

Output Window – вікно виводу, в якому відображається інформація про хід виконання дій в текстовому вигляді. Зазвичай воно знаходиться за іншими вікнами, але в разі потреби його можна вивести наперед.

Utility Menu системи ANSUS

З меню утиліт можна викликати різні функції. Кожен розділ меню зумовлює випадання набору пунктів меню, які, в свою чергу, є каскадними меню або викликають безпосередню дію.

File – операції з файлами (рис. 14.2).

Розглянемо деякі операції даної утиліти.

Change Directory... - тут зазначається директорій в якому створюються всі файли, що використовуються системою ANSUS.

Import – імпорт геометричних моделей, створених засобами CAD, тобто файлів в форматі IGES (*.igs), ACIS (*.sat), Parasolid (*.x_t) та інших.

Select – містить функції активного набору об'єктів і створення компонентів.

List – дозволяє переглядати списки будь-яких об'єктів, наявних в базі даних системи ANSUS.

Plot – дає можливість графічно переглядати точки, лінії, поверхні, об'єми, вузли, елементи та інші об'єкти, що можуть відображатися графічно.

PlotCtrls – включає функції контролю зображення, стилю та інші характеристики графічного відтворення.

Work Plane – дає можливість викликати або відключати застосування робочої площини і проводити з робочою площиною операції переносу, обертання тощо. Тут також можна створювати, видаляти і здійснювати перехід до іншої системи координат.

Parameters – включає функції створення, редагування, видалення скалярних параметрів і масивів параметрів.

Macro – дає можливість викликати макроси і блоки даних.

Menu Ctrls – дозволяє виконувати перемикання зі стандартного виду системи ANSUS в панель інструментів Mechanical Toolbar.

В останніх двох розділах можна також створювати, редагувати і видаляти аббревіатури, що візуалізуються у вигляді кнопок панелі інструментів.

Help – викликає систему допомоги ANSUS Help System.

Clear & Start New ...
Change Jobname ...
Change Directory ...
Change Title ...
Resume Jobname.db ...
Resume from ...
Save as Jobname.db
Save as ...
Write DB log file ...
Read Input from ...
Switch Output to ▶
List ▶
File Operations ▶
File Options ...
Import ▶
Export ...
Report Generator ...
Exit ...

Рисунок 14.2 – Операції роботи з файлами

14.2 Головне меню (Main Menu) системи ANSUS

Головне меню **Main Menu** містить основні функції системи ANSUS: функції препроцесора, розрахунку і постпроцесора.

Екранне меню **Main Menu** має деревовидну структуру. Кожен розділ екранного меню може розширюватися для показу більшого числа опції (позначених знаком +) або викликати дію (позначених іконкою з позначенням дії). Клацання на значку + або назві розділу веде до розкривання меню для виклику підменю. Продовження розширення підменю (також позначені значком +) веде до потрібної операції. Ім'я операції також позначається іконкою, яка визначає дію:

- квадрат для діалогової панелі;
- стрілка для меню позначення.

Екранне меню **Main Menu** складається з таких розділів:

- **Preferences** – виклик діалогової панелі, що дозволяє змінювати засоби контролю для контекстного фільтрування розділів меню;
- **Preprocessor** – здійснює вхід в препроцесор і містить такі функції, як створення моделі, сітки, прикладення навантажень;
- **Solution** – здійснює вхід в модуль розрахунку SOLUTION і містить функції модуля SOLUTION, такі як зазначення типу розрахунку, прикладення навантажень, зазначення опцій кроків навантаження і виконання розрахунку;
- **General Postproc** – здійснює вхід в модуль загального постпроцесора і містить такі функції модуля, як перегляд результатів в графічному і тестовому режимах;
- **TimeHistPostpro** – здійснює вхід в модуль почасового постпроцесора і викликає перегляд результатів засобами Time History Variable Viewer. Містить такі функції, як

створення і перегляд змінних в текстовому та графічному режимах;

- **Design Opt** – здійснює вхід в модуль оптимізації моделі і містить такі функції модуля як створення змінних оптимізації і перегляд результатів оптимізації;
- **Prob Design** - здійснює вхід в модуль оптимізації на основі випадкових чисел і містить функції модуля оптимізації на основі випадкових чисел;

ЛЕКЦІЯ 15. РОБОТА В СИСТЕМІ ANSUS

Геометричну модель об'єкта дослідження можна побудувати засобами системи ANSUS, але простіше її побудувати в одному із графічних редакторів і імпортувати в ANSUS. Для імпорту слід скористатися таким шляхом **Utility Menu** → **File** → **Import** → і далі вибрати формат графічного файлу.

Після успішного імпорту графічного об'єкту необхідно вибрати тип задачі, для чого слід скористатися Головним Меню: **Main Menu** – **Preferences**. З використанням даного пункту, з'являється вікно **Preferences for GUI Filtering** (рис. 15.1), в якому необхідно установити значок проти типу задачі, що планується вирішувати, наприклад **Thermal**, та підтвердити вибір за допомогою кнопки **OK**.

Після виконання зазначених дій залишаються доступними лише ті пункти головного меню, що безпосередньо пов'язані з обраним типом задачі.

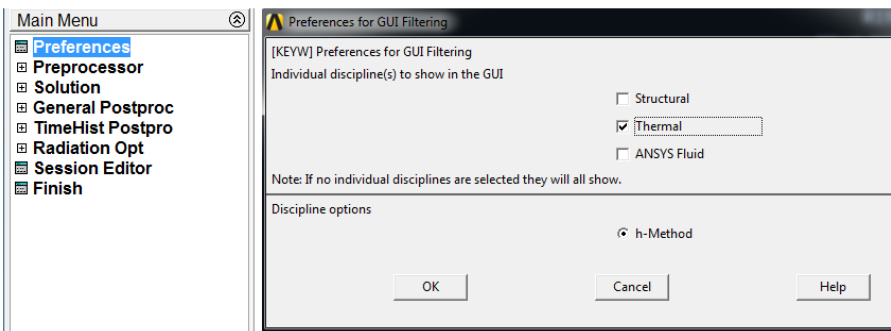


Рисунок 15.1 – Вибір типу задачі, що розв'язується

15.1 Визначення властивостей матеріалів.

Більшість типів елементів вимагають завдання властивостей матеріалу. Залежно від розв'язуваного завдання, властивості матеріалів можуть бути лінійними або нелінійними. Так само як з типами елементів й дійсних констант, кожен набір властивостей матеріалу має номер посилання матеріалу. Таблиця номерів посилання матеріалів від наборів властивостей матеріалу називається таблицею матеріалу. У межах одного аналізу ви можете мати різні набори властивостей матеріалу (відповідні матеріалам, що використані у моделі). ANSYS ідентифікує кожен набір унікальним номером посилання.

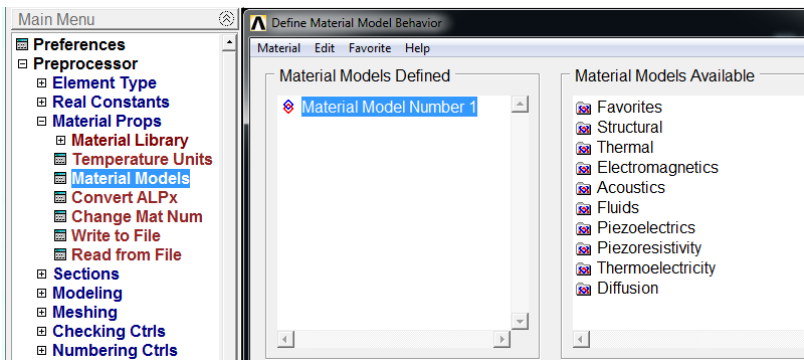


Рисунок 15.2 – Панель вибору властивостей матеріалу

Лінійні властивості матеріалу можуть бути сталими або залежати від температури, можуть також бути ізотропними або ортотропними. Для завдання постійних властивостей матеріалу (ізотропних або ортотропних) використовується такий шлях:

Main Menu> Preprocessor> Material Props> Material Models

В діалоговому вікні, що появиться (рис. 15.2) в розділі **Material Models Available** вибираються необхідні категорії матеріалів, які необхідно визначити, наприклад, Structural, Thermal, Electromagnetics, тощо. Дія лівою клавішею маніпулятора на іконку вибраної категорії відкриває деревовидну структуру властивостей матеріалів (рис. 15.3).

Необхідно задавати всі властивості матеріалу, які потрібні будуть для виконання розрахунку.

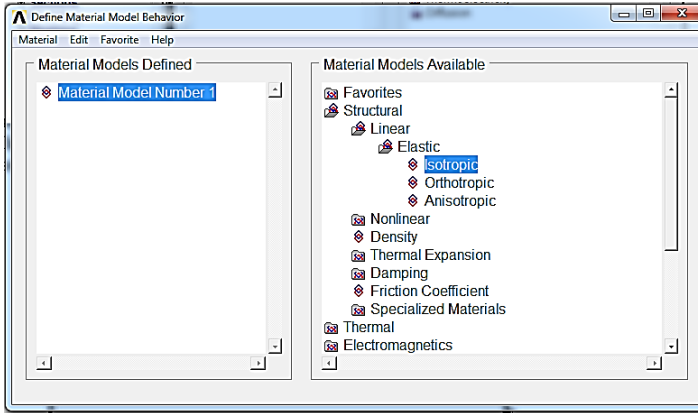


Рисунок 14.3 - Деревовидна структура властивостей матеріалу

15.2 Завдання типу елемента

Для завдання типу елементів використовують препроцесор ANSUS:

Main Menu>Preprocessor>Element Type>Add/Edit/Delete

На панелі **Element Type** (рис. 15.4), що з'явиться, виділяється напис **NONE DEFINED**, оскільки жоден з типів елементів не визначений. Для вибору типу елемента необхідно натиснути клавішу **Add...**, розміщену на панелі зліва внизу, після чого з'явиться панель **Library of Element Type**. В лівому вікні панелі вибирається тип задачі, а в правому – тип відповідного елемента. У вікні **Element type reference number** з'явиться "1", що означає, що даному типу елемента присвоєно номер 1. Після натискання клавіші "Ok" на панелі **Element Type** з'явиться напис **Type 1 Solid77**.

На панелі **Element Type** (рис. 15.4), що з'явиться, виділяється напис **NONE DEFINED**, оскільки жоден з типів елементів не визначений. Для вибору типу елемента необхідно натиснути клавішу **Add...**, розміщену на панелі зліва внизу, після чого з'явиться панель **Library of Element Type**. В лівому вікні панелі вибирається тип задачі, а в правому – тип відповідного елемента. У вікні **Element type reference number** з'явиться "1", що означає, що даному типу елемента присвоєно номер 1. Після натискання клавіші "Ok" на панелі **Element Type** з'явиться напис **Type 1 Solid77**.

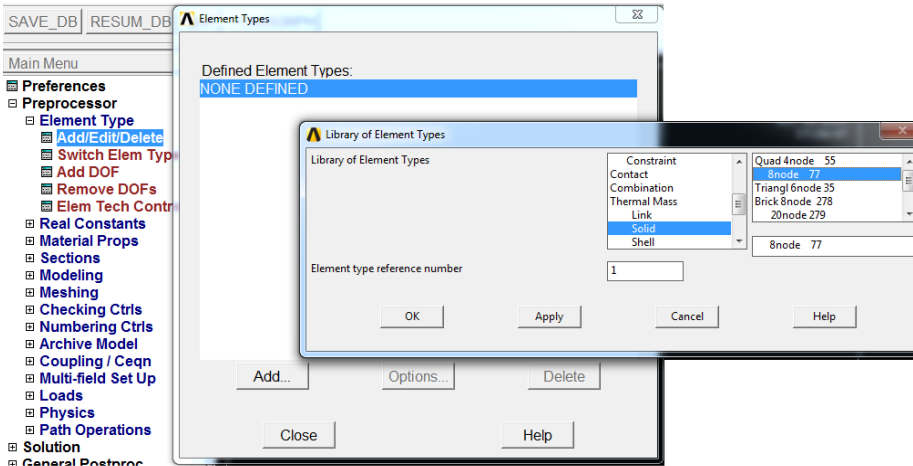


Рисунок 15.4 – Вибір типу елемента

15.3 Розбиття геометричної моделі на елементи

Найбільш зручним засобом створення скінчено елементної сітки є засіб Mesh Tool доступ до якого одержуємо через головне меню:

Main Menu>Preprocessor>Meshing> Mesh Tool

Mesh Tool (рис. 15.5) це діалогове вікно у якому зібрані практично усі інструменти для налаштування і створення сітки скінчених елементів. Це вікно містить декілька розділів:

- Element Attributes;
- Smart Size;
- Size Controls;
- Mesh: ;
- Refine at:.

В розділі Element Attributes можна задавати атрибути моделі. Якщо ці атрибути будуть використовуватися за «замовчуванням» то зі списку, що випадає, вибирається пункт Global і натискається кнопка Set. З'явиться діалогове вікно Meshing Attributes (рис. 15.6), в якому необхідно вибрати номер елемента, номер матеріалу, номер дійсної постійної, координатні системи елементів. В разі, якщо в попередніх розділах визначений один тип елемента і один матеріал, кнопку Set можна не натискати.

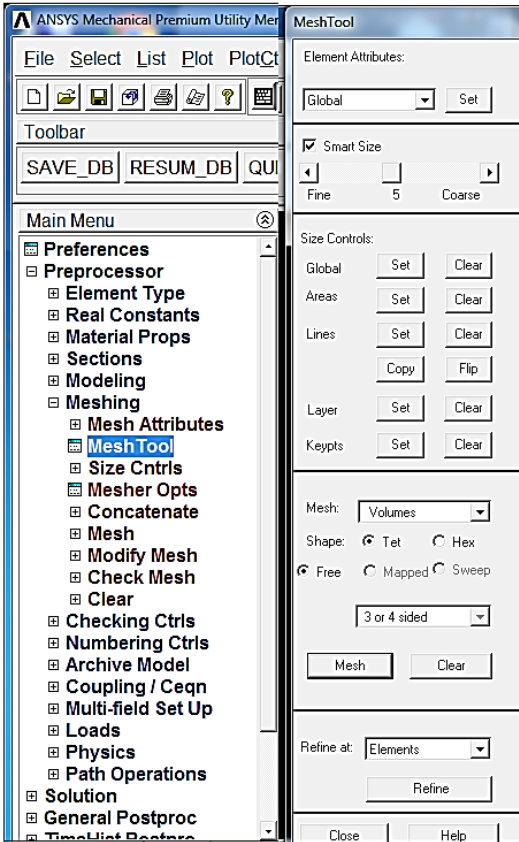


Рисунок 15.5 –Діалогова панель Mesh Tool розбиття моделі на елементи

поділів на границі компонента.

Щоб розбити модель на елементи, в діалоговому вікні Mesh Tool в розділі Mesh вибираємо компонент, що буде розбиватися. Для тривимірної моделі виберемо Volumes – об'єми.

Вибираємо тип розбиття Free або Mapped. На період освоєння системи доцільніше вибирати вільне розбиття. Далі зазначаємо форму елемента (мітка Shape): Tet відповідає чотиригранним елементам; Hex - шестигранним елементам.

Для автоматичної розбивки геометричних моделей складної форми доцільно активувати розділ **Smart Size**, після чого становиться активним повзунок, яким можна установити візуально розміри скінчених елементів сітки (Fine – розміри елементів зменшуються, Coarse - розміри елементів збільшуються).

В розділі Size Controls в разі натискання кнопки Set для пункту Global появиться діалогове вікно Global Element Size (рис. 15.7), в якому можна встановлювати розміри для всіх компонент моделі. В полі SIZE вводиться довжина ребра елемента, що використовується «за замовчуванням» на границях компонента, що розбивається, а в полі NDIV вводиться кількість

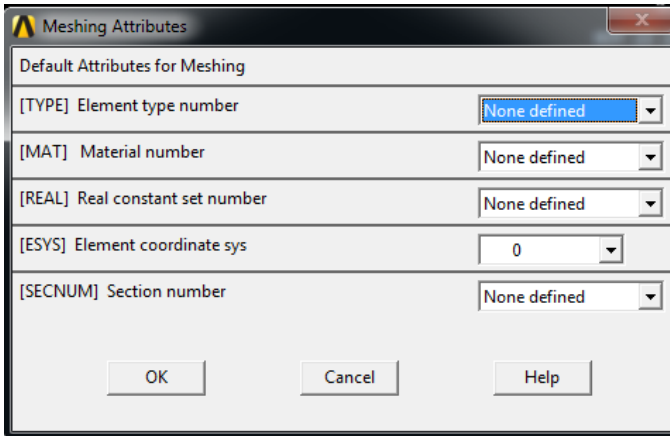


Рисунок 15.6 – Діалогове вікно Meshing Attributes

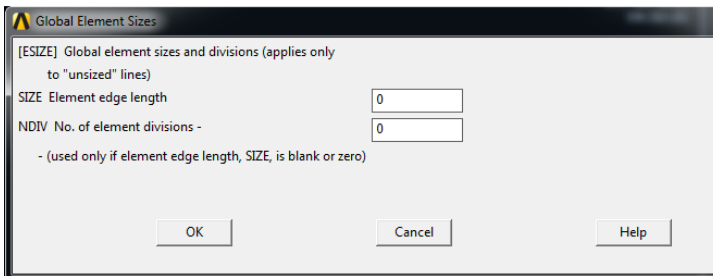


Рисунок 15.7 – Діалогове вікно Global Element Size

Після натискання кнопки **Mesh** з'явиться діалогове вікно Mesh Volume (рис. 15.8), за допомогою якого вибирають компоненти, що розбиваються.

На даній панелі слід набрати команду **all** і натиснути кнопку ОК, або одразу натиснути кнопку **Pick all**, після чого буде запущена програма розбиття геометричної моделі на елементи.

15.4 Прикладення навантаження

Поняття навантаження, що використовується в системі ANSUS, включає в себе граничні умови (закріплення, значення обмежень або значення полів на границях), а також інші силові чинники, прикладені зовнішнім або внутрішнім способом. Навантаження поділяють на шість основних категорій:

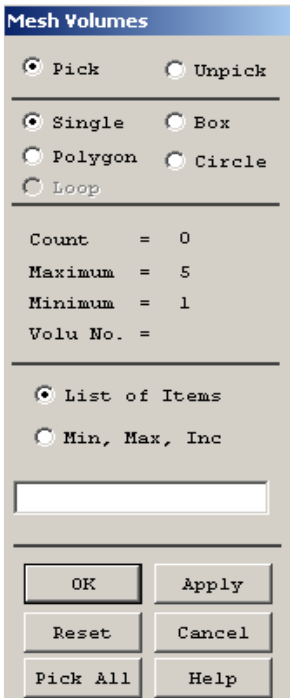


Рисунок 15.8 – Діалогова панель розбиття моделі на елементи

- обмеження ступенів свободи (DOF);
- зусилля;
- навантаження прикладені на поверхні;
- навантаження прикладені в об'ємі;
- інерційні навантаження;
- навантаження пов'язаних розрахунків.

Більшість з цих навантажень можна прикласти як до об'єктів геометричної моделі (точок, ліній і поверхонь), так і до об'єктів розрахункової моделі (вузлів і елементів).

Для прикладення навантаження використовують такий шлях ANSYS (рис. 15.9):

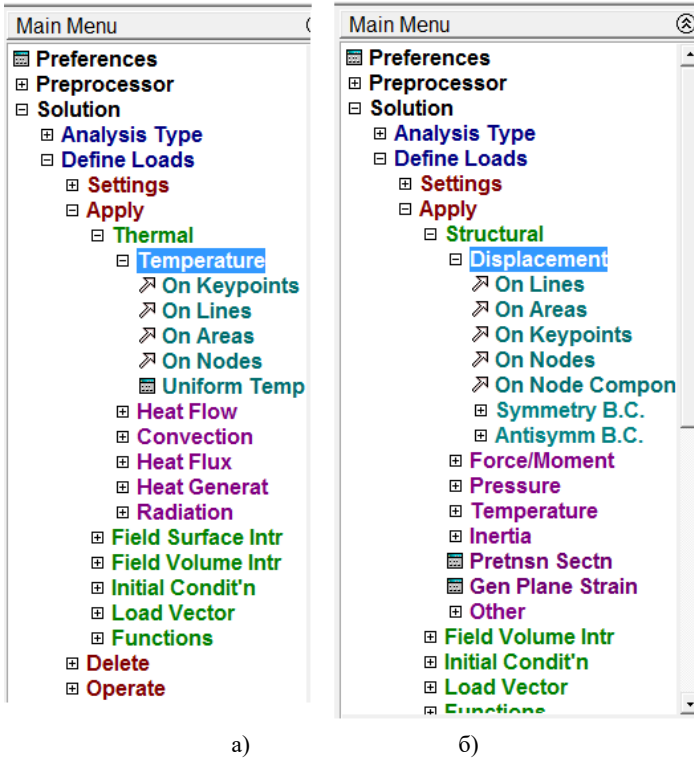
Main Menu>Solution>Define Loads>Apply >

Подальший шлях буде залежати від типу задачі, що вирішується. В разі теплової задачі після активації пункту Apply (рис. 15.9, а), відкривається пункт Thermal, натискання на який відкриває доступ до визначення параметрів, властивих тепловим задачам: температура, тепловий потік, щільність теплового потоку, конвекція,

тепловиділення.

Для розв'язку задач механіки твердого деформованого тіла відкривається розділ Structural (рис. 15.9, б) з властивими для цих задач параметрами: переміщення, сили, тиск, температура, інерція.

Дія на іконку параметра відкриває доступ до об'єктів, до яких прикладається відповідне навантаження. Вибравши потрібний об'єкт, позначений стрілкою, виділяться поверхні, лінії, тощо, до яких слід прикласти навантаження та натиснути кнопку Apply на панелі. На панелі, що з'явиться у віконці VALUE Load TEMP value, якщо розв'язується теплова задача, зазначити значення температури та натиснути клавішу Apply. Аналогічні дії слід виконати для інших поверхонь, на яких прикладається температура, після чого на панелі **Apply TEMP on Areas** натиснути клавішу OK. Панель заховається.



а)

б)

Рисунок 15.9 – Діалогова панель прикладення навантаження

Аналогічним чином прикладаються інші види навантажень.

Після формування математичної моделі переходять до виконання розрахунків. Для запуску програми на розрахунок слід скористатися таким шляхом:

Main Menu>Solution> Solve> Current LS

Після завершення розрахунків можна переглянути результати розрахунків для чого необхідно спочатку задати команду на читання результатів та перегляд результатів (рис. 15.10):

Main Menu> General Postproc> Read Results>First Set

Main Menu> General Postproc>Plot Results>Nodal Solu

Результати записуються в файли результатів (Jobname.rst, Jobname.rth, Jobname.rgm або Jobname.rfl) і в базу даних.

Для збереження математичної моделі слід періодично зберігати результати роботи, для чого слід натиснути клавішу SAVE_DB або скористатися таким шляхом

Utility Menu → File → Save as Jobname .db

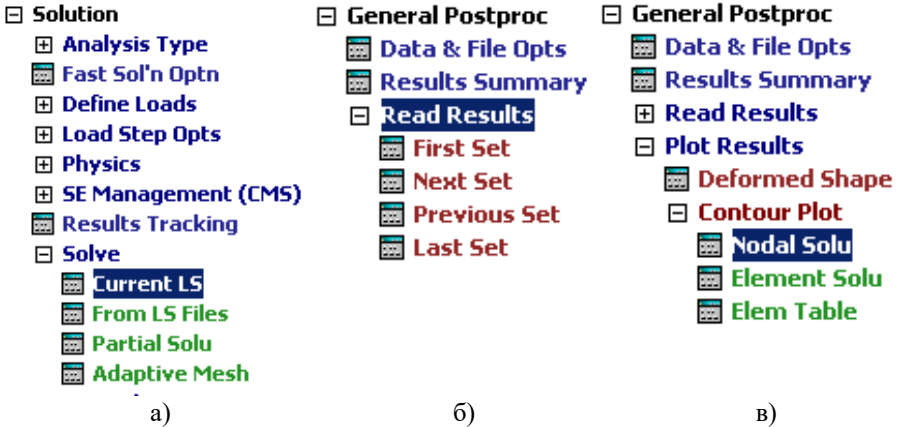


Рисунок 15.10 – Послідовність дій для запуску розрахунку (а), читання (б) та перегляд (в) результатів.

15.5 Пов'язані задачі

До пов'язаних відносять задачі, в яких результати одного розрахунку використовуються як навантаження для іншого. До таких задач, зокрема, відносяться задачі визначення температурних деформацій об'єктів. На першому етапі визначається температурне поле об'єкта від дії на нього джерел тепла. Одержане температурне поле на наступному етапі (структурному аналізі) прикладається як навантаження до тіла.

Для виконання структурного аналізу необхідно зайти в пункт головного меню: **Main Menu – Preferences**. Внаслідок з'являється вікно **Preferences for GUI Filtering** (рис. 15.1), в якому необхідно установити значок проти завдання **Structural**.

Якщо на початку створення моделі були задані властивості матеріалів і для структурного аналізу то даний етап можна пропустити. Необхідно змінити тип елемента з теплового на структурний для чого слід виконати таке:

Main Menu>Preprocessor>Element Type >Switch Elem Type

З'явиться діалогова панель Switch Element Type (рис. 15.11), в якій у вікні Change element type, необхідно вибрати Thermal to Struc, тобто замінити термічний елемент на сумісний структурний. Натискаємо команду ОК.

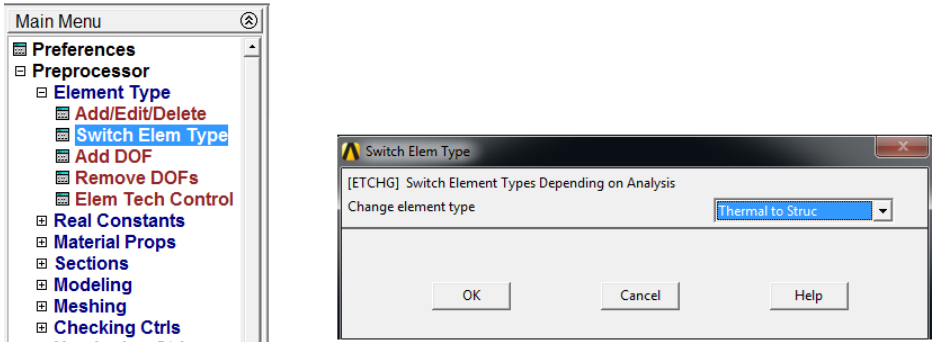


Рисунок 15.11 – Діалогова панель заміни типу елемента

Так, якщо для термічного аналізу було вибрано восьмивузловий елемент Solid 70 (рис. 15.12, а), то система ANSYS замінить його на аналогічний за формою і кількістю вузлів структурний елемент Solid 185. Якщо був вибраний 20 – вузловий термічний елемент Solid 90 (рис. 15.12, б), то він буде замінений структурним елементом Solid 186.

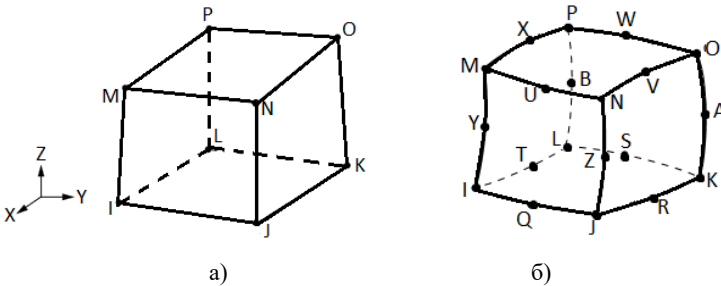


Рисунок 15.12 – Тривимірні елементи: а – восьми вузловий; б – двадцяти вузловий

Термічні елементи мають 3-D теплопровідність і єдиний ступінь вільності в кожному елементі – температуру. Вони можуть використовуватися для 3-D стаціонарного та нестаціонарного теплового аналізу. Структурні елементи мають в кожному вузлу 3 ступені вільності – переміщення в вузлах UX, UY, UZ. До елемента

може бути прикладене об'ємне навантаження у вигляді температури до кожного вузла, густини матеріалу та поверхневе навантаження у вигляді тиску на поверхні (грані елемента).

Прикладення навантаження для структурного аналізу виконується, як описано раніше. Температури прикладаються до вузлів з попереднього теплового розрахунку.

Main Menu>Solution>Define Loads>Apply >Structural >Temperature>From Therm Analysis

З'явиться панель **Apply TEMP from Thermal Analysis** (рис. 15.13) на якій слід натиснути клавішу Browse... та вибрати файл з результатами температурного розрахунку, який має розширення rth.

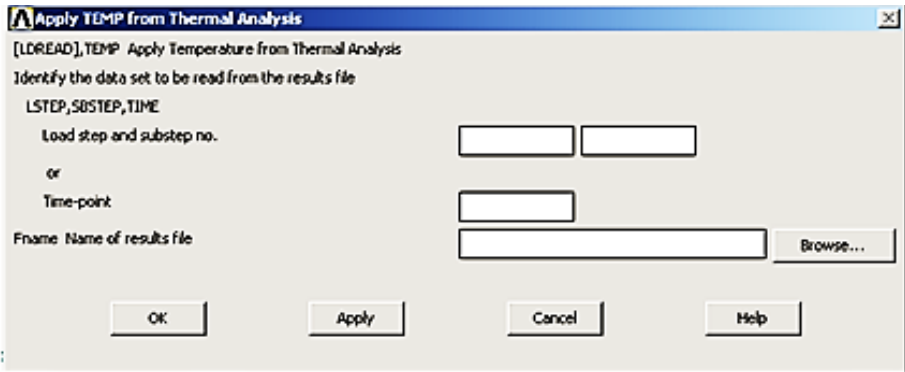


Рисунок 15.13 – Панель для прикладення теплового навантаження

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Астанін В. В., Зайончковський Г. Й., Солоха В. В. Дослідження та випробування механічних систем: навчальний посібник. – Київ. НАУ, 2009 -112 с.
2. Пальчевський Б.О. Дослідження технологічних систем (моделювання, проектування, оптимізація): Навч. посібник/ Б.О. Пальчевський. – Львів: Світ, 2001. – 232 с.
3. Струтинський В.Б. Математичне моделювання процесів та систем механіки: Підручник. - Житомир: ЖІТІ, 2001. - 612 с.
4. Саленко О.Ф., Вакуленко С.В. Наукові дослідження складних технічних систем: навч. посібник. ч.1. для студентів спеціальності 131 «Прикладна механіка» / О.Ф. Саленко, С.В. Вакуленко. - Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. – 102 с.
5. Бойко І.А., Солоха В.В., Івченко Л.Й. Динамічний аналіз поворотного стола 5-координатного обробного центру. Вісник чернігівського державного технологічного університету. № 1 (71), 2014, стор. 134-143.
6. Температурні вимірювання: довідник / О.А. Геращенко, А.Н. Гордов, А.К. Єрьоміна, і інші; під ред. О.А. Геращенко. – К.: Наукова думка, 1999. - 704 с.
7. Поліщук Є.С. Метрологія та вимірювальна техніка: підручник / Є.С. Поліщук, М.М. Дорожовець, В.О. Яцук, та інші; - 2-е вид., доп. та перероб. - Львів : Вид-во Львівської політехніки, 2012. – 544 с.
8. Montgomery, Douglas C. Design and analysis of experiments / Douglas C. Montgomery. — Ninth Edition. John Wiley & Sons, Inc. – 2017. - 749 p.
https://www.researchgate.net/publication/362079778_Design_and_Analysis_of_Experiments_9th_Edition.
9. Zienkiewicz O.C. and Taylor R.L. The Finite Element Method. First edition. V. 1: The Basis/ Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000. – 708 p.
10. Bernhard F. Handbuch der Technischen Temperaturmessung. Herausgeber F. Bernhard. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2014 – 1631 p. <https://www.pdfdrive.to/dl/handbuch-der-technischen-temperaturmessung>.

11. ISO 230-2:2014/ Test code for machine tools. Part 2: Determination of accuracy and repeatability of positioning of numerically controlled axes.
12. Analysis of Dynamic Characteristics and Evaluation of Dynamic Stiffness of a 5-Axis Multi-tasking Machine Tool by using F.E.M and Exciter Test. International Conference on Smart Manufacturing Application. April. 9-11, 2008. p. 565-569.
<https://ieeexplore.ieee.org/document/4505589>
doi: [10.1109/ICSMA.2008.4505589](https://doi.org/10.1109/ICSMA.2008.4505589)
13. Dynamic modeling and analysis of motorized milling spindles for optimizing the spindle cutting performance. Dr. Sinan Badrawy, Engineering Manager Moore Nanotechnology Systems, LLC.
14. A. Erturk, H.N. Oëzguëven, E. Budak, Analytical modeling of spindle–tool dynamics on machine tools using Timoshenko beam model and receptance coupling for the prediction of tool point FRF. International Journal of Machine Tools & Manufacture 46 (2006) 1901–1912
<https://www.sciencedirect.com/journal/international-journal-of-machine-tools-and-manufacture/vol/46/issue/15>.