

Міністерство освіти і науки України
Запорізький національний технічний університет

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

для самостійної роботи з дисципліни

**“Автоматизовані системи контролю та
управління технологічними процесами”**

для студентів спеціальності

121 “Інженерія програмного забезпечення”
усіх форм навчання

2017

Методичні вказівки до виконання самостійної роботи з дисципліни “Автоматизовані системи контролю та управління технологічними процесами” для студентів спеціальності 121 “Інженерія програмного забезпечення” (усіх форм навчання) /Укл.: В. П. Рісіков, Л. П. Скачко. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2017. – 72 с.

Укладачі: В.П. Рісіков, доцент, к.т.н.
 Л.П. Скачко, асистент

Рецензент: С.К. Корнієнко, доцент, к.т.н.

Відповідальний
за випуск: В.П. Рісіков, доцент, к.т.н.

Затверджено
на засіданні
кафедри "ПЗ"

Протокол № 2
від “23” вересня 2017 р.

ЗМІСТ

с.

1 АЛГОРИТМИ СТАТИСТИЧНОГО УПРАВЛІННЯ ТЕХНОЛОГІЧНИМИ ПРОЦЕСАМИ	4
1.1 Контроль і управління	5
1.2 Перетворення безперервних величин	6
1.3 Випадкові величини	8
1.4 Виробничі похибки	8
1.5 Систематична похибка	10
1.6 Характеристики і параметри статистичної сукупності	10
1.6.1 Центр угруповування	13
1.6.2 Величина розсіювання	13
1.7 Статистичні моделі	15
Дискретні розподіли	15
1.7.1 Рівномірний розподіл	15
1.7.2 Біноміальний розподіл	16
1.7.3 Геометричний розподіл	16
1.7.4 Розподіл Пуассона	17
Безперервні розподіли	18
1.7.5 Рівномірний (прямокутний) розподіл	178
1.7.6 Нормальний розподіл	19
1.7.7 Логарифмічно нормальний розподіл	21
1.7.8 Експоненціальний розподіл	22
1.7.9 Розподіл Вейбулла	23
1.8 Вибірковий метод контролю	24
1.9 Статистичний контроль	29
2 АНАЛІЗ СТАБІЛЬНОСТІ ВИРОБНИЧИХ ПРОЦЕСІВ	33
2.1 Перевірка ефективності конструкторсько-технологічних вдосконалень ..	36
2.2 Випадкові процеси	37
2.2.1 Потоки подій	37
2.2.2 Найпростіший потік	39
2.2.3 Марковські випадкові процеси	39
2.3 Системи масового обслуговування	41
2.3.1 Основні поняття і визначення	42
2.3.2 Системи масового обслуговування з відмовами	423
2.3.3 Багатоканальні системи масового обслуговування	427
2.3.4 Системи масового обслуговування (СМО) з очікуванням	50
2.4 Контроль надійності	53
2.4.1 Надійність складної апаратури	59
2.5 Врахування неметричних чинників	61
2.6 Виявлення "Розладу" технологічного процесу (ТП)	618
3 ЗАВДАННЯ ДО ПРАКТИЧНИХ РОБІТ	71
4 ЛІТЕРАТУРА	72

1 АЛГОРИТМИ СТАТИСТИЧНОГО УПРАВЛІННЯ ТЕХНОЛОГІЧНИМИ ПРОЦЕСАМИ

Термін “статистика” в нинішній час вживається в різних значеннях, але найбільш часто під статистикою розуміють науку, що вивчає масові явища з метою виявлення в них закономірностей і отримання деяких узагальнених показників, що стисло характеризують отримані дані. Як правило, статистика має справу з числовими значеннями, що визначаються впливом безлічі різноманітних причин, одні з яких є істотними, а інші – випадковими. Основна задача статистики полягає в тому, щоб абстрагуватися від випадкового і виявити типове, характерне і закономірне.

Самий термін “статистика” походить від латинського слова *status*, що означає політичний стан. Спочатку статистикою називалося вивчення державних справ, а видатних політичних діячів, що були особливо добре поінформовані, і тому здатні робити обґрунтовані політичні висновки, називали *statists*. Лише пізніше під словом “статистика” почали мати на увазі числові дані, на основі яких державні діячі робили свої висновки, а ще пізніше, це слово стали застосовувати і для числових даних взагалі, і поступово прийшли до сучасного значення.

Без статистики неможливо вивчення явищ і процесів, що відбуваються в області виробництва, економіки та інших сторін суспільного життя. Статистичне вивчення тих або інших явищ припускає в якості першого кроку збір відомостей. Цей збір відомостей називають *статистичним спостереженням*. В результаті такого спостереження одержується безладна купа матеріалу, яка потребує систематизації і обробки.

Основа наукової статистики – засіб угруповувань. *Угруповуванням* називається розчленування сукупності відомостей за деякою ознакою. Завдяки угруповуванням матеріал спостережень приймає упорядкований (тобто систематизований) вигляд. Групові ознаки можуть мати кількісне вираження (заробітна платня, число дітей в родині, врожайність с/г культур і т.п.) або бути лише якісними (види обладнання, сімейний стан і т.п.).

Наступним етапом обробки зібраних даних є обчислення *узагальнюючих показників*. В якості таких показників широко відомі *середні величини*. Необхідність обчислення завжди виникає при

вивченні масових явищ. Роль середніх величин дуже велика, бо в кожному явищі має місце поєднання випадковості та закономірності. При обчисленні середніх, в силу дії закону великих чисел, випадковості взаємопоглинаються і врівноважуються, тому з'являється можливість переходити від одиничного до загального, від випадкового до закономірного.

1.1 Контроль і управління

Слово “контроль” в російській мові традиційно означає “перевірка”. Тому, наприклад, контролер в суспільному транспорті – це посадова особа, що перевіряє наявність квитків у пасажирів, або контролер ВТК – людина, що перевіряє продукцію, яка випускається на підприємстві. Мається на увазі, що контролер жодних функцій управління не виконує. Хоча багато хто знає, що на практиці діло виглядає інакше – виявивши брак, контролер, якщо не сам безпосередньо, то через іншого робітника (майстра, начальника дільниці і таке інше), приймає міри до недопущення його в подальшому. Іншими словами, він все-таки здійснює найпростіші функції управління. Взагалі всяка перевірка розуміє в подальшому прийняття деяких мір управління.

На відміну від сенсу, що склався в російській мові, англійське слово *controller* – це людина або технічне влаштування, що спостерігає, перевіряє та подає команди. Справжній сенс – управляти. Слово “контролер” вживається і в російській мові, але в сенсі “влаштування для введення керуючих впливів”, наприклад: контролер у трамваї. Тому розподіл виробничих формувань на системи управління і системи контролю є в значній мірі умовним. Контроль стану виробництва є першою і основною функцією будь-якої системи автоматичного або автоматизованого управління (САУ або АСУ).

Будь-яка система управління вимірює поточні значення всіх технологічних параметрів і сприймає дані, що вводяться в неї з пультів ручного введення, і після цього, логічно аналізуючи події і стани (що відбулося і чому), система виробляє вихідні сигнали і необхідні впливи.

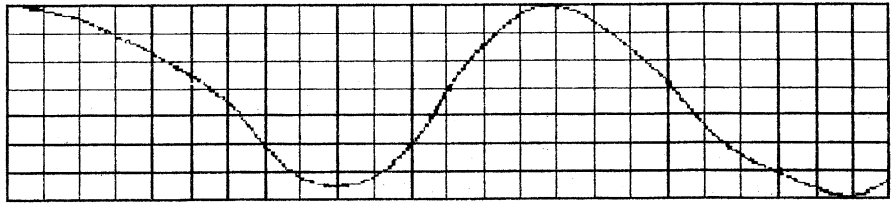
При вимірі значень параметрів виникають свої особливі проблеми контролю, зв'язані, по-перше, з тим, що переважна більшість

явищ реального світу, в тому числі майже всі параметри технологічних процесів, є *безперервними* (аналоговими) величинами, які повинні бути переведені в послідовності дискретних кроків, і, по-друге, що на хід реальних процесів значно впливають численні випадкові чинники.

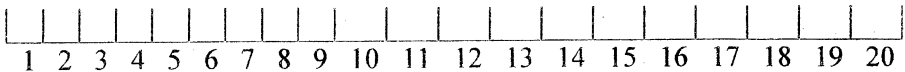
1.2 Перетворення безперервних величин

На рис. 1.1,а зображено як з течією часу змінюється деякий параметр, наприклад, температура, напруга, тиск і т.п. На вході системи через регулярні інтервали часу ведеться вимірювання значень (рис. 1.1,б). Спочатку значення параметру безупинно зменшується (робоча камера холодне, джерело живлення розряджається і т.д.). В деякий момент часу значення параметру падає нижче припустимого значення. Інформація, отримана при контролі параметру, обробляється логічним пристроєм, що виробляє керуючий вплив (включення нагрівача, зарядка батареї і т.п.). Після цього значення параметру, що контролюється, починає зростати (рис. 1.1,в).

Безперервні значення за допомогою аналого-цифрового перетворювача (АЦП) замінюються набором фіксованих значень параметру в різноманітні моменти часу (рис. 1.1,г). Заміна безперервних значень дискретними здійснюється шляхом квантування за рівнем. Набори дискретних значень відрізняються один від одного на крок квантування, що вибирається таким чином, щоб можна було надійно розрізняти сусідні градації, але в той же час в межах допустимих похибок. Кожному дискретному значенню може бути присвоєна певна позначка. В якості таких позначок природно використати порядкові номери в тій або іншій системі числення. Якщо крок квантування співпадає з метрикою даної величини, то порядковий номер буде дорівнювати числовому значенню даного параметру у відповідних одиницях. Інформація в такому випадку приймає *цифрову форму*.



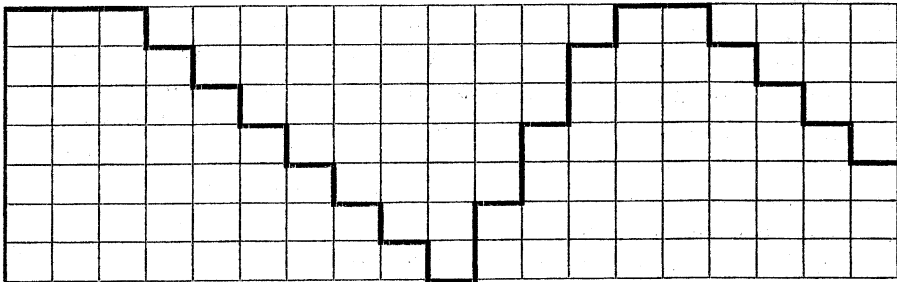
а



б



в



г

а – безперервні (аналогові) значення; б – тимчасові відліки; в – керуючі впливи;
г – дискретні значення величини, що контролюється

Рисунок 1.1 – Контроль безперервних величин

Можливість перетворення аналогової інформації в цифрову дозволяє використовувати комп'ютери в системах управління і контролю будь-якими технологічними процесами незалежно від фізичної природи контрольованих величин. Дані в цифровій формі, які одержуються на виході системи управління, можуть бути перетворені у безперервну форму за допомогою цифроаналогових перетворювачів (ЦАП).

1.3 Випадкові величини

Окрім точних, чітких і певних (детермінованих) значень в реальних умовах зустрічаються *випадкові* величини. Наприклад, кількість різноманітних видів товарів в тому чи іншому регіоні країни; число пасажирів на різних видах транспорту; тривалість часу між ремонтами техніки; величина врожаю зернових або овочевих культур в різні роки і т.п. В промисловому або с/г виробництві випадковою величиною буде кількість дефектних деталей в партії, число непрацюючих верстатів на дільниці, кількість колосся на 1м² пшеничного поля, видаток пального за день і т.п. Однак неможливість передбачення точного значення кожної конкретної величини в окремому акті процесу зовсім не означає відсутності закономірностей. При масових процесах поява різноманітних значень параметрів носить стійкий характер. Закономірності, властиві масовим спостереженням випадкових величин, називаються *статистичною тривалістю* і дають можливість застосування для дослідження *імовірнісних засобів*.

Спеціальна математична обробка отриманих даних дозволяє з'ясувати закономірності в наборах цифр, що, на перший погляд, здаються безладними, а також оцінити показники, що нас цікавлять, порівняти їх один з одним, встановити наявність чи, навпаки, відсутність між ними зв'язку та взаємозв'язків. Звичайно, треба постійно мати на увазі, що випадкові величини жодними засобами не можуть бути передбачені зі 100%-ною певністю, або, як звичайно говорять в подібних випадках, з імовірністю, рівною 1. Але рівень вірогідності може бути зроблений достатньо високим: в технічних додатках, як правило, задовольняються вірогідністю 95% (імовірність 0.95), але при бажанні її можна підвищити до 99% або навіть 99.9% і ще вище.

1.4 Виробничі похибки

Хід технологічних процесів визначається фізичними законами, тому вихідні параметри готових виробів повинні однозначно залежати від відповідних величин на вході: властивостей матеріалів, режимів проведення процесів і т.д. Однак на хід реальних виробничих процесів величезний вплив роблять численні неконтрольовані чинники, що мають характер випадкових впливів. У таких умовах неможливо

отримати вироби з цілком однаковими значеннями вихідних параметрів, і фактично значення характеристик окремих виробів, що спостерігаються, є випадковими величинами, які важко передбачити заздалегідь.

На відміну від розглянутих випадкових величин виробничі похибки є безперервними, а не дискретними. Вони викликаються багатьма причинами. Найбільш характерні з них можуть бути зведені в наступні групи:

- ❖ відхилення фактичних режимів виконання технологічних операцій від заданих;
- ❖ неоднорідності вхідного матеріалу, наприклад, вкраплення домішок, забруднення, тріщини та інші дефекти на поверхні;
- ❖ похибки вимірів, в тому числі при настройці обладнання та при контролю готової продукції;
- ❖ недостатня кваліфікація операторів, що приводить до помилок;
- ❖ недосконалість обладнання.

Деякі з цих чинників викликають відхилення параметрів в різні сторони і призводять до випадкових похибок, неминучих в кожному виробничому процесі.

Все це призводить до того, що при вимірі одного і того ж параметру, наприклад, зовнішнього діаметру деякої деталі, величини одержуються не однакові, а представляють набір значень, звичайно не співпадаючих між собою. Такий ряд значень називають *статистичною сукупністю*. Статистика будує свої висновки на підставі великого числа одиничних випадкових явищ, тому вона заснована на теорії ймовірностей. Теорія ймовірностей вперше стала застосовуватися для пояснення фізичних закономірностей в газах і рідинах. Але тепер вона використовується фактично в усіх областях науки і техніки. Викликане це тим, що точність і чутливість приладів, що застосовуються для експериментальних досліджень, весь час збільшується, а задачі, що постають перед виробництвом, неухильно ускладнюються.

Практична цінність використання статистичних засобів полягає в тому, що, оскільки є можливість враховувати випадкові чинники, виникає можливість свідомо і цілеспрямовано впливати на результати, звести до мінімуму вплив виробничих похибок і значно обмежити сферу їх впливу.

1.5 Систематична похибка

Окрім випадкових чинників на виробничий процес діють і такі, що викликають односторонні і поступово зростаючі відхилення фактичних значень параметрів процесу від номінальних значень. До таких чинників, в частковості, відносяться: зношення різального інструменту; послаблення кріплення деталей і пристроїв; виснаження активаторів і каталізаторів.

Такі систематичні похибки поступово зростають і несподівано можуть перевищити гранично допустимі за технічними умовами межі. Тому систематичні похибки повинні ліквідуватися шляхом виявлення і усунення причин, що їх викликають. Трудність, що при цьому виникає, полягає в тому, що малі за величиною систематичні похибки довгий час можуть залишатися непомітними на тлі значних випадкових похибок. Для виявлення систематичних похибок, на можливо ранніх стадіях їхнього виникнення, застосовуються спеціалізовані засоби статистичного аналізу стабільності технологічних процесів.

Статистичні засоби аналізу відомі дуже давно, але використовувались вони відносно рідко. Причина їхнього обмеженого застосування полягає в тому, що вони вимагають тривалих обчислень, тому, коли були відсутні засоби обчислювальної техніки, всі ці засоби були надзвичайно трудомісткими. Зараз положення змінилося. ПЕОМ і більш складні засоби для виконання обчислень стали широко доступні, тому необхідно оволодівати статистичними засобами і застосовувати їх при рішенні задач управління виробництвом і контролю якості.

1.6 Характеристики і параметри статистичної сукупності

В результаті безпосередніх спостережень, вимірів або реєстрації фактів одержується безліч даних, що утворюють статистичну сукупність і потребують обробки, яка включає систематизацію і класифікацію, що характеризують цю сукупність, а також складання таблиць, графіків та інших матеріалів, що ілюструють процес.

Основним етапом обробки експериментальних даних є *угруповування*, тобто розподіл статистичної сукупності на групи (класи), однорідні за деякою ознакою. Завдяки угруповуванню зібраний матеріал набуває деякого вигляду, тому виділення тих або інших систематизованих груп повинно бути не формальним, а обґрунтованим виходячи з мети дослідження.

Відомості, зібрані за деякий період, можуть бути систематизовані за часом. Одержувані при цьому дані називаються *тимчасовими рядами* або *рядами динаміки*. Шляхом їх екстраполяції можливе продовження за виміряні значення, тобто отримання нових значень, які можуть бути використані для прогнозування розвитку системи, що досліджується, в майбутньому. Якщо ж елементи сукупності систематизуються за якоюсь притаманною їм характерною ознакою, наприклад, за видом технологічних процесів, типом обладнання, марками вхідних матеріалів, кваліфікацією операторів і т.п., то вони утворюють *ряди розподілу*.

Коли ознаки кількісні, то, розмістивши їх в порядку зростання або зменшення і підрахувавши число елементів, відповідних кожному значенню ознаки, одержують *варіаційний ряд*. Ознаки, що варіюють, можуть поставати у вигляді дискретних цілих чисел або приймати будь-які значення. Для безперервних ознак варіаційні ряди будуються як інтервальні, значення ознак в них постають у вигляді “від ... до ...”.

Варіаційний ряд являє собою таблицю розподілу – це декілька стовпчиків, в одному з яких приводяться значення ознаки, а в другому – числа, що показують, скільки раз зустрічається дане значення в сукупності, що досліджується. В інших стовпчиках тієї ж таблиці можуть бути відносні числа, щільності та інші розрахункові величини. Варіаційні ряди набувають більшої наочності, коли вони зображуються графічно. Для цього в прямокутній системі координат по вісі абсцис відкладаються інтервали варіаційного ряду, а на вісі ординат – відповідні абсолютні числа або відносні частоти. Отримана стовпчикова діаграма, що складається із зімкнутих прямокутників, називається *гістограмою*.

Приклад 1.1. На рис. 1.2 є значення параметрів одного з виробів (плівкових резисторів), отримані при постійних значеннях всіх контрольованих чинників технологічного процесу. На рисунку параметри наведені в тому порядку, в якому вони були отримані, тому

ясно видно випадковий характер відхилення і відсутність систематичної закономірності в їхній появі. Разом з тим сукупність, наведена на рисунку, показує основні властивості, характерні для виробничих похибок: рівні за величиною, але протилежні за знаком відхилення зустрічаються однаково часто, і чим менше за величиною відхилення, тим частіше воно виникає в результаті технологічного процесу.

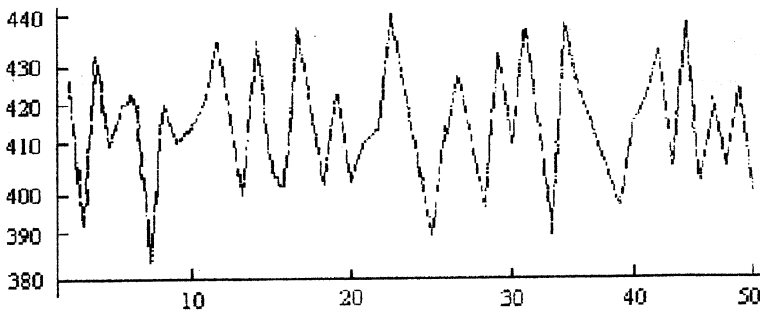


Рисунок 1.2 – Варіації параметрів промислових виробів

Варіаційний ряд, отриманий шляхом систематизації параметрів за величиною, наведений у таблиці 1.1. Ширина інтервалу вибирається виходячи з обсягу даних, максимального і мінімального значень параметрів, а також мети статистичних досліджень. Задавати інтервали рекомендується таким чином, щоб їхня кількість була не менше 6 і не більше 20. Звичайно вважають, що оптимальним є $kn \approx \sqrt{n}$.

Таблиця 1.1 – Варіаційний ряд

Інтервали	Середина інтервалу	Кількість в інтервалі	
		абсолютна	відносна
≤ 395	390	3	0.06
від 395 до 404	400	5	0.10
від 405 до 414	410	13	0.26
від 415 до 424	420	15	0.30
від 425 до 434	430	9	0.18
від 435 і більше	440	5	0.10
Всього		50	1.00

Відповідна таблиці 1.1 гістограма представлена на рис. 1.3.

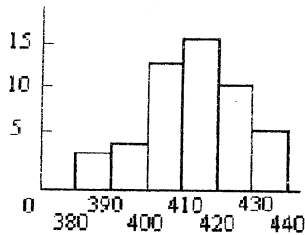


Рисунок 1.3 – Гістограма

Найбільш повну характеристику статистичної сукупності дасть функція розподілу ймовірностей випадкової величини. Однак на практиці часто використовують обмежену кількість числових характеристик, що називаються *параметрами розподілу*. Ці параметри можна розподілити на три класи, що характеризують:

- центр угруповування;
- величину розсіювання (ступінь варіації);
- форму розподілу ймовірностей.

1.6.1 Центр угруповування

Однією з основних характеристик статистичної сукупності, що дає уявлення про те, навколо якого центру групуються всі значення, є *середнє арифметичне*. Для його обчислення застосовується формула:

$$\bar{X}_{\text{ср}} = (X_1 + X_2 + \dots + X_n) / n = 1 / n * \sum_{n=1}^n x_n \quad (1.1)$$

1.6.2 Величина розсіювання

Статистичні сукупності можуть мати близькі або навіть однакові значення центру згуртовування, але окремі значення величин в них можуть суттєво відрізнятись. Відбувається це від того, що розкид значень відносно центру буває неоднаковий: в одних випадках великий, в інших – малий. Тому необхідно кількісно вимірювати ці розкиди або варіації.

Елементарною характеристикою розсіювання є *варіаційний розмах* – різниця між максимальним і мінімальним значеннями сукупності, що вивчається:

$$R_{\max} = X_{\max} - X_{\min} \quad (1.2)$$

Варіаційний розмах не завжди характерний, бо враховує тільки крайні значення, що можуть дуже сильно відрізнятись від всіх інших значень. Більш точно розсіювання визначається за допомогою показників, що враховують відхилення всіх значень від середнього арифметичного: середнє лінійне і середнє квадратичне відхилення.

Середнє лінійне відхилення засноване на врахуванні індивідуальних відхилень окремих значень від середнього арифметичного даного ряду і визначається як середнє арифметичне цих відхилень:

$$d_{cp} = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - x_{cp}|}{n} \quad (1.3)$$

Другим показником ступеня розсіювання навколо середнього є *середнє квадратичне відхилення* або, як його часто називають, *основне відхилення*. Його обчислюють за формулою:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - x_{cp})^2}{n}} \quad (1.4)$$

Основне відхилення є найбільш розповсюдженим і узвичаєним показником варіації. Середнє арифметичне з суми квадратів відхилень від середнього значення, тобто величина під коренем виразу (1.4), називається *дисперсією*. Дисперсія має самостійне значення в багатьох задачах математичної статистики і відноситься до числа найважливіших показників варіації.

Для характеристики форми розподілу звичайно використовують ту математичну модель, що найкращим чином наближається до вигляду кривої розподілу ймовірностей, отриманої при аналізі експериментальних даних.

1.7 Статистичні моделі

В якості математичних моделей статистичних розподілів використовуються теоретичні криві розподілу. *Теоретична крива* – це залежність, що описується математично, може бути висловлена рівнянням з певними параметрами. Відомо дуже багато різноманітних розподілів, а число потенційно можливих статистичних моделей ще більше. Однак на практиці використовуються лише деякі з них, звичайно ті, що більш зручні для опису будь-якої ситуації або мають бажані математичні властивості.

При розрахунку надійності апаратури, аналізі точності і перевірці стабільності, а також при перевірці ефективності вдосконалення та імітаційному моделюванні виробничих процесів на ЕОМ найбільш часто використовуються наступні дискретні і безперервні розподіли.

Дискретні розподіли

1.7.1 Рівномірний розподіл

Рівномірний розподіл – це рівноймовірний розподіл, тобто будь-якому значенню випадкової змінної відповідає одна і та ж імовірність (рис.1.4). Функція ймовірності такого розподілу:

$$f(x) = 1 / b, \quad (1.5)$$

де b – число можливих результатів події.

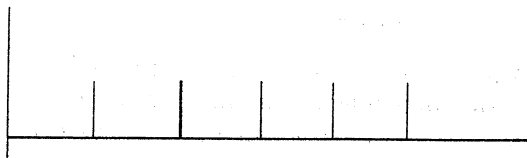


Рисунок 1.4 – Рівноймовірний розподіл

У природі змінність звичайно розподіляється нерівномірно і, мабуть, не існує фізичних явищ, що могли б бути описані за

допомогою рівноймовірного розподілу. Проте такий розподіл використовується завжди, коли має місце чисто випадковий вибір між декількома альтернативами. Якщо, наприклад, мотиви, що зумовлюють вибір якоїсь стратегії або деякого конструктивного варіанту, невідомі, то найбільш правильно буде приписати кожному вибору рівну ймовірність. Саме так роблять на практиці: коли про закон розподілу відомо дуже мало, його приймають рівноймовірним.

1.7.2 Біноміальний розподіл

Біноміальний розподіл, отриманий Бернуллі, є дискретним розподілом, при якому випадкова подія може мати два і тільки два результати: сприятливий (наприклад, досягнутий успіх, отриманий придатний виріб) і невдалий (робота невиконана, виріб з браком).

Імовірність k вдалих результатів в n реалізаціях деякого експерименту дорівнює:

$$f(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \quad (1.6)$$

де p – імовірність успіху в кожному випробуванні.

1.7.3 Геометричний розподіл

Модель, що описує число випробувань n з імовірністю успіху p , необхідних для появи першого успішного результату (включаючи також і цей результат), зветься *геометричним розподілом*. Він є частковим випадком біноміального розподілу для $k = 1$, тому

$$f(n) = p(1-p)^{n-1} \quad (1.7)$$

Цей розподіл відноситься до статистики подій, що рідко зустрічаються (виникнення аварійних ситуацій, епідемій, нещасних випадків і т.п.). В частковому випадку, за допомогою такої моделі можна розрахувати кількість випробувань, необхідних для того, щоб виявити виріб з певним набором якихось властивостей, наприклад, інтегральну схему з максимальним коефіцієнтом підсилення.

Таким чином, біноміальний і геометричний розподіли одержуються однаково: з послідовності незалежних випробувань Бернуллі. Але якщо цю послідовність перервати після n випробувань, то отримаємо біноміальний розподіл, а якщо після першого успішного результату, то геометричний.

1.7.4 Розподіл Пуассона

Розподіл Пуассона служить моделлю для опису числа появи рідких випадкових подій, що можуть приймати тільки два значення (наприклад, вільно – зайнято, успішне випробування – невдача, придатний виріб – брак і так далі). Цей розподіл виникає в тих випадках, коли поява деякої ознаки має малу ймовірність p , а число випробувань n достатньо велике. Тому середнє число подій $a = np$ невелике. Пуассонівський розподіл при $p \rightarrow 0$ і $n \rightarrow \infty$, тому функція ймовірності того, що в n незалежних випробуваннях подія настане k разів, дорівнює:

$$f(k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a} \quad (1.8)$$

Математичне очікування і дисперсія випадкової величини, розподіленої за законом Пуассона, співпадають і дорівнюють параметру розподілу $a = np$. Додатковою ознакою розподілу Пуассона є висока ймовірність появи нульового числа подій (рис.1.5) в будь-якому інтервалі часу. Сума n незалежних випадкових величин, що мають розподіл Пуассона, має також розподіл Пуассона з параметром $a = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

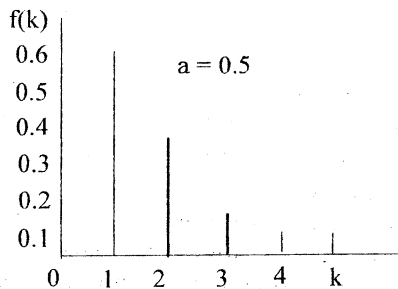


Рисунок 1.5 – Розподіл Пуассона

Формула Пуассона дає ймовірність появи якихось однорідних подій, що виникають одна за одною, в якісь моменти часу, що утворюють *потік подій*. Звичайно такий потік зображується графічною послідовністю крапок на вісі часу (рис.1.6).

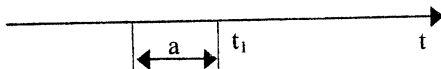


Рисунок 1.6 – Приклад реалізації потоку подій

Для практичних додатків в теорії масового обслуговування важливим є розподіл інтервалів між моментами настання подій, наприклад, на рис. 1.6 розподіл довжин ділянок між крапками, що відповідають окремим подіям.

Якщо потік пуассонівський і на ньому взята якась початкова крапка A , то ймовірність того, що наступна крапка буде розміщена на відстані, не меншій t , дорівнює $p(x=0)$. Іншими словами, це ймовірність того, що на відрізку довжиною t від крапки A іншої крапки немає. Цю ймовірність можна знайти за формулою (1.8), вважаючи $k=0$:

$$P(x=0) = \frac{a^0}{0!} e^{-a} = e^{-\lambda t}, \quad t=0, 1, 2, \dots, \quad (1.9)$$

де λ – інтенсивність потоку.

Отже, ймовірність того, що величина інтервалу між сусідніми подіями не перевищує t , дорівнює $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

Безперервні розподіли

1.7.5 Рівномірний (прямокутний) розподіл

Випадкова величина X називається рівномірно розподіленою, якщо вона визначена в інтервалі $a \leq X \leq a+b$ і має щільність імовірності $f(x) = 1/b$ (рис.1.7).

Рівномірний розподіл використовується в основному при імітаційному моделюванні складних систем на ЕОМ, бо рівноймовірний розподіл випадкових чисел служить первісною основою для отримання всіх необхідних статистичних моделей.

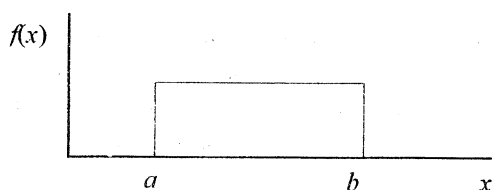


Рисунок 1.7 – Безперервний рівномірний розподіл

1.7.6 Нормальний розподіл

Цей розподіл імовірностей займає особливе місце серед різноманітних теоретичних законів, бо за допомогою його описуються більшість випадкових явищ, зв'язаних з вимірами. До випадкових явищ, що підкоряються нормальному закону розподілу, відносяться помилки вимірів виробничих параметрів, розподіл технологічних похибок, зростання та вага більшості біологічних об'єктів і т.д., в тому числі нормальному закону підпорядкований і показаний на рис. 1.2 розподіл параметрів плівкових резисторів.

Рівняння, що описує щільність імовірності нормального розподілу, має вигляд:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (1.10)$$

Таким чином, нормальний розподіл характеризується двома параметрами: μ і σ , а на графіку являє собою симетричну дзвоноподібну криву Гаусса, що має максимум в точці, яка відповідає значенню $x = \mu$, а при $x \rightarrow -\infty$ і $x \rightarrow +\infty$ – асимптотично наближається до вісі абсцис (рис.1.8).

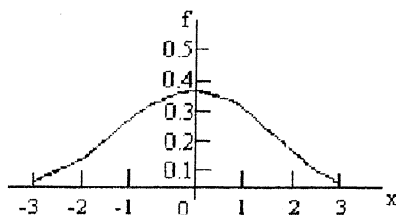


Рисунок 1.8 – Нормальний розподіл

Точка перегину кривої знаходиться на відстані σ від центру розподілу. Зміна параметру σ призводить до зміни ступеня розтягу кривої: зі зменшенням σ крива витягується в центрі, а при збільшенні σ крива швидше наближається до вісі абсцис (рис. 1.9).

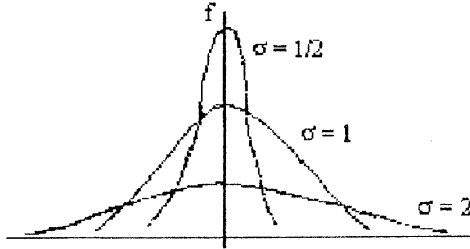
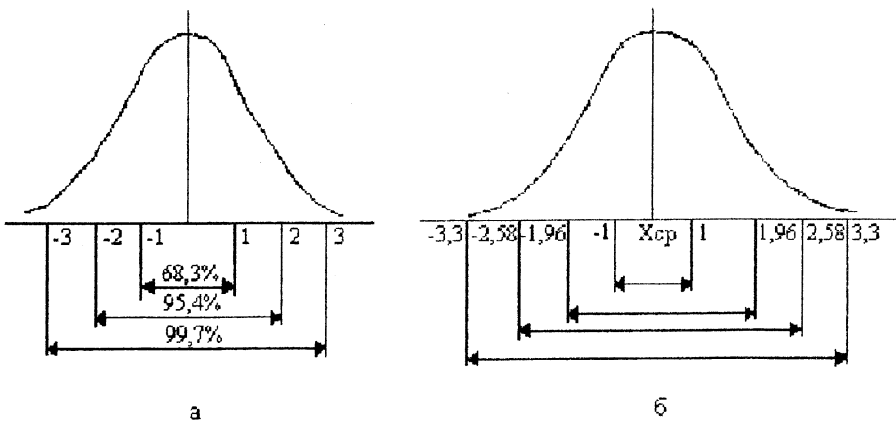


Рисунок 1.9 – Залежність форми нормального розподілу від параметру σ

Між абсцисами $(\mu - \sigma)$ і $(\mu + \sigma)$ розміщено 68.3% всієї площі кривої нормального розподілу (рис. 1.10,а). Це означає, що при нормальному розподілі 68.3% всіх заміряних одиниць відхиляється від середнього значення не більш ніж на σ , тобто всі вони знаходяться в межах $\mu \pm \sigma$.



а – обмежених ординатами $\pm \sigma$; $\pm 2\sigma$; ± 3 ; б – обмежених ординатами 95%, 99%, 99,9%

Рисунок 1.10 – Зміст статистичної сукупності в межах фіксованого відхилення від центру

Площа, розташована між ординатами, проведеними на відстані 2σ з тієї та іншої сторони від центру, складає 0.9545, тобто 95.4% всіх одиниць сукупності знаходяться в межах $\mu \pm 2\sigma$. І нарешті, 0.9973 або 99.7% всіх одиниць знаходяться в межах $\mu \pm 3\sigma$. Це так зване правило “трьох сигм”, характерне для нормального розподілу. Згідно з цим правилом, за межами відхилення на 3σ знаходиться не більше 0.27% всіх значень величин, іншими словами 27 реалізацій на 10 тисяч.

В технічних додатках прийнято при оцінці результатів вимірів працювати з частками площі кривої нормального розподілу рівними 95, 99 і 99.9%. Цим значенням відповідають величини $\alpha_{95} = 1.96$; $\alpha_{99} = 2.576$; $\alpha_{99.9} = 3.291$ (рис. 1.10,б).

Нормальний розподіл є основним в багатьох практичних дослідженнях.

Умови його виникнення зв'язані з центральною граничною теоремою, вперше сформульованою відомим російським математиком П.Л. Чебишевим. Центральна гранична теорема стверджує, що розподіл будь-якої ознаки (параметру) при впливі на нього великого числа незалежних причин зводиться до нормального розподілу незалежно від вигляду вхідного розподілу. Умови виготовлення багатьох деталей і компонентів більшості промислових виробів характеризуються саме впливом на них великого числа незалежних факторів: різноманітних властивостей матеріалів, кваліфікації операторів процесу, вагань навколишньої температури, напруги живлення і т.п. Коли всі фактори виявляють вплив приблизно одного порядку, одержуємо, що результативні відхилення параметрів від номінальних значень, що визначають остаточний результат виробничого процесу, як правило, є випадковими величинами з нормальним законом розподілу. Однак нормальний розподіл не є єдино можливим. В залежності від фізичної природи випадкових величин деякі з них на практиці можуть мати розподіли, що відрізняються від нормального.

1.7.7 Логарифмічно нормальний розподіл

Стисло його називають *логнормальним* – це така статистична модель, в якій нормальний розподіл має логарифм випадкової величини:

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln x - x_{cp})^2}{2\sigma^2}\right] \quad (1.11)$$

Логарифмічне перетворення випадкових величин використовується для кращого наближення асиметричних розподілів до нормального закону. Асиметричні розподіли характерні для явищ, що можуть описуватися тільки позитивними значеннями випадкових величин. Наприклад, час зносу обладнання, термін служби більшості компонентів; в економіці – це утворення індексу цін, розподіл прибутків і т.п. За логарифмічним нормальним законом розподілені закономірності відмов радіоелектронної апаратури в період її старіння. Графік функції щільності наведено на рис. 1.11.

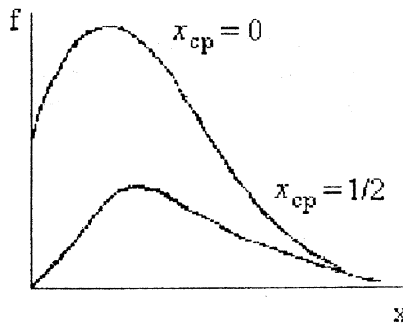


Рисунок 1.11 – Графік функції логарифмічного нормального розподілу

1.7.8 Експоненціальний розподіл

Випадкова величина має експоненціальний чи показниковий розподіл, якщо її функція щільності описується законом:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad (1.12)$$

де $\lambda > 0$ – параметр цього розподілу.

Експоненціальний розподіл є безперервним аналогом дискретного розподілу, що має показниковий закон розподілу. Наприклад, термін виконання окремих операцій у технологічних

процесах, інтервали часу між послідовними відмовами у електричній апаратурі та інших механізмах і т.п.

Експоненціальний розподіл є основним в теорії процесів Маркова, бо він має властивість *відсутності наслідку*, тобто послідовні моменти настання деяких подій (телефонних викликів, відмов апаратури, прибуття клієнтів і так далі) розподілені по вісі часу незалежно один від одного. Графік щільності експоненціального розподілу наведений на рис. 1.12.

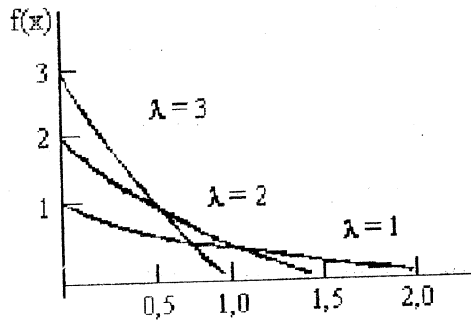


Рисунок 1.12 – Графік функції експоненціального (показникового) розподілу

1.7.9 Розподіл Вейбулла

Ця математична модель була спеціально розроблена для використання в теорії надійності і опису часу безвідмовної роботи складної радіоелектронної апаратури. Функція щільності ймовірності розподілу Вейбулла представляється законом:

$$f(x) = |\beta| \lambda x^{\beta-1} e^{-\lambda x^{\beta}} \quad (1.13)$$

де β – параметр форми;

λ – параметр масштабу (його інколи називають характеристичним часом життя).

В залежності від значення параметрів β розподіл Вейбулла широко застосовується при оцінках надійності. Одна з головних причин цього – наявність параметру β . Підбираючи відповідні величини λ і β , є можливість досягти більш повної відповідності

теоретичного закону розподілу експериментальним даним, ніж при експоненціальному розподілі, що залежить тільки від одного параметру λ (рис. 1.13).

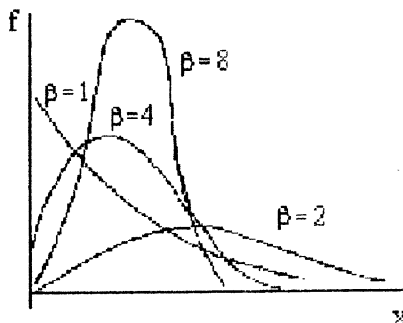


Рисунок 1.13 – Розподіл Вейбулла при різноманітних значеннях параметрів β

1.8 Вибірковий метод контролю

В колишні роки, коли обсяги випуску промислової продукції були не настільки великі, як в нинішній час, робилась 100%-а перевірка продукції і всіх її компонентів. Коли обсяги виробництва зросли, контролери стали робити вибірку перевірку. Визначення кількості виробів у вибірці та рішення про прийняття або відбракування спочатку ґрунтувались не на точних математичних засобах, а тільки на інтуїції. При такому підході в адресу відділу технічного контролю часто йшли претензії, з одного боку, в тому, що дуже багато марно бракують, а з іншого – в тому, що, навпаки, дуже багато браку пропускають.

Тому для практики великий інтерес представляє можливість судити про розподіл випадкових величин і визначати виробничі похибки у всіх виготовлених виробах за результатами змін параметрів в невеликій пробній партії.

В нинішній час, коли у зв'язку з масовим характером виробництва суцільний контроль займає настільки багато часу і вимагає таких великих витрат, що може зробити виробництво нерентабельним, вибірковий засіб контролю розвинувся і був поступово замінений науково обґрунтованим *статистичним контролем*. З його допомогою можна одержувати вірогідні відомості

про оптимальний розмір вибірки, про критерії приймання або відбракування і про даний ступінь ризику, що супроводжує виробника, ризик споживача.

Вибірковий засіб контролю цілком доречний в тих випадках, коли досліджуються механічна або електрична міцність, надійність, термін служби та інші параметри, для визначення яких вимагається зруйнування зразків або робота апаратури до повного витрачення ресурсу. Крім того, вибірковий засіб широко застосовується для контролю стабільності технологічних процесів.

На практиці потрібно судити про розподіл випадкових величин в усіх виготовлених виробих, що називають генеральною сукупністю, за результатами вимірів відносно невеликої пробної партії (вибіркової сукупності). Очевидно, що числове значення характеристики випадкової величини, обчислене на підставі обмеженого числа випробувань, саме буде випадковою величиною. Це значення називається *оцінкою параметру*. Засоби математичної статистики дозволяють з певною ймовірністю зробити висновки відносно параметрів розподілу в генеральній сукупності за результатами дослідження вибіркової сукупності малого обсягу. Статистична теорія дає можливість за статистичними параметрами вибірки зробити оцінку відповідних параметрів генеральної сукупності.

Параметри функції розподілу для генеральної сукупності звичайно позначаються грецькими літерами, а оцінки параметрів цієї ж функції, знайдені за вибірками обмеженого обсягу, – латинськими. Наприклад, дисперсія генеральної сукупності позначається σ^2 , а її оцінка за вибірковими даними – S^2 .

Якщо є набір n випадкових величин (наприклад, окремих значень деякого параметру n штук виробів), отриманих з великої партії (генеральної сукупності), розподіленої за нормальним законом, то математичне очікування партії буде відповідати математичному очікуванню всієї сукупності. Але параметри генеральної сукупності нам не відомі, тому потрібно “рухатися” в зворотному напрямку – середнє значення в вибірковій партії вважати оцінкою середнього значення в генеральній сукупності. Однак, хоча середнє вибірки може бути надто близьким до середнього для генеральної сукупності, ці величини не обов'язково співпадають.

Середнє, отримане за вибіркою, і середнє генеральної сукупності були б однаковими, якщо б вхідна сукупність (генеральна) була

однорідною, тоді вибіркове середнє дорівнювало б відповідному значенню загальної сукупності. Але оскільки в заміряній сукупності є варіації, можна припустити, що такі ж варіації є і в генеральній сукупності, і вони повинні виявлятися між перетином всієї сукупності і вибірквим середнім. Чим більше відхилення у вхідній сукупності, тим більше різниця між середнім вибірквим і перетином генеральної сукупності.

Якщо з партії нормально розподілених величин з дисперсією σ вибрати декілька часткових сукупностей обсягом n кожна, то середні значення цих сукупностей будуть теж розподілені нормально з тим самим середнім значенням, але з меншою дисперсією. Одержані розподіли показані на рис.1.14. На цьому рисунку зображений розподіл середніх значень в часткових сукупностях обсягом $n_1 = 5$ і $n_2 = 10$ порівняно з розподілом самої випадкової величини ($n = 1$).

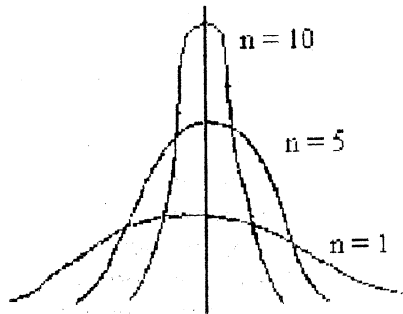


Рисунок 1.14 – Розподіл середніх значень випадкових величин знайдених за вибірками різного об'єму

Таким чином, дисперсія середніх значень в n разів менше, ніж дисперсія кожної окремої величини:

$$\sigma_n^2 = \frac{\sigma^2}{n} \quad (1.14)$$

Відповідно основне відхилення середнього, що характеризує варіації випадкових змінних, буде в n разів менше, ніж у окремих змінних. В результаті одержуємо, що середнє є більш надійною характеристикою, ніж кожна окрема випадкова змінна. Дисперсія і основне відхилення малої вибірки, звичайно, залежать від варіацій в генеральній сукупності. Однак вибіркова дисперсія містить не тільки

випадкову похибку, як будь-яка вибіркова характеристика, але і систематичну, величина якої дорівнює дисперсії вибірових середніх. В результаті оцінка дисперсії генеральної сукупності має вигляд:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - x_{cp})^2}{\sigma / \sqrt{n}} \quad (1.15)$$

Оцінка дисперсії (1.15) відрізняється від (1.14) знаменником (замість n повинно використовуватися $n - 1$). Величина $(n - 1)$ називається числом ступенів волі для дисперсії. В загальному випадку *число ступенів волі* – це різниця між числом випадкових величин та кількістю лінійних співвідношень між ними. В розглянутому випадку одне лінійне співвідношення вже було використане для визначення середнього, тому число ступенів волі $\nu = n - 1$.

Якщо б дисперсія всієї генеральної сукупності була відома, то можна було б отримати відношення відхилення середнього X_{cp} від математичного очікування X_0 (тобто від середнього значення всієї сукупності) до основної похибки:

$$\tau = \frac{x_{cp} - x_0}{\sigma / \sqrt{n}} \quad (1.16)$$

Ця величина має нормальний розподіл із середнім, що дорівнює 1.

Але дисперсія загальної сукупності є невідомою, тому замість неї потрібно використати її оцінку, отриману за результатами виміру малої партії S^2 . Відхилення середнього значення часткової сукупності від середнього значення загальної сукупності, нормоване за допомогою оцінки, позначається t :

$$t = \frac{x_{cp} - x_0}{S / \sqrt{n}} \quad (1.17)$$

При цьому n може бути яким завгодно, в тому числі і малим. Завдяки цьому, даний розподіл лежить в основі засобів оцінки

параметрів при малих кількостях виробів, що підлягали випробуванням. Засоби оцінки параметрів статистичної сукупності за даними, отриманими з партії малого об'єму, в тому числі і розподіл (1.17), були розроблені англійським математиком Карлом Госсетом. Однак він працював в приватній фірмі, та з умов свого контракту повинен був публікуватись під псевдонімом Стюдент, тобто студент. Під такою назвою розподіл (1.17) відомо і в нинішній час.

Розподіл Стюдента симетричний, але більш сплюснений, ніж крива нормального розподілу, і тому витягнутий на кінцях (рис. 1.15). Для кожного значення n є своя t – функція і свій розподіл. Величину t дає таблиця 1.2, в якій наведені ординати розподілу Стюдента, відповідні заданим рівням значимості при різному числі ступенів волі, тобто, різному числі виробів у вибірці.

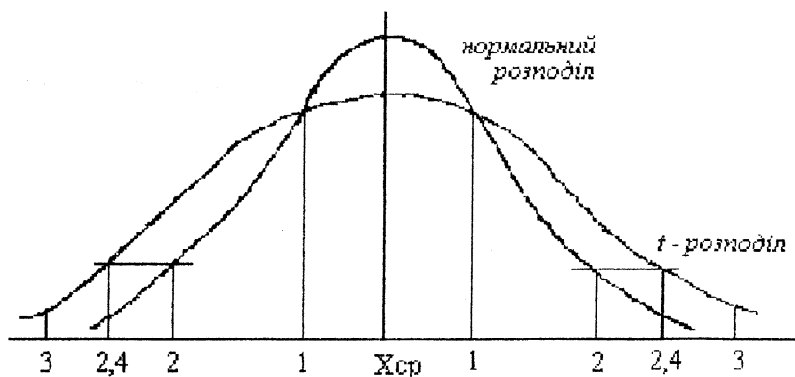


Рисунок 1.15 – Розподіл для малих вибірок (розподіл Стюдента)

При великих n розподіл Стюдента асимптотично наближається до стандартного нормального розподілу. З прийнятою для практики точністю можна вважати, що при $n \geq 30$ t – розподіл аппроксимується нормальним. Однак для $n < 30$ довірчі інтервали ширше і ймовірність похибки більше, ніж при нормальному розподілі.

Таблиця 1.2 – Розподіл Стюдента

Число ступенів волі $\nu = n - 1$	Рівні значимості	
	0.05	0.01
1	12.71	63.66
2	4.30	9.92
3	3.18	5.84
4	2.78	4.60
5	2.57	4.09
6	2.45	3.71
8	2.31	3.36
10	2.23	3.17
12	2.18	3.06
15	2.13	2.95
20	2.09	2.85
25	2.06	2.79
30	2.04	2.75

1.9 Статистичний контроль

Коли відомий розподіл випадкової величини, можна отримати всі особливості даної партії виробів: визначити середнє значення, дисперсію, граничні відхилення і т.д. Однак повна сукупність статистичних параметрів будь-якої партії промислових виробів, а значить, і закон розподілу ймовірностей стають відомими тільки після того, як вся партія вже виготовлена і параметри заміряні. При цьому вибіркового засіб стає непотрібним. Бо всі дані, що нас цікавлять, отримані безпосередньо.

На практиці закон розподілу генеральної сукупності майже завжди невідомий, і єдиним джерелом інформації служить вибірка, звичайно мала, отримана з генеральної сукупності, яка вивчається. Розподіл вибірки розглядається в якості оцінки теоретичної функції розподілу $f(x)$ генеральної сукупності.

Кожна з розрахованих за вибірковими даними числова характеристика, наприклад, середнє арифметичне $\bar{X}_{\text{ср}}$ або оцінка дисперсії, є реалізація випадкової величини, що від вибірки до вибірки може приймати різні значення. Задачі контролю полегшуються завдяки тому, що в більшості випадків не вимагається точного знання

відмінностей випадкових значень від заданої величини. Достатньо лише знати, чи відрізняються значення, що спостерігаються, більше ніж на величину допустимої похибки. Відповідь на таке питання можна отримати за допомогою табл. 1.2.

Розповсюдження на генеральну сукупність оцінок, зроблених за вибірковими даними, може бути здійснене тільки з деякою ймовірністю $p(t)$. Таким чином, переконання про властивості генеральної сукупності завжди носить ймовірний характер і містить елемент ризику, бо висновки робляться за вибірковими даними. При обмеженій інформації, можуть виникати *помилки першого і другого роду*. Помилка першого роду робиться тоді, коли відкидається правильна гіпотеза; якщо буде прийнята невірна гіпотеза, робиться помилка другого роду.

Ймовірність припустити помилку першого роду називають *рівнем значимості* і позначають α . Область, що відповідає ймовірності α , називається *критичною*, а область, що доповнює її, ймовірність попадання в яку $(1 - \alpha)$, – *допустимою*. Ймовірність помилки другого роду позначається β , а величина $(1 - \beta)$ називається *потужністю критерію*. Чим більше потужність критерію, тим менше ймовірність вчинити помилку другого роду, однак при цьому може зростати ризик α , особливо при малих фіксованих вибірках.

У працях по контролю якості промислової продукції величина α називається *ризиком виробника*, бо, відкидаючи правильну гіпотезу, він бракує придатну продукцію. Величина β називається *ризиком споживача*, бо, припускаючи невірну гіпотезу, він приймає і використовує фактично непридатну продукцію. Вибір значень α і β в таких умовах залежить від техніко-економічної тяжкості наслідків, що виникають від вчинення помилок першого і другого роду. З ймовірністю α невідоме значення X_0 повної сукупності лежить в інтервалі:

$$(X_{cp} - tS) < X_0 < (X_{cp} + tS) \quad (1.18)$$

Ілюстрація даного випадку оцінки середнього значення загальної сукупності за результатами заміру часткової сукупності наведена на рис. 1.16.

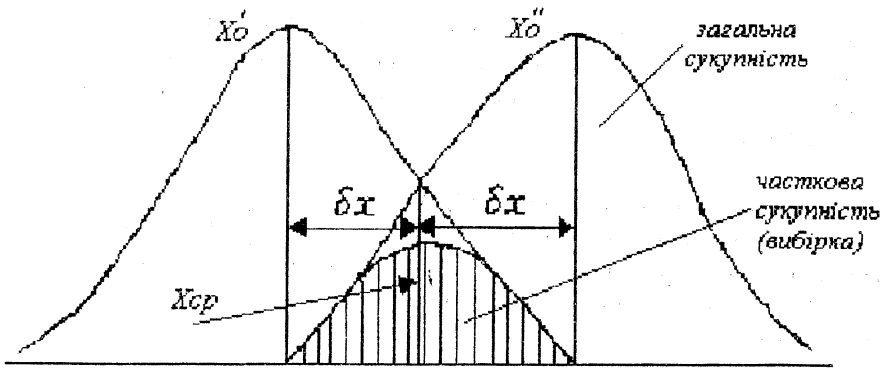


Рисунок 1.16 – Оцінка середнього значення в великій сукупності за вибіркою малого обсягу

Строгість цього висновку не залежить від обсягу партії, що досліджується, але зі збільшенням n зменшується величина інтервалу. Величина інтервалу зв'язана з ймовірністю ствердження про те, що в ньому міститься середнє сукупності X_0 . Якщо проведене велике число експериментів з вибірками і в кожному випадку обчислені інтервали можливих значень, то в $\alpha 1$ випадках оцінка середнього для повної сукупності буде лежати в цих межах. В інших $(1 - \alpha 1)$ випадках середнє значення буде знаходитися або лівіше нижньої границі інтервалу, або правіше верхньої границі, тобто поза означеною областю значень.

Граничні значення X_0 прийнято називати *довірчими границями*. При зменшенні обсягу вибірки довірчі границі розширюються, а ймовірність помилки зростає. В кінці кінців для дуже малих вибірок довірчі границі стають настільки широкі, а ймовірність помилки настільки велика, що практична цінність статистичних висновків виявляється незначною.

Задаючись, наприклад, 5%-ним рівнем значимості, вважають, що подія, яка має ймовірність, меншу 0.05, практично не може здійснитися при малому числі випробувань. Тому невідоме значення X_0 з ймовірністю 0.95 лежить в інтервалі (1.18). Іншими словами, ця точність буде рівна: $\delta x = ts$.

Для ймовірності $\alpha 2 > \alpha 1$ інтервал стає більшим, а ймовірність $(1 - \alpha 2)$ влучити поза область – меншою. Це збільшення ймовірності

зумовлене розширенням тієї області, в яку повинно влучити середнє значення генеральної сукупності. Таким чином, можна зробити висновок: *збільшення надійності досягається ціною втрати точності результатів.*

Приклад 1.2. В якості прикладу використання отриманих формул можна визначити з якою точністю можна отримати середнє значення опору резисторів в партії, наведеної в прикладі 1.1 (див. рис. 1.2), якщо використати часткову вибірку з перших 7 шт. Всі обчислення зведені до табл. 1.3.

Таблиця 1.3 – Знаходження середнього та оцінки дисперсії

R_i	$R_i - R_{cp}$	$(R_i - R_{cp})^2$
425	16	256
391	-18	324
432	23	529
409	0	0
418	9	81
403	-6	36
388	-21	441
$R_{cp}=409$	+45	$\Sigma=1667$
	-45	

Отже, $s = 6,3$. З табл. 1.2 $\nu = 7 - 1 = 6$; при $\alpha = 0,95$ знаходимо, що $t_2 = 45$. Тому $\delta * R = 2,45 * 6,3 = 15,43$. Це означає, що з вірогідністю 0,95 середнє значення всіх перелічених резисторів лежить в межах $409 \pm 15,43$, тобто воно лежить в інтервалі від 393.57 до 424.43 Ом. Для оцінки отриманого результату можна вказати, що фактичне значення середнього, наведеної в прикладі сукупності, дорівнює 417.4 Ом.

2 АНАЛІЗ СТАБІЛЬНОСТІ ВИРОБНИЧИХ ПРОЦЕСІВ

В результаті виробничих умов фактичні значення параметрів технологічного процесу і характеристик виготовленої продукції не тільки змінюються в різні сторони за рахунок випадкових похибок, але і дуже часто з течією часу поступово і монотонно відхиляються від заданих значень. Такі односторонні і поступово зростаючі відхилення називаються *систематичними похибками*.

Систематичні похибки повинні ліквідуватися шляхом виявлення і усунення причин, які їх викликають. Проблема полягає в тому, що в реальних виробничих умовах систематичні похибки тяжко відрізнити від випадкових. Незначні систематичні похибки без спеціального статистичного аналізу можуть довго залишатися непомітними на тлі випадкових похибок.

Аналіз заснований на тому, що коли систематичні похибки будуть відсутні, фактичні значення параметрів змінюються випадково. Однак їхні середні значення і основні похибки (дисперсії) залишаються незмінними в часі. В такому випадку конструкцію називають *стабільною*, а технологічний процес – *тривким*.

Тому замість фактичних значень параметрів, обчислених для одиничного виробу, треба кожний раз брати якусь партію і в кожній партії розглядати тільки середні значення. Умовно вважається, що в даній партії всі вироби однакові. При стабільному технологічному процесі випадкові похибки підкоряються нормальному закону розподілу з центром (математичним очікуванням) $\mu = X_0$. Середні значення параметрів, отримані в різноманітних партіях $x'_{cp} \approx \dots \approx x''_{cp}$ повинні приблизно дорівнювати X_0 . Отже, всі вони приблизно дорівнюють один одному:

$$x'_{cp} \approx x''_{cp} \approx \dots \approx x''_{cp} \approx x_0 \quad (2.1)$$

Матеріалом для аналізу стабільності технологічного процесу можуть служити ті ж дані, що використовувались для аналізу точності. Але вони будуть придатні лише в тому випадку, якщо являють собою безперервні спостереження, що охоплюють достатній проміжок часу (зміну, добу), або якщо вони складені з вибірок, відібраних через певні

проміжки часу. Інтервали між вибірками, що називаються в цьому випадку *тимчасовими пробами*, встановлюються в залежності від частоти відмов технологічного обладнання, що спостерігається.

З економічних міркувань число випробувань бажано робити малим, особливо якщо вони супроводжуються зруйнуванням зразків, що досліджуються. У випадку малої вибірки точність приблизної рівності (2.1) можна оцінити виходячи з того, що величина

$$t = \frac{x'_{cp} - x''_{cp}}{S} \quad (2.2)$$

підкоряється розподілу Стюдента з параметром $\nu = n_1 + n_2 - 2$, де n_1 та n_2 – кількість досліджених зразків в першій та другій партіях.

В частковому випадку, при $n_1 = n_2$, отримаємо $\nu = 2 * (n - 1)$. В цьому випадку середньоквадратичне відхилення буде дорівнювати

$$S = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \left[\sum_{i=1}^n (x'_i - x'_{cp})^2 + \sum_{i=1}^n (x''_i - x''_{cp})^2 \right]} \quad (2.3)$$

При заданому критерії значимості середні значення в різних партіях можуть розрізнитися не більш ніж на величину ts , тобто

$$|x'_i - x''_{cp}| \leq ts \quad (2.4)$$

Коли виконується ця умова, можна вважати, що обидві партії взяті з однієї і тієї ж генеральної сукупності. В такій сукупності середнє значення дорівнює X_0 і величини розподілені за нормальним законом. В самому несприятливому випадку обидві вибіркві партії розташовуються на протилежних границях кривої розподілу (рис. 2.1).

Якщо ж відмінність середніх значень в двох партіях буде перевищувати величину ts , то вже не можна вважати, що ця відмінність викликана тільки випадковими причинами. При цьому потрібно визнати, що вхідне припущення про відсутність систематичних похибок невірне і, отже, велика відмінність середніх значень в двох партіях викликана тим, що вони належать до різних сукупностей (з різними X_0). Іншими словами, середнє значення параметру не залишається постійним і, значить, процес нестабільний (відповідно – конструкція нестійка).

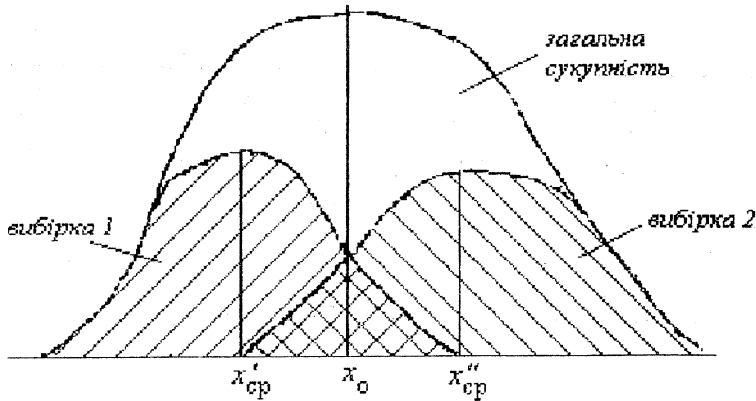


Рисунок 2.1 – Контроль стабільності виробничих процесів вибіркоvim засобом

Таким чином, розбіжність середніх значень в різних партіях більше ніж на ts вказує на наявність систематичних похибок і на необхідність заходів для відкриття і усунення причин, що їх викликають.

Приклад 2.1. Вранці, на початку зміни була взята партія виробів, параметри яких наведені в лівій частині табл. 2.1. Пізніше, при тих же значеннях контрольованих чинників була отримана нова партія. Перші 7 шт. виробів з цієї партії мали параметри, наведені в лівій частині табл. 2.1. Середнє значення в першій партії було 200 Ом, а в другій – 214 Ом.

На перший погляд, друга партія досить значно відрізняється від першої. Однак, оцінимо це відхилення за допомогою статистичного критерію. Всі необхідні розрахунки наведені в табл. 2.1.

Оцінка середньоквадратичного відхилення:

$$S = \sqrt{\frac{1538 + 571}{6 \cdot 7}} = 7,08$$

Число ступенів волі: $\nu = 7 + 7 = 14$. З табл.1.2 при $\alpha = 0,95$ знаходимо $t = 2,18$. Отже, $ts = 2,18 \cdot 7,08 = 15,43$.

Таблиця 2.1 – Статистичний контроль стабільності технологічного процесу

Перша партія			Друга партія		
216	16	256	202	-12	144
182	-18	324	225	11	121
220	20	400	208	-6	36
200	0	0	203	-11	121
209	9	81	215	1	1
194	-6	36	224	10	100
179	-21	441	221	7	49
$X_{cp}=200$	+45 -45	1538	$X_{cp}=214$	+29 -29	572

Оскільки різниця середніх значень в двох партіях ($214 - 200 = 14$) менше розрахованої величини (15,43), можна вважати, що з вірогідністю 0,95 обидві партії належать до однієї і тієї ж статистичної сукупності. Отже, систематичні похибки будуть відсутні і виробничий процес, з якого взяті обидві вибірки, стійкий.

2.1 Перевірка ефективності конструкторсько-технологічних вдосконалень

Статистичні засоби повинні використовуватися також і в ситуаціях, протилежних розглянутим вище. Якщо в конструкцію виробу або технологічний процес його виготовлення вносяться якісь зміни (очевидно, направлені на поліпшення деяких властивостей), то вимагається визначити, в якій мірі це призведе до очікуваних результатів.

При одиничному випробуванні параметри нового виробу можуть прийняти бажані значення, однак це ще не говорить на користь внесених змін, бо позитивний результат може бути випадковим. З іншого боку, якщо буде виявлено, що нові значення не відрізняються від старих, то знов-таки вимагається визначити, чи не є це результатом випадкових збігів в обох партіях.

Отже, необхідно провести ряд випробувань, зробити декілька проб і статистично обробити отримані дані. Середні значення параметрів виробів, отриманих після внесення вдосконалень, треба

порівняти з параметрами контрольної партії, виготовленої в колишніх умовах, якщо ефект вдосконалення можна вважати помітним. В протилежному випадку, можна зробити висновок, що зміни, які внесені в конструкцію або технологію, не призводять до бажаного результату.

2.2 Випадкові процеси

В загальному випадку *процес* – це послідовна зміна станів будь-якої системи в часі. Наприклад, зараз телевізор працює, а через деякий час несподівано відбулася відмова – телевізор не працює. Або ще приклад, крамниця відкрилася, а покупців в ньому немає (перший стан), але через деякий час приходять покупці та всі продавці виявляються зайняті обслуговуванням покупців (інший стан). Ще через якийсь час продавці не встигають обслуговувати прибулих покупців і утворюється черга (новий стан). Всі ці стани і їх послідовна зміна утворюють процес.

В попередніх параграфах також розглядалися процеси, але там результатом процесу було деяке значення параметру, яке неможливо було передбачити з повною вірогідністю. Фактичні значення параметрів могли бути і більші, і менші очікуваних. Кожне заміряне значення давало одну конкретну реалізацію випадкової величини, що приймала те або інше значення у відповідності із законом розподілу ймовірностей. Таким чином, випадковим було вихідне значення параметру процесу.

Тепер будуть розглядатися процеси, в яких стани системи цілком чіткі й певні (тобто, що детермінувалися), але процеси випадкові. Випадковими в них є моменти зміни стану, або, точніше говорячи, інтервали часу між настанням різних подій, що викликають зміну станів.

2.2.1 Потоки подій

Так називається послідовність однорідних подій, що настають одна за одною в якісь випадкові моменти часу. Наприклад, потік викликів на телефонній станції, потік збоїв (відмов) ЕОМ, потік поїздів, що прибувають на станцію.

Потік подій в часі можна наочно зобразити послідовністю крапок на вісі (див. рис. 1.6); не треба тільки забувати, що положення кожної крапки випадково і на рисунку зображена тільки деяка реалізація потоку.

Важливою характеристикою потоку подій є його *інтенсивність* λ , тобто середнє число подій, що припадають на одиницю часу. Інтенсивність може бути як постійною ($\lambda = \text{const}$), так і змінною, що залежить від часу. Наприклад, потік автомашин, які рухаються по вулиці, вдень більш інтенсивний, ніж вночі, в годину пік – більш інтенсивний, ніж в інші години доби.

Потік подій називається *регулярним*, якщо події слідуєть одна за одною через певні, рівні проміжки часу. Прикладами регулярних потоків є поїзди метро, що прибувають на станцію точно за розкладом, або деталі, що виходять з конвеєра. В природі регулярних потоків практично не буває. Більш того, підтримувати потік регулярним буває дуже важко, для цього необхідні узгоджені зусилля диспетчерських служб, відділів постачання, ремонтних бригад та ін. Про трудність підтримання регулярного потоку говорить і той факт, що в таких потоках дуже часто виникають збої (порушення).

Потік подій називається *стаціонарним*, якщо ймовірні характеристики не залежать від часу. В частковості, інтенсивність λ стаціонарного потоку повинна бути постійною. Це не значить, що фактичне число подій, що відбуваються в одиницю часу, постійно. Зовсім ні. Потік, якщо він нерегулярний, може мати якісь випадкові згущення та розрідження, але для стаціонарного потоку ці згущення і розрідження не носять закономірного характеру. Одна дільниця може мати більше подій, а інша – менше, але середнє число подій, що відбуваються за одиницю часу, постійно, і від часу не залежить.

Відхилення потоку від стаціонарності, як правило, викликаються деякими фізичними або організаційними причинами. Наприклад, інтенсивність потоку телефонних викликів, що надходять на АТС, вночі менше ніж удень. Збільшення інтенсивності потоку покупців, що приходять в крамницю після закінчення робочого дня, теж має логічне пояснення. Тому, якщо потік подій має тенденцію до явно висловлених згущень і розріджень (особливо періодичних), то завжди можна запідозрити причинно-наслідковий зв'язок і постаратися його з'ясувати.

Потік подій називається *без наслідків*, якщо для будь-яких двох дільниць часу число подій на одній із них не залежить від того, скільки подій було на іншій. По суті це означає, що події, що утворюють потоки, з'являються незалежно одна від одної і викликаються кожна своїми власними причинами.

Потік подій називається *ординарним*, якщо події в ньому з'являються поодиночі, а не групами по декілька відразу. Наприклад, потік поїздів, що прибувають на станцію, ординарний, а потік вагонів – неординарний. Якщо потік подій ординарний, то ймовірність попадання на малу дільницю часу двох або більше подій буде дуже мала.

2.2.2 Найпростіший потік

Потік подій називається *найпростішим*, якщо він характеризується відразу трьома властивостями: стаціонарний, ординарний і не має наслідків. Назва “найпростіший” пов'язана з тим, що процеси, які визначають найпростіші потоки, мають найбільш простий математичний опис.

Найпростіший потік серед інших видів потоків подій грає особливу роль, подібну ролі нормального розподілу серед інших статистичних законів. А саме, при накладенні (суперпозиції) достатньо великого числа незалежних, стаціонарних і ординарних потоків одержується найпростіший потік.

Для найпростішого потоку з інтенсивністю λ інтервал T між сусідніми подіями має показниковий розподіл, що визначається формулою (1.9). Для випадкової величини T , що має показниковий розподіл, математичне очікування є величина, зворотна параметру λ , а середнє квадратичне відхилення дорівнює математичному очікуванню.

2.2.3 Марковські випадкові процеси

Ці процеси отримали свою назву від часу знаменитого російського і радянського математика, академіка Російської академії наук А. А. Маркова (1856–1922). В марковських процесах закон великих чисел розповсюджується на випадкові величини, що залежать одна від одної. В результаті виникає так званий *марковський ланцюг*, в

якому вплив величин одна на одну швидко зменшується за мірою збільшення їх взаємної відстані.

Дослідження А. А. Маркова про залежність випадкових величин займають центральне місце в сучасній теорії ймовірностей і лежать в основі більшості її додатків до різноманітних галузей знань – економіки, біології, геології, техніки. В фізиці, наприклад, математичний апарат марковських ланцюгів широко використовується для дослідження дифузії газів. В біології за допомогою марковських ланцюгів вивчається характер розвитку окремих видів тварин і рослин. В соціології марковські ланцюги допомагають вивчати проблеми зміни соціальної і професійної структури населення, питання його переміщення і таке інше. В техніці з їхньою допомогою описують передачу повідомлень, а також процеси контролю дієздатності апаратури, діагностики і пошуку несправностей.

В дослідженні операцій велике значення мають марковські випадкові процеси з дискретними станами і безперервним часом. Процес називається *процесом з дискретними станами*, якщо його можливі стани можна заздалегідь перерахувати (перенумерувати) і перехід системи з одного стану в інший відбувається стрибком, практично миттєво. Процес називається *процесом з безперервним часом*, якщо моменти можливих переходів зі стану в стан не фіксовані заздалегідь, а невизначені, випадкові. Приклад такого процесу: технічне влаштування, що складається з двох вузлів, кожний з яких у випадковий момент часу може вийти з ладу, після чого миттєво починається ремонт, що триває теж заздалегідь невідомий, випадковий час.

Якщо процес, що протікає в системі з дискретними станами і безперервним часом, є марковським, то для його опису можна побудувати досить просту математичну модель. При аналізі випадкових процесів з дискретними станами зручно користуватися геометричною схемою – *графом станів*: стани системи зображуються прямокутниками (колами або, навіть, крапками), а можливі переходи зі стану в стан – стрілками, що з'єднують ці стани.

Для наочності дуже зручно на графі стану біля кожної стрілки проставляти інтенсивність того потоку подій, що переводить систему за даною стрілкою. Граф з поставленими біля стрілок станами називають *розміченим*. Маючи в своєму розпорядженні розмічений граф станів системи, можна легко побудувати математичну модель

даного процесу. Прямо за графом можна записати систему лінійних алгебраїчних рівнянь. В лівій частині кожного рівняння стоїть ймовірність даного стану, помножена на сумарну інтенсивність всіх потоків, що ведуть з даного стану, а в правій – сума всіх потоків, що входять в цей стан, помножених на ймовірності відповідних станів.

2.3 Системи масового обслуговування

В побуті системами масового обслуговування є телефонні станції, квиткові каси, торгові підприємства, перукарні, майстерні і так інше. Не настільки явним прикладом системи масового обслуговування є літак, що прибуває в аеропорт. Оскільки літак повинен здійснити посадку, можна сказати, що він потребує обслуговування – надання йому посадочної смуги. Літаки повинні літати точно за розкладом (тобто потік прибуття повинен бути регулярним), але із-за різних причин фактичний час прибуття кожного окремого літака може бути і декілька раніше, і декілька пізніше призначеного часу. Тому літаки прибувають у випадкові моменти, і на час прибуття чергового літака посадочна смуга може бути зайнятою, тому йому потрібно “встати в чергу”, тобто літак кружить над аеродромом, очікуючи доки посадочна смуга не звільниться. Зрозуміло, що “піти не обслугованим” (не вчинивши посадки) літак не може.

В виробничих умовах ситуації, що можна інтерпретувати як потребу в “обслуговуванні”, виникають дуже часто. От лише декілька прикладів.

- На виході складального конвеєра є пост контролю, що затримує всі вироби з дефектами і передає їх спеціальній бригаді для виправлення. Оскільки появи браку відбуваються в випадкові моменти, інколи кількість дефектних виробів може зростати і вони накопичуються на дільниці. Вимагається встановити, скільки потрібно мати робітників, зайнятих усуненням дефектів, щоб не порушувався ритм здачі готової продукції і щоб робітники при цьому не простоювали довго без діла.
- Частина обладнання виробничої дільниці з часом виходить із ладу і повинна ремонтуватися. Відмови обладнання, так як і

тривалість ремонту, величини випадкові. Коли ремонтна бригада вільна, вона відразу приймається за роботу, а якщо ремонтники зайняті, то верстат повинен чекати своєї черги. Доки обладнання знаходиться в ремонті або чекає своєї черги, продукція на ньому не виробляється і загальна продуктивність дільниці в даних умовах падає, тому слід вжити міри для її підвищення. Треба знайти оптимальне співвідношення витрат, зв'язаних із втратами від черг на чекання ремонту техніки, і витрат на розширення ремонтної бригади.

- В цеху є верстат (установка герметизації, пофарбування або якийсь інший агрегат), яким за мірою потреби користуються всі робочі дільниці. Продуктивність установки достатньо висока і в принципі може забезпечувати обслуговування всіх робочих, але із-за випадкового характеру виникнення потреб в якісь моменти верстат виявляється зайнятим і накопичується черга. Необхідно знати середній час очікування і на скільки може знизитися із-за цього продуктивність дільниці.

2.3.1 Основні поняття і визначення

Теорія систем масового обслуговування (СМО) вперше була розроблена датським математиком А. К. Ерлангом стосовно до запитів, що надходять на телефонну станцію. Тому основні поняття і визначення зберігаються з практики забезпечення телефонного зв'язку незалежно від фактичного призначення конкретної СМО.

Системи масового обслуговування призначені для виконання потоку заявок або вимог, що надходять на їхній вхід у випадкові моменти часу. Кожна СМО складається з деякого числа *каналів обслуговування*, в якості яких, в залежності від виду системи, можуть виступати: лінії зв'язку, приймальні пункти, робочі пункти, під'їзні шляхи, випробувальні стенди, технологічні агрегати, ремонтні бригади і так далі. Виконання заявки, що надійшла, її обслуговування, триває деякий час (також випадковий), після чого канал звільняється і готовий прийняти наступну заявку.

Вимоги-заявки, що надходять на вхід системи масового обслуговування, сліднують одна за одною і утворюють безперервний потік подій. Звичайно, неможливо заздалегідь передбачити, наприклад, коли якомусь абоненту треба подзвонити по телефону своєму партнеру, але, якщо розглянути усіх абонентів телефонної станції, то, незважаючи на випадковий характер кожної окремої події, в кінцевому потоці можна побачити певну закономірність. Якщо за годину (60 хвилин) було, наприклад, 30 телефонних викликів, то в середньому одна заявка займає інтервал в 2 хвилини. Отже, середнє число подій в одиницю часу – інтенсивність потоку λ – буде $\lambda = 1 / 2 = 0,5$. Наведене вище міркування показує, який сенс має значення інтенсивності 0,5, бо, зрозуміло, не може бути пів виклику в хвилину.

У найпростішому потоці інтенсивність λ є постійною величиною, тобто $\lambda = \text{const}$.

Системи масового обслуговування можуть бути двох типів: *СМО з відмовами*, в яких заявка, що надійшла в той момент, коли всі канали зайняті, одержує відмову і не обслуговується; *СМО з очікуванням*, в яких кожна заявка, прибула в систему, коли в ній немає вільних каналів, залишається і очікує, доки не визволиться який-небудь канал і її не візьмуть на обслуговування. По аналогії з системами для обслуговування населення заявки, що очікують, називають *чергою*, хоча це не обов'язково черга в звичайному розумінні цього слова. Черги утворюють, в частковості, деталі в бункері-накопичувачі; непрацюючі верстати, що очікують ремонту; інформація, що накопичилась в пам'яті ЕОМ, і таке інше.

Порядок обслуговування також не обов'язково слідує такому ж принципу, як при обслуговуванні черги людей: хто першим прийшов, той першим обслуговується. У виробничих умовах часто буває навпаки: в першу чергу обробляються (обслуговуються) деталі, що надійшли останніми, бо саме вони лежать в бункері згори. Дуже часто заявки обслуговуються в якомусь випадковому порядку.

2.3.2. Системи масового обслуговування з відмовами

Самий простий приклад СМО з відмовами – це автоматична телефонна станція. Якщо абонент, що викликається, зайнятий, то будуть короткі гудки і очікувати дарма. В залежності від ступеня

необхідності в обслуговуванні, заявки або покидають систему, або звертаються повторно. Одноканальна система масового обслуговування – це сама проста СМО, на якій можна розглянути основні закономірності її роботи.

На вхід системи поступає потік заявок із інтенсивністю λ . Заявка, яка поступила в момент, коли система не зайнята, одразу ж береться на обслуговування. Наступна заявка, що прибуває в момент, коли канал обслуговування зайнятий, одержує відмову. Час обслуговування заявки має випадкову тривалість, але є деяке середнє значення, в результаті чого на виході утворюється *потік обслуговування* з інтенсивністю μ . Наочно потік обслуговування можна уявити таким чином, що, якщо б канал обслуговування був безупинно завантажений, то з нього виходив би потік обслугованих заявок (рис. 2.2).



Рисунок 2.2 – Потік заявок і потік обслуговування у системі масового обслуговування

Якщо середній час обслуговування однієї заявки (в прикладі з телефонною станцією – це середня тривалість однієї розмови) складає 0.5 хвилин, то інтенсивність потоку обслуговування $\mu = 1 / 0,5 = 2$. Одноканальна СМО може знаходитись тільки в одному з двох станів: S_0 – вільна, S_1 – зайнята. Граф станів системи, що показує можливі переходи з одного стану в інший, зображений на рис.2.3.

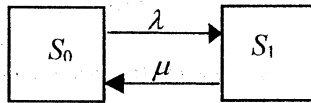


Рисунок 2.3 – Граф одноканальної СМО з відмовами

Можливість знаходження СМО у вільному стані S_0 визначається якоюсь, доки нам не відомою, ймовірністю p_0 . Відповідно p_1 – це ймовірність того, що система знаходиться в зайнятому стані S_1 . Оскільки система може знаходитись тільки в одному з двох станів, то в якомусь із них вона завжди знаходиться, тому сума ймовірностей дорівнює одиниці:

$$p_0 + p_1 = 1 \quad (2.5)$$

Щоб система могла перебувати в цих двох станах, впливи, що виводять її зі стану S_0 , повинні врівноважуватися впливами, що вертають систему назад в цей стан. Величина кожної взаємодії визначається добутком інтенсивності потоку на відповідну ймовірність, тобто

$$\lambda p_0 = \mu p_1 \quad (2.6)$$

З цього виразу визначаємо

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0 \quad (2.7)$$

Враховуючи, що сума ймовірностей завжди дорівнює одиниці, отримаємо

$$p_0 + \frac{\lambda}{\mu} p_0 = 1 \quad (2.8)$$

Іншими словами

$$p_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \quad (2.9)$$

І відповідно

$$p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \quad (2.10)$$

Основними параметрами СМО з відмовами є: *відносна пропускна спроможність* і *абсолютна пропускна спроможність*, а також *імовірність отримання відмови*.

Відносна пропускна спроможність q визначається ймовірністю того, що в момент приходу заявки канал вільний і вона буде відразу ж обслугована. Для одноканальної системи $q = p_0$. В границі, коли процес вже встановився, значення відносно пропускної спроможності СМО буде дорівнювати

$$q = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \quad (2.11)$$

Абсолютна пропускна спроможність A визначається добутком відносної пропускної спроможності на інтенсивність потоку вимог:

$$A = q\lambda \quad (2.12)$$

В границі вона стає рівною

$$A = \frac{\lambda \mu}{\lambda + \mu} \quad (2.13)$$

Імовірність того, що заявка буде обслугована, позначається p_1 , а імовірність відмови – $p_{\text{відм}}$. Таким чином, імовірність того, що канал буде зайнятий: $P_{\text{вільн}} = P_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$.

Приклад 2.2. Складальна дільниця виробляє в 1 годину 90 блоків, тобто інтенсивність потоку $\lambda = 1,5$ блоків в 1 хвилину. На цій дільниці є контролер, який вибірково перевіряє виготовлені блоки апаратури. Середня тривалість контрольних операцій $t_k = 1,25$ хв. Якщо в момент прибуття чергового блоку контролер зайнятий, то цей блок відразу ж передається на подальші операції без проміжного контролю. Виробництво безперервне і триває до відкриття дефекту в одному з блоків, в цьому випадку технологічний процес зупиняється і з'ясовуються причини, які викликали несправність.

Необхідно визначити, що частина продукції, яка випускається в таких умовах, наражається на контроль і що частина пропускається на подальші операції без контролю (що частина одержує відмову від проходження контрольних операцій).

Визначаємо параметр μ потоку обслуговування: $\mu = 0,8$. Відносна пропускна спроможність $q = 0,8 * (1,5 + 0,8) = 0,348$. Таким чином, контрольним операціям буде підлягати не менше 35% продукції дільниці. Абсолютна пропускна спроможність $A = 1,5 * 0,348 = 0,52$. Імовірність відмови в обслуговуванні, тобто пропуски на подальшу обробку без контролю, $P_{\text{отк}} = 1 - 0,35 = 0,65$. Цікаво, що, якщо збільшити продуктивність праці контролера і, таким чином, знизити тривалість контрольних операцій, то пропускна спроможність системи, звичайно, підвищиться, однак далеко не до такого ступеня, як може показатися з першого погляду. Припустимо, що шляхом оснащення контролю новим, більш продуктивним обладнанням, t_k знизилося в 2 рази і відповідно в 2 рази збільшився потік обслуговування, тобто $\mu = 1,6$. Тоді, при тій же інтенсивності потоку заявок, отримаємо: $q = 1,6 * (1,5 + 1,6) = 0,516$, тобто

контролюватися буде біля 52% всіх виробів, а не 70%, як можна було б очікувати спочатку.

2.3.3 Багатоканальні системи масового обслуговування

Для підвищення пропускної спроможності СМО треба збільшити число каналів обслуговування: число ліній зв'язку в телефонній системі, кількість контролерів на виробництві і так далі. Для споживача це буде зручно, але загальна ефективність системи при цьому може знизитись, бо кожний новий канал вимагає додаткових витрат на установку і обслуговування.

Граф двоканальної системи масового обслуговування з відмовами буде мати вигляд, показаний на рис.2.4.

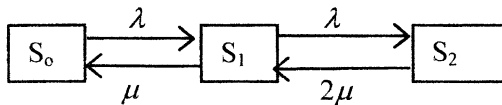


Рисунок 2.4 – Граф двоканальної системи масового обслуговування

Стан S_1 – це стан, коли в СМО є одна заявка і один канал зайнятий, а другий – вільний. Зі стану S_0 в стан S_1 систему переводить потік заявок з інтенсивністю λ . Як тільки приходить перша заявка, один канал стає зайнятим, той же потік переводить СМО з першого стану в другий, коли зайняті обидва канали і наступним заявкам буде даватися відмова.

Якщо в системі зайнятий один канал, то цей канал робить μ обслуговувань в одиницю часу. Тепер, нехай система знаходиться в стані S_2 . В ній працюють два канали. В стан S_1 система буде переходити, якщо закінчив обслуговування або перший, або другий канал. Таким чином, сумарна інтенсивність потоку обслуговування буде дорівнювати 2μ .

Для стану S_0 баланс впливів буде, як і раніше, $\lambda p_0 = \mu p_1$, звідки отримаємо $p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0$.

Для стану S_1 впливи, що виводять з цього стану (стрілки, направлені з S_1), будуть дорівнювати $\lambda + \mu$. Вони компенсуються

впливами, що приводять в цей стан (стрілки, направлені всередину S_1): $\lambda + 2\mu$.

Баланс впливів буде:

$$2\mu p_2 + \lambda p_0 = \mu p_1 + \lambda p_1 \quad (2.14)$$

З урахуванням того, що $\lambda p_0 = \mu p_1$, отримаємо:

$$2\mu p_2 = \lambda p_1 \quad (2.15)$$

Або інакше

$$p_2 = \frac{\lambda}{2\mu} p_1 = \frac{\lambda}{2\mu} \frac{\lambda}{\mu} p_0 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} p_0 \quad (2.16)$$

Оскільки сума всіх імовірностей повинна дорівнювати одиниці, одержуємо:

$$p_0 + \frac{\lambda}{\mu} p_0 + \frac{\lambda^2}{2\mu^2} p_0 = 1, \quad (2.17)$$

звідки слідує

$$p_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2\mu^2}}; \quad (2.18)$$

$$p_2 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} p_0 \quad (2.19)$$

Зробивши за отриманими формулам відповідні розрахунки з даними прикладу 2.2, отримаємо $q = 62\%$. Таким чином, продуктивність двох контролерів більше, ніж одного, який працює в 2 рази швидше.

Граф трьохканальної системи масового обслуговування з відмовами має вигляд, зображений на рис.2.5.

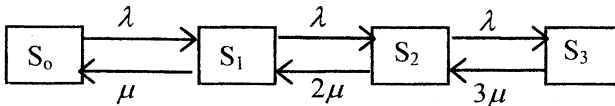


Рисунок 2.5 – Граф трьохканальної СМО з відмовами

Повторюючи міркування, аналогічні попереднім, можна отримати:

$$p_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2\mu^2} + \frac{\lambda^3}{2*3\mu^3}}; \quad (2.20)$$

$$p_3 = \frac{\lambda^3}{2*3\mu^3} \quad (2.21)$$

Зробивши розрахунки з даними для прикладу 2.2, у випадку трьохканальної системи, отримаємо $q = 81\%$. Для багатоканальної СМО вводиться ще один параметр – середнє число зайнятих каналів –

$k_{cp} = \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda q}{\mu}$. Для системи контролю з трьома контролерами отримаємо $k_{cp} = 1,52$.

Таким чином, роботи недостатньо для завантаження навіть двох контролерів, але всі три не забезпечують 100%-ну перевірку всієї продукції, що випускається. Причина такого положення полягає у випадковому характері надходження виробів на контроль.

Можна перевірити, що буде, якщо збільшити число контролерів, хоча, напевно, вже очевидно, що подібний підхід є неефективним. На рис.2.6 зображений граф n -канальної системи масового обслуговування з відмовами.

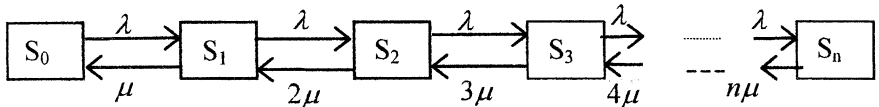


Рисунок 2.6 – Потоки в багатоканальній системі масового обслуговування

Такою ж процедурою, що застосовувалася для 2- і 3-канальних СМО можна отримати

$$p_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2\mu^2} + \dots + \frac{\lambda^n}{n!\mu^n}}; \quad (2.22)$$

$$P_n = \frac{\lambda^n}{n! \mu^n} P_0 \quad (2.23)$$

де $n! = 1 * 2 * 3 * \dots * n$ – ймовірність відмови, а відносна пропускна спроможність $q = 1 - p_n$.

В виробничій системі з чотирма контролерами і при тих же інтенсивностях потоків, що вказані у прикладі 2.2, отримаємо $q = 92\%$, а середнє число зайнятих каналів $k_{\text{ср}} = 1,75$.

Тепер повинно бути ясно, що 100%-ної перевірки всієї продукції таким шляхом не добитися. Отже, необхідно змінити систему обслуговування та перейти до СМО з очікуванням.

2.3.4 Системи масового обслуговування (СМО) з очікуванням

Розглянемо СМО з одним каналом, на вхід якої вимоги надходять з інтенсивністю λ . Заявка, що надійшла в момент, коли канал зайнятий, не покидає систему, а стає в чергу і очікує. Граф станів такої системи має вигляд, показаний на рис. 2.7.

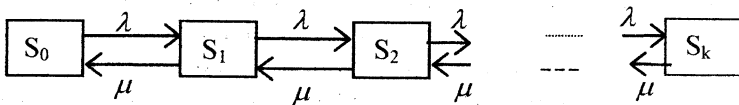


Рисунок 2.7 – Граф системи масового обслуговування з очікуванням

Стан S_0 відповідає вільному каналу; S_1 означає, що канал зайнятий, але черги немає; S_2 – канал зайнятий і одна заявка стоїть в черзі; S_3 – в черзі дві заявки і так далі. В стані S_k , наприклад, канал зайнятий і $(k-1)$ заявок очікує обслуговування. По стрілкам зліва направо систему з одного стану в інший переводить потік обслуговувань, що має інтенсивність λ , а по стрілкам справа наліво – переводить потік обслуговувань, що має інтенсивність μ . Кожного разу, при переході з одного стану в інший, черга зменшується на одиницю.

Для отримання ймовірності початкового стану можна використати рівняння $\lambda = \mu$, звідки $\Theta = \lambda / \mu$. Величину λ / μ називають

інтенсивністю навантаження СМО, в подальшому будемо її позначати Θ . Для стійкої роботи СМО з очікуванням необхідно, щоб середня інтенсивність потоку обслуговування була більше інтенсивності потоку заявок, тобто $\mu > \lambda$ та, отже, $\Theta < 1$. Якщо ж буде $\lambda > \mu$, то система не впорасться з обслуговуванням і черга буде зростати до нескінченності.

Використовуючи введені позначки, ймовірність стану S_k можна записати у вигляді $p_k = \Theta^k p_0$. Щоб отримати ймовірності, можна використати отримані раніше вирази. Аналогічно можна отримати вираз для довільного члена.

Для визначення напишемо вираз для суми ймовірностей:

$$p_0 + \Theta p_0 + \Theta^2 p_0 + \dots + \Theta^k \Theta p_0 = 1 \quad (2.24)$$

Величина являє собою суму членів геометричної прогресії, вона дорівнює $1 / (1 - \Theta)$. Тому $p_0 = 1 - \Theta$. Звідки одержуємо:

$$p_k = \Theta^k (1 - \Theta) \quad (2.25)$$

Використовуючи цей вираз, можна визначити характеристики системи масового обслуговування з очікуванням, істотні для її функціонування: середню довжину черги, середнє число заявок в системі, середній час перебування в системі та ймовірність утворення черги.

З ймовірністю p_2 в черзі стоїть одна заявка, з ймовірністю p_3 – дві заявки і з ймовірністю p_k в черзі $(k - 1)$ заявок. Отже,

$$\begin{aligned} L_{cp} &= 1p_2 + 2p_3 + \dots + (k - 1)p_k = \\ &= \Theta^2 (1 - \Theta) [1 + 2\Theta + 3\Theta^2 + \dots + k\Theta^{k-1}] \end{aligned} \quad (2.26)$$

Сума геометричної прогресії дорівнює $1 + 2\Theta + 3\Theta^2 + \dots$, тобто дорівнює $\frac{1}{(1 - \Theta)^2}$, тому

$$L_{cp} = \frac{\Theta^2}{1 - \Theta} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} \quad (2.27)$$

Середнє число заявок, що знаходяться в системі обслуговування, складається з середнього числа заявок, які знаходяться в черзі, та середнього числа заявок, які знаходяться на обслуговуванні,

включаючи інтервали, коли черги не було. Ця величина w приймає значення 0, якщо канал вільний. Імовірність такого стану дорівнює $1 - \Theta$. Якщо канал зайнятий, то заявки обслуговуються і w приймає значення 1, імовірність цього дорівнює Θ .

Отже,

$$w = Lcp + \Theta = \frac{\Theta^2}{1 - \Theta} + \Theta = \frac{\Theta}{1 - \Theta} \quad (2.28)$$

Середній час очікування в черзі дорівнює середньому числу заявок в черзі, тому вплив на інтенсивність потоку обслуговування:

$$t_{om} = \frac{1}{\mu} \frac{\Theta}{1 - \Theta} \quad (2.29)$$

Або в іншій формі:

$$t_{om} = \frac{\Theta^2}{\lambda(1 - \Theta)} \quad (2.30)$$

Імовірність утворення черги дорівнює ймовірності того, що в системі буде більше однієї вимоги:

$$p_k = 1 - p_0 - p_1 = 1 - (1 - \Theta) - \Theta(1 - \Theta) = \Theta^2 \quad (2.31)$$

Приклад 2.3. Розглянемо таку ж систему контролю продукції, що була в СМО з відмовами (приклад 2.2), але тепер встановимо такий порядок, при якому контролер перевіряє всю продукцію. Якщо контролер буде зайнятий, блоки очікують доки він визволиться.

Інтенсивність навантаження в першому випадку буде: $\Theta = \lambda / \mu = 1,5 / 0,8 = 1,875 > 1$.

При означених умовах даний режим контролю не можливий, оскільки черга буде зростати. В другому випадку, тобто після модернізації контрольного обладнання:

$$\Theta = 1,5 / 1,6 = 0,9375 \leq 1.$$

В системі будуть перевіряти всі 100% виробів, тому колишні параметри (відносна і абсолютна пропускна спроможність) тепер втрачають сенс. Інтерес представляє середня довжина черги – середнє число виробів, що очікують доки контролер визволиться і візьме їх на перевірку. Для її визначення використаємо формулу (2.28):

$L_{cp} = 0,8789 / (1 - 0,9375) = 14,06$. Середнє число виробів, що знаходяться в системі, розраховується за формулою (2.28): $N_{cp} = 0,9375 / 0,0625 = 15$. Середній час очікування в системі контролю визначається за формулою (2.30): $t_{om} = 0,9375 / (1,5 - 0,0625) = 10$ хвилин.

Час очікування знаходиться в допустимих межах, і систему технічного контролю з очікуванням можна вважати цілком прийнятним варіантом ефективної системи контролю, що забезпечує 100%-ну перевірку всіх блоків, тобто ймовірність утворення черги при заданих вище інтенсивностях потоку виробів і продуктивності контролю.

2.4 Контроль надійності

Надійність називають властивість виробів зберігати спроможність до виконання своїх функцій протягом заданого періоду. Ця спроможність повинна зберігатись навіть при наявності зовнішніх кліматичних і механічних впливів на самий виріб і різноманітних фізико-хімічних процесів в його елементах. Надійність – невід’ємний показник якості будь-якого промислового виробу і будь-якої радіоелектронної апаратури, в тому числі, звичайно, комп’ютерів і всіх засобів обчислювальної техніки.

Якість виробу визначається сукупністю багатьох властивостей, таких, наприклад, як чутливість, далекість дії, точність, а для засобів електронно-обчислювальної техніки: обсяг пам’яті, швидкодія, число рівнів запитів і так далі. У число властивостей, що визначають якість, входить і надійність, однак цей показник істотним образом відрізняється від інших. Надійність, взята окремо, ще не означає технічної досконалості виробу. Цей виріб може бути дуже надійним в роботі, але мати низькі технічні характеристики.

Однак, якщо цілком за технічними характеристиками виріб не володіє необхідною надійністю, то всі інші показники якості втрачають своє практичне значення, оскільки вони не можуть бути повністю використані в роботі.

Якщо якість влаштування зламано, то воно не виконує свої функції. Але для складного влаштування, робота якого визначається багатьма показниками, інколи досить важко встановити, чи виконує

воно свої функції. В зв'язку з цим вводиться поняття *дієздатності*, що визначається як такий стан технічної системи, при якому вона виконує свої функції, зберігаючи всі значення параметрів в межах, заданих технічними умовами на даний виріб.

Характеристики надійності ґрунтуються на врахуванні подій, що називаються *відмовами*. Двійкова оцінка стану елементів і виробів: дієздатний – недієздатний. Відмова – це деяка подія, після якої окремий елемент або все влаштування перестають виконувати свої функції, або порушується дієздатність апаратури. Відсутність відмов у процесі експлуатації є ознакою високої надійності. Відмова трактується як випадкова подія і тому всі кількісні характеристики надійності засновані на врахуванні часу до виникнення відмови.

Характеристики надійності засновані на ймовірно-статистичних випробуваннях. При випробуванні ставиться якесь (звичайно велике) число виробів N_0 і спостерігаються моменти, коли виникають відмови. В принципі, випробування повинні тривати до тих пір, доки не відмовлять всі N_0 виробів, але практично це робиться раніше, як тільки будуть з'ясовані статистичні закономірності.

Основними кількісними характеристиками надійності є: ймовірність безвідмовної роботи $P(t)$, частота відмов $f(t)$, небезпека (інтенсивність) відмов $\lambda(t)$, середній час безвідмовної роботи.

Імовірністю безвідмовної роботи називають імовірність того, що при заданих умовах експлуатації протягом певного заданого інтервалу часу не відбудеться відмови:

$$P(t) = p(t_1 > t_{\text{зад}}) \quad (2.32)$$

де t_1 – час роботи виробу від його включення до першої відмови (час напрацювання на відмову);

$t_{\text{зад}}$ – заданий час роботи.

Імовірність безвідмовної роботи є спадаючою функцією часу і має наступні властивості: в початковий момент часу (при $t = 0$) $P(0) = 1$, а при $t \rightarrow \infty$ функція $P(t)$ прямує до нуля.

На практиці інколи більш зручною характеристикою є ймовірність відмови $Q(t)$. Безвідмовна робота апаратури і поява відмови – це події несумісні і протилежні, тому сума їхніх імовірностей:

$$P(t) + Q(t) = 1 \quad (2.33)$$

тже,

$$Q(t) = 1 - P(t) \quad (2.34)$$

Частотою відмов називається відношення числа зразків, що відмовили за одиницю часу, до числа виробів, первісно поставлених на випробування.

Число $n(t)$ одержується як різниця кількості зразків, що працювали справно на початку інтервалу і що залишалися дієздатними в кінці цього інтервалу:

$$n(t) = N(t) - N(t + \Delta t) \quad (2.35)$$

Кількість дієздатних виробів на початку і в кінці інтервалу можна виразити через імовірність того, що у відповідні моменти часу не відбудеться відмови:

$$N(t) = N P(t); \quad (2.36)$$

$$N(t + \Delta t) = N P(t + \Delta t) \quad (2.37)$$

Підставляючи ці значення в (2.34) і (2.35), будемо мати:

$$f(t) = \frac{P(t) - P(t + \Delta t)}{\Delta t} \quad (2.38)$$

При прямуванні Δt до нуля і переході до границі, отримаємо:

$$f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} \right] = \frac{dP}{dt} \quad (2.39)$$

Або

$$f(t) = dQ / dt \quad (2.40)$$

Таким чином, частота відмов є щільність імовірності закону розподілу часу роботи виробу до першої відмови. Відповідно імовірність появи відмови за час буде дорівнювати:

$$Q(t) = \int_0^t f(t) dt \quad (2.41)$$

А ймовірність безвідмовної роботи отримаємо у вигляді:

$$P(t) = 1 - \int_0^t f(t) dt = \int_t^\infty f(t) dt \quad (2.42)$$

Небезпека відмов може бути виражена як відношення числа виробів, що відмовили за одиницю часу, до середнього числа виробів, що працювали справно в той же проміжок часу:

$$\lambda(t) = \frac{n(t)}{\Delta t N_{cp}} \quad (2.43)$$

Параметр $\lambda(t)$ інколи називають *інтенсивністю відмов*, однак інтенсивність припускає якийсь потік, а даний параметр характеризує виріб тільки до першої відмови. Оскільки сучасна радіоелектронна і електронно-обчислювальна апаратура в основному випускається у вигляді ВІС і конструктивно закінчених модулів, що звичайно замінюються цілком і не підлягають ремонту, то після першої ж відмови жодного потоку, що міг би характеризуватися інтенсивністю, не виникає. Тому термін “небезпека відмов”, визначаючий імовірність того, що відмова може виникнути, більше відповідає сенсу явища.

Підставимо в (2.43) вираз $n(t)$ з (2.35):

$$\lambda(t) = \frac{N_0 [P(t) - P(t + \Delta t)]}{N_{cp} \Delta t} \quad (2.44)$$

Оскільки N_{cp} / N_0 і при великому N_0 є ймовірність безвідмовної роботи $P(t)$, то, при прямуванні до нуля Δt і переході до границі, отримаємо:

$$\lambda(t) = -\frac{1}{P(t)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} \right] = -\frac{1}{P(t)} \frac{dP}{dt} \quad (2.45)$$

Або

$$\lambda(t) = f(t) / P(t) \quad (2.46)$$

Інтегруючи вираз (2.45), остаточно будемо мати:

$$\int_0^t \lambda(t) dt = -\ln P(t) \quad (2.47)$$

Звідки слідує основна формула теорії надійності:

$$P(t) = \exp\left[-\int_0^t \lambda(t) dt\right] \quad (2.48)$$

Середній час безвідмовної роботи характеризує напрацювання до виникнення першої відмови і визначається як математичне очікування безперервної випадкової величини – часу роботи виробу:

$$T_{cp} = \int_0^{\infty} t f(t) dt = \int_0^{\infty} t \left[-\frac{dP(t)}{dt}\right] dt \quad (2.49)$$

Інтегруючи за частинами, отримаємо:

$$T_{cp} = -tP(t) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} P(t) dt \quad (2.50)$$

Враховуючи, що $P(0) = 1$, $P(\infty) = 0$, отримаємо:

$$T_{cp} = \int_0^{\infty} P(t) dt \quad (2.51)$$

Як показує практика, типова залежність частоти відмов від часу має три характерних інтервали (рис.2.6).

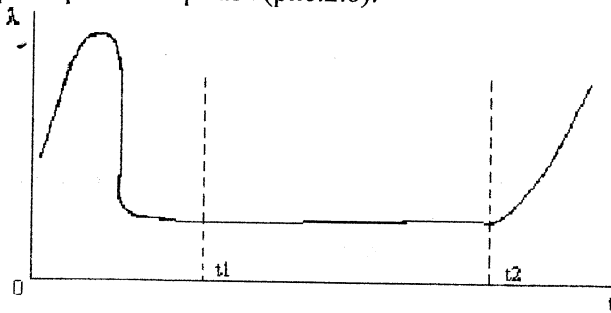


Рисунок 2.6 – Залежність частоти відмов від продовження роботи обладнання

На початковому інтервалі $(0 - t_1)$, що називається *періодом приробітки*, спостерігається підвищена частота відмов, що пояснюється швидким виходом із ладу всіх елементів із прихованими дефектами. Після цього починається період *нормальної роботи*, коли частота відмов залишається більш-менш постійною. Після цього починається *період старіння*, при якому кількість відмов починає швидко збільшуватися із-за зносу елементів.

В період нормальної експлуатації частота відмов залишається приблизно постійною. Оскільки ймовірність відмови в цей період мала, розподіл імовірностей безвідмовної роботи виробів, що пройшли період приробіток, може бути приблизно представлений експоненціальним законом розподілу (1.12), а потік відмов може розглядатися як пуассонівський з постійною інтенсивністю $\lambda = \text{const}$.

Експоненціальний закон розподілу дійсний для більшості радіоелектронних і багатьох механічних систем за наявності раптових відмов типу механічних поломок, а також обривів і коротких замикань в електричних елементах.

Обов'язковою умовою експоненціального закону розподілу є закінчення періоду приробітки та відсутність помітного старіння. При цьому ймовірність безвідмовної роботи $P(t) = e^{-\lambda t}$, небезпека відмови $\lambda(t) = \text{const} = \lambda$, а середній час безвідмовної роботи $T_{\text{ср}} = 1 / \lambda$.

В період старіння небезпека відмов починає зростати внаслідок зносу багатьох елементів. Це особливо характерно для таких приладів, як електровакуумні прилади, в частковості електронно-променеві трубки і дисплеї, підшипники й інші елементи з тертям. Розподіл імовірностей наробітки в цьому випадку може бути представлений законом нормального розподілу (1.10).

Для ймовірного опису періоду приробітки, коли відбувається швидко "вигорання" ненадійних елементів, може бути використаний логарифмічно-нормальний розподіл (1.11).

Найбільш загальним розподілом часу безвідмовної роботи, придатним для всіх режимів роботи, в тому числі для періоду приробітки, є розподіл Вейбулла (1.13).

В залежності від значення постійних розподіл Вейбулла описує закономірності відмов технічних приладів у різноманітних режимах. При $\beta < 1$ інтенсивність відмов монотонно спадає, що відповідає періоду приробітки. При $\beta > 1$ інтенсивність зростає, що відбувається, коли має місце старіння, а при $\beta = 1$ розподіл співпадає з експоненціальним і відповідає періоду нормальної роботи, коли інтенсивність відмов постійна.

Для характеристики надійності простих елементів, в частковості компонентів електронно-обчислювальної апаратури в режимі нормальної роботи, найбільш зручною є небезпека відмов λ , бо вона має постійну величину і її порівняно неважко отримати

експериментальним шляхом. Звичайно вона приводиться або у відсотках на 1000 годин роботи, або у вигляді десяткового дробу на 1 годину роботи. Для більшості окремих елементів небезпека відмов складає порядок 1/годину. Таким чином, теоретично час роботи окремих елементів може складати декілька мільйонів годин, тобто відповідати безперервній роботі більше тисячі років. Цілком очевидно, що жоден елемент не працює настільки тривалий час, бо апаратура старіє і зношується значно раніше. Крім того, основна частина відмов приходить не на самі елементи, а на їх сполучення. Для електронної апаратури – на паяні та зварні контакти й інші внутрішньо схемні сполучення.

2.4.1 Надійність складної апаратури

Оцінювати надійність складної системи так же, як і надійність елементів, недоцільно, оскільки для різноманітних частин системи значення небезпек відмов не однакові і не постійні. Тому більш зручним критерієм оцінки надійності складної системи є ймовірність безвідмовної роботи. Перевагою ймовірності безвідмовної роботи складної системи перед іншими критеріями надійності є те, що її можна отримати розрахунковим шляхом на етапі розробки і нескладно оцінити в процесі випробувань.

Зв'язок надійності реальної апаратури з надійністю її елементів має важко передбачуваний характер. Тому звичайно використовується елементарна математична модель, згідно якої система вважається справною, якщо справні всі її основні елементи. Іншими словами, при виході з ладу одного вузла, модуля або елемента порушується робота всього влаштування.

Оскільки відмови окремих елементів вважаються незалежними подіями, надійність системи може бути представлена добутком:

$$P_s(t) = P_1(t)P_2(t) \dots P_n(t) = \prod_{i=1}^n P_i(t) \quad (2.52)$$

де n – число елементів в системі.

З урахуванням виразу (2.52) можна написати:

$$P_s(t) = \exp\left[-\sum_{i=1}^n \int_0^t \lambda_i(t) dt\right] \quad (2.53)$$

Якщо справедливо припущення, що небезпека відмов всіх елементів є величина постійна ($\lambda_i = \text{const}$), то

$$P_s(t) = \exp(-\Lambda_s t); \Lambda_s = \sum_{i=1}^n \lambda \quad (2.54)$$

де Λ_s – небезпека відмови системи.

Таким чином, надійність системи залежить від надійності її елементів і від їх загальної кількості, тому, чим більше число елементів, тим більше небезпека відмови і нижче надійність системи.

Повний розрахунок надійності включає визначення кількості всіх компонентів апаратури, кількість зовнішніх виводів, монтажних сполучень, і тому являє собою дуже трудомістку операцію. В зв'язку з цим часто обмежуються орієнтовним розрахунком надійності в залежності від числа елементів, що використовуються.

Якщо якась радіоелектронна апаратура має тисячу елементів, то, вважаючи небезпеку відмов всіх елементів однаковою і рівною $\lambda_1 = 4 \cdot 10^{-6}$ 1/г, отримаємо $\Lambda_s = 4 \cdot 10^{-6} \cdot 10^3 = 0,004$. Ймовірність того, що така апаратура проработить 100 годин: $P_s(t) = e^{-0,004 \cdot 100} = e^{-0,4} = 0,67$. Середній час безвідмовної роботи $T_{cp} = \frac{1}{\Lambda_s} = 250$ г. Якщо ж складність апаратури зросте і число

елементів в ній збільшиться до 10 000, то, навіть в простих лічильно-обчислювальних приладах, типу кишенькових і настільних калькуляторів, для виконання всіх функцій необхідно мати 40 – 50 тисяч транзисторів, у випадку, якщо така апаратура створювалась би з дискретних компонентів.

Звичайно, працювати з такими приладами практично неможливо, але саме таке значення надійності й часу безвідмовної роботи мали електронні обчислювальні машини першого та другого покоління (на дискретних елементах).

Забезпечення достатньо тривалої безвідмовної роботи складної апаратури було досягнуте за рахунок збільшення надійності в системі елементів, що використовуються, і скорочення їх числа. Найбільш надійними елементами обчислювальної техніки є інтегральні схеми: їх надійність в сотні й тисячі разів перевищує надійність аналогічної апаратури, створеної на дискретних елементах (небезпека відмов у ІС

складає 1/годину). Така висока надійність інтегральних мікросхем одержується завдяки особливій технології їх виготовлення. Мікросхема формується на поверхні й в товщі монокристалу кремнію. Оскільки при цьому будуть відсутні дотові внутрішньо схемні сполучення і паяні контакти, надійність інтегральних мікросхем, образно говорячи, наближається до надійності суцільного металу.

Сама поява інтегральних схем була викликана необхідністю створення електронно-обчислювальної апаратури з високою надійністю. З тією ж кількістю елементів, що розглядалися в попередньому прикладі, апаратура на інтегральних мікросхемах буде мати середній час безвідмовної роботи $T_{\text{ср}} = 20000$ г.

Іншим ефективним засобом підвищення надійності апаратури є резервування, тобто заміна елементів, що відмовили, заздалегідь передбаченими запасними блоками. Сучасні ЕОМ будуються на основі блочного принципу. Основою апаратури є каркас, виконаний у вигляді стійки або настільного приладу. В каркас вставляються блоки, тобто великі конструктивні одиниці, що з'єднуються з монтажем каркасу за допомогою штепсельних роз'ємів. Як правило, блоки є функціонально закінченими вузлами. При відмові блок виймається з каркасу і на його місце встановлюється новий.

2.5 Врахування неметричних чинників

Складні виробничі системи характеризуються великим числом параметрів. При цьому багато чинників, в частковості, зв'язані з такими поняттями, як репутація, престиж, надійність партнера, відповідальність постачальника, сумлінність і так далі, не можуть бути покладені на ваги і не можуть бути заміряні метром або аршином, взагалі не можуть бути виражені в будь-яких одиницях. Але саме ці етичні, психологічні та соціальні поняття часто виступають як чинники мотивації мети і оцінки одержуваних результатів. Відносна значимість таких чинників визначається інстинктивними симпатіями й антипатіями, що склалися в результаті виховання і соціального оточення.

Тому точне формулювання мети системи і критеріїв її досягнення (цільової функції) в загальному випадку являє собою дуже важку проблему виміру і порівняння багатьох різнорідних змінних,

частина яких взагалі не має природної шкали для вимірів і в принципі не порівнюється одна з одною. В результаті, між такими параметрами не може бути звичайних арифметичних операцій, а можливо лише їх *ранжирування*, встановлення ієрархії відносно цінностей і шкали пріоритетів. Ця сторона діла менше всього піддається формалізації і тому в основному базується на думці самого менеджера як організатора роботи, а також на використанні думок учених й інших досвідчених фахівців.

Ранг – це показник, що характеризує порядкове місце об'єкту, що оцінюється, або явища в групі інших таких же об'єктів (явищ). *Ранжирування* – це процедура встановлення відносної значимості об'єктів, що досліджуються, на основі їх переваги одного перед одним. Звичайно найбільш прийнятному об'єкту присвоюється перший ранг, а найменш бажаному – останній.

Для встановлення рангу привертаються незалежні експерти. В загальному випадку кожний експерт при ранжируванні повинен розмістити всі об'єкти (варіанти, альтернативи і таке інше) в порядку, що йому представляється найбільш раціональним, і приписати кожному числа натурального ряду: 1, 2, 3 і так далі. Точність і надійність ранжирування залежать від кількості об'єктів: чим їх менше, тим вище відмінність і тим більш надійний можна встановити ранг.

Однак виконання несистематизованих висловлювань окремих фахівців при рішенні складних виробничих проблем часто виявляється малоефективним, бо фахівці не в змозі охопити всю різноманітність взаємозв'язків між елементами великих систем і врахувати всі альтернативні шляхи рішення задач, що виникають. Це змушує вдаватися до комплектування груп фахівців, експертів різноманітних областей знань: економістів, юристів, математиків, інженерів, дизайнерів і так далі. За допомогою такої групи менеджер може оцінити різноманітні варіанти і спробувати знайти найкраще рішення поставленої проблеми.

Коли ранжирування робиться декількома експертами, то спочатку підраховується сума рангів для кожного об'єкту, причому вищий ранг (перший) присвоюється об'єкту, що отримав найменшу суму рангів. Навпаки, об'єкту з найбільшою сумою рангів присвоюється самий низький ранг. Інші об'єкти упорядковуються у

відповідності зі значеннями суми рангів відносно того об'єкту, якому присвоєний перший ранг.

Ранг визначає лише місце, яке займає даний об'єкт серед інших, йому подібних, але засіб ранжирування не дає відповіді на питання, як далеко відстоять один від одного об'єкти, що досліджувалися. Іншими словами, ранг не показує, наскільки перший за списком варіант краще другого, а другий краще третього і так далі. По цій причині засіб ранжирування часто застосовується в поєднанні з засобом безпосередньої оцінки. Для цього розробляється *шкала інтервалів*, кожній градації якої присвоюється певна вага (бал), наприклад від 1 до 5 або від 1 до 100 і так далі. З точки зору експертів величини інтервалів повинні бути рівними. Задачею експертів є переміщення всіх об'єктів, що розглядаються, в певний оціночний інтервал, тобто *призначення їм певного балу*.

Ступінь надійності отриманих оцінок можна визначити за розкидами оцінок окремих експертів та їх груп або, що еквівалентно, за ступенем згоди (збігу) оцінок. Ступінь погодженості оцінок характеризується коефіцієнтом конкордації (згоди) W і відповідним рівнем значимості α . Коефіцієнт конкордації визначається за формулою:

$$W = \frac{12 \sum_{i=1}^n (S_i - S_{cp})^2}{N_2[m^n - m] - n \sum_{j=1}^m T_j} \quad (2.55)$$

де N – кількість експертів;

m – кількість варіантів, що оцінюються;

$S_i = \sum_{j=1}^m R_{ij}$ – сума рангів, присвоєних рішенню P_i всіма експертами

(R_{ij} – ранг, присвоєний цьому рішенню j -м експертом);

$S_{cp} = \sum_{j=1}^m \frac{S_j}{m}$ – середнє арифметичне суми рангів, отриманих всіма

об'єктами;

$T_j = \sum_{i=1}^m (t_i^n - t_i)$ – показник зв'язаних (рівних) рангів, призначених j -м експертом.

Якщо всі m оцінок якогось експерта різні, то $T_j = 0$, а якщо серед рангів є однакові, то T_j визначається за наведеною формулою. Наприклад, якщо експерт задав 1, 2, 2, 4, то для нього показник ступеня n в усіх випадках дорівнює 3.

Коефіцієнт конкордації змінюється в межах $0 \leq W \leq 1$. Звичайно, погодженість вважається задовільною, якщо $W \geq 0,5$; якщо ж $W \geq 0,7$, то погодженість вважають гарною. При повній згоді думок експертів $W = 1$.

Величина рівня значимості α визначається за критерієм Пірсона з $(N-1)$ ступенями волі:

$$\Phi^2 = \frac{12 \sum_{i=1}^n [S_i - S_c p]_2}{N_m(m+1) - \frac{1}{(m-1) \sum_{j=1}^m T_j}} \quad (2.56)$$

Приклад 2.4. Для того щоб визначити найбільш перспективну модель портативного телевізору, була запрошена група експертів (їх розбили на дві групи) для оцінки його зовнішнього вигляду. Ранги, присвоєні різним конструктивним варіантам експертами першої групи, наведені в лівій частині табл. 2.2.

Таблиця 2.2 – Ранжирування зовнішнього вигляду телевізорів

1-а група експертів	Варіанти			2-а група експертів	Варіанти		
	Е	Н	С		Е	Н	С
А	1	2	3	К	2	1	3
Б	3	1	2	Л	1	3	2
В	1	2	3	М	3	1	2
Г	1	2	3	Н	2	1	3
Д	2	1	3	П	2	3	1
Сума рангів	8	8	14	Сума рангів	10	9	11
Результуючий ранг	1-2	1-2	3	Результуючий ранг	2	1	3

Оскільки цей тур опитування не виявив переваги, був проведений другий тур з участю іншої групи експертів. Результати зроблених ними ранжирувань наведені в правій частині табл. 2.2.

Ранжирування в двох турах дало дуже незначну перевагу варіанту Н. Тому експертів попросили дати безпосередню оцінку всім моделям по 100-бальній шкалі (табл. 2.3).

Таблиця 2.3 – Оцінка зовнішнього вигляду телевізорів

Найменування	Конструктивні варіанти експертів		
	Е	Н	С
А	50	30	20
Б	20	50	30
В	50	30	20
Д	35	45	20
К	40	50	10
Л	50	20	30
М	20	50	30
Н	35	45	20
П	20	30	50
Середнє значення	39	37	24
Результуючий ранг	1	2	3

Обчислення середнього значення суми балів показує, що більш прийнятним слід вважати варіант Е.

Невизначеність оцінки зовнішнього вигляду досить природна, бо відбиває відмінність індивідуальних смаків споживачів. Фактично всі три моделі телевізорів випускаються (різними фірмами) і всі знаходять збут.

Визначимо тепер ступінь погодженості оцінок експертів. Середнє арифметичне суми рангів: $S_{cp} = (18 + 17 + 25) / 3 = 60 / 3 = 20$. В даному випадку всі експерти дали різним варіантам різноманітні оцінки, тому $T_j = 0$:

$$W = \frac{12[(18 - 20)^2 + (17 - 20)^2 + (25 - 20)^2]}{100(27 - 3)} = \frac{456}{2400} = 0,19.$$

Як і слід було очікувати, ступінь погодженості виявилась дуже низькою.

Окрім встановлення переваги одного варіанту перед іншим в залежності від престижності, патентної чистоти, естетичності й інших неметричних чинників, менеджеру потрібно вдаватися до експертних оцінок ще в багатьох випадках.

Опитування експертів може виявитися корисним і навіть необхідним при рішенні наступних задач:

- ✧ встановлення обмежень, тобто тих значень параметрів, що не можна перевищувати з міркувань безпеки, економічності й так далі;
- ✧ виявлення чинників, що мають визначальний вплив на процес;
- ✧ призначення вагових коефіцієнтів комплексного критерію якості.

Надійність і вірогідність рішень, що приймаються на основі суджень групи експертів, в значній мірі залежать від організації процедури збору, аналізу і статистичної обробки цих суджень. При традиційному – груповому – обговоренні проблем на засіданнях комісій або рад результуюча оцінка одержується від всієї групи в цілому. Однак думка найбільш авторитетних і емоційних, найбільш наполегливих учасників часто справляє значний вплив на судження інших. Крім того, члени комісії, що опинилися в меншості, почувають себе непевно і тому часто приєднуються до думки більшості.

Тому для зменшення психологічного впливу експертів один на одного і отримання більш вірогідних оцінок, прямі дискусії треба замінювати програмами погодження індивідуальних думок. Найпростіший засіб використання групи – індивідуальний – полягає в тому, що кожний експерт дає оцінку незалежно від інших, а після цього ці оцінки обробляються і об'єднуються в одну загальну.

Третій засіб отримав назву засобу Дельфи. В ньому виставлення індивідуальних оцінок поєднується з послідовним ознайомленням всіх членів експертної групи з думками інших і корегуванням первісних оцінок. Свою назву цей засіб отримав від храму грецького міста Дельфи, де знаходився відомий у всьому античному світі оракул, що передбачав майбутнє. Припускається, що пророкування оракула колективно готувалося жерцями храму, використовуючи описану нижче методику.

Сутність засобу Дельфи полягає в тому, що експерти залишаються анонімними і безпосередньо не звертаються один до

одного. Кожний результат (прогноз на майбутнє) розробляється в декілька турів, і на кожному етапі використовуються результати попереднього тура опитування експертів. На першому турі експерти ранжують ті варіанти, що їм надали організатори опитування або що вони самі намітили на попередньому турі.

Після цього робиться обробка отриманої інформації. Оскільки ранжирування не відбиває відстань між різноманітними варіантами, робити з рангами якісь арифметичні дії, строго говорячи, не можна. Як максимум, можна лише підраховувати середньоарифметичні значення. Тому обробка інформації зводиться до визначення лише структурних середніх – медіани і кватилей. *Медіана* – це середина упорядкованого ряду, а *кватилі* – середини відрізків, що утворюються ліворуч і праворуч від медіани. За показник групової думки приймається медіана, а за характеристику погодженості думок – діапазон кватилів. Якщо, наприклад, в опитуванні брали участь 11 експертів, то, розмістивши всі оцінки в порядку спадання, отримаємо ряд, зображений на рис.2.7.

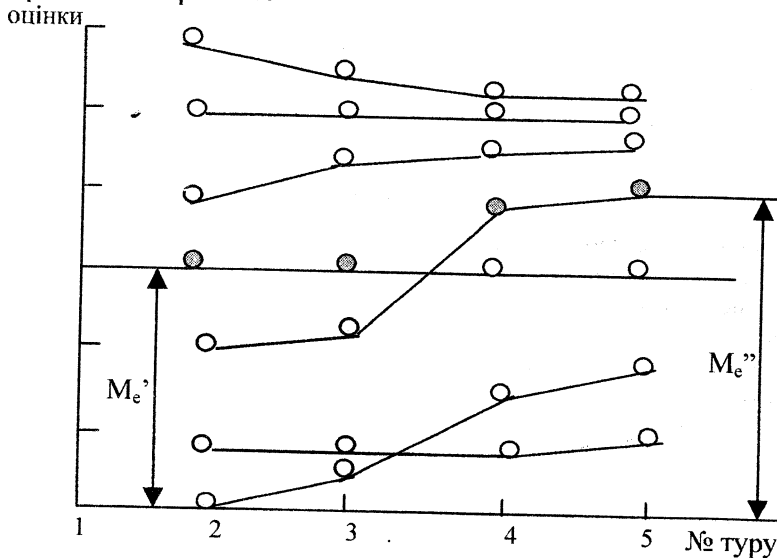


Рисунок 2.7 – Схема упорядкування оцінок експертів

На ньому треба знайти медіану і після цього встановити значення верхнього і нижнього кватилів. На вісі ряду медіана і

квартилі утворюють чотири інтервали, з яких два середніх, вважаються найбільш вірогідними.

На другому турі експертам пропонуються отримані результати і їх просять проаналізувати дані. Тих експертів, чиї оцінки виходять за діапазони верхнього і нижнього квартилів, просять обґрунтувати свої судження і повідомити думку з приводу вдосконалення порушеного питання. Їхні аргументи можуть включати врахування якихось додаткових чинників, що не враховувалися іншими фахівцями, тому вони доводять їх до відома інших експертів (без вказівки, від кого вони отримані).

За оцінками третього туру виконується процедура упорядкування оцінок і знову визначаються медіана і квартилі. Експерти одержують не тільки результати упорядкування даних, але й статистичний опис думок всіх членів групи і зведення аргументів прибічників верхньої і нижньої оцінок. Подібна процедура дозволяє експертам врахувати велике число чинників і, у випадку необхідності, скорегувати свою думку. В наступних турах все повторюється в тій же послідовності. Медіана оцінок останнього туру приймається за узагальнену думку. Результати наступних турів опитування дають, як правило, все менший і менший розкид оцінок (див рис.2.7).

2.6. Виявлення “Розладу” технологічного процесу (ТП)

Для виявлення “розладу” ТП використовуються:

- метод Шухарта;
- метод кумулятивних сум.

Метод Шухарта використовується при знаходженні “розладу” ТП, що контролюється за нормально-розподіленим показником якості з різноманітними змінами рівня настройки.

Метод кумулятивних сум використовується при знаходженні “розладу” ТП, що контролюється за нормально- чи гамма-розподіленим показником якості з повільними змінами рівня настройки.

Використання методів виявлення “розладів” містить:

- відомий закон розподілення показника якості;
- встановлення параметрів розподілення для “налагодженого” та “неналагодженого” станів ТП, враховуючи технологічні допуски.

Нормальний закон розподілення характеризується параметрами μ та σ , де μ являється математичним очікуванням, σ – дисперсією.

Гамма-розподілення характеризується параметрами масштабу a , форми ν та зсуву c .

Означення виду закону розподілення показника якості виконується за спеціальною програмою "PZR". Вхідні данні для обробки на ЕОМ підготовляють підрозділи, для яких виконується ця робота.

Для "налагодженого" стану: $\mu = \mu_0$, $\sigma = \sigma_0$, $a = a_0$, $b = b_0$, $c = c_0$

та для "неналагодженого": $\mu = \mu_1$, $\sigma = \sigma_1$, $a = a_1$, $b = b_1$, $c = c_1$.

Загальна процедура знаходження "розладу" складається з наступних дій:

- ☐ отримання вибірки;
- ☐ розрахунок потрібної вибіркової статистичної характеристики на основі вимірних значень контрольованого показника якості;
- ☐ порівняння вибіркової статистичної характеристики із заданою межею регулювання; рішення про "розлад" приймається, коли вибіркова статистична характеристика перевищує межу регулювання.

За допомогою метода Шухарта знаходиться зміна μ чи σ . При знаходженні зміни μ вибірковою статистичною характеристикою являється середнє арифметичне $\bar{x}$. При знаходженні зміни σ вибірковою статистичною характеристикою являється середньоквадратичне відхилення S чи розмах R .

Розрахунок $\bar{x}$, S , R здійснюється за формулами:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (2.57)$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad (2.58)$$

$$R = x_{\max} - x_{\min}, \quad (2.59)$$

де n – об'єм вибірки;

x_i – i -е вибіркве вимірювання значення показника якості;

$x_{\max}$, $x_{\min}$ – максимальне та мінімальне значення у вибірці.

Без урахування економічних показників об'єм вибірки та періодичність отримання вибірок T знаходяться зі стандартних таблиць.

З урахуванням економічних показників вибір n , T , h здійснюється на основі межі вартості C із урахуванням α та β . Зв'язок n , T , h , C , α , $1 - \beta$, знаходиться за допомогою програми "ЕМХ", вхідними даними до якої являються:

a_1, a_2 – постійна та змінна вартості вибірових спостережень;

a_3 – виявлення причини “розладу”;

a_4 – збитки від роботи за один час при розладженому процесі;

λ – параметр експоненціального розподілу часу між зсувами; величина, обернена до λ , визначає середній час “налагодженого” стану процесу;

δ – нормована величина зсуву;

d – час, потрібний при виявленні причини “розладу”;

q – час, потрібний для контролю одиниці продукції та інтерпретації результатів.

Методом кумулятивних сум знаходяться зміни μ, σ, a, b, c , для чого, вибірковою статистичною характеристикою являються суми, розраховані за формулами:

$$z_{1m} = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma^2} \sum_{i=1}^m \left(x_i - \mu_0 + \frac{(\mu_1 - \mu_0)\sigma}{2} \right) \quad (2.60)$$

$$z_{2m} = \frac{n-1}{2} \sum_{i=1}^m 2 \ln \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1} \right) + \left(\frac{1}{\sigma_0^2 - \sigma_1^2} \right) S_i^2 \quad (2.61)$$

$$z_{3m} = \sum_{i=1}^m b \ln \left(\frac{a_0}{a_4} \right) + \left(\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_1} \right) (x_i - c) \quad (2.62)$$

$$z_{4m} = \sum_{i=1}^m \ln \frac{\Gamma(b_0)}{\Gamma(b_1)} = (b_1 - b_0) \ln \frac{x_i - c}{a} \quad (2.63)$$

$$z_{5m} = \sum_{i=1}^m \frac{c_1 - c_0}{a} + (b-1) \ln \frac{x_i - c_0}{x_i - c_1} \quad (2.64)$$

Межі регулювання для кумулятивних сум $x_{imj}=1,5$ визначаються за графіками на основі зв'язку ймовірності помилок 1-го та 2-го роду, α, β та середніх довжин серій L_0, L_1 з межею h . Межа знаходиться так, щоб l_1 була мінімальною та L_0 максимальною при заданих α та β .

3 ЗАВДАННЯ ДО ПРАКТИЧНИХ РОБІТ

Завдання 3.1. Моделі розподілених випадкових величин. Нормальне розподілення.

1. За отриманими у викладача статистичними даними побудувати емпіричне розподілення випадкової величини (показник якості, економічний показник, величина електропараметрів та інші).

2. Здійснити розрахунки основних статистичних параметрів: середньоарифметичного значення, дисперсії та стандартних відхилень, коефіцієнту асиметрії, медіани.

3. Провести перевірку знайденого емпіричного розподілення відповідно до закону нормального розподілення.

4. Побудувати графік інтегральної функції розподілу.

Завдання 3.2. Кореляційний аналіз.

1. За отриманими статистичними даними двох випадкових величин провести кореляційний аналіз:

- побудувати кореляційну таблицю;
- знайти коефіцієнт кореляції, кореляційне відношення;
- провести оцінку точності обчислення коефіцієнта кореляції;
- на основі отриманого коефіцієнта зробити вибір можливої залежності.

Завдання 3.3. Регресивне модулювання.

1. На основі кореляційного аналізу виділити найбільш суттєві залежності результуючої змінної від сукупності змінних.

2. Здійснити побудову методом найменших квадратів лінійної моделі з однією пояснюючою змінною, а також нелінійною залежністю.

3. Розробити алгоритм покрокового відбору інформативних змінних у множинній регресії методом включення.

Завдання 3.4. Перевірка адекватності моделі.

1. Накреслити графік лінійної та криволінійної залежності.

2. Знайти суму квадратів відхилень теоретичних значень функції від емпіричних цих двох випадків.

3. Знайти у якому випадку похибка буде найменшою.

4. Зробити висновки про більш точну модель.

Завдання 3.5. Використання моделей кумулятивних сум в управлінні технологічними процесами.

1. На основі статистичних даних та вибраних помилок 1-го та 2-го роду розраховуються кумулятивні суми Z_m та середнє значення $\bar{x}$.

2. Побудувати графік, по горизонталі якого відкладаються порядкові номери вибірки, а по вертикалі – значення кумулятивних сум.

3. Розрахувати попереджувальні межі на основі заданих можливих значень параметрів.

4 ЛІТЕРАТУРА

- 4.1 Вершин О.Е. “Компьютер для менеджера” – М.: Высшая школа, 1990
- 4.2 Солонин И.С. “Математическая статистика в технологии машиностроения” – М.: Машиностроение, 1972
- 4.3 Перегудов Ф.И. “Введение в системный анализ” – М.: Высшая школа, 1989
- 4.4 Тарасенко Ф.П., Неуймин Я.Г. “Модели в науке и технике” – Л.: Наука, 1984
- 4.5 Химмельблау Д. “Анализ процессов статистическими методами” – Л.: Наука, 1989
- 4.6 Черчмен У. “Введение в исследование операций” – М.: Наука, 1968
- 4.7 Акоф Р. Стандарти підприємства. Курсові та дипломні проекти (роботи)