

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Запорізький національний технічний університет

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання контрольних робіт
(для студентів заочної форми навчання)
та РГР (для студентів денної форми
навчання) з вищої математики
(скорочена форма навчання)
(1 семестр, 1 частина)

2014

Методичні вказівки до виконання контрольних робіт (для студентів заочної форми навчання) та РГР (для студентів денної форми навчання) з вищої математики (скорочена форма навчання) (1 семестр, 1 частина) / Укл. : Килимник І.М., Онуфрієнко Л.М., Полякова Т.Г. - Запоріжжя: ЗНТУ, 2014 -86 с.

Укладачі: Килимник І.М., к.т.н., доцент,
Онуфрієнко Л.М., к. ф.-м. н, доцент,
Полякова Т.Г. асистент

Комп'ютерна верстка: Давиденко С.І.

Відповідальний за випуск: Килимник І.М., к.т.н.,доцент

Затверджено на засіданні кафедри вищої
математики ЗНТУ. Протокол № 2 від
03.09.2014

ЗМІСТ

	Правила оформлення та виконання контрольної роботи (РГР)	4
1.	Контрольна робота (РГР) № 1. Елементи лінійної та векторної алгебри. Аналітична геометрія. Диференціальне числення функції однієї та багатьох змінних	5
1.1	Вказівки до виконання контрольної роботи (РГР)	5
1.1.1	Елементи лінійної алгебри	5
1.1.2	Елементи векторної алгебри	13
1.1.3	Елементи аналітичної геометрії	19
1.1.4	Диференціальне числення функції однієї змінної	29
1.1.5	Диференціальне числення функції багатьох змінних	47
1.2	Індивідуальні завдання	54
	Література	85

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕННЯ ТА ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ (РГР)

1. Студент повинен виконувати контрольну роботу (РГР) в окремому зошиті.

2. На обкладинці зошита треба записати номер контрольної роботи (РГР), назву дисципліни, з якої виконується контрольна робота (РГР), номер академічної групи, прізвище, ім'я по батькові повністю. В правому верхньому куті вказати шифр – номер залікової книжки.

3. В контрольній роботі (РГР) повинні бути розв'язані всі завдання, вказані викладачем. Розв'язання завдань необхідно записувати в порядку номерів завдань, зберігаючи їх послідовність. Умова задачі в завданні переписується повністю.

4. Номер задачі в завданні вибирають таким чином: дві останні цифри шифру треба поділити на 30. Остача від ділення відповідає номеру задачі в завданні.

Якщо остача дорівнює нулю, то студент розв'язує 30 задачу завдання.

5. Контрольна робота (РГР) подається викладачеві на перевірку і захищається студентом на консультаціях. Контрольна робота (РГР), виконана не за своїм варіантом, не зараховується.

1. КОНТРОЛЬНА РОБОТА (РГР) № 1

Елементи лінійної та векторної алгебри. Аналітична геометрія. Диференціальне числення функції однієї та багатьох змінних

1.1 Вказівки до виконання контрольної роботи (РГР).

1.1.1 Елементи лінійної алгебри.

Числова матриця A порядку $n \times m$ – таблиця чисел, розташованих в рядках і стовпцях:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} - \text{елементи матриці } A.$$

Якщо кількість рядків і стовпців однакова, то матрицю називають квадратною. Для квадратної матриці існує визначник. Визначник n -го порядку – число $\det A$, яке записується у вигляді:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Деякі властивості визначників:

- а) визначник не зміниться, якщо його рядки замінити відповідними стовпцями (транспонування);
- б) якщо усі елементи рядка (стовпця) визначника дорівнюють нулю, то визначник дорівнює нулю;
- в) спільний множник усіх елементів рядка (стовпця) можна вінести за знак визначника;
- г) якщо відповідні елементи двох рядків (стовпців) рівні або пропорційні, то визначник дорівнює нулю;
- д) визначник не зміниться, якщо до усіх елементів рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця) помножені на одне й те саме число.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника n -го порядку називається визначник $(n-1)$ -го порядку, утворений з данного шляхом вікреслення i -го рядка і j -го стовпця.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} визначника називається його мінор M_{ij} , помножений на $(-1)^{i+j}$.

Визначник 2-го порядку обчислюється за формулою:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Визначник 3-го порядку можна обчислити за правилом Саррюса або трикутників:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - \\ - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Визначник n -го порядку обчислюється за формулою розкладання по i -му рядку: $\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij}$ (i – фіксований індекс рядка) або розкладання по j -му стовпцю: $\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij}$ (j – фіксований індекс стовпця).

Дві матриці A і B рівні ($A=B$), якщо вони одного порядку і відповідні елементи їх рівні. Матриці одного порядку можна додавати і віднімати (дії з відповідними елементами матриць). Наприклад,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Матрицю A можна множити на будь-яке число λ , відмінне від нуля: $\lambda A = A\lambda$ (всі елементи матриці множаться на це число). Матрицю A (порядку $n \times s$) можна множити на матрицю B (порядку $s \times m$), якщо кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків

матриці B : $C = A \cdot B$. Елементи матриці C (порядку $n \times m$) обчислюються за формулою: $c_{ij} = \sum_{k=1}^s a_{ik} \cdot b_{kj}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$.

Наприклад,

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 3 \\ 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 2 \cdot (-2) + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Діагональна матриця – це квадратна матриця, всі елементи якої, крім елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю. Якщо всі елементи головної діагоналі діагональної матриці дорівнюють одиниці, то її називають одиничною. Наприклад,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матриця A^{-1} є оберненою для матриці A , якщо $A^{-1} A = A A^{-1} = E$. Матриця A^{-1} існує, якщо $\det A \neq 0$. Вона обчислюється за формулою: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} (A^V)^T$, де $(A^V)^T$ –

транспонована матриця A^V . Матриця A^V складається з алгебраїчних доповнень до елементів матриці A . Обернена матриця для матриці третього порядку має вигляд:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

де $\Delta = \det A$, A_{ij} – алгебраїчні доповнення до елементів матриці A .

Обернену матрицю застосовують при розв'язуванні матричного рівняння: $A \cdot X = B$ або $Y \cdot A = B$, де A, B, X, Y – матриці, при

цьому $\det A \neq 0$. Розв'язком цих рівнянь є $X = A^{-1} \cdot B$ або $Y = B \cdot A^{-1}$ відповідно.

Систему лінійних неоднорідних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) можна розв'язувати за формулами Крамера, матричним методом, методом Гаусса та іншими.

Розглянемо розв'язування за формулами Крамера, матричним методом, методом Гаусса системи трьох неоднорідних лінійних рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

де a_{ij} – коефіцієнти при невідомих, а b_i – вільні члени.

1) Формули Крамера для розв'язування цієї системи:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta},$$

де $\Delta = \det A \neq 0$ – визначник системи (складається з коефіцієнтів при невідомих), а $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ – визначники невідомих, отримані з визначника системи шляхом заміни відповідного стовпця коефіцієнтів стовпцем вільних членів. Система має єдиний розв'язок.

Якщо $\Delta = 0$ і всі визначники $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ одночасно дорівнюють нулю, то система має безліч розв'язків, а якщо хоча б один з $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ відмінний від нуля, то система розв'язків немає.

2) Матричний метод розв'язання СЛАР полягає в наступному: система записується матричним рівнянням: $A \cdot X = B$, де A – матриця системи, B – матриця-стовпець вільних членів, X – матриця-стовпець невідомих. Розв'язок системи знаходиться за формулою:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

3) Метод Гаусса – метод послідовного виключення невідомих. Систему зводять до трикутного виду (прямий хід), а потім, починаючи з останнього рівняння системи, послідовно знаходять невідомі.

Зручно систему записати у вигляді розширеної матриці (це матриця системи до якої приєднується стовпець вільних членів). За

допомогою елементарних перетворень над рядками цієї матриці, її приводять до трикутного виду. Отриману матрицю записують у вигляді системи. З останнього рівняння системи знаходять невідому і послідовно піднімаючись по системі вгору, знаходять інші невідомі.

Якщо вільні члени СЛАР одночасно рівні нулю, то маємо однорідну СЛАР, наприклад,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases}$$

Якщо $\det A \neq 0$, то система має єдиний розв'язок – нульовий. У протилежному випадку – безліч розв'язків.

Наприклад, для системи трьох лінійних однорідних рівнянь з трьома невідомими, якщо $\det A = 0$, а $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, система

зводиться до двох лінійних однорідних рівнянь з трьома невідомими, наприклад:
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \end{cases}$$

Розв'язок цієї системи знаходиться за формулами:

$$x_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot t, \quad x_2 = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} \cdot t, \quad x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Теорема Кронекера-Капеллі дозволяє встановити сумісність системи лінійних неоднорідних алгебраїчних рівнянь.

Задача 1. Знайти обернену матрицю A^{-1} до матриці A . Результат перевірити, знайшовши добуток $A^{-1} \cdot A$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Розв'язання: а) обчислимо $\det A$, розкладаючи його по елементам першого рядка:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2 - (-1)) -$$

$-1 \cdot (4 - 1) + (-2 - (-1)) = -5 \neq 0$. Обернена матриця існує.

б) знайдемо алгебраїчні доповнення A_{ij} кожного елемента матриці

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3;$$

в) складемо матрицю із алгебраїчних доповнень:

$$A^V = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix};$$

г) транспонуємо отриману матрицю:

$$(A^V)^T = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix};$$

д) останню матрицю помножимо на $\frac{1}{\det A}$, тобто на $\left(-\frac{1}{5}\right)$ і отримаємо обернену матрицю.

$$A^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Перевірка.

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot A &= -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} (-1) \cdot 1 + (-3) \cdot 2 + 2 \cdot 1 & (-1) \cdot 1 + (-3) \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) & (-1) \cdot 1 + (-3) \cdot 1 + 2 \cdot 2 \\ (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & (-3) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) & (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 & (-1) \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + (-3) \cdot (-1) & (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Задача 2. Розв'язати матричне рівняння:

$$Y \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання: Маємо матричне рівняння $Y \cdot A = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо $\det A = \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -17 \neq 0$, то обернена матриця A^{-1} існує і

розв'язок рівняння буде $Y = B \cdot A^{-1}$. Знайдемо A^{-1} . Алгебраїчні доповнення до елементів матриці A :

$$A_{11} = 3, \quad A_{21} = -1, \quad A_{12} = -2, \quad A_{22} = -5.$$

Запишемо обернену матрицю A^{-1} : $A^{-1} = \frac{-1}{17} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$. Тоді

$$B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{17} \\ -\frac{1}{17} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{17} \begin{pmatrix} 3+2 & -1+5 \\ 6+6 & -2+15 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{17} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 12 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{17} & -\frac{4}{17} \\ -\frac{12}{17} & -\frac{13}{17} \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} -\frac{5}{17} & -\frac{4}{17} \\ -\frac{12}{17} & -\frac{13}{17} \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Розв'язати неоднорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь трьома способами: а) за формулами Крамера, б) матричним методом, в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Розв'язання:

а) за формулами Крамера.

Знайдемо визначники Δ , Δ_{x_1} , Δ_{x_2} , Δ_{x_3} . Обчислимо їх за правилом трикутників:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 1 - 2 + 2 + 2 + 1 = 6 \neq 0.$$

Послідовно замінюючи в Δ перший, другий і третій стовпець стовпцем вільних членів, знайдемо:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 4 - 6 + 2 + 6 = 6,$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -6 + 2 - 6 + 4 = -6,$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -4 + 6 + 4 + 6 = 12.$$

Розв'язок системи:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{6}{6} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{-6}{6} = -1, \quad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{12}{6} = 2.$$

б) матричним методом.

Нехай A – матриця системи, X – матриця-стовпець невідомих, B – матриця-стовпець вільних членів:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Систему можна записати матричним рівнянням: $A \cdot X = B$. Розв'язок системи $X = A^{-1} \cdot B$. $\Delta = \det A = 6$. Матриця A^{-1} є оберненою до матриці A .

Знайдемо алгебраїчні доповнення:

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3, \quad A_{21} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -(-1 + 1) = 0,$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-2 - 1) = 3, \quad A_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 2 = 0, \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-1 - 1) = 2,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3, \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - 2) = 1,$$

$$A_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4.$$

Обернена матриця: $A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$. Розв'язок системи

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 + 0 + 0 \\ 6 - 12 + 0 \\ 0 + 12 + 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ де}$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 2.$$

в) методом Гаусса.

Запишемо розширену матрицю B системи, приєднавши до матриці системи A стовпець вільних членів, і приведемо її до трикутного вигляду.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Знак $\approx$ означає перехід від однієї матриці до другої, за допомогою елементарних перетворень. Таких переходів отримали 3 (вони пронумеровані). Перший перехід: 1-й рядок залишаємо без змін, до 2-го додаємо 1-й, помножений на (-2) , до 3-го додаємо 1-й, помножений на (-1) . Другий перехід: скорочуємо 3-й рядок на (-2) і міняємо місцями 2-й і 3-й рядки. Третій перехід: 1-й і 2-й рядки залишаємо без зміни, до 3-го рядка додаємо 2-й, помножений на 4. Мета перетворень – отримати матрицю трикутного виду. Останню матрицю записуємо у вигляді системи:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_3 = 6 \end{cases}$$

З останнього рівняння отримаємо $x_3 = 2$, з другого $x_2 = -1$, з першого $x_1 = 1$.

Задача 4. Знайти розв'язок систем лінійних однорідних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Розв'язання: Визначник системи $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -24 \neq 0$, тому

система має єдиний розв'язок: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

$$\text{б) } \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Розв'язання: Визначник системи $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$. Отже

система має безліч розв'язків. Знайдемо загальний розв'язок системи.

Так як $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 4 = -13 \neq 0$, то розглянемо систему двох рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

Для знаходження розв'язку системи застосуємо формули:

$$x_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} \cdot t = (20 - 3) \cdot t = 17t, \quad x_2 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \cdot t = (-1 - 15) \cdot t = -16t,$$

$$x_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \cdot t = (-9 - 4) \cdot t = -13t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

1.1.2 Елементи векторної алгебри.

Координати вектора $\overline{AB}$ визначаються за формулою $\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$, якщо задані точки $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$.

Вектори $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$ і $\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$ можна додавати і віднімати: $c_1 \bar{a} \pm c_2 \bar{b} = (c_1 x_1 \pm c_2 x_2; c_1 y_1 \pm c_2 y_2; c_1 z_1 \pm c_2 z_2)$, де c_1 і c_2

– довільні сталі. Вектор $\vec{a}$ можна множити на число λ : $\lambda\vec{a}=(\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$, $\lambda \neq 0$. Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, то їх координати пропорційні: $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$. Якщо вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ лінійно незалежні, то вони утворюють базис і вектор $\vec{d}$ може бути розкладений по цьому базису: $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$, де m, n, p – деякі числа.

Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – це число, яке визначається за формулою: $(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$, де φ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Якщо вектори задані координатами, то скалярний добуток $(\vec{a}, \vec{b}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$.

Умова перпендикулярності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$.

Довжина вектора: $|\vec{a}| = \sqrt{(x_1)^2 + (y_1)^2 + (z_1)^2}$.

Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

Проекція вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$: $np_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$.

Робота сили $\vec{F}$, яка прямолінійно переміщує матеріальну точку з початку в кінець вектора $\vec{s}$ визначається формулою $A = \vec{F} \cdot \vec{s}$.

Векторним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є вектор $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \times \vec{b}$, що задовольняє умовам: а) $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$; б) довжина вектора $\vec{c}$ обчислюється за формулою: $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$, де φ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$; в) вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють праву трійку.

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задані координатами, то векторний добуток

обчислюється $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$

Площа трикутника ABC , для якого задані координати вершин, обчислюється за формулою: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}|.$

Момент сили $\vec{F}$, прикладеної в точці A , відносно точки B визначається векторним добутком $\vec{m} = \overline{BA} \times \vec{F} = \vec{F} \times \overline{AB}.$

Мішаний добуток трьох векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – це векторно-скалярний добуток $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix},$ де $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3).$

Три вектори компланарні, якщо вони належать одній площині або паралельним площинам. Умова компланарності трьох векторів: $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = 0.$

Модуль мішаного добутку векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах. А об'єм піраміди, побудованої на цих векторах, обчислюється за формулою: $V_{nip} = \pm \frac{1}{6} (\vec{a} \vec{b} \vec{c}).$ Знак вибираємо таким чином, щоб об'єм був додатним.

Задача 5. Перевірити колінеарність векторів $\vec{c} = 3\vec{a} - \vec{b}$ і $\vec{d} = \vec{a} + 2\vec{b}$, побудованих на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{a} = (-1; 3; 2),$ $\vec{b} = (-2; -1; 4).$

Розв'язання: Знайдемо координати векторів $\vec{c}$ і $\vec{d}$:

$$\vec{c} = 3(-1; 3; 2) - (-2; -1; 4) = (-5; 10; 2), \quad \vec{d} = (-1; 3; 2) + 2(-2; -1; 4) = (3; 1; 10).$$

Перевіримо умову колінеарності векторів:

$$-\frac{5}{3} \neq \frac{10}{1} \neq \frac{2}{10}$$

Вектори $\vec{c}$ і $\vec{d}$ не колінеарні, так як їх координати не пропорційні.

Задача 6. Задані координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(2;-1;-2)$, $A_2(1;2;1)$, $A_3(5;0;-6)$, $A_4(-10;9;-7)$. Знайти: а) Кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4 ; б) Площу грані $A_1A_2A_3$; в) Проекцію вектора $\vec{A_1A_3}$ на вектор $\vec{A_1A_4}$; г) Довжину висоти піраміди, проведену з вершини A_4 ; д) Визначити, яку трійку утворюють вектори $\vec{A_1A_2}$, $\vec{A_1A_3}$ і $\vec{A_1A_4}$?

Розв'язання: Знайдемо координати векторів, на яких побудована піраміда: $\vec{A_1A_2}=(-1;3;3)$, $\vec{A_1A_3}=(3;1;-4)$, $\vec{A_1A_4}=(-12;10;-5)$.

а) Косинус кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_4 знаходимо за формулою:

$$\cos\left(\vec{A_1A_2}, \vec{A_1A_4}\right) = \frac{\vec{A_1A_2} \cdot \vec{A_1A_4}}{|\vec{A_1A_2}| \cdot |\vec{A_1A_4}|} = \frac{(-1)(-12) + 3 \cdot 10 + 3(-5)}{\sqrt{1+9+9} \cdot \sqrt{144+100+25}} =$$

$$= \frac{27}{\sqrt{19} \cdot \sqrt{269}}. \text{ Маємо } \vec{A_1A_2} \wedge \vec{A_1A_4} = \arccos \frac{27}{\sqrt{19} \cdot \sqrt{269}}.$$

б) Грань $A_1A_2A_3$ – це трикутник. Площу його знайдемо за формулою:

$$S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2} |\vec{A_1A_2} \times \vec{A_1A_3}|.$$

$$\vec{A_1A_2} \times \vec{A_1A_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -15\vec{i} + 5\vec{j} - 10\vec{k}.$$

$$S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2} \sqrt{(-15)^2 + 5^2 + (-10)^2} = \frac{\sqrt{250}}{2} = \frac{5\sqrt{10}}{2} \text{ (кв.од.)}$$

в) Проекцію вектора $\overrightarrow{A_1 A_3}$ на вектор $\overrightarrow{A_1 A_4}$ обчислюємо за формулою:

$$np_{\overrightarrow{A_1 A_4}} \overrightarrow{A_1 A_3} = \frac{\overrightarrow{A_1 A_3} \cdot \overrightarrow{A_1 A_4}}{|\overrightarrow{A_1 A_4}|} = \frac{3(-12) + 1 \cdot 10 + (-4) \cdot (-5)}{\sqrt{144 + 100 + 25}} = \frac{6}{\sqrt{269}}.$$

г) Об'єм піраміди $A_1 A_2 A_3 A_4$ обчислимо, застосовуючи мішаний добуток векторів $\overrightarrow{A_1 A_2}$, $\overrightarrow{A_1 A_3}$ і $\overrightarrow{A_1 A_4}$.

$$\overrightarrow{A_1 A_2} \cdot \overrightarrow{A_1 A_3} \cdot \overrightarrow{A_1 A_4} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & -4 \\ -12 & 10 & -5 \end{vmatrix} = 280,$$

$$V_{nir} = \pm \frac{1}{6} \cdot 280 = \frac{280}{6} = \frac{140}{3} \text{ (куб.од.)}$$

Для знаходження висоти піраміди застосовуємо формулу:

$$V_{nir} = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H \Rightarrow H = \frac{3V_{nir}}{S_{осн}}.$$

$$S_{осн} = S_{\Delta A_1 A_2 A_3} = \frac{\sqrt{250}}{2} = \frac{5\sqrt{10}}{2} \text{ кв.од. і } V_{nir} = \frac{140}{3} \text{ куб.од. Підставимо}$$

$S_{осн}$ і V_{nir} в формулу для обчислення висоти:

$$H = \frac{3 \cdot 140 / 3}{5\sqrt{10} / 2} = \frac{280}{5\sqrt{10}} = \frac{56}{\sqrt{10}} = \frac{28\sqrt{10}}{5} \text{ (лін.од.)}.$$

д) Так як мішаний добуток векторів $\overrightarrow{A_1 A_2} \cdot \overrightarrow{A_1 A_3} \cdot \overrightarrow{A_1 A_4} = 280 > 0$, то вектори утворюють праву трійку.

Задача 7. Визначити при якому значенні β вектори $\vec{a} = \beta \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ і $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \beta \vec{k}$ взаємно перпендикулярні.

Розв'язання: Запишемо вектори в координатній формі: $\vec{a} = (\beta; -3; 2)$ і $\vec{b} = (1; 2; -\beta)$. Знайдемо скалярний добуток цих векторів: $\vec{a} \cdot \vec{b} = (\beta; -3; 2) \cdot (1; 2; -\beta) = 1 \cdot \beta + (-3) \cdot 2 + 2(-\beta) = -6 - \beta$. З умови перпендикулярності векторів: $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ маємо

$$-6 - \beta = 0 \Rightarrow \beta = -6.$$

Задача 8. З'ясувати, чи належать чотири точки: $A(1;2;-1)$, $B(4;1;5)$, $C(-1;2;-3)$ і $D(2;1;3)$ одній площині.

Розв'язання: Якщо ці точки лежать в одній площині, то вектори $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ належать цій площині, отже будуть компланарні. Перевіримо це. Знайдемо координати цих векторів: $\overline{AB} = (3; -1; 6)$, $\overline{AC} = (-2; 0; -2)$, $\overline{AD} = (1; -1; 4)$. Їх мішаний добуток

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Вектори компланарні, точки A, B, C, D лежать в одній площині.

Задача 9. Дані сила $\overline{F} = (5; -1; 2)$ та дві точки $A(3; -1; 1)$ і $B(0; 2; -2)$. Треба знайти: а) Роботу сили $\overline{F}$, необхідну для переміщення тіла із точки A в точку B ; б) Момент сили $\overline{F}$ відносно точки A , якщо сила прикладена в точку B .

Розв'язання:

а) Робота A сили визначається, як скалярний добуток сили $\overline{F}$ на вектор переміщення $\overline{S} = \overline{AB}$. Знайдемо координати вектора $\overline{S}$:

$$\overline{S} = \overline{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A).$$

$$\overline{S} = (0 - 3; 2 - (-1); -2 - 1) = (-3; 3; -3).$$

$$\text{Тоді } A = \overline{F} \cdot \overline{S} = (5; -1; 2) \cdot (-3; 3; -3) = -15 - 3 - 6 = -24.$$

б) Момент $\overline{m}_A \overline{F}$ сили $\overline{F}$ відносно точки B , якщо сила прикладена в точку A визначається як векторний добуток сили $\overline{F}$ на плече $\overline{AB}$. Знайдемо $\overline{AB} = (-3, 3, -3)$. Тоді $\overline{m}_A \overline{F} = \overline{F} \times \overline{AB}$.

$$\overline{m}_A \overline{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -3 & 3 & -3 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3\bar{i} - 9\bar{j} - 12\bar{k}.$$

1.1.3 Елементи аналітичної геометрії.

1) Розглянемо декартову прямокутну систему координат на площині. Точки в цій системі визначаються двома координатами: x – абсциса та y – ордината: $A(x, y)$. Дві точки $A(x_0, y_0)$ і $B(x_1, y_1)$, з'єднані прямою, утворюють відрізок AB , довжина якого визначається формулою: $d = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$.

Якщо точка $C(x_c, y_c)$ належить відрітку AB і ділить відрізок у відношенні λ , а саме $AC:CB=\lambda$, то координати її визначаються формулами: $x_c = \frac{x_0 + \lambda \cdot x_1}{1 + \lambda}$ і $y_c = \frac{y_0 + \lambda \cdot y_1}{1 + \lambda}$. Якщо $\lambda=1$, то

$$x_c = \frac{x_0 + x_1}{2} \text{ і } y_c = \frac{y_0 + y_1}{2}.$$

Пряма L може бути задана рівняннями:

а) з кутовим коефіцієнтом $y = k \cdot x + b$, де k – кутовий коефіцієнт, $k = \operatorname{tg} \varphi$, φ – кут, який пряма утворює з додатнім напрямком вісі OX , а b – відрізок, який пряма відтинає на вісі OY ;

б) загальне рівняння прямої $Ax + By + C = 0$, $k = -\frac{A}{B}$;

в) рівняння прямої, яка проходить через точку $A(x_0, y_0)$, визначається $y - y_0 = k(x - x_0)$;

г) якщо дві точки $A(x_0, y_0)$ і $B(x_1, y_1)$ належать прямій, то рівняння її $\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$;

д) рівняння прямої у відрізках $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, де a, b – відрізки, які площа відтинає відповідно на осях OX , OY , враховуючи їх знаки.

Умова паралельності прямих L_1 і L_2 , які мають відповідно кутові коефіцієнти k_1 і k_2 : $k_1 = k_2$. Умова перпендикулярності цих прямих: $k_1 \cdot k_2 = -1$. Кут φ між цими прямими визначається формулою: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$, де через k_1 позначають коефіцієнт прямої, яку повертають проти руху стрілки годинника до збігу з другою прямою,

утворюючи кут φ . Відстань від точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямої L , заданої рівнянням $Ax + By + C = 0$, визначається формулою:

$$d = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

До ліній другого порядку належать наступні:

а) коло з центром в точці $O_1(x_0, y_0)$ та радіусом R :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2;$$

б) еліпс з центром в точці $O_1(x_0, y_0)$ та півосями a та b :

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad \left(\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = -1 - \text{уявний еліпс} \right),$$

ексцентриситет еліпса $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, $a > b$;

в) гіпербола з центром в точці $O_1(x_0, y_0)$, півосями a та b :

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = \pm 1, \text{ рівняння асимптот: } y - y_0 = \pm \frac{b}{a} (x - x_0),$$

ексцентриситет гіперболи $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$;

г) парабола з вершиною в точці $O_1(x_0, y_0)$ визначається формулою: $(x - x_0)^2 = \pm 2p(y - y_0)$ $\left((y - y_0)^2 = \pm 2p(x - x_0) \right)$ з віссю симетрії $y = y_0$ ($x = x_0$), де p – параметр.

2) Розглянемо полярну систему координат. Вона складається з деякої точки O , що називається **полюсом**, і променя, що виходить з неї (за напрямом збігається з віссю OX) і називається **полярною віссю**. Точка M із полярними координатами ρ і φ позначається так: $M(\rho, \varphi)$. Рівняння лінії в полярній системі координат: $F(\rho, \varphi) = 0$, де ρ – полярний радіус, φ – полярний кут. Зазвичай вважають, що полярні координати ρ і φ змінюються в таких межах: $0 \leq \rho < +\infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Проте іноді доводиться розглядати кути, більші за 2π , а також від'ємні кути, тобто кути, відлічувані від полярної осі за

годинниковою стрілкою.

Перехід від декартової системи координат до полярної системи координат здійснюється за формулами: $x = \rho \cos \varphi$ і $y = \rho \sin \varphi$.

Перехід від полярної системи координат до декартової системи координат здійснюється за формулами: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ та

$$\sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ і } \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

При розв'язанні багатьох прикладних задач зручно використовувати так звані *параметричні рівняння* лінії, тобто, рівняння, в яких координати точок лінії задаються у вигляді функцій від деякої змінної величини t (параметра). Для таких рівнянь

прийнята запис: $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$. Якщо в параметричних рівняннях

виключити параметр t , то отримаємо звичайне рівняння лінії: $F(x, y) = 0$.

3) Розглянемо декартову прямокутну систему координат у просторі. Точки в цій системі визначаються трьома координатами: x – абсциса, y – ордината та z – апліката: $M(x, y, z)$. Довжина відрізка у просторі та поділ відрізка в заданому відношенні визначається аналогічними формулами, як для площини з урахуванням аплікати.

Площина у просторі характеризується нормальним вектором $\vec{n} = (A, B, C)$, який перпендикулярний площині.

Площина у просторі задається рівняннями:

а) рівняння площини з заданим нормальним вектором $\vec{n} = (A, B, C)$ і точкою $M_0(x_0, y_0, z_0)$, яка їй належить, визначається: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$;

б) загальне рівняння площини з заданим вектором $\vec{n} = (A, B, C)$: $Ax + By + Cz + D = 0$;

в) рівняння площини, якій належать три точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, визначається формулою:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0;$$

г) рівняння площини у відрізках: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, де a, b, c – відрізки, які площина відтинає відповідно на осях OX , OY , OZ , враховуючи їх знаки;

д) рівняння пучка площин

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0.$$

Умова паралельності двох площин: $p_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

і $p_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0: \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$

Умова перпендикулярності цих площин:
 $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$

Кут φ між цими площинами визначається формулою:

$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{(A_1)^2 + (B_1)^2 + (C_1)^2} \cdot \sqrt{(A_2)^2 + (B_2)^2 + (C_2)^2}}.$$

Відстань від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$ визначається формулою:

$$d = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Пряма у просторі характеризується напрямним вектором $\vec{S} = (l, m, n)$, який паралельний прямій. Пряма у просторі задається рівняннями:

а) канонічні рівняння прямої: $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$, де точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ належить прямій;

б) параметричні рівняння прямої:
$$\begin{cases} x = l \cdot t + x_0 \\ y = m \cdot t + y_0 \\ z = n \cdot t + z_0 \end{cases};$$

в) рівняння прямої, якій належать дві точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і $M_1(x_1, y_1, z_1)$ визначається формулою: $\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}$;

г) пряма, як перетин двох площин $p_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $p_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, визначається формулою:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Кут між двома прямими з напрямними векторами $\vec{S}_1 = (l_1, m_1, n_1)$ і $\vec{S}_2 = (l_2, m_2, n_2)$ визначається формулою: $\cos \varphi = \frac{\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2}{|\vec{S}_1| \cdot |\vec{S}_2|}$. Умова

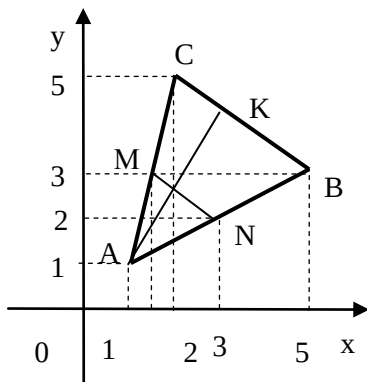
паралельності двох прямих: $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$, умова перпендикулярності двох прямих: $l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$.

Кут між прямою $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ з напрямним вектором $\vec{S} = (l, m, n)$ і площиною $Ax + By + Cz + D = 0$ з нормальним вектором $\vec{n} = (A, B, C)$ визначається формулою: $\sin \varphi = \frac{|\vec{S} \cdot \vec{n}|}{|\vec{S}| \cdot |\vec{n}|}$. Якщо пряма і

площина перпендикулярні, то $\frac{l}{A} = \frac{m}{B} = \frac{n}{C}$. Якщо пряма і площина паралельні, то $l \cdot A + m \cdot B + n \cdot C = 0$.

Задача 10. Дані вершини трикутника ABC : $A(1;1)$, $B(5;3)$, $C(2;5)$. Знайти: а) Довжину та рівняння сторони BC , б) Довжину та рівняння висоти, проведеної з вершини A , в) Рівняння прямої, проведеної через точку A паралельно стороні BC , г) Рівняння середньої лінії, яка з'єднує сторони AB і AC , д) Кут при вершині B . Зробити рисунок.

Розв'язання: Зробимо рисунок:



а) Рівняння BC : $\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} \Rightarrow \frac{x-5}{2-5} = \frac{y-3}{5-3}$,
 $(x-5) \cdot 2 = (y-3) \cdot (-3) \Rightarrow 2x + 3y - 19 = 0$ (BC).

Довжина BC :

$$d = \sqrt{(2-5)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{13}.$$

б) Висота AK і сторона BC перпендикулярні, тому $k_{AK} = -\frac{1}{k_{BC}}$. З рівняння BC маємо $k_{BC} = -\frac{2}{3}$, тоді $k_{AK} = \frac{3}{2}$. Для прямої AK відомі координати точки A і кутовий коефіцієнт. Рівняння AK :

$$y - y_0 = k(x - x_0) \Rightarrow y - 1 = \frac{3}{2}(x - 1) \Rightarrow 3x - 2y - 1 = 0.$$

Довжина висоти – це відстань від точки $A(1;1)$ до прямої BC :

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 19|}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{|-14|}{\sqrt{13}} \approx 3,8.$$

в) Пряма L , яка проходить через точку A , паралельна стороні BC . Їх кутові коефіцієнти рівні: $k_L = k_{BC} = -\frac{2}{3}$. Отримаємо її рівняння:

$$y - y_0 = k(x - x_0) \Rightarrow y - 1 = -\frac{2}{3}(x - 1) \Rightarrow 3y - 3 = 2x + 2.$$

$$2x + 3y - 5 = 0 \quad (L).$$

г) Середня лінія проходить через середини сторін AB і AC . Нехай це точки N і M відповідно. Знайдемо їх координати:

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}; \quad y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{1+5}{2} = 3;$$

$$x_N = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1+5}{2} = 3; \quad y_N = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1+3}{2} = 2.$$

Рівняння середньої лінії MN :

$$\frac{x - \frac{3}{2}}{3 - \frac{3}{2}} = \frac{y - 3}{2 - 3} \Rightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right) \cdot (-1) = \frac{3}{2}(y - 3) \Rightarrow x + \frac{3}{2}y - \frac{9}{2} = 0$$

$$2x + 3y - y = 0.$$

д) Щоб утворити кут B , треба пряму BC повернути проти стрілки годинника до збігу з прямою AB . Рівняння прямої BC

$$2x + 3y - 19 = 0, \text{ тому } k_1 = k_{BC} = -\frac{2}{3}. \text{ Рівняння } AB: \frac{x-1}{5-1} = \frac{y-1}{3-1} \Rightarrow$$

$$(x-1) \cdot 2 = 4(y-1) \Rightarrow y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}, \text{ тому } k_2 = k_{AB} = \frac{1}{2}.$$

$$\operatorname{tg} \angle B = \frac{\frac{1}{2} - \left(-\frac{2}{3}\right)}{1 + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{\frac{7}{6}}{\frac{2}{3}} = \frac{7}{4}, \quad \angle B = \operatorname{arctg} \left(\frac{7}{4} \right).$$

Задача 11. Рівняння кривих привести до канонічного виду та побудувати їх:

а) $9x^2 - 25y^2 - 36x - 50y - 214 = 0$ – рівняння гіперболи.

Розв'язання: Методом доповнення до повного квадрата виділяємо повний квадрат по змінних x і y :

$$9(x^2 - 4x + 4 - 4) - 25(y^2 + 2y + 1 - 1) = 214,$$

$$9((x-2)^2 - 4) - 25((y+1)^2 - 1) = 214 \Rightarrow 9(x-2)^2 - 25(y+1)^2 = 225,$$

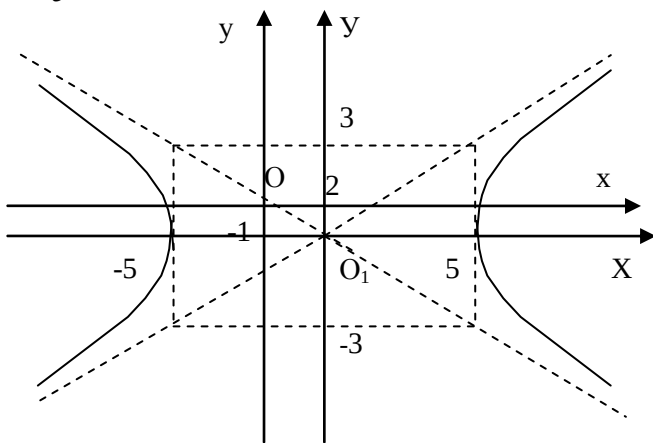
$$\frac{(x-2)^2}{25} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1.$$

Виконаємо паралельний перенос координат $X = x - 2$; $Y = y + 1$ з

новим центром в точці $O_1(2; -1)$. Рівняння має вигляд: $\frac{X^2}{25} - \frac{Y^2}{9} = 1$

Рівняння асимптот в «новій» системі координат $Y = \pm \frac{b}{a} X$, де $a = 5$,

$b = 3$. $Y = \pm \frac{3}{5} X$. Зробимо рисунок:



б) $x^2 + 2x + 2y^2 - 8y = 7$ – рівняння еліпса.

Розв'язання: Виділяємо повний квадрат по змінних x і y :

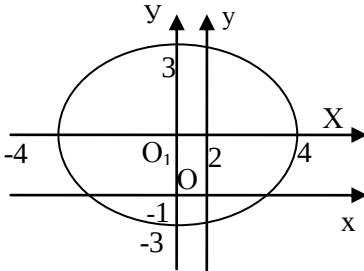
$$(x^2 + 2x + 1 - 1) + 2(y^2 - 4y + 4 - 4) = 7 \Rightarrow (x+1)^2 + 2(y-2)^2 = 16,$$

$$\frac{(x+1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{8} = 1.$$

Виконаємо паралельний перенос координат $X = x + 1$; $Y = y - 2$ з

новим центром в точці $O_1(-1; 2)$. Рівняння має вигляд: $\frac{X^2}{16} + \frac{Y^2}{8} = 1$.

Зробимо рисунок:

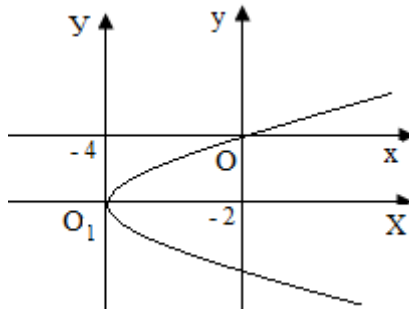


в) $y^2 + 4y = x$ – рівняння параболи.

Розв'язання: Виділяємо повний квадрат по змінній y :

$$(y^2 + 4y + 4 - 4) = x \Rightarrow (y + 2)^2 = x + 4.$$

Виконаємо паралельний перенос координат $X = x + 4$; $Y = y + 2$ з новим центром в точці $O_1(-4; -2)$. Рівняння має вигляд: $Y^2 = X$. Зробимо рисунок:



Задача 12. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(4; -3; 10)$ перпендикулярно до заданої прямої

$$L: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{-5}.$$

Розв'язання: Напрямний вектор прямої $\vec{S} = (2; 4; -5)$. Так як пряма і площина перпендикулярні, то $\vec{n} \parallel \vec{S}$, де $\vec{n}$ – нормальний вектор площини. Тоді $\vec{n} = (2; 4; -5)$. Рівняння площини складаємо за формулою: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, де $\vec{n} = (A; B; C)$ і

$M_0(x_0; y_0; z_0)$. Матимемо: $2 \cdot (x-4) + 4 \cdot (y+3) - 5 \cdot (z-10) = 0$.

Рівняння площини $2x + 4y - 5z + 54 = 0$.

Задача 13. Дано чотири точки: $A(-1; -2; 0)$, $B(0; -1; 1)$, $C(1; 0; 1)$ і $D(-1; 1; 0)$. Знайти: а) рівняння прямої, яка проходить через точку D паралельно прямій AB ; б) рівняння площини ABC ; в) рівняння прямої, яка проходить через точку D перпендикулярно площині ABC .

Розв'язання: а) запишемо рівняння прямої AB , яка проходить через точки A і B : $AB: \frac{x - (-1)}{0 - (-1)} = \frac{y - (-2)}{-1 - (-2)} = \frac{z - 0}{1 - 0} \Rightarrow$

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-0}{1}. \text{ Напрямний вектор прямої } AB: \bar{S} = (1; 1; 1).$$

Шукана пряма і пряма AB паралельні. Тому рівняння шуканої прямої:

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-0}{1}; \text{ б) складемо рівняння площини } ABC, \text{ яка}$$

проходить через три точки A, B, C :

$$\begin{vmatrix} x - (-1) & y - (-2) & z - 0 \\ 0 - (-1) & -1 - (-2) & 1 - 0 \\ 1 - (-1) & 0 - (-2) & 1 - 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x+1 & y+2 & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриємо визначник по елементах першого рядка. Матимемо: $(x+4) \cdot (-1) - (y+2) \cdot (-1) + z \cdot (0) = 0$. Рівняння площини ABC :

$$x - y - 1 = 0; \text{ в) вектор нормалі площини } ABC: \bar{n} = (1; -1; 0). \text{ З}$$

умови перпендикулярності прямої і площини: $\bar{n} \parallel \bar{S}$ матимемо

$$\bar{S} = (1; -1; 0). \text{ Канонічні рівняння прямої}$$

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{0}.$$

Задача 14. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $A(1; -2; 3)$ та пряму $L: \begin{cases} 2x - 3y + z - 3 = 0, \\ x + 3y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$.

Розв'язання: Пряма L задана як перетин двох площин. Через цю

пряму можна провести безліч площин, які ми називаємо пучком площин. Запишемо рівняння пучка для наших площин:

$$2x - 3y + z - 3 + \lambda(x + 3y + 2z + 1) = 0.$$

За умовою задачі площина проходить через точку A . Підставимо координати точки в рівняння пучка і знайдемо λ .

$$2 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) + 3 - 3 + \lambda(1 + 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 + 1) = 0 \Rightarrow 8 + 2 \cdot \lambda = 0.$$

$$\lambda = -4.$$

Знайдене значення λ підставимо в рівняння пучка:

$$2x - 3y + z - 3 - 4(x + 3y + 2z + 1) = 0 \Rightarrow -2x - 12y - 7z - 7 = 0.$$

Рівняння площини: $2x + 12y + 7z + 7 = 0$.

Задача 15. Знайти кут між прямою $L: \frac{x-1}{4} = \frac{y}{12} = \frac{z-1}{-3}$ та площиною $p: 6x - 3y + 2z - 5 = 0$.

Розв'язання: Напрямний вектор прямої $\vec{S} = (4; 12; -3)$, нормальний вектор площини $\vec{n} = (6; -3; 2)$. Кут між ними:

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{S} \cdot \vec{n}|}{|\vec{S}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|4 \cdot 6 + 12(-3) + (-3) \cdot 2|}{\sqrt{4^2 + 12^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 2^2}} = \frac{|-18|}{13 \cdot 7} = \frac{18}{91}.$$

Тоді $\varphi = \arcsin \frac{18}{91}$.

1.1.4 Диференціальне числення функції однієї змінної.

Основні теореми про границі

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}.$$

Наслідки

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (C \cdot f(x)) = C \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^n = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^n.$$

Перша важлива границя розкриває невизначеність $\left[\frac{0}{0} \right]$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(kx)}{x} = k \text{ і } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} kx}{x} = k.$$

Друга важлива границя розкриває невизначеність $\left[1^{\infty} \right]$:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e \approx 2,71828 \text{ або } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \text{ і } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$

Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ або $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = 0$, то функцію $\alpha(x)$ називають

нескінченно малою функцією.

Еквівалентні нескінченно малі функції ($\alpha(x) \rightarrow 0$, коли $x \rightarrow x_0$):

$$\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$$

$$\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x)$$

$$\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$$

$$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$$

$$\operatorname{arc} \sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$$

$$a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \cdot \ln a$$

$$\operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$$

$$(1 + \alpha(x))^n - 1 \sim n \cdot \alpha(x), n > 0$$

Існують односторонні границі функції: правостороння

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) \text{ і лівостороння } f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x).$$

Функція $y = f(x)$ неперервна в точці x_0 , якщо вона визначена в ній, односторонні границі в точці існують і рівні між собою. У протилежному випадку точка x_0 є точкою розриву.

Точка x_0 є точкою усувного розриву, якщо функція в точці невизначена, а границя функції в точці існує.

Точка x_0 є точкою розриву першого роду, якщо функція в точці невизначена, односторонні границі в точці існують, але не рівні між собою. В цьому випадку стрибок функції визначається формулою:

$$\delta = \left| \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) \right|.$$

Точка x_0 є точкою розриву другого роду, якщо хоча б одна з односторонніх границь не існує або дорівнює нескінченності.

Нагадуємо, що

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

$$\log_a b^k = k \log_a b, \quad a > 0, b > 0, a \neq 1;$$

$$\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} a > 0, b > 0, c > 0, c \neq 1$$

$$\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$$

$$1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$$

$$1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$$

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

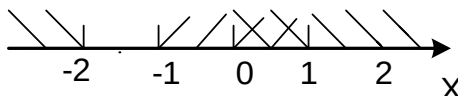
Задача 16. Знайти область визначення $D(y)$ функції

$$y = \arcsin x - \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x^2 - x - 2}.$$

Розв'язання: Область визначення функції складається з обмежень для кожного доданку і утворює систему нерівностей:

$$D(y): \begin{cases} |x| \leq 1 \\ x^2 + 2x \geq 0 \\ x^2 - x - 2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x \leq -2; x \geq 0. \\ x \neq 2; x \neq -1 \end{cases}$$

Розв'яжемо систему нерівностей методом інтервалів.



Розв'язок системи нерівностей: $x \in [0;1]$, тому $D(y): x \in [0;1]$.

Задача 17. Знайти границі функції, не застосовуючи правило Лопітала:

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 + 9x - 5}{6x^2 - x - 1} \quad \text{при а) } x_0 = -1, \quad \text{б) } x_0 = \frac{1}{2} \quad \text{в) } x_0 = \infty.$$

Розв'язання:

а) За умовою $x \rightarrow -1$. Значення $x_0 = -1$ є граничним значенням змінної. Підставимо (-1) в чисельник і знаменник дробу замість x . Будемо мати для чисельника $2 \cdot (-1)^2 + 9 \cdot (-1) - 5 = -12$ і для знаменника $6 \cdot (-1)^2 - (-1) - 1 = 6$. Так як відношення отриманих значень є величина стала, то вона є границею функції:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 9x - 5}{6x^2 - x - 1} = \frac{-12}{6} = -2.$$

б) За умовою $x \rightarrow \frac{1}{2}$. Значення $x_0 = \frac{1}{2}$ є граничним значенням змінної. Чисельник і знаменник дробу при цьому значенні дорівнюють нулю. Маємо невизначеність $\left[\frac{0}{0} \right]$. Виконаємо наступні дії. Ділимо

чисельник і знаменник дробу на $x - x_0$, тобто на $x - \frac{1}{2}$:

$$\begin{array}{r}
 -\frac{2x^2+9x-5}{2x^2-x} \Big| \frac{x-1/2}{2x+10} \\
 \underline{-10x-5} \\
 -10x-5 \\
 \underline{} \\
 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 -\frac{6x^2-x-1}{6x^2-3x} \Big| \frac{x-1/2}{6x+2} \\
 \underline{-2x-1} \\
 -2x-1 \\
 \underline{} \\
 0
 \end{array}$$

Переходимо до границі відношення часток від ділення. Матимемо

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 + 9x - 5}{6x^2 - x - 1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x + 10}{6x + 2} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} + 10}{6 \cdot \frac{1}{2} + 2} = \frac{11}{5}.$$

Зауваження. Замість ділення можна розкласти чисельник і знаменник на множники і зробити скорочення однакових виразів.

в) За умовою $x \rightarrow \infty$. Підставимо замість змінної $x = \infty$. Маємо невизначеність $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$. Перетворимо дріб, поділивши його чисельник і

знаменник на змінну в найвищому степені знаменника, тобто на x^2 . Дістанемо:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 9x - 5}{6x^2 - x - 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{9}{x} - \frac{5}{x^2}}{6 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+x} - 2}{x^2 - 1}.$$

Розв'язання: Коли $x \rightarrow 1$, то чисельник і знаменник дробу при цьому значенні дорівнюють нулю. Маємо невизначеність $\left[\frac{0}{0} \right]$, якій сприяє ірраціональність. Позбавимось цієї ірраціональності. Для цього помножимо чисельник і знаменник на вираз, спряжений до $(\sqrt{3+x} - 2)$, тобто на $(\sqrt{3+x} + 2)$, а потім чисельник і знаменник поділимо на $(x-1)$:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+x}-2}{x^2-1} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{3+x}-2)(\sqrt{3+x}+2)}{(x^2-1)(\sqrt{3+x}+2)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3+x-4}{(x^2-1)(\sqrt{3+x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)(\sqrt{3+x}+2)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{3+x}+2)} = \frac{1}{2(\sqrt{4}+2)} = \frac{1}{8}.
 \end{aligned}$$

$$3) \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}, \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \arcsin^3 5x}{x \cdot \sin^2 3x}.$$

Розв'язання:

а) При $x \rightarrow 0$ чисельник і знаменник дробу дорівнюють нулю. Маємо невизначеність $\left[\frac{0}{0} \right]$. Застосовуємо першу важливу границю. Оскільки

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}, \text{ то}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot (1 - \cos x)}{x^3 \cos x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{x^3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cdot \sin^2 \frac{x}{2}}{x^3} = \\
 &= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{x} = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Зауваження. При розв'язуванні можна застосовувати таблицю еквівалентності нескінченно малих функцій.

б) При $x \rightarrow 0$ чисельник і знаменник дробу дорівнюють нулю. Маємо невизначеність $\left[\frac{0}{0} \right]$. Застосуємо таблицю еквівалентності нескінченно малих функцій: $\arcsin 5x \sim 5x$, $\sin 3x \sim 3x$. Матимемо:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \arcsin^3 5x}{x \cdot \sin^2 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cdot (5x)^3}{x \cdot (3x)^2} = \frac{4 \cdot 125}{9} = \frac{500}{9}.$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-5}{x+3} \right)^{4x}.$$

Розв'язання: При $x \rightarrow \infty$ маємо невизначеність $[1^\infty]$. Застосуємо другу важливу граничу. Перетворимо вираз у дужках. Поділимо чисельник на знаменник або виділимо в чисельнику вираз знаменника і перетворений чисельник поділимо на знаменник, щоб мати одним з доданків одиницю. Дістанемо:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-5}{x+3} \right)^{4x} &= [1^\infty] = \left[\frac{x-5}{x+3} = \frac{x+3-8}{x+3} = 1 + \frac{-8}{x+3} \text{ або } \frac{-x-5}{x+3} \middle| \frac{x+3}{1} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-8}{x+3} \right)^{4x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-8}{x+3} \right)^{\frac{x+3}{-8}} \right]^{\frac{-8}{x+3} \cdot 4x}. \end{aligned}$$

Оскільки $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-8}{x+3} \right)^{\frac{x+3}{-8}} = e$

$$\text{і } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-8}{x+3} \cdot 4x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-32x}{x+3} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-32}{1 + \frac{3}{x}} = -32, \text{ то}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-5}{x+3} \right)^{4x} = e^{-32}.$$

Задача 18. Дослідити на неперервність функцію, установити характер точок розриву. Зробити схематичне креслення.

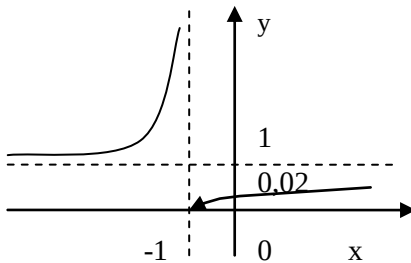
$$a) y = f(x) = 7^{-\frac{2}{x+1}}.$$

Розв'язання: Оскільки дана функція показникова, то вона неперервна при всіх значеннях x , крім $x = -1$. В цій точці функція невизначена, тобто має в ній розрив. З'ясуємо характер розриву. Знайдемо односторонні границі функції в точці $x = -1$:

$$f(-1-0) = \lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-0} 7^{-\frac{2}{x+1}} = \left\{ 7^{\frac{-2}{-0}} = 7^{+\infty} \right\} = \infty,$$

$$f(-1+0) = \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} 7^{-\frac{2}{x+1}} = \left\{ 7^{\frac{-2}{+0}} = 7^{-\infty} \right\} = 0.$$

Оскільки одна з границь дорівнює ∞ , то $x = -1$ – точка розриву другого роду. Зробимо схематичне креслення



$$\text{б) } y = f(x) = \frac{2}{1 + 2^{\frac{1}{x-1}}}.$$

Розв'язання: Ця функція неперервна при всіх значеннях x , крім $x = 1$. В цій точці вона невизначена. Точка $x = 1$ є точкою розриву. З'ясуємо характер розриву. Обчислимо односторонні границі функції в точці $x = 1$:

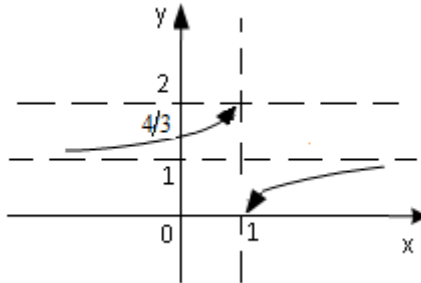
$$f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{2}{1 + 2^{\frac{1}{x-1}}} = \left\{ \frac{x-1 \rightarrow -0}{\frac{1}{x-1} \rightarrow -\infty} \quad 2^{\frac{1}{x-1}} \rightarrow 0 \right\} = 2,$$

$$f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{2}{1 + 2^{\frac{1}{x-1}}} = \left\{ \frac{x-1 \rightarrow +0}{\frac{1}{x-1} \rightarrow +\infty} \quad 2^{\frac{1}{x-1}} \rightarrow \infty \right\} = 0.$$

Оскільки границі існують, але $f(1+0) \neq f(1-0)$, маємо розрив першого роду. Стрибок δ функції $f(x)$:

$$\delta = |f(1+0) - f(1-0)| = |2 - 0| = 2.$$

Зробимо схематичне креслення.



$$\text{в) } y = f(x) = \begin{cases} x^2, & -\infty < x \leq 1 \\ 5 - 4x, & 1 < x < 3 \\ x - 5, & 3 \leq x < \infty \end{cases}.$$

Розв'язання: Область визначення функції $(-\infty; \infty)$. На інтервалах $(-\infty; 1)$, $(1; 3)$, $(3; \infty)$ функція неперервна. Розриви можуть бути лише в точках $x=1$ і $x=3$. Обчислимо односторонні границі функції в точці $x=1$:

$$f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} x^2 = 1 \quad \text{і} \quad f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (5 - 4x) = 1.$$

Оскільки $f(1-0) = f(1+0) = 1$, то в точці $x=1$ задана функція неперервна. Обчислимо односторонні границі функції в точці $x=3$:

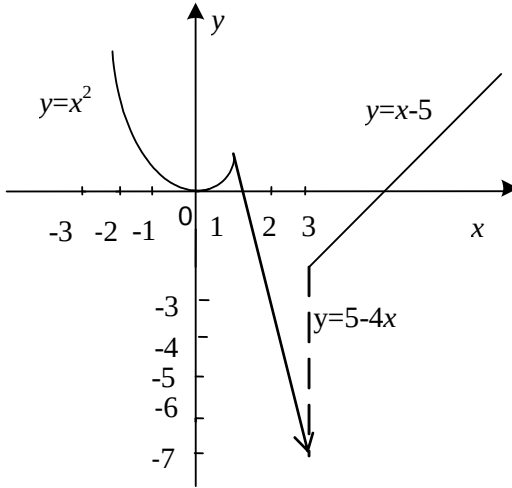
$$f(3-0) = \lim_{x \rightarrow 3-0} (5 - 4x) = -7 \quad \text{і} \quad f(3+0) = \lim_{x \rightarrow 3+0} (x - 5) = -2.$$

Так як $f(3-0) \neq f(3+0)$, то функція в точці $x=3$ має розрив

першого роду. Стрибок функції в точці розриву:

$$\delta = |f(3+0) - f(3-0)| = |-2 - (-7)| = 5.$$

Зробимо схематичне креслення:



Правила диференціювання. Маємо функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$, $C - \text{const}$.

$$(C \cdot u)' = C \cdot (u)'$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{(v)^2}$$

Таблиця похідних для функцій $u = u(x)$:

$$(C)' = 0$$

$$(x)' = 1$$

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$$

$$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u', \quad a - \text{const}$$

$$(e^u)' = e^u \cdot u'$$

$$(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$$

$$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$$

$$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$$

$$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$$

$$(tg u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$$

$$(ctg u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$$

$$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$$

$$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$$

$$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$$

$$(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$$

Для степенєво-показникової функції $(u(x))^{v(x)} = u^v$:

$$(u^v)' = u^v \ln u \cdot v' + v u^{v-1} \cdot u'.$$

Для гіперболічних функцій:

$$sh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$ch x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$th x = \frac{sh x}{ch x}$$

$$cth x = \frac{ch x}{sh x}$$

похідні мають вигляд:

$$(sh x)' = ch x$$

$$(ch x)' = sh x$$

$$(th x)' = \frac{1}{ch^2 x}$$

$$(cth x)' = -\frac{1}{sh^2 x}$$

Функція $y(x)$ є неявно заданою, якщо рівняння $F(x, y) = 0$ неможливо розв'язати відносно функції $y(x)$. При знаходженні похідної неявно заданої функції необхідно рівняння $F(x, y) = 0$ продиференціювати зліва направо, враховуючи, що $(y)' = y'$ і $(x)' = 1$. Отримане рівняння розв'язують відносно y' .

У деяких випадках при знаходженні похідної доцільно функцію спочатку прологарифмувати, а потім знайти похідну як від неявної функції (логарифмічне диференціювання).

Якщо функція параметрично задана $\begin{cases} y = y(t) \\ x = x(t) \end{cases}$, то похідна

знаходиться за формулою: $y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}$.

Диференціал функції $y = f(x)$ знаходиться за формулою:
 $dy = f'(x) \cdot dx$.

Враховуючи, що y' є функцією, то її можна диференціювати.

Дістанемо $y'' = (y')'$ і так далі: $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$.

Друга похідна параметрично заданої функції знаходиться за формулою:

$$y''_{xx} = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{x'_t y''_{tt} - x''_{tt} y'_t}{(x'_t)^3}, \text{ або } y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}.$$

Правило Лопітала застосовують для розкриття невизначеностей.

Наприклад, для $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$ і $\left[\frac{0}{0} \right]$ матимемо $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Диференціальне числення застосовують для дослідження функцій, знаходження найбільшого та найменшого значення функції на відрізку, знаходження рівнянь дотичної та нормалі до графіка функції в заданій точці.

Задача 19. Знайти похідні заданих функцій:

$$\text{a) } y = \left(2x^5 + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} - 5 \right)^3.$$

$$\text{Розв'язання: } y' = 3 \left(2x^5 + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} - 5 \right)^2 \cdot \left(2x^5 + 3 \cdot x^{-\frac{1}{3}} - 5 \right)' =$$

$$= 3 \left(2x^5 + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} - 5 \right)^2 \cdot \left(2 \cdot 5x^4 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) \cdot x^{-\frac{4}{3}} \right) =$$

$$= 3 \left(2x^5 + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} - 5 \right)^2 \cdot \left(10x^4 - x^{-\frac{4}{3}} \right).$$

б) $y = \ln^2 2x \cdot \operatorname{arctg}(2 - 3x^2).$

Розв'язання: $y' = (\ln^2 2x)' \operatorname{arctg}(2 - 3x^2) + \ln^2 2x \cdot (\operatorname{arctg}(2 - 3x^2))' =$

$$= 2 \ln 2x \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2 \cdot \operatorname{arctg}(2 - 3x^2) + \ln^2 2x \cdot \frac{1 \cdot (-6x)}{1 + (2 - 3x^2)^2} =$$

$$= \frac{2 \ln 2x}{x} \cdot \operatorname{arctg}(2 - 3x^2) - \frac{6x \cdot \ln^2 2x}{1 + (2 - 3x^2)^2}.$$

в) $y = \frac{\sqrt{3x^2 - 2}}{e^{5x}}.$

Розв'язання: $y' = \frac{(\sqrt{3x^2 - 2})' e^{5x} - (e^{5x})' \sqrt{3x^2 - 2}}{(e^{5x})^2} =$

$$= \frac{\frac{6x}{2\sqrt{3x^2 - 2}} \cdot e^{5x} - 5 \cdot e^{5x} \sqrt{3x^2 - 2}}{e^{10x}} = \frac{3x \cdot e^{5x} - 5 \cdot e^{5x} (3x^2 - 2)}{e^{10x} \sqrt{3x^2 - 2}} =$$

$$= \frac{3x \cdot e^{5x} - 15x^2 e^{5x} + 10e^{5x}}{e^{10x} \sqrt{3x^2 - 2}} = -\frac{-15x^2 + 3x + 10}{e^{5x} \sqrt{3x^2 - 2}}.$$

г) $y = (\sqrt{x+2})^x.$

Розв'язання: Застосуємо логарифмічне диференціювання.

Прологарифмуємо рівняння $y = (\sqrt{x-2})^x$: $\ln y = x \ln \sqrt{x+2}$ або

$\ln y = \frac{x}{2} \cdot \ln(x+2)$. Диференціюємо отримане рівняння, вважаючи, що

$$(y)' = y' \text{ і } (x)' = 1:$$

$$(\ln y)' = \left(\frac{x}{2} \ln(x+2) \right)' \Rightarrow \frac{1}{y} y' = \left(\frac{x}{2} \right)' \ln(x+2) + \frac{x}{2} (\ln(x+2))',$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2} \ln(x+2) + \frac{x}{2(x+2)} \Rightarrow y' = y \cdot \left(\frac{1}{2} \ln(x+2) + \frac{x}{2(x+2)} \right).$$

Враховуючи, що $y = (\sqrt{x-2})^x$, матимемо:

$$y' = (\sqrt{x+2})^x \cdot \left(\frac{1}{2} \ln(x+2) + \frac{x}{2(x+2)} \right).$$

$$\text{д) } \sin(xy) = \frac{x}{y} + 3.$$

Розв'язання: Функція y неявно задана. Диференціюємо рівняння, вважаючи, що $(y)' = y'$ і $(x)' = 1$:

$$(\sin(xy))' = \left(\frac{x}{y} + 3 \right)' \Rightarrow \cos(xy) \cdot (y + xy') = \frac{y - xy'}{y^2}.$$

Виконаємо необхідні перетворення і розв'яжемо рівняння відносно y' :

$$y \cdot \cos(xy) + x \cdot y' \cdot \cos(xy) = \frac{y}{y^2} - \frac{x \cdot y'}{y^2},$$

$$\frac{x \cdot y'}{y^2} + x \cdot y' \cos(xy) = \frac{1}{y} - y \cdot \cos(xy),$$

$$y' \cdot \left(\frac{x}{y^2} + x \cdot \cos(xy) \right) = \frac{1}{y} - y \cdot \cos(xy),$$

$$y' = \frac{\frac{1 - y^2 \cdot \cos(xy)}{y}}{\frac{x \cdot (1 + y^2 \cdot \cos(xy))}{y^2}} = \frac{y \cdot (1 - y^2 \cdot \cos(xy))}{x \cdot (1 + y^2 \cdot \cos(xy))}.$$

Таким чином, $y' = \frac{y \cdot (1 - y^2 \cdot \cos(xy))}{x \cdot (1 + y^2 \cdot \cos(xy))}.$

Задача 20. Знайти першу і другу похідні заданих функцій.

а) $y = (1 + x^2) \cdot \operatorname{tg} x.$

Розв'язання: Знайдемо y' , а потім $y'' = (y')'$:

$$y' = (1 + x^2)' \cdot \operatorname{tg} x + (1 + x^2) \cdot (\operatorname{tg} x)' = 2x \cdot \operatorname{tg} x + (1 + x^2) \cdot \frac{1}{\cos^2 x} =$$

$$= 2x \cdot \operatorname{tg} x + \frac{1 + x^2}{\cos^2 x},$$

$$y'' = (y')' = (2x)' \cdot \operatorname{tg} x + 2x \cdot (\operatorname{tg} x)' + \frac{(1 + x^2)' \cos^2 x - (1 + x^2)(\cos^2 x)'}{\cos^4 x} =$$

$$= 2\operatorname{tg} x + \frac{2x}{\cos^2 x} + \frac{2x \cos^2 x - (1 + x^2) 2 \cos x \cdot (-\sin x)}{\cos^4 x} =$$

$$= 2\operatorname{tg} x + \frac{2x}{\cos^2 x} + \frac{2x \cos^2 x + (1 + x^2) \sin 2x}{\cos^4 x}.$$

б) Знайти похідні параметрично заданих функцій. Застосуємо наведені вище формули.

$$1) \begin{cases} x = 5t^2 - t \\ y = 3t + t^3 \end{cases}.$$

Розв'язання: Знайдемо $x'_t = 10t - 1$ і $y'_t = 3 + 3t^2$. Матимемо

$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{3+3t^2}{10t-1}$. Знайдемо $x''_{tt} = 10$ і $y''_{tt} = 6t$. Тоді друга похідна

$$\begin{aligned} y''_{xx} &= \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{(10t-1) \cdot 6t - 10 \cdot (3+3t^2)}{(10t-1)^3} = \frac{60t^2 - 6t - 30 - 30t^2}{(10t-1)^3} = \\ &= \frac{30t^2 - 6t - 30}{(10t-1)^3} = \frac{6 \cdot (5t^2 - t - 5)}{(10t-1)^3}. \end{aligned}$$

$$2) \begin{cases} x = tg t \\ y = 2t + \sin 2t \end{cases}.$$

Розв'язання: Знайдемо $y'_t = 2 + 2 \cos 2t = 2(1 + \cos 2t) = 4 \cos^2 t$,

$x'_t = \frac{1}{\cos^2 t}$. Тоді перша похідна $y'_x = \frac{4 \cos^2 t}{1/\cos^2 t} = 4 \cos^4 t$. Знайдемо

$(y'_x)'_t = 16 \cos^3 t (-\sin t)$. Друга похідна функції визначається

формулою $y''_{xx} = \frac{-16 \cos^3 t \sin t}{1/\cos^2 t} = -16 \cos^5 t \cdot \sin t$.

Задача 21. Знайти границю, застосувавши правило Лопітала.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$$

Розв'язання: Маємо невизначеність вигляду $[\infty - \infty]$. Зведемо цю

невизначеність до вигляду $\left[\frac{0}{0} \right]$ (приведемо до спільного знаменника),

а потім застосуємо правило Лопітала:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} = \left[\frac{0}{0} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1-\ln x)'}{((x-1)\ln x)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-1/x}{\ln x + 1 - 1/x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x \cdot \ln x + x - 1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)'}{(x \ln x + x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x + x \cdot \frac{1}{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x + 2} = \frac{1}{2}.$$

Задача 22. Знайти рівняння дотичної до графіка функції $y = \frac{x+2}{x-3}$ в точці перетину його з віссю абсцис та рівняння нормалі в точці перетину його з віссю ординат.

Розв'язання: Рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$ знаходиться за формулою: $y - y_0 = f'(x) \cdot (x - x_0)$, а рівняння нормалі $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x)} \cdot (x - x_0)$. Знайдемо точки перетину графіка функції з осями координат:

а) з віссю OX : $y = 0 \Rightarrow x + 2 = 0$; $x = -2 \Rightarrow A(-2; 0)$;

б) з віссю OY : $x = 0 \Rightarrow y = -2/3$; $\Rightarrow B(0; -2/3)$.

$$\begin{aligned} \text{Знайдемо } y' &= \left(\frac{x+2}{x-3} \right)' = \frac{(x+2)' \cdot (x-3) - (x+2) \cdot (x-3)'}{(x-3)^2} = \\ &= \frac{1 \cdot (x-3) - (x+2) \cdot 1}{(x-3)^2} = \frac{x-3-x-2}{(x-3)^2} = \frac{-5}{(x-3)^2}. \end{aligned}$$

Обчислимо похідну в точках A і B :

$$y'(x_A) = \frac{-5}{(-2-3)^2} = \frac{-5}{25} = -\frac{1}{5}, \quad y'(x_B) = \frac{-5}{(-3)^2} = -\frac{5}{9}.$$

Запишемо рівняння дотичної в точці A :

$$y - y_A = y'(x_A) \cdot (x - x_A) \Rightarrow y - 0 = -\frac{1}{5}(x + 2); \quad y = -\frac{1}{5}(x + 2).$$

Запишемо рівняння нормалі в точці B :

$$y - y_B = -\frac{1}{y'(x_B)}(x - x_B) \Rightarrow y + \frac{2}{3} = -\frac{1}{-5/9}(x - 0); \quad y = \frac{9}{5}x - \frac{2}{3}.$$

Задача 23. Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ на відрізку $[-1; 2]$.

Розв'язання: Найбільше та найменше значення на відріжку функція досягає або в критичних точках, що належать відріжку, або на його кінцях. Функція на відріжку неперервна. Знаходимо критичні точки, які належать даному відріжку. Перша похідна

$$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 \Rightarrow f'(x) = 0, \text{ звідки } x^2(x^2 - 4x + 3) = 0.$$

Корені цього рівняння: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$. $x_1 \in [-1; 2]$; $x_2 \in [-1; 2]$; $x_3 \notin [-1; 2]$. Знайдемо значення функції в критичних точках $x = 0$ та $x = 1$ і на кінцях відрізка при $x = -1$ і $x = 2$:

$$f(0) = 1; f(1) = 2; f(-1) = -10; f(2) = -7.$$

Виберемо серед цих значень найбільше та найменше. Отже,

$$f_{\text{найб}} = f_{\max_{[-1; 2]}} = f(1) = 2 \text{ і } f_{\text{найм}} = f_{\min_{[-1; 2]}} = f(-1) = -10.$$

Задача 24. Дослідити за допомогою диференціального числення функцію $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$ та побудувати її графік.

Розв'язання:

1. Область визначення функції: $D(y) : x \in (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$.
2. Точки перетину графіка функції з осями координат:
з віссю OX : $y = 0 \Rightarrow x = 0$, з віссю OY : $x = 0 \Rightarrow y = 0$.
3. Перевіряємо виконання однієї із рівностей: якщо $f(-x) = f(x)$, то функція парна, якщо $f(-x) = -f(x)$, то функція непарна.

Жодна з рівностей не виконується, тому функція є ні парна, ні непарна. Графік функції не буде мати ніякої симетрії.

4. Знайдемо асимптоти графіка функції. Асимптоти можуть бути вертикальні: $x = x_0$, коли $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm \infty$, і похилі: $y = kx + b$, де

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} (f(x) - kx).$$

Частинним випадком похилої

асимптоти є вертикальна, якщо $b = 0$.

В точці $x = -1$ функція має нескінченний розрив:

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty \text{ і } \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty.$$

Отже $x = -1$ – рівняння вертикальної асимптоти.

Знаходимо похилі асимптоти $y = k \cdot x + b$, де

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{2(x+1)^2 \cdot x} = \frac{1}{2}, \\ b &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3}{2(x+1)^2} - \frac{1}{2}x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3 - x(x^2 + 2x + 1)}{2(x+1)^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - x^3 - 2x^2 - x}{2(x+1)^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2 - x}{2(x+1)^2} = -1. \end{aligned}$$

Маємо рівняння похилої асимптоти $y = \frac{1}{2}x - 1$.

5. Знайдемо екстремум функції та інтервали зростання і спадання. Якщо перша похідна функції в околі критичної точки змінює знак, то точка екстремальна. При зміні знака з «+» на «-» маємо мінімум, а при зміні знака з «-» на «+» – максимум.

Перша похідна функції:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3x^2(x+1)^2 - x^3 \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2(x+1)(3(x+1) - 2x)}{(x+1)^4} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2(3x+3-2x)}{(x+1)^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3 + 3x^2}{(x+1)^3}. \end{aligned}$$

Знайдемо критичні точки: $y' = 0$ при $x^2(x+3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ і $x_2 = -3$, y' не існує при $(x+1)^3 = 0 \Rightarrow x = -1$, але ця точка не належить області визначення. Складемо таблицю

x	$(-\infty; -3]$	-3	$[-3; -1)$	$(-1; 0]$	0	$[0; \infty)$
y'	$+$	0	$-$	$+$	0	$+$
y	зростає	max	спадає	зростає	extr немає	зростає

Знаходимо знак похідної y' в кожному із інтервалів і результат занесемо в таблицю.

$$y_{\max} = y(-3) = \frac{(-3)^3}{2(-3+1)^2} = -\frac{27}{8}.$$

6. Знайдемо точки перегину, інтервали опуклості та вгнутості. Якщо друга похідна функції в околі критичної точки змінює знак, то точка є точкою перегину графіка функції. Якщо в кожній точці інтервала $y'' < 0$, то на ньому графік функції вгнутий, а у випадку $y'' > 0$, то – опуклий.

Друга похідна:

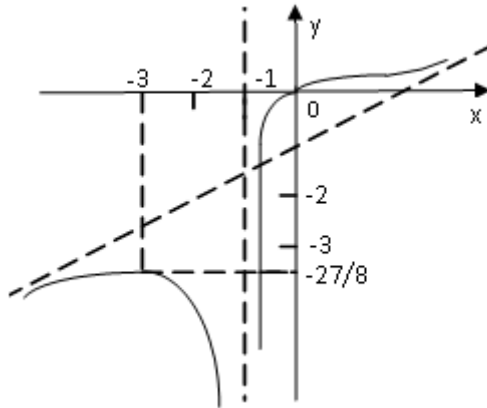
$$\begin{aligned} y'' = (y')' &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(3x^2 + 6x) \cdot (x+1)^3 - (x^3 + 3x^2) \cdot 3 \cdot (x+1)^2}{(x+1)^6} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3x(x+2)(x+1)^3 - 3x^2(x+3)(x+1)^2}{(x+1)^6} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3x(x+1)^2((x+2)(x+1) - x(x+3))}{(x+1)^6} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3x(x^2 + 2x + x + 2 - x^2 - 3x)}{(x+1)^4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3x \cdot 2}{(x+1)^4} = \frac{3x}{(x+1)^4}. \end{aligned}$$

Знайдемо критичні точки: $y'' = 0$ при $x = 0$; y'' не існує при $x = -1$, але ця точка не належить області визначення. Складемо таблицю

x	$(-\infty; -1)$	$(-1; 0]$	0	$[0; \infty)$
y''	$-$	$-$	0	$+$
y	$\cap$	$\cap$	перегин	$\cup$

Знаходимо знак похідної y'' в кожному з інтервалів і результат заносимо в таблицю. Значення функції в точці перегину $y(0) = 0$.

Використовуючи одержані дані, будуємо графік функції.



1.1.5 Диференціальне числення функції багатьох змінних.

Функція $z = f(x, y)$ – функція двох змінних x і y . Областю визначення функції є деяка множина точок площини xOy (може бути вся площина, або частина площини, обмежена певними лініями).

Існують частинні похідні першого порядку функції по x : $z'_x = \frac{\partial z}{\partial x}$ та

по y : $z'_y = \frac{\partial z}{\partial y}$. При знаходженні похідної по певній змінній всі інші

змінні вважаємо сталими. Правила диференціювання і таблиця похідних такі ж самі, як для функції однієї змінної. Частинні похідні першого порядку є функціями двох змінних. Їх можна

диференціювати. Дістанемо другі частинні похідні: $z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$,

$$z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}. \quad \text{При цьому } z''_{xy} = z''_{yx}, \quad \text{тобто } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Повний диференціал функції обчислюється за формулою:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Похідна складеної функції:

а) функція $z = f(x, y)$ залежить від двох змінних x та y , кожна з яких, в свою чергу, є функцією змінної t : $x = x(t)$, $y = y(t)$. Тоді

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt};$$

б) маємо функцію $z = f(x, y)$, де $y = y(x)$. Тоді

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx};$$

в) маємо функцію $z = f(x, y)$, де $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Тоді

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{і} \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Функція $z = f(x, y)$ є неявно заданою, якщо рівняння $F(x, y, z) = 0$ не може бути розв'язане відносно z . Тоді частинні похідні цієї функції визначаються формулами:

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} \quad \text{і} \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Нехай задано поверхню $F(x, y, z) = 0$. Точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ належить цій поверхні і функція $F(x, y, z)$ диференційована в ній.

Рівняння дотичної площини, яка проходить через точку M_0 , обчислюється за формулою:

$$F'_x(M_0) \cdot (x - x_0) + F'_y(M_0) \cdot (y - y_0) + F'_z(M_0) \cdot (z - z_0) = 0.$$

Рівняння нормалі, яка проходить через точку M_0 , має вигляд:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}.$$

Якщо рівняння поверхні задано в явній формі: $z = f(x, y)$, то поклавши $F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$, можна застосувати наведені вище формули.

Якщо функція $z = f(x, y)$ має екстремум в точці (x_0, y_0) , то в цій точці частинні похідні першого порядку по змінних x та y дорівнюють нулю або не існують. Точка, що задовольняє цим умовам, називається критичною, наприклад, (x_0, y_0) .

Вона буде екстремальною, якщо

$$\Delta(x_0, y_0) = f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0.$$

Маємо в цій точці максимум, коли $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$, а мінімум – $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$.

Якщо $\Delta(x_0, y_0) < 0$, то точка не екстремальна. У випадку, коли $\Delta(x_0, y_0) = 0$, необхідне додаткове дослідження.

Задача 25. Знайти і побудувати область визначення функції:

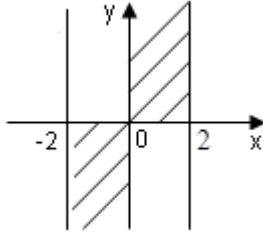
$$z = \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{xy}.$$

Розв'язання: Функція $\arcsin \frac{x}{2}$ визначена при $-1 \leq \frac{x}{2} \leq 1$, або $-2 \leq x \leq 2$. Функція $\sqrt{xy}$ існує, якщо $xy \geq 0$, тобто у двох

випадках: при $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ і при $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$. Звідки область визначення всієї

функції: $\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$ і $\begin{cases} -2 \leq x \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$.

Побудуємо область визначення функції.



Задача 26. Знайти частинні похідні першого порядку для функції

$$z = \frac{x+y}{\sqrt[3]{x}} + e^{2x+3y}.$$

Розв'язання: При знаходженні похідної по певній змінній всі інші змінні вважаємо сталими.

$$\begin{aligned} z'_x &= \frac{(x+y)'_x \cdot \sqrt[3]{x} - (x+y) \cdot (\sqrt[3]{x})'_x}{(\sqrt[3]{x})^2} + (e^{2x+3y})'_x = \\ &= \frac{1 \cdot \sqrt[3]{x} - (x+y) \cdot \frac{1}{3} x^{-2/3}}{\sqrt[3]{x^2}} + e^{2x+3y} \cdot 2 = \frac{3x - x - y}{3\sqrt[3]{x^4}} + 2e^{2x+3y} = \\ &= \frac{2x - y}{3\sqrt[3]{x^4}} + 2e^{2x+3y}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z'_y &= \frac{(x+y)'_y \cdot \sqrt[3]{x} - (x+y) \cdot (\sqrt[3]{x})'_y}{(\sqrt[3]{x})^2} + (e^{2x+3y})'_y = \\ &= \frac{1 \cdot \sqrt[3]{x} - (x+y) \cdot 0}{\sqrt[3]{x^2}} + e^{2x+3y} \cdot 3 = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 3e^{2x+3y}. \end{aligned}$$

Задача 27. Довести, що функція $z = f(x, y)$ задовольняє заданому рівнянню:

$$z = xy + \ln(x+y) \quad z''_{xy} - z''_{yy} = 1.$$

Розв'язання: Знайдемо $z'_x = y + \frac{1}{x+y}$ і $z'_y = x + \frac{1}{x+y}$. Тоді

$z''_{xy} = 1 - \frac{1}{(x+y)^2}$ і $z''_{yy} = -\frac{1}{(x+y)^2}$. Підставимо знайдені похідні в рівняння:

$$1 - \frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(x+y)^2} = 1 \Rightarrow 1 = 1.$$

Отримали тотожність. Функція задовольняє заданому рівнянню.

Задача 28. Знайти перші частинні похідні неявно заданої функції:

$$\sin(xyz) + \sqrt{x+y+z} = 0.$$

Розв'язання: Маємо рівняння $F(x, y, z) = 0$, де $F(x, y, z) = \sin(xyz) + \sqrt{x+y+z}$. Знайдемо похідні функції F по змінних x, y, z :

$$F'_x = \cos(xyz) \cdot (yz) + \frac{1}{2\sqrt{x+y+z}} = \frac{2yz \cos(xyz) \sqrt{x+y+z} + 1}{2\sqrt{x+y+z}},$$

$$F'_y = \cos(xyz) \cdot (xz) + \frac{1}{2\sqrt{x+y+z}} = \frac{2xz \cos(xyz) \sqrt{x+y+z} + 1}{2\sqrt{x+y+z}},$$

$$F'_z = \cos(xyz) \cdot (xy) + \frac{1}{2\sqrt{x+y+z}} = \frac{2xy \cos(xyz) \sqrt{x+y+z} + 1}{2\sqrt{x+y+z}}.$$

Тоді частинні похідні заданої функції:

$$z'_x = -\frac{2yz \cos(xyz) \sqrt{x+y+z} + 1}{2xy \cos(xyz) \sqrt{x+y+z} + 1}, \quad z'_y = -\frac{2xz \cos(xyz) \sqrt{x+y+z} + 1}{2xy \cos(xyz) \sqrt{x+y+z} + 1}.$$

Задача 29. Знайти перші похідні складної функції $z = \cos \frac{x}{y}$, де

$$x = t^2 - 3t, \quad y = \sqrt[5]{t^2 + 1}.$$

Розв'язання: Знайдемо похідні:

$$z'_x = -\sin \frac{x}{y} \cdot \frac{1}{y}, \quad z'_y = -\sin \frac{x}{y} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{x}{y^2} \cdot \sin \frac{x}{y}, \quad x'_t = 2t - 3 \quad \text{і}$$

$$y'_t = \frac{1}{5} (t^2 + 1)^{-4/5} \cdot 2t.$$

За наведеною вище формулою, маємо:

$$z'_t = -\frac{1}{y} \cdot \sin \frac{x}{y} \cdot (2t - 3) + \frac{x}{y^2} \cdot \sin \frac{x}{y} \cdot \frac{2}{5} t \cdot (t^2 + 1)^{-4/5}.$$

Задача 30. Знайти повний диференціал функції:

$$z = 5x^2y^3 - 4x + 2y - 3.$$

Розв'язання: Знайдемо перші частинні похідні: $z'_x = 10xy^3 - 4$,
 $z'_y = 15x^2y^2 + 2$. Тоді повний диференціал функції

$$dz = (10xy^3 - 4)dx + (15x^2y^2 + 2)dy.$$

Задача 31. Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $2z = x^2 + y^2$ в точці $M_0(1; -2; 2,5)$.

Розв'язання: Запишемо рівняння площини в неявному вигляді:

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z = 0.$$

Знайдемо частинні похідні в точці M_0 :

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{(1; -2; 2,5)} = 2x|_{(1; -2; 2,5)} = 2, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{(1; -2; 2,5)} = 2y|_{(1; -2; 2,5)} = -4,$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_{(1; -2; 2,5)} = -2.$$

Підставимо в рівняння дотичної площини знайдені значення похідних:

$$2(x - 1) - 4(y + 2) - 2(z - 2,5) = 0 \Rightarrow 2x - 4y - 2z - 5 = 0$$

Рівняння нормалі:

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y + 2}{-4} = \frac{z - 2,5}{-2}.$$

Задача 32. Дослідити на екстремум функцію:

$$z = 8x^3 + y^3 - 6xy + 5.$$

Розв'язання: Область визначення функції – вся числова площина $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$. Обчислимо частинні похідні функції:

$$z'_x = 24x^2 - 6y, \quad z'_y = 3y^2 - 6x.$$

Знайдемо критичні точки. Розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 24x^2 - 6y = 0 \\ 3y^2 - 6x = 0 \end{cases}.$$

Розв'язком будуть дві точки: $M_1(0;0)$ і $M_2(0,5;1)$. Обидві точки належать області визначення. Обчислимо частинні похідні другого порядку даної функції: $z''_{xx} = 48x$; $z''_{xy} = -6$; $z''_{yy} = 6y$. Знайдемо їх значення в точках $M_1(0;0)$ і $M_2(0,5;1)$:

$$A_1 = z''_{xx}(0;0) = 0, \quad B_1 = z''_{xy}(0;0) = -6, \quad C_1 = z''_{yy}(0;0) = 0 \quad \text{і} \\ A_2 = z''_{xx}(0,5;1) = 24, \quad B_2 = z''_{xy}(0,5;1) = -6, \quad C_2 = z''_{yy}(0,5;1) = 6.$$

Покладемо $\Delta = A \cdot C - B^2$. Знайдемо значення Δ в точках M_1 і M_2 . В точці $M_1(0;0)$: $\Delta_1 = 0 - (-6)^2 = -36 < 0$. Отже, екстремуму в точці немає. В точці $M_2(0,5;1)$: $\Delta_2 = 24 \cdot 6 - (-6)^2 = 108 > 0$. Отже, екстремум в точці існує. Так як $A_2 > 0$, то в точці $M_2(0,5;1)$ функція має мінімум. Мінімум функції

$$z_{\min} = z(0,5;1) = 8 \cdot (0,5)^3 + 1^3 - 6 \cdot 0,5 \cdot 1 + 5 = 4.$$

1.2 Індивідуальні завдання

Завдання 1. Розв'язати матричне рівняння.

$$1. \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \quad 2. \quad Y \cdot \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$3. \quad \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$5. \quad \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$7. \quad \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$9. \quad \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$11. \quad \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$13. \quad \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$15. \quad \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$17. \quad \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$19. \quad \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$21. \quad \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -8 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$23. \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$25. \quad \begin{pmatrix} -8 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$4. \quad Y \cdot \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$6. \quad Y \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$8. \quad Y \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$10. \quad Y \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$12. \quad Y \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$14. \quad Y \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$16. \quad Y \cdot \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$18. \quad Y \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$20. \quad Y \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$22. \quad Y \cdot \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$24. \quad Y \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$26. \quad Y \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ll}
 27. \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} & 28. \quad Y \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\
 29. \quad \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} & 30. \quad Y \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Завдання 2. Розв'язати систему ЛАР трьома способами: а) по формулам Крамера; б) матричним методом; в) методом Гаусса.

$$\begin{array}{ll}
 1. \quad \begin{cases} 3x + 4y - 2z = 11 \\ x - y + 3z = -6 \\ 2x - y - z = 3 \end{cases} & 2. \quad \begin{cases} x - y + 5z = -10 \\ 6x + 3y - z = 11 \\ -3x - y + z = -6 \end{cases} \\
 3. \quad \begin{cases} x - 2y - 5z = 9 \\ 3x - 8y - z = -3 \\ 5x + 3y + z = 6 \end{cases} & 4. \quad \begin{cases} x - y + z = -2 \\ 8x + y + 3z = 3 \\ -2x + 7y + z = 3 \end{cases} \\
 5. \quad \begin{cases} 13x + y + 7z = 0 \\ x + 6y - z = 9 \\ 2x + 2y + z = 2 \end{cases} & 6. \quad \begin{cases} 4x - 6y + z = -4 \\ x - y - 3z = 6 \\ y + 12z = -23 \end{cases} \\
 7. \quad \begin{cases} 3x - 5y + 8z = -18 \\ 2x + y - z = 5 \\ x + y + z = 0 \end{cases} & 8. \quad \begin{cases} 11x + y + 6z = 0 \\ x - 3y - 2z = 2 \\ x - 5z = 11 \end{cases} \\
 9. \quad \begin{cases} 5y - 13z = 31 \\ x - 6y + z = -7 \\ 2x + 4y + z = 4 \end{cases} & 10. \quad \begin{cases} 11x + y + 5z = 2 \\ 3x + 5y + z = 6 \\ 2x - 3y - 2z = 3 \end{cases} \\
 11. \quad \begin{cases} 2x - 3y + 2z = 7 \\ x - y + 8z = 10 \\ 3x + 6y - 5z = -8 \end{cases} & 12. \quad \begin{cases} 8x - y + 2z = 11 \\ 2x - 4y - z = 5 \\ x - y + 12z = 14 \end{cases}
 \end{array}$$

$$13. \begin{cases} 3x - 9y - 11z = 1 \\ y + 2z = 1 \\ 2x - 3y - z = 4 \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} 4x + y - 3z = 0 \\ 2x + 5y + z = -2 \\ 3x - y - 6z = -2 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} 7x + 10y - z = -4 \\ 3x - 5y + z = 9 \\ x + 8y + 6z = -1 \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} 10x + 11y + 15z = 14 \\ x + 6y = -5 \\ 13x + 4y - 6z = 3 \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} x + 8y - 10z = 6 \\ 8x + y - 2z = 0 \\ 18x + 4y + 5z = 13 \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} 11x + y - 9z = -7 \\ x + 5y - 7z = 3 \\ 2x - 10y + z = -19 \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} 15x + 6y - 12z = 0 \\ 3x - y + z = -1 \\ 5x + 3y - 2z = 4 \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} 7x + 9y + 4z = 22 \\ 3x + 5y - 10z = 0 \\ 2x + 4y - z = 7 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} 5x - 9y - 10z = 4 \\ x + 3y + z = -1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} 6x + 7y - z = -2 \\ x - 3y - 5z = -1 \\ 3x + y - 3z = -1 \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} 8x + 10y + 2z = 0 \\ x - 2z = -1 \\ 3x + 4y + 5z = 4 \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} 13x + y - 8z = 4 \\ 5x + 7y + z = -1 \\ x - y + 2z = 4 \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} 9x + 13y - 10z = 16 \\ x + y - 2z = 0 \\ 2x + 4y + z = 9 \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} x - 2y + 8z = 4 \\ 2x + 13y - 20z = 6 \\ 3x + 5y + 8z = 18 \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} 4x + 9y - 6z = 12 \\ 3x + 4y + 2z = 10 \\ x - 6z = -6 \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} 5x - 6z = -6 \\ 3x + 8y - 13z = 3 \\ x - 2y + 3z = -1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll}
 29. & \begin{cases} x - 8y + 12z = -4 \\ 3x - 7y + z = -13 \\ x + 3y + 10z = 16 \end{cases} \\
 30. & \begin{cases} 9x + y - 8z = -6 \\ 3x + 4y + z = 9 \\ x - 3y + 5z = -1 \end{cases}
 \end{array}$$

Завдання 3. Задані координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$. Знайти: а) кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4 ; б) площу грані $A_1A_2A_3$; в) проекцію вектора $\overrightarrow{A_1A_3}$ на вектор $\overrightarrow{A_1A_4}$, г) довжину висоти піраміди, проведену з вершини A_4 , д) яку трійку утворюють вектори $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$ і $\overrightarrow{A_1A_4}$?

- | | | | | |
|-----|------------------|------------------|------------------|-------------------|
| 1. | $A_1(2; 1; 4)$ | $A_2(-1; 5; -2)$ | $A_3(-7; -3; 2)$ | $A_4(-6; -3; 6)$ |
| 2. | $A_1(5; 2; 0)$ | $A_2(2; 5; 0)$ | $A_3(1; 2; 4)$ | $A_4(-1; 1; 1)$ |
| 3. | $A_1(1; 2; 0)$ | $A_2(3; 0; -3)$ | $A_3(5; 2; 6)$ | $A_4(8; 4; -9)$ |
| 4. | $A_1(2; -1; 2)$ | $A_2(1; 2; -1)$ | $A_3(3; 2; 1)$ | $A_4(-4; 2; 5)$ |
| 5. | $A_1(1; 1; 2)$ | $A_2(-1; 1; 3)$ | $A_3(2; -2; 4)$ | $A_4(-1; 0; -2)$ |
| 6. | $A_1(2; 3; 1)$ | $A_2(4; 1; -2)$ | $A_3(6; 3; 7)$ | $A_4(7; 5; 3)$ |
| 7. | $A_1(1; 5; -7)$ | $A_2(-3; 6; 3)$ | $A_3(-2; 7; 3)$ | $A_4(-4; 8; -12)$ |
| 8. | $A_1(0; -1; -1)$ | $A_2(-2; 3; 5)$ | $A_3(1; -5; -9)$ | $A_4(-1; -6; 3)$ |
| 9. | $A_1(7; 2; 4)$ | $A_2(7; -1; -2)$ | $A_3(3; 3; 1)$ | $A_4(-4; 2; 1)$ |
| 10. | $A_1(4; -1; 3)$ | $A_2(-2; 1; 0)$ | $A_3(0; -5; 1)$ | $A_4(3; 2; -6)$ |
| 11. | $A_1(2; 0; 0)$ | $A_2(-2; 0; -1)$ | $A_3(1; 4; 2)$ | $A_4(3; 0; 6)$ |
| 12. | $A_1(-2; 0; 2)$ | $A_2(0; 0; 4)$ | $A_3(3; 2; 4)$ | $A_4(1; 3; 2)$ |
| 13. | $A_1(1; 2; 3)$ | $A_2(2; 0; 0)$ | $A_3(3; 2; 5)$ | $A_4(4; 0; 0)$ |
| 14. | $A_1(3; 0; 6)$ | $A_2(1; -3; 2)$ | $A_3(3; 2; 5)$ | $A_4(2; 2; 5)$ |
| 15. | $A_1(-2; 0; -1)$ | $A_2(0; 0; 4)$ | $A_3(1; 3; 2)$ | $A_4(3; 2; 7)$ |
| 16. | $A_1(1; -2; 1)$ | $A_2(0; 0; 4)$ | $A_3(1; 4; 2)$ | $A_4(2; 0; 0)$ |
| 17. | $A_1(-2; 1; 0)$ | $A_2(3; 2; 7)$ | $A_3(2; 2; 5)$ | $A_4(6; 1; 5)$ |
| 18. | $A_1(-1; 3; 0)$ | $A_2(2; 0; 0)$ | $A_3(4; -1; 2)$ | $A_4(3; 2; 7)$ |
| 19. | $A_1(6; 1; 5)$ | $A_2(5; 1; 2)$ | $A_3(-4; 1; -2)$ | $A_4(-6; 0; 5)$ |

- | | | | | |
|-----|-----------------|------------------|------------------|-----------------|
| 20. | $A_1(1; -1; 6)$ | $A_2(-5; -1; 0)$ | $A_3(4; 0; 0)$ | $A_4(2; 2; 5)$ |
| 21. | $A_1(4; 2; 5)$ | $A_2(0; 7; 2)$ | $A_3(0; 2; 7)$ | $A_4(1; 5; 0)$ |
| 22. | $A_1(4; 4; 10)$ | $A_2(4; 10; 2)$ | $A_3(2; 8; 4)$ | $A_4(9; 6; 7)$ |
| 23. | $A_1(4; 6; 5)$ | $A_2(6; 9; 7)$ | $A_3(2; 10; 10)$ | $A_4(7; 5; 9)$ |
| 24. | $A_1(3; 5; 4)$ | $A_2(8; 7; 4)$ | $A_3(5; 10; 4)$ | $A_4(4; 7; 8)$ |
| 25. | $A_1(10; 6; 6)$ | $A_2(-2; 8; 2)$ | $A_3(6; 8; 9)$ | $A_4(7; 10; 3)$ |
| 26. | $A_1(1; 8; 2)$ | $A_2(5; 2; 6)$ | $A_3(5; 7; 4)$ | $A_4(4; 10; 9)$ |
| 27. | $A_1(6; 6; 5)$ | $A_2(4; 9; 5)$ | $A_3(4; 6; 11)$ | $A_4(6; 9; 3)$ |
| 28. | $A_1(7; 2; 2)$ | $A_2(5; 7; 7)$ | $A_3(5; 3; 1)$ | $A_4(2; 3; 7)$ |
| 29. | $A_1(8; 6; 4)$ | $A_2(10; 5; 5)$ | $A_3(5; 6; 8)$ | $A_4(8; 10; 7)$ |
| 30. | $A_1(7; 7; 3)$ | $A_2(6; 5; 8)$ | $A_3(3; 5; 8)$ | $A_4(8; 4; 1)$ |

Завдання 4. Дані вершини трикутника ABC . Знайти: а) довжину та рівняння сторони BC ; б) довжину та рівняння висоти, проведеної до сторони BC ; в) рівняння середньої лінії, яка з'єднує сторони AB та AC ; г) кут при вершині B . Зробити рисунок трикутника в системі координат.

- | | | | |
|-----|------------|-------------|-------------|
| 1. | $A(2, -3)$ | $B(3, 0)$ | $C(-2, 5)$ |
| 2. | $A(1, 3)$ | $B(-1, 0)$ | $C(2, -2)$ |
| 3. | $A(1, 2)$ | $B(-1, -1)$ | $C(2, 1)$ |
| 4. | $A(2, 1)$ | $B(4, 3)$ | $C(-2, 1)$ |
| 5. | $A(1, -1)$ | $B(6, 4)$ | $C(2, 6)$ |
| 6. | $A(2, -3)$ | $B(3, 2)$ | $C(-2, 5)$ |
| 7. | $A(3, 2)$ | $B(5, -2)$ | $C(1, 3)$ |
| 8. | $A(3, -4)$ | $B(-2, 3)$ | $C(4, 5)$ |
| 9. | $A(3, 6)$ | $B(-1, 3)$ | $C(2, -1)$ |
| 10. | $A(5, -4)$ | $B(-1, 3)$ | $C(-3, -2)$ |
| 11. | $A(1, 1)$ | $B(7, 4)$ | $C(4, 5)$ |
| 12. | $A(1, 1)$ | $B(-5, 4)$ | $C(-2, 5)$ |
| 13. | $A(-1, 1)$ | $B(5, 4)$ | $C(2, 5)$ |

14.	$A(-1, 1)$	$B(-7, 4)$	$C(-4, 5)$
15.	$A(1, -1)$	$B(7, 2)$	$C(4, 5)$
16.	$A(1, -1)$	$B(-5, 2)$	$C(-2, 3)$
17.	$A(-1, -1)$	$B(5, 2)$	$C(2, 3)$
18.	$A(-1, -1)$	$B(-7, 2)$	$C(-4, 3)$
19.	$A(0, 1)$	$B(6, 4)$	$C(3, 5)$
20.	$A(1, 0)$	$B(7, 3)$	$C(4, 4)$
21.	$A(2, -3)$	$B(-3, 0)$	$C(2, 5)$
22.	$A(1, 3)$	$B(2, 0)$	$C(-2, -2)$
23.	$A(1, 2)$	$B(2, -1)$	$C(-3, 1)$
24.	$A(2, 1)$	$B(-4, 3)$	$C(1, 1)$
25.	$A(1, -1)$	$B(-3, 4)$	$C(-2, 6)$
26.	$A(2, -3)$	$B(-3, 2)$	$C(2, 5)$
27.	$A(3, 2)$	$B(-3, -2)$	$C(-2, 3)$
28.	$A(3, -4)$	$B(4, 3)$	$C(-1, 5)$
29.	$A(3, 6)$	$B(2, 3)$	$C(-3, 1)$
30.	$A(5, -4)$	$B(4, 3)$	$C(2, -2)$

Завдання 5. Дано точки: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, $D(x_4, y_4, z_4)$. Знайти: а) рівняння прямої, яка проходить через т. D паралельно прямій AB ; б) рівняння площини ABC ; в) рівняння прямої, яка проходить через т. D перпендикулярно площині ABC .

1.	$A(0; -1; 2)$	$B(2; -2; 2)$	$C(-1; -1; 3)$	$D(2; -1; 3)$
2.	$A(2; -1; 3)$	$B(1; -4; 4)$	$C(4; -2; 3)$	$D(-1; 2; 3)$
3.	$A(-1; 2; 3)$	$B(-2; 2; 4)$	$C(1; 1; 3)$	$D(-1; 3; 2)$
4.	$A(-1; 3; 2)$	$B(-2; 3; 3)$	$C(1; 2; 2)$	$D(2; 3; -1)$
5.	$A(2; 3; -1)$	$B(1; 3; 0)$	$C(4; 2; -1)$	$D(0; 4; -1)$
6.	$A(0; 2; -1)$	$B(-1; 2; 0)$	$C(2; 1; -1)$	$D(-2; 0; 1)$
7.	$A(-2; 0; 1)$	$B(-3; 0; 2)$	$C(0; -1; 1)$	$D(1; 0; -2)$
8.	$A(1; 0; -2)$	$B(0; 0; -1)$	$C(3; -1; -2)$	$D(0; 1; -2)$

- | | | | | |
|-----|----------------|----------------|-----------------|----------------|
| 9. | A(0; 1; -2) | B(-1; 1; -1) | C(2; 0; -2) | D(-2; 1; 0) |
| 10. | A(-2; 1; 0) | B(-3; 1; 1) | C(0; 0; 0) | D(-2; -1; 0) |
| 11. | A(-2; -1; 0) | B(-3; -1; 1) | C(0; -2; 0) | D(0; -2; -1) |
| 12. | A(0; -2; -1) | B(-1; -2; 0) | C(2; -3; -1) | D(-1; 0; -2) |
| 13. | A(-1; 0; -2) | B(-2; 0; -1) | C(1; -1; -2) | D(0; -1; -2) |
| 14. | A(0; -1; -2) | B(-1; -1; 1) | C(2; -2; -2) | D(-2; 0; -1) |
| 15. | A(-2; 0; -1) | B(-3; 0; 0) | C(0; -1; -1) | D(-1; -2; 0) |
| 16. | A(0; -1; 2) | B(-1; -1; 3) | C(2; -2; 2) | D(2; -1; 3) |
| 17. | A(2; -1; 3) | B(4; -2; 3) | C(1; -1; 4) | D(-1; 2; 3) |
| 18. | A(-1; 2; 3) | B(1; 1; 3) | C(-2; 2; 4) | D(-1; 3; 2) |
| 19. | A(-1; 3; 2) | B(1; 2; 2) | C(-2; 3; 3) | D(2; 3; -1) |
| 20. | A(2; 3; -1) | B(4; 2; -1) | C(1; 3; 0) | D(0; 2; -1) |
| 21. | A(0; 2; -1) | B(2; 1; -1) | C(-1; 2; 0) | D(-2; 0; 1) |
| 22. | A(-2; 0; 1) | B(0; -1; 1) | C(-3; 0; 2) | D(1; 0; -2) |
| 23. | A(1; 0; -2) | B(3; -1; -2) | C(0; 0; -1) | D(0; 1; -2) |
| 24. | A(0; 1; -2) | B(2; 0; -2) | C(-1; 1; -1) | D(-2; -1; 0) |
| 25. | A(-2; 1; 0) | B(0; 0; 0) | C(-3; 1; 1) | D(-2; -1; 0) |
| 26. | A(-2; -1; 0) | B(0; -2; 0) | C(-3; -1; 1) | D(0; -2; -1) |
| 27. | A(0; -2; -1) | B(2; -3; -1) | C(-1; -2; 0) | D(-1; 0; -2) |
| 28. | A(-1; 0; -2) | B(1; -1; -2) | C(-2; 0; -1) | D(0; -1; -2) |
| 29. | A(0; -1; -2) | B(2; -2; -2) | C(-1; -1; -1) | D(-2; 0; -1) |
| 30. | A(-2; 0; -1) | B(0; -1; -1) | C(-3; 0; 0) | D(-1; -2; 0) |

Завдання 6. Знайти границі функцій.

1. а) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 + 11x + 15}{3x^2 + 5x - 12}$ б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}}$
- $x_0 = -3, x_0 = \infty$
- в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{3x^2}$ г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3+x}{x-4} \right)^{2x+5}$

$$2. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 + 5x - 7}{5x^2 + 2x - 7}$$

$$x_0 = 1, x_0 = \infty$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{5x}$$

$$3. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x^2 - 6x + 3}{x^2 - 4x + 3}$$

$$x_0 = 1, x_0 = \infty$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \sin 3x \cdot \operatorname{ctg} 2x$$

$$4. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x^2 + 2x - 16}{2x^2 - 2x - 4}$$

$$x_0 = 2, x_0 = \infty$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{\sin^2 3x}$$

$$5. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{5x^2 + 2x - 3}{3x^2 - x - 4}$$

$$x_0 = -1, x_0 = \infty$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^2 6x}{5x^2}$$

$$6. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 - 3x + 1}{5x^2 + 3x - 8}$$

$$x_0 = 1, x_0 = \infty$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x}{\operatorname{tg}^2 2x}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+12} - \sqrt{4-x}}{x^2 + 2x - 8}$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right)^{5x-4}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+10} - \sqrt{4-x}}{2x^2 - x - 21}$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-1} \right)^{4x-5}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{x+6}}{x^2 - x - 6}$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+4} \right)^{2x-3}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+2x} - \sqrt{x+4}}{3x^2 - 4x + 1}$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-3}{2x+1} \right)^{3x-4}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x+1}}$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-5}{3x-1} \right)^{5x+2}$$

$$7. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 7x + 10}{5x^2 - 8x - 4}$$

$$x_0 = 2, x_0 = \infty$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg^2 5x}{3x^2}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 4x + 1}{\sqrt{x+3} - \sqrt{5+3x}}$$

$$\text{r) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-3}{2x+1} \right)^{5-2x}$$

$$8. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 4x + 4}$$

$$x_0 = -2, x_0 = \infty$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{\sin^2 3x}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x-3}}$$

$$\text{r) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{3x+2} \right)^{2x-3}$$

$$9. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}$$

$$x_0 = -1, x_0 = \infty$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 6x}{x \cdot \tg 2x}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+6}}{2x^2 - 7x - 15}$$

$$\text{r) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{3x-1} \right)^{1-4x}$$

$$10. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 + 7x - 4}{x^2 - x - 20}$$

$$x_0 = -4, x_0 = \infty$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\arcsin 2x}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{3x+17} - \sqrt{2x+12}}{x^2 + 8x + 15}$$

$$\text{r) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-2}{3x-4} \right)^{1-6x}$$

$$11. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{4x^2 + 19x - 5}{2x^2 + 11x + 5}$$

$$x_0 = -5, x_0 = \infty$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tg^2 3x}{1 - \cos 4x}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{3x^2 - 5x - 2}$$

$$\text{r) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+3} \right)^{2x+3}$$

$$12. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{7x^2 - 3x - 4}{2x^2 + x - 3}$$

$$x_0 = 1, x_0 = \infty$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^2 x}{3x \cdot \sin x}$$

$$13. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - 7x + 5}$$

$$x_0 = 1, x_0 = \infty$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{4x^2}$$

$$14. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{4x^2 - 3x - 10}{2x^2 - 9x + 10}$$

$$x_0 = 2, x_0 = \infty$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 5x}{3x^2}$$

$$15. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{9x^2 + 17x - 2}{x^2 + 2x}$$

$$x_0 = -2, x_0 = \infty$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x \cdot \operatorname{tg} 2x}$$

$$16. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{5x^2 + x - 6}{-3x^2 - x + 4}$$

$$x_0 = 1, x_0 = \infty$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2}{\sin 3x \cdot \operatorname{tg} 2x}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{7-x} - 2}{2x^2 - 5x - 3}$$

$$\text{r) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2-4x}{1-4x} \right)^{x+3}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$$

$$\text{r) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-3}{2x-1} \right)^{3+2x}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 3x - 4}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}}$$

$$\text{r) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-2}{3x+4} \right)^{2x-1}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{\sqrt{8-x} - 3}$$

$$\text{r) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+5}{4x-1} \right)^{2x+3}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 4x - 5}{\sqrt{x-1} - 2}$$

$$\text{r) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-1} \right)^{4-3x}$$

17. a) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{4x^2 - 2x - 6}{3x^2 - 7x - 10}$
 $x_0 = -1, x_0 = \infty$
 б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2}{x \cdot \arctg 3x}$
18. a) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{7x^2 - 5x - 12}{3x^2 - x - 4}$
 $x_0 = -1, x_0 = \infty$
 б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{4x-3} - 3}{x^2 - 9}$
19. a) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x^2 + 5x - 42}{x^2 - 5x + 6}$
 $x_0 = 3, x_0 = \infty$
 б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-3}{2x+5} \right)^{3x+2}$
20. a) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x - 30}{2x^2 + 5x - 25}$
 $x_0 = -5, x_0 = \infty$
 б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{5x+1} - 4}{x^2 + 2x - 15}$
21. a) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 + 3x - 28}{3x^2 - 5x - 28}$
 $x_0 = 4, x_0 = \infty$
 б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-2}{3x+2} \right)^{5x-1}$
22. a) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x - 30}{2x^2 + 5x - 25}$
 $x_0 = -5, x_0 = \infty$
 б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{x+2}}{3x^2 - 4x - 4}$
23. a) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\arcsin^2 3x}{2x \cdot \sin 5x}$
 $x_0 = 0, x_0 = \infty$
 б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{3x-4} \right)^{5x-2}$
24. a) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 + 3x - 28}{3x^2 - 5x - 28}$
 $x_0 = 4, x_0 = \infty$
 б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+5} - 2}{2x^2 - 3x - 5}$
25. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin^2 3x \cdot \ctg^2 5x$
 $x_0 = 0, x_0 = \infty$
 б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-4} \right)^{2-5x}$

$$22. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{8x^2 + 10x - 12}{3x^2 - x - 14}$$

$$x_0 = -2, x_0 = \infty$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \sin 5x \cdot \operatorname{ctg} 3x$$

$$23. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 + 3x - 28}{x^2 - 4x}$$

$$x_0 = 4, x_0 = \infty$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg}^2 3x \cdot \operatorname{ctg}^2 2x$$

$$24. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x^2 + 11x + 10}{x^2 - 5x - 14}$$

$$x_0 = -2, x_0 = \infty$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 \cdot \operatorname{ctg} 7x}{\sin 2x}$$

$$25. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 4}{3x^2 + x - 10}$$

$$x_0 = -2, x_0 = \infty$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin 2x}{1 - \cos 4x}$$

$$26. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3x^2 + 2x - 5}{4x^2 - 5x + 1}$$

$$x_0 = 1, x_0 = \infty$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 5x}{3x^2}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x - 2}{\sqrt{5 - x} - 2}$$

$$\text{r) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x-1} \right)^{3x+4}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{2x+7} - 5}{x^2 - 8x - 9}$$

$$\text{r) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-4}{3x+2} \right)^{4x-3}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{x^2 - 5x + 4}$$

$$\text{r) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{1+x} \right)^{2-4x}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{\sqrt{3x} - x}$$

$$\text{r) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4+3x}{1+3x} \right)^{x-2}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{6+5x} - 4}{3x - 10 + x^2}$$

$$\text{r) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-2}{3x+4} \right)^{5x-2}$$

$$27. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 - 11x - 6}{3x^2 - 20x + 12}$$

$$x_0 = 6, x_0 = \infty$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x \cdot \operatorname{tg} 2x}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+20} - 4}{2x^2 + 5x - 12}$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right)^{5x+3}$$

$$28. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 + 2x - 24}{2x^2 + 5x - 42}$$

$$x_0 = -6, x_0 = \infty$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2}{\sin 3x \cdot \operatorname{tg} 2x}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{\sqrt{8+x} - 3}$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-1} \right)^{3x-4}$$

$$29. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{4x^2 - 3x - 10}{x^2 - 11x + 18}$$

$$x_0 = 2, x_0 = \infty$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin 3x}{\cos x - \cos^2 x}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x} - 3}{x^2 - x}$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-2}{3x+4} \right)^{5-2x}$$

$$30. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^2 - 6x - 8}{7x^2 - 27x - 4}$$

$$x_0 = 4, x_0 = \infty$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^2 3x}{2x \cdot \sin 5x}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{2x^2 - x - 6}$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x+5} \right)^{4x+3}$$

Завдання 7. Дослідити на неперервність функцію, встановити характер точок розриву, якщо вони існують. Зробити схематичне креслення:

$$1. \quad f(x) = \begin{cases} x+4, & x < -1 \\ x^2 + 2, & -1 \leq x < 1 \\ 2x, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$2. \quad f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0 \\ (x+1)^2, & 0 < x \leq 2 \\ -x+4, & x > 2 \end{cases}$$

$$3. \quad f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq -1 \\ x^2+1, & -1 < x \leq 1 \\ -x+3, & x > 1 \end{cases}$$

$$4. \quad f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ -(x-1)^2, & 0 < x < 2 \\ x-3, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$5. \quad f(x) = \begin{cases} -2 \cdot (x+1), & x \leq -1 \\ (x+1)^3, & -1 < x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$6. \quad f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ x^2, & 0 < x \leq 2 \\ x+1, & x > 2 \end{cases}$$

$$7. \quad f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \leq 1 \\ 2x, & 1 < x \leq 3 \\ x+2, & x > 3 \end{cases}$$

$$8. \quad f(x) = \begin{cases} x-3, & x < 0 \\ x^2+1, & 0 \leq x \leq 2 \\ 3+x, & x > 2 \end{cases}$$

$$9. \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x \leq 0 \\ 0, & 0 < x \leq 2 \\ x-2, & x > 2 \end{cases}$$

$$10. \quad f(x) = \begin{cases} 2x^2, & x \leq 0 \\ x, & 0 < x \leq 1 \\ 2+x, & x > 1 \end{cases}$$

$$11. \quad f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 2 \\ x^2-1, & x > 2 \end{cases}$$

$$12. \quad f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < x < \pi \\ 2, & x \geq \pi \end{cases}$$

$$13. \quad f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq 0 \\ x^2, & 0 < x < 2 \\ 2x, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$14. \quad f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ x^2-1, & 0 \leq x < 1 \\ 1-x, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$15. \quad f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x^2+1, & 0 \leq x < 2 \\ 2x+1, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$16. \quad f(x) = \begin{cases} x+3, & x \leq 0 \\ 1, & 0 < x \leq 2 \\ x^2-3, & x > 2 \end{cases}$$

$$17. \quad f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ \sin x, & 0 \leq x < \pi \\ 3, & x \geq \pi \end{cases}$$

$$18. \quad f(x) = \begin{cases} -x+1, & x < -1 \\ x^2+1, & -1 \leq x \leq 2 \\ 2x, & x > 2 \end{cases}$$

$$19. \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ 2^x, & 0 < x \leq 2 \\ x+3, & x > 2 \end{cases}$$

$$20. \quad f(x) = \begin{cases} x-6, & x \leq -2 \\ x^3, & -2 < x \leq 1 \\ 2, & x > 1 \end{cases}$$

$$21. \quad f(x) = \begin{cases} 3x+4, & x \leq -1 \\ x^2-2, & -1 < x < 2 \\ x, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$22. \quad f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ (x-2)^2, & 1 < x < 3 \\ -x+6, & x \geq 3 \end{cases}$$

$$23. \quad f(x) = \begin{cases} x^3, & x < -1 \\ x-2, & -1 \leq x \leq 3 \\ -x+4, & x > 3 \end{cases}$$

$$24. \quad f(x) = \begin{cases} x, & x < -2 \\ -x+1, & -2 \leq x \leq 1 \\ x^2-1, & x > 1 \end{cases}$$

$$25. \quad f(x) = \begin{cases} x+3, & x \leq 0 \\ -x^2+4, & 0 < x < 2 \\ x-2, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$26. \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ x^2-1, & -1 < x \leq 2 \\ x, & x > 2 \end{cases}$$

$$27. \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ \cos x, & 0 \leq x \leq \pi \\ 2, & x > \pi \end{cases}$$

$$28. \quad f(x) = \begin{cases} -1, & x < -1 \\ 1-x, & -1 \leq x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$$

$$29. \quad f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ x^3, & 0 < x \leq 2 \\ x+4, & x > 2 \end{cases}$$

$$30. \quad f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ x^2+1, & 0 \leq x < 1 \\ 4, & x \geq 1 \end{cases}$$

Завдання 8. Знайти першу похідну $y'(x)$

$$1. \quad \text{а) } y = \arccos 25x \cdot \ln(x-4)$$

$$\text{в) } y = (\operatorname{ctg} 3x)^{\arcsin x}$$

$$\text{б) } y = \frac{3x^2 - 4x + 2}{\cos^5 x}$$

$$\text{г) } y^2 = 8x + \sin(xy)$$

$$2. \quad \text{а) } y = \operatorname{ctg}^3 2x \cdot \ln(x+5)$$

$$\text{в) } y = (\cos(x+2))^{\ln x}$$

$$\text{б) } y = \frac{e^{\arccos 2x}}{\sqrt{3x+5}}$$

$$\text{г) } \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{7} = xy$$

3. a) $y = \arccos^2 x \cdot e^{5x-3}$ б) $y = (\sin 3x)^{\arccos x}$
 в) $y = \frac{9 \operatorname{arctg}(x+7)}{(5x-2)^2}$ г) $y = x + \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$
4. a) $y = \sqrt{\arccos 2x} \cdot 3^{-x}$ б) $y = (\operatorname{tg} 5x)^{\arcsin(x+1)}$
 в) $y = \frac{e^{\sin x}}{(2x-5)^7}$ г) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = \cos xy$
5. a) $y = \operatorname{tg}^3 3x \cdot \sin 7x^2$ б) $y = (\sin(x+2))^{\operatorname{tg} 2x}$
 в) $y = \frac{4 \ln(3x+7)}{(7x+3)^3}$ г) $y^2 = 25x - 4x^2 + xy$
6. a) $y = 5^{-x^2} \cdot \arcsin 3x^3$ б) $y = (\cos 5x)^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}$
 в) $y = \frac{4 \ln(3x-5)}{\sin(x-2)}$ г) $\operatorname{arctg}(xy) = 4x + 5y$
7. a) $y = \operatorname{arctg} 7x \cdot \log_2(x-3)$ б) $y = (\sqrt{3x+2})^{\operatorname{arctg} 3x}$
 в) $y = \frac{4 \cos(3x+7)}{(4x+1)^3}$ г) $\operatorname{tg} y = 3x + 5y \sin x$
8. a) $y = \ln(x+5) \cdot \arccos 3x$ б) $y = (\ln(x+3))^{\sin \sqrt{x}}$
 в) $y = \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{\sqrt[3]{x^2+4}}$ г) $3x + \sin y = 5 \cdot \frac{y}{x}$
9. a) $y = e^{-x} \cdot \arcsin^2 5x$ б) $y = (\ln(x+4))^{\operatorname{ctg} 7x}$
 в) $y = \frac{\sin(4x+7)}{3x^2 - 4x + 7}$ г) $y^2 = \cos(xy) + x^3$
10. a) $y = \ln(x-1) \cdot \arccos^2 x$ б) $y = (\sin 3x)^{\operatorname{arctg}(x+2)}$
 в) $y = \frac{\sin x^2}{\sqrt{3x+2}}$ г) $xy = \operatorname{ctg}\left(\frac{y}{x}\right)$

11. a) $y = (3x - 1)^2 \cdot \operatorname{arctg} 3x^2$ б) $y = (\cos 3x)^{\operatorname{ctg} 2x}$
 в) $y = \frac{\arcsin 5x}{\ln(5x^2 - 2x + 1)}$ г) $x y = e^y + 4x^3$
12. a) $y = \operatorname{ctg}^3 4x \cdot \operatorname{arctg} 2x^3$ б) $y = (\arcsin 5x)^{\operatorname{tg} \sqrt{x}}$
 в) $y = \frac{e^{\cos x}}{4x^2 + 7x - 5}$ г) $\ln y - \frac{y}{x} = 7x$
13. a) $y = e^{-\cos x} \cdot \operatorname{arctg} 7x^5$ б) $y = (\arcsin 5x)^{\ln x}$
 в) $y = \frac{\ln^3(x - 5)}{\operatorname{tg} 5x}$ г) $y^2 + x^2 = \sin\left(\frac{y}{x}\right)$
14. a) $y = (x^3 + 1) \cdot \arccos 3x^4$ б) $y = (\operatorname{arctg} 2x)^{\sin x}$
 в) $y = \frac{\ln(7x - 5)}{\operatorname{tg} \sqrt{x}}$ г) $e^{yx} = 4x - 7y$
15. a) $y = 2^{\sin x} \cdot \operatorname{arctg} x^4$ б) $y = (\ln(x + 7))^{\operatorname{ctg} 2x}$
 в) $y = \frac{\ln(3x + 2)}{\cos 5x^2}$ г) $4 \sin^2(x + y) = x - y$
16. a) $y = 3^{-x^3} \cdot \operatorname{arctg} 2x^5$ б) $y = (\operatorname{ctg}(7x + 4))^{\sqrt{x+3}}$
 в) $y = \frac{\ln(3x^2 + 2x)}{\cos 3x}$ г) $\sin\left(\frac{x}{y}\right) = 7x + 8y$
17. a) $y = 3^{\cos x} \cdot \arcsin^2 3x$ б) $y = (\sin(\sqrt{x} + 1))^{\operatorname{arctg} 2x}$
 в) $y = \frac{\operatorname{ctg}^2 5x}{\ln(7x - 2)}$ г) $\operatorname{tg} y = 4xy - 5x^2$
18. a) $y = \ln(x - 10) \cdot \cos^2 4x$ б) $y = \left(\operatorname{ctg} \frac{1}{x}\right)^{\arcsin 7x}$
 в) $y = \frac{e^{\sin 5x}}{(3x - 2)^2}$ г) $y = 7x - \operatorname{ctg}(xy)$

19. a) $y = \ln(3x+2) \cdot \operatorname{arctg} x$ б) $y = (\cos(x+5))^{\operatorname{arcsin} 3x}$
 в) $y = \frac{\operatorname{arc} \cos(3x-5)}{x^3 + 2x - 3}$ г) $xy - 6 = \cos\left(\frac{y}{x}\right)$
20. a) $y = \ln(x+1) \cdot \operatorname{arctg}^3 7x$ б) $y = (\sqrt{x+5})^{\operatorname{arccos} 3x}$
 в) $y = \frac{e^{-\operatorname{ctg} 5x}}{3x^2 - 4x + 2}$ г) $3y = 7x^3 + xy^3$
21. a) $y = \ln(2x-3) \cdot \operatorname{arctg}^2 3x$ б) $y = (\sin 4x)^{\operatorname{arctg} 4x}$
 в) $y = \frac{\operatorname{arcsin}(2x+3)}{(3x-4)^3}$ г) $y^2 = x + y \ln x$
22. a) $y = \ln(x^2 + 2) \cdot \operatorname{arcsin}^2 3x$ б) $y = (\operatorname{tg}(3x^4))^{\ln x}$
 в) $y = \frac{\cos(7x+2)}{x^4 - 2x^2 + 3}$ г) $xy^2 - y^3 = 4x^2 + 5$
23. a) $y = 4^{-\sin x} \cdot \operatorname{arctg} 3x$ б) $y = (\operatorname{ctg}(2x^3))^{\cos \sqrt{x}}$
 в) $y = \frac{\ln^2(x+1)}{\operatorname{tg} 3x^4}$ г) $x^2 y^2 + x = 5y$
24. a) $y = 2^{\cos x} \cdot \operatorname{arctg}^3 x$ б) $y = (\operatorname{tg}(7x^5))^{\sqrt{x+2}}$
 в) $y = \frac{\ln(3x-x^2)}{\operatorname{arcsin} 2x}$ г) $x^4 + x^2 y^2 + y = 4$
25. a) $y = \ln(x-3) \cdot \operatorname{arcsin}^2 5x$ б) $y = (\operatorname{ctg} x)^{\sqrt{\cos x}}$
 в) $y = \frac{\ln(2x-3)}{\operatorname{arctg} 4x}$ г) $\sin y = xy^2 + 5x^2$
26. a) $y = \ln(x+3) \cdot \operatorname{arccos}^2 x$ б) $y = (\operatorname{ctg} 7x)^{\sin(x+3)}$
 в) $y = \frac{6 \cdot \operatorname{arctg}(x+5)}{(3x-2)^5}$ г) $x^3 + y^3 = 5xy$

27. а) $y = 2^{-x} \cdot \arctg^2 4x$ в) $y = (\sin(5x))^{\ln(x+2)}$
 б) $y = \frac{e^{-tg^3 x}}{4x^2 - 3x + 5}$ г) $y\sqrt{x} + x\sqrt{y} = tg(x+y)$
28. а) $y = \ln(x-4) \cdot \arcsin^2 3x$ в) $y = (\arctg x)^{\cos(3x+1)}$
 б) $y = \frac{tg^2(7x+1)}{\lg(x+5)}$ г) $y^2 = \left(\frac{x-y}{x+y}\right)$
29. а) $y = \ln(x+3) \cdot ctg^2 5x$ в) $y = (ctg \sqrt{x})^{\sin(x+3)}$
 б) $y = \frac{\cos(5x+4)}{\sqrt{x^2 - 2x + 7}}$ г) $\sin(3x + y^2) = xy$
30. а) $y = \ln(x+1) \cdot \arctg x^3 2x$ в) $y = (\sin 3x)^{arcc tg 2x}$
 б) $y = \frac{\arccos(3x+2)}{\sqrt[3]{5-3x}}$ г) $ctg^2(x+y) = 5xy$

Завдання 9. Знайти y'_x та y''_{xx} .

1. $\begin{cases} x = t + \ln \cos t \\ y = t - \ln \sin t \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x = 2t - \sin 2t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$
3. $\begin{cases} x = t + \frac{1}{2} \sin t \\ y = \cos^3 t \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x = t^5 + 2t \\ y = t^3 - 8t - 1 \end{cases}$
5. $\begin{cases} x = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t \\ y = \frac{t^2}{2} + \frac{1}{t} \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x = \arcsin(t^2 - 1) \\ y = \arccos 2t \end{cases}$

$$7. \quad \begin{cases} x = t^2 + t + 1 \\ y = t^3 + t \end{cases}$$

$$8. \quad \begin{cases} x = \operatorname{ctg} t \\ y = \frac{1}{\cos^2 t} \end{cases}$$

$$9. \quad \begin{cases} x = \frac{2-t}{2+t^2} \\ y = \frac{t^2}{2+t^2} \end{cases}$$

$$10. \quad \begin{cases} x = 2 \cos^3 2t \\ y = \sin^3 2t \end{cases}$$

$$11. \quad \begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$$

$$12. \quad \begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 4 \sin^2 t \end{cases}$$

$$13. \quad \begin{cases} x = 2 \cos^3 t \\ y = 4 \sin^3 t \end{cases}$$

$$14. \quad \begin{cases} x = \cos t + t \sin t \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}$$

$$15. \quad \begin{cases} x = 2 \cos t - \cos 2t \\ y = 2 \sin t - \sin 2t \end{cases}$$

$$16. \quad \begin{cases} x = 2t^2 + t \\ y = \ln t \end{cases}$$

$$17. \quad \begin{cases} x = 3t - t^3 \\ y = 3t^2 \end{cases}$$

$$18. \quad \begin{cases} x = 2t - t^3 \\ y = 2t^2 \end{cases}$$

$$19. \quad \begin{cases} x = \operatorname{ctg} t \\ y = \frac{1}{\cos^2 t} \end{cases}$$

$$20. \quad \begin{cases} x = \ln t \\ y = \frac{t+1}{t} \end{cases}$$

$$21. \quad \begin{cases} x = t^2 \\ y = \frac{t^3}{3} - t \end{cases}$$

$$22. \quad \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$$

$$23. \quad \begin{cases} x = \sin \frac{t}{2} \\ y = \cos t \end{cases}$$

$$24. \quad \begin{cases} x = \cos 3t \\ y = \sin 3t \end{cases}$$

$$25. \quad \begin{cases} x = e^{2t} \\ y = \cos t \end{cases}$$

$$26. \quad \begin{cases} x = \cos \frac{t}{2} \\ y = t - \sin t \end{cases}$$

$$27. \quad \begin{cases} x = t \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t \\ y = 2 \ln(\operatorname{ctg} t) \end{cases}$$

$$28. \quad \begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = e^{t^2} \end{cases}$$

$$29. \quad \begin{cases} x = 3 \cos^2 t \\ y = 2 \sin^3 t \end{cases}$$

$$30. \quad \begin{cases} x = t \cos t \\ y = 2t \cdot \sin t \end{cases}$$

Завдання 10. Знайти границі функцій, використовуючи правило Лопітала

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 + 18x) e^{-2x} \quad 2. \quad \lim_{x \rightarrow 0} 2x^2 \cdot \ln x \quad (x > 0)$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin 2x}{\sin^2 4x} \quad 4. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1 - \ln x}{(x - 1) \ln x}$$

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot e^{2x}}{x + e^{2x}} \quad 6. \quad \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - e^{-x}) \operatorname{ctg} 3x$$

$$7. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{\cos^2 x}$$

$$9. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg}^2 x \cdot \ln \cos x$$

$$11. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\cos x \cdot \sin x}$$

$$13. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x}$$

$$15. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \cos x - 1}{\operatorname{tg} x - x}$$

$$17. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x}$$

$$19. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \operatorname{tg} 3x}{5x - \sin x}$$

$$21. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$$

$$23. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 2^{\sin x}}{x^3}$$

$$25. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 2 \sin x}{\cos 3x}$$

$$8. \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \cdot \ln(1 + \cos x)$$

$$10. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x}}{x^3 + e^{2x}}$$

$$12. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$$

$$14. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}$$

$$16. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 4x}{5 - 5e^{-3x}}$$

$$18. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{e^x - 1}$$

$$20. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{\operatorname{tg}^2 2x}$$

$$22. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1 - x^3}$$

$$24. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} \left(x \frac{\pi}{2} \right)}$$

$$26. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin 2x}{2x - \operatorname{tg} 2x}$$

$$27. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{3x}}{x^2}$$

$$28. \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^{2x}) \operatorname{ctgx}$$

$$29. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 4x}{3 - 3e^{-3x}}$$

$$30. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{1 - \cos x}$$

Завдання 11. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік

$$1. \quad y = \frac{x}{(x-2)^2}$$

$$2. \quad y = \frac{x^3}{2-3x}$$

$$3. \quad y = x - \frac{8}{x^4}$$

$$4. \quad y = 1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}$$

$$5. \quad y = \frac{x^3}{12(x-2)}$$

$$6. \quad y = \frac{x+4}{(x+1)^2}$$

$$7. \quad y = \frac{x-2}{(x+3)^2} - 1$$

$$8. \quad y = 1 + \frac{4x+1}{x^2}$$

$$9. \quad y = \frac{x+1}{(x-1)^2} - 1$$

$$10. \quad y = \frac{1+x^3}{x^2}$$

$$11. \quad y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$12. \quad y = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$$

$$13. \quad y = \frac{4x^3+1}{x}$$

$$14. \quad y = \frac{x}{(x+2)^2}$$

$$15. \quad y = \frac{x^2}{(x-1)^2}$$

$$16. \quad y = \frac{(4-x)^3}{9(2-x)}$$

$$17. \quad y = \frac{x - \frac{1}{2}}{(x+2)^2}$$

$$18. \quad y = \frac{1-x}{x^2}$$

$$19. \quad y = \frac{4x}{(x-2)^2}$$

$$20. \quad y = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2}$$

$$21. \quad y = 2x - 1 + \frac{1}{x+1}$$

$$22. \quad y = \frac{x^3 + 1}{x}$$

$$23. \quad y = \frac{x+1}{x^2 + 2x + 2}$$

$$24. \quad y = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$$

$$25. \quad y = \frac{x^2 - 3x + 2}{(x+1)^2}$$

$$26. \quad y = \frac{2x+1}{(x+2)^2} - 2$$

$$27. \quad y = \frac{x^4}{(x+1)^3}$$

$$28. \quad y = \frac{(x-3)^2}{2x-1} + \frac{3}{2}$$

$$29. \quad y = \frac{x+1}{2} + \frac{2}{(x+1)^2}$$

$$30. \quad y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$$

Завдання 12. Знайти і побудувати область визначення функції

$$1. \quad z = \ln(y^2 - 4x + 8)$$

$$2. \quad z = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$

$$3. \quad z = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$$

$$4. \quad z = \arcsin \frac{y-1}{x}$$

$$5. \quad z = \ln(xy)$$

$$6. \quad z = \sqrt{x^2 - y^2 + 4}$$

$$7. \quad z = \frac{x}{x^2 - y + 3}$$

$$8. \quad z = e^{x^2} - \arccos y$$

$$9. \quad z = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{y^2-1} \quad 10. \quad z = \ln(1-x^2+y^2)$$

$$11. \quad z = \frac{1}{\lg(x^2+y)} \quad 12. \quad z = \frac{\sqrt{x^2+y^2-4}}{y-2x}$$

$$13. \quad z = \ln(-x+5y) \quad 14. \quad z = \sqrt{x^2+y^2-1} \sqrt{4-x^2-y^2}$$

$$15. \quad z = \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{1-y^2} \quad 16. \quad z = \sqrt{1-x^2} \sqrt{4-y^2}$$

$$17. \quad z = \sqrt{x+1} + \arccos y \quad 18. \quad z = \sqrt{4x-y^2}$$

$$19. \quad z = \sqrt{36-4x^2-9y^2} \quad 20. \quad z = \arcsin \frac{y}{x^2}$$

$$21. \quad z = \sqrt{y} + \arcsin(x-2) \quad 22. \quad z = \frac{5}{\sqrt{y}} - \sqrt{3x}$$

$$23. \quad z = \sqrt{1+x-y^2} + \sqrt{1-x-y^2} \quad 24. \quad z = \ln(-x-y)$$

$$25. \quad z = \sqrt{x} + \arcsin(y-2) \quad 26. \quad z = \sqrt{36-4x^2+9y^2}$$

$$27. \quad z = \ln(2-3x^2+6y) \quad 28. \quad z = \sqrt{9-x^2-y^2}$$

$$29. \quad z = \sqrt{4-x^2} - \sqrt{1-y^2} \quad 30. \quad z = \frac{3}{\sqrt{x}} + \ln(1-y)$$

Завдання 13. Знайти частинні похідні першого порядку z'_x і z'_y для функції

1. $z = 3x^2 - 2x\sqrt{y} + y - 8x + 8$

2. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$

3. $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$

4. $z = x^3 y^2 (6 - x - y)$

5. $z = e^{-x^2 - y^2} (2x^2 + y^2)$

6. $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$

7. $z = xy^2 (1 - x - y)$

8. $z = x^3 + y^3 - 15xy$

9. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$

10. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$

11. $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$

12. $z = x^4 + 4xy - 2y^2$

13. $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$

14. $z = x^2 + y^2 - 2\ln x - 18\ln y$

15. $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$

16. $z = 2 - \sqrt[3]{x^2 + y^2}$

17. $z = (x-1)^2 + 2y^2$

18. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$

19. $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$

- 20. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$
- 21. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$
- 22. $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$
- 23. $z = (2x - x^2)(2y - y^2)$
- 24. $z = e^{\frac{x}{2}} (x + y^2)$
- 25. $z = xy(1 - x - y)$
- 26. $z = 3(x - y) - 2x^2 - y^2$
- 27. $z = 2x^3 + 5x^2 - xy^2 + y^2$
- 28. $z = x^2 - 2xy - 4x + 2y - 1$
- 29. $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$
- 30. $z = (x - 2)^2 + 2y^2$

ЛІТЕРАТУРА

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. — С.Пб.: Лань, Специальная литература, 2002. — 448 с. — ISBN 5-8114-0107-8.
2. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — Изд-во: ФИЗМАТЛИТ, 2008. — 312с. — ISBN 978-5-9221-0691-7.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Том 1. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. — М.: Дрофа, 2004. — 288 с.
4. Вища математика: В 2 кн. Кн.1 Аналітична геометрія з елементами алгебри. Вступ до математичного аналізу/ М.І.Шкіль, Т.В. Колесник, В.М.Котлова.-К.: Либідь, 2010 р. —592 ст.. —ISBN: 978-966-06-0572-5.
5. Вища математика: Підручник.У 2 кн. Кн.1. Основні розділи /Призва Г.Й., Плахотник В.В Гординський Л.Д. та інш.; За ред. Кулініча Г.Л. — К.: Либідь, 2003. - 400 с.
6. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах с решениями. В 2 ч. Ч. 1: Учебное пособие для вузов / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. — М. : ОНИКС 21 век, 2002. — 304 с.
7. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навчальний посібник. У трьох частинах. Ч.1. — Х.: Веста, 2008. - 200с., іл.
8. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навчальний посібник. У трьох частинах. Ч.2. — Х.: Веста, 2008. — 240с., іл.
9. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. —М: Высш. шк., 1964. — 479 с.
10. Каплан И.А.. Практические занятия по высшей математике. Харьков 1967. —946 с.
11. Овчинников П.П. та ін. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч.1: Лінійна і векторна алгебра: Аналітична геометрія: Вступ до математичного аналізу: Диференціальне і інтегральне числення (Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М.; За заг. ред. Овчинникова П.П.) — К.: Техніка, 2003. — 600 с.: іл.
12. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: Учеб. для втузов. В 2-х т. Т.1: — М. : Интеграл-Пресс, 2001. — 416 с.

13. Рудавський Ю.К., Костробій П.П., Луник Х.П., Уханська Д.В. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Навч. Підручник - Львів: Видавництво "Бескид Біт", 2002. – 262 с.

14. Сборник задач по курсу высшей математики / Под ред. Кручковича Г.И. – М.: Высш. шк., 1973. – 576 с.

15. Сборник задач по математике для вузов. В 4 частях. Ч. 1: Учебное пособие для вузов / Под общ. ред. А .В .Ефимова и А.С.Поспелова. — 4-е изд. перераб. и доп. —М.: Издательство Физико-математической литературы, 2001.—288 с.—ISBN 5-94052-034-0 (Ч. 1).

16. Ефимов А.В., Демидович Б.П. Сборник задач по математике для вузов. В 4-х частях. Часть 1. Линейная алгебра и основы математического анализа. Учеб. пособие для вузов. – 3-е изд., испр. – М.: Наука, 1993. – 480 с. – ISBN 5-02-01433-9.