МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет «Запорізька політехніка»

Факультет комп'ютерних наук та технологій
(повне найменування факультету)

Кафедра «Системний аналіз та обчислювальна математика»
(повне найменування кафедри)

Пояснювальна записка

до дипломної роботи

Бакалавра
(ступінь вищої освіти)

на тему: Чисельне моделювання конвективного теплообміну в багатокамерних склопакетах
(назва теми)

Виконала: студентка 4 курсу, групи КНТ-811

Спеціальності: 124 Системний аналіз
(код і найменування спеціальності)

Освітня програма (спеціалізація):
Інформаційні технології та прийняття рішень в складних системах
ЗЕМЛЯНА А.В.
(ПРІЗВИЩЕ та ініціали)

Керівник ДЕНИСЕНКО О.І.
(ПРІЗВИЩЕ та ініціали)

Рецензент НЕЧИПОРЕНКО Н.О.
(ПРІЗВИЩЕ та ініціали)

2025

Міністерство освіти і науки України

Національний університет «Запорізька політехніка»

Факультет_____Факультет комп'ютерних наук та технологій_____

Кафедра___«Системний аналіз та обчислювальна математики»_____

Ступінь вищої освіти ____бакалавр_____

Спеціальність _____124 Системний аналіз_____

(код і найменування)

Освітня програма (спеціалізація) Інформаційні технології та прийняття рішень в складних системах _

(назва освітньої програми (спеціалізації)

ЗАТВЕРДЖУЮ

В. о. Завідувач кафедри __к.ф.-н.,___

_____доцент Терещенко Е.В._____

«_16___» ____червня_____2025__року

ЗАВДАННЯ

НА ДИПЛОМНУ РОБОТУ СТУДЕНТКИ

_____ЗЕМЛЯНОЇ Анжеліки Вячеславівни_____

(ПРІЗВИЩЕ, ім'я, по батькові)

1.Тема роботи: Чисельне моделювання конвективного теплообміну в багатокамерних склопакетах _____

Керівник роботи: к.т.н., доцент ДЕНИСЕНКО Олександр Іванович_____,

(науковий ступінь, вчене звання, ПРІЗВИЩЕ, ім'я, по батькові)

затверджені наказом закладу вищої освіти від «_16_»_травня_20_25_року №265

2. Строк подання студентом роботи «9» червня 2025 року_____

3. Вихідні дані до роботи: теплофізичні властивості матеріалів, геометричні параметри моделі _____

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити): вступ, огляд літературних джерел, теоретичні основи конвективного теплообміну, метод скінченних елементів, програмний комплекс COMSOL Multiphysics, математична модель та чисельна реалізація задачі, оцінка теплофізичних властивостей склопакетів._____

_____

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень, кількість слайдів, плакатів)

Побудова геометрії розрахункової області, побудова тріангуляції, подання розрахунків графічно засобами COMSOL, розподіл температури, швидкостей, залежність тепловтрат від наповнення та геометрії склопакету._____

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	ПРІЗВИЩЕ, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	прийняв виконане завдання
1	ДЕНИСЕНКО О.І., к.ф. - м.н., доцент	21.02.2025	23.03.2025
2	ДЕНИСЕНКО О.І., к.ф. - м.н., доцент	26.03.2025	29.04.2025
3	ДЕНИСЕНКО О.І., к.ф. - м.н., доцент	30.03.2025	27.05.2025
Нормоконтроль	ШИРОКОРАД Д.В.,к.ф. - м.н., доцент	4.06.2025	11.06.2025

7. Дата видачі завдання «___21____» __лютого_____2025_року.

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№ з/п	Назва етапів дипломного проєкту (роботи)	Строк виконання етапів проєкту (роботи)	Примітка
1	Ознайомлення з тематикою дослідження, формулювання мети та завдань	22.02.2025	
2	Аналіз літературних джерел	7.03.2025	
3	Ознайомлення з теоретичними основами конвективного теплообміну	18.03.2025	
4	Ознайомлення з методами скінченних елементів	27.03.2025	
5	Розробка математичної моделі	11.04.2025	
6	Чисельна реалізація моделі	19.04.2025	
7	Проведення чисельних досліджень	30.04.2025	
8	Аналіз та візуалізація результатів	15.05.2025	
9	Оформлення записки, доповіді, презентації	29.05.2025	
10	Попередній захист роботи, отримання рецензії	4.06.2025	
11	Захист дипломної роботи	16.06.2025	

Студент(ка) _____ Анжеліка ЗЕМЛЯНА
(підпис) (Ім'я ПРІЗВИЩЕ)

Керівник проєкту (роботи) _____ Олександр ДЕНИСЕНКО
(підпис) (Ім'я ПРІЗВИЩЕ)

РЕФЕРАТ

Дипломна робота: 67 сторінок, 43 рисунків, 5 таблиць, 25 джерел.

Об’єктом дослідження є багатокамерні склопакети, що застосовуються у сучасних будівельних конструкціях та їх теплоізоляційні властивості.

Мета дослідження — аналіз та чисельне дослідження теплофізичних властивостей багатокамерних склопакетів з наповненням камер різними газами, а також визначення впливу геометричних параметрів на їх теплоізоляційні характеристики.

Метод дослідження – метод скінченних елементів, проведення чисельних експериментів за допомогою програмного комплексу COMSOL Multiphysics.

Проблематика теми полягає в необхідності зменшення енергоспоживання будівель за рахунок удосконалення віконних систем. Багатокамерні склопакети є перспективним рішенням для забезпечення ефективної теплоізоляції, однак потребують подальшого дослідження теплофізичних параметрів. Робота має практичне значення, оскільки сприяє впровадженню сучасних конструкцій склопакетів з поліпшеними енергозберігаючими властивостями.

ТЕПЛООБМІН, COMSOL, ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ, МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ, ЕНЕРГОЗБЕРЕЖЕННЯ, СКЛОПАКЕТ.

ЗМІСТ

ЗАВДАННЯ 2

РЕФЕРАТ 4

ЗМІСТ 5

ВСТУП 6

1 ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛОПЕРЕНОСУ 8

1.1 Огляд літературних джерел 8

1.2 Теоретичні основи тепломасопереносу 10

1.3 Температурне поле 12

1.4 Закон теплопровідності Фур'є 13

1.5 Рівняння нерозривності, руху та енергії 14

2 ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ ТА ПРОГРАМНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ 16

2.1 Метод скінченних елементів 16

2.2 Програмне забезпечення 29

3 МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОІЗОЛЯЦІЙНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ БАГАТОШАРОВИХ СКЛОПАКЕТІВ 33

3.1 Конструктивні особливості склопакетів 33

3.2 Постановка задачі 36

3.3 Математична модель 38

3.4 Створення геометричної моделі 40

3.5 Задання фізичних властивостей та граничні умови 41

3.6 Побудова обчислювальної сітки 44

3.7 Чисельна реалізація та її результати 45

ВИСНОВКИ 64

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ 65

ВСТУП

Сучасний етап розвитку будівельної галузі супроводжується зростаючою увагою до питань енергоефективності, екологічності та комфорту експлуатації будівель і споруд. В умовах постійного підвищення вартості енергоресурсів та необхідності дотримання міжнародних екологічних стандартів, важливим напрямом є оптимізація теплових характеристик огороджувальних конструкцій. Серед таких конструкцій особливе місце займають віконні системи, які зазвичай є найбільш енергетично вразливими елементами будівельного огородження.

На сьогодні однією з найпоширеніших технологій, що забезпечує високі теплоізоляційні властивості вікон, є використання склопакетів. Особливої уваги заслуговують багатокамерні склопакети, які завдяки своїй конструкції здатні значно знижувати тепловтрати через віконні отвори, покращуючи загальні енергетичні показники будівлі. З огляду на це, дослідження теплофізичних властивостей багатокамерних склопакетів є актуальним як для розробників сучасних будівельних матеріалів, так і для проєктувальників, експлуатаційних служб та кінцевих користувачів.

Багатокамерні склопакети представляють собою конструкцію з декількох шарів скла, розділених герметичними повітряними або заповненими газами камерами. Теплофізичні властивості таких склопакетів залежать від кількості камер, товщини та типу скла, характеристик газового середовища між шарами, а також від якості герметизації та конструктивного виконання дистанційних рамок. Від цих параметрів безпосередньо залежать теплопровідність, опір теплопередачі та загальні енергозберігаючі властивості віконних систем.

На ринку будівельних матеріалів спостерігається активне впровадження енергоефективних склопакетів, серед яких багатокамерні варіанти користуються особливою популярністю. Це зумовлено їх здатністю забезпечувати не лише зниження тепловтрат у зимовий період, а й захист від перегрівання приміщень у літній сезон. Водночас на практиці існує необхідність детального вивчення

теплофізичних характеристик таких склопакетів за різних умов експлуатації та конструктивних виконань, що дозволяє обґрунтувати вибір оптимальних параметрів для конкретних кліматичних зон та типів будівель.

Актуальність теми даної дипломної роботи полягає у необхідності дослідження впливу конструктивних та теплофізичних параметрів багатокамерних склопакетів на їх теплотехнічні характеристики. Результати такого дослідження можуть бути використані для підвищення енергоефективності будівель, зниження витрат на опалення та кондиціонування.

1 ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛОПЕРЕНОСУ

1.1 Огляд літературних джерел

У даній роботі розглянуто методику та результати числового аналізу термогравітаційної конвекції нестисливої рідини в замкненій квадратній області. Вертикальні стінки цієї області мають різні температури, тоді як горизонтальні межі теплоізольовані. Для розрахунків використано універсальний дискретний аналог нестаціонарних рівнянь Нав'є — Стокса та рівняння теплопереносу в змінних «швидкість—тиск».

В рамках наближення Буссінеска детально досліджено характеристики полів швидкості, тиску і температури в квадратній області залежно від чисел Грасгофа та Прандтля [1, 2].

У випадку в'язкої нестисливої рідини задачі вирішувалися чисельно методом кінцевих різниць для повної системи рівнянь Нав'є — Стокса у змінних «швидкість—тиск». Розрахунки виконувалися в нестаціонарній постановці до досягнення усталеного стану. Для обчислення тиску отримано еліптичне рівняння Пуассона шляхом підстановки виразів для швидкостей із рівнянь руху в рівняння нерозривності — за принципом, аналогічним до MAC-методу. Дискретизацію системи здійснено на рознесених сітках, а отриманий універсальний дискретний аналог рівнянь у вигляді системи лінійних алгебраїчних рівнянь розв'язували ітераційними методами. Для перевірки точності чисельної схеми її апробовано на задачі обтікання плоского прямолінійного каналу [3].

Також розв'язано задачу примусового руху нестисливої рідини у квадратній порожнині під дією рухомої верхньої стінки на основі повних нестаціонарних рівнянь Нав'є — Стокса у фізичних змінних «швидкість—тиск». Чисельно проаналізовано формування рециркуляційних і зворотних вихрових течій залежно від числа Рейнольдса. Результати розрахунків полів швидкості та

тиску, отримані запропонованим методом, порівняно з експериментальними даними та іншими чисельними результатами, наведеними в літературі [2, 4, 5].

В іншій роботі досліджувалися локальні особливості теплопередачі та температурного розшарування за умов ослабленої природної конвекції у квадратній області. Вивчено залежність локальних теплових ефектів від умов тепловідведення на горизонтальних межах. Розглянуто два типи теплових умов: рівномірний тепловий потік (чи тепловий відтік) та загальні умови теплообміну. Отримано оцінки межових режимів конвекції та залежності температурних полів і теплових потоків від відповідних безрозмірних чисел [6].

У низці досліджень висвітлюється методологія математичного моделювання задач аерогідродинаміки та тепломасообміну на основі повних тривимірних нестаціонарних та спрощених рівнянь Нав’є — Стокса. Розглянуто сучасні тенденції розвитку чисельних методів для розв’язання цих рівнянь та їх замикання за допомогою турбулентних моделей. Реалізація методології здійснювалася у складі розробленого програмного комплексу. Наведено результати чисельного моделювання турбулентних відривних течій при взаємодії стрибка стиснення з пограничним шаром, обтіканні трансзвуковим потоком профілю крила, мотогондоли авіаційного двигуна, надзвуковому обтіканні кругового конуса під великим кутом атаки, а також при обтіканні циліндра та трикутного крила [7].

Окреме дослідження присвячене чисельному моделюванню процесів тепломасообміну у вентильованому контейнері для тривалого зберігання герметичної корзини з відпрацьованими тепловиділяючими збірками. Задачу поставлено у тривимірній спряженій постановці з урахуванням механізмів природної та примусової конвекції, а також теплового випромінювання. Представлено результати чисельного аналізу для одного контейнера за різних умов зовнішнього вітрового навантаження [6, 7].

В роботі [8] проведено чисельне дослідження вільної конвекції у вікні з двокамерним склопакетом із плісированою тканинною шторкою. В роботі [9] чисельно досліджено двокамерний склопакет із вбудованими жалюзями, і для

подальшої оцінки розглядається єдиний зимовий режим у приміщенні. В роботі [10] вплив співвідношення розмірів камер склопакету на ефективність теплозбереження.

1.2 Теоретичні основи тепломасопереносу

Теплообміном називають самовільний незворотний процес передачі теплоти в середовищі з неоднорідним температурним полем. Як і кожне інше фізичне явище, процес теплопровідності відбувається у просторі та часі. Процес теплообміну, пов’язаний з переносом, тобто рухом, тепловіддаючого середовища, називається конвективним. Конвекція можлива в таких об’єктах, як газ, рідина і сипучі матеріали. Якщо простір містить багатокомпонентну суміш речовин, і концентрація компонентів у різних точках неоднакова, відбувається необоротний масоперенос — переміщення речовини з області з більшою концентрацією в область з меншою. Сукупність цих двох процесів — перенесення теплоти й маси — називають тепломасообміном.

Як і будь-який реальний незворотний процес, тепломасообмін триває доти, доки система не досягне стану термодинамічної рівноваги

Передача теплоти між більш нагрітими та менш нагрітими ділянками тіл або середовища, що відбувається внаслідок хаотичного руху й взаємодії мікрочастинок (молекул, атомів, електронів, іонів), називається теплопровідністю. Її інтенсивність залежить від фізичних властивостей речовини. Найвищу теплопровідність мають метали, де теплота переноситься переважно завдяки руху електронів. Чим нижчий питомий електричний опір металу, тим вища його теплопровідність.

Гази, навпаки, є поганими провідниками теплоти, оскільки в них перенос енергії здійснюється через хаотичний рух молекул. Теплопровідність газів зростає зі збільшенням температури, адже прискорюється тепловий рух молекул.

За невеликих тисків теплопровідність газів майже не залежить від тиску, оскільки зі зростанням числа молекул в одиниці об’єму зменшується довжина їхнього вільного пробігу.

У твердих діелектриках теплота передається завдяки коливанням атомів у вузлах кристалічної ґратки. В рідких середовищах теплота переноситься як через пружні коливання молекул, так і за рахунок їх переміщення з однієї області в іншу.

У рідинах і газах, що перебувають у русі, теплота передається шляхом конвекції. У цьому випадку тепло переноситься як завдяки хаотичному тепловому руху мікрочастинок, так і через переміщення макрочастинок (об'ємів середовища) з однієї області в іншу. Такий процес називають конвективним теплообміном. Якщо рух середовища спричинений зовнішніми чинниками, наприклад, перепадом тиску або роботою вентилятора, він вважається вимушеним. У випадку, коли переміщення викликане дією масових сил, наприклад силою тяжіння, такий рух є природним або вільним.

Типовим прикладом вільного руху є термогравітаційна конвекція, коли нагрітіші частинки під дією сили Архімеда піднімаються вгору, а холодніші — опускаються вниз. У деяких випадках струмені, що виникають при природній конвекції, можуть суттєво впливати на теплообмін навіть за умов вимушеного руху. Такі процеси називають теплообміном при змішаній конвекції.

На конвективний теплообмін значно впливають швидкість і розподіл швидкості рухомого середовища. У неоднорідно нагрітому середовищі, яке рухається нерівномірно, відбувається як перенесення теплоти, так і імпульсу (кількості руху). Оскільки інтенсивність теплообміну пов’язана з інтенсивністю перенесення імпульсу, ці процеси розглядають разом. З цієї причини основні положення гідродинаміки активно використовують у теорії тепломасообміну.

Процес теплообміну між рухомим середовищем і поверхнею твердого тіла називають тепловіддачею. Загалом під тепловіддачею розуміють конвективний теплообмін на межі розділу двох середовищ — рухомого й

нерухомого (твердого тіла, іншої рідини або газу). Такий тип теплообміну характерний для поєднаних процесів тепло- і масопереносу [11, 12].

1.3 Температурне поле

Будь-яке фізичне явище, зокрема процес теплопередачі, відбувається в просторі та часі. Тому аналітичне дослідження теплопровідності полягає у вивченні зміни основної фізичної величини — температури, у просторі та часі. Це можна виразити через залежність:

$$T = f(x, y, z, \tau) \tag{1.1}$$

де x, y, z — просторові координати в декартовій системі, а τ — час.

Загальна сума миттєвих значень температури в усіх точках простору називається температурним полем. Оскільки температура є скалярною величиною, температурне поле також є скалярним.

Існують два основних типи температурних полів: стаціонарне і нестаціонарне.

Нестаціонарним температурним полем є таке поле, температура в якому змінюється не лише в просторі, але й з часом. Іншими словами, температура є функцією не лише простору, а й часу.

Рівняння (1.1) є математичним виразом для нестаціонарного температурного поля. Стаціонарним температурним полем називають таке поле, де температура в будь-якій точці не змінюється з часом, тобто є функцією лише від просторових координат:

$$T = \Phi(x_1 y, z)\frac{\partial T}{\partial \tau} = 0 \tag{1.2}$$

Ізотерма — це лінія або поверхня, на якій температура не змінюється. Найбільший перепад температури на одиницю довжини відбувається в напрямку нормалі до ізотермічної поверхні.

Температурний градієнт у напрямку нормалі до ізотермічної поверхні характеризує зміну температури і позначається як (grad T). Градієнт температури є вектором, спрямованим по нормалі до ізотермічної поверхні в бік підвищення температури:

$$gradT = \frac{\vec{\mathrm{I}}_{\mathrm{n}} \partial T}{\partial n} \tag{1.3}$$

де $\vec{\mathrm{I}}_{\mathrm{n}}$ — одиничний вектор, спрямований по нормалі в бік зростання температури, а $\frac{\partial T}{\partial n}$ — похідна температури по напрямку нормалі до ізотермічної поверхні.

Отже, градієнт температури чисельно дорівнює першій похідній температури по нормалі до ізотермічної поверхні [12].

1.4 Закон теплопровідності Фур'є

Теплопередача відбувається лише за наявності температурного градієнта. В основі теорії теплопровідності лежить закон Фур'є, відповідно до якого елементарна кількість теплоти, яка переноситься теплопровідністю усередині тіла — суцільного середовища, що не має переривистої будови, пропорційна температурному градієнту, площі ізотермічної поверхні dF, перпендикулярної напрямку теплового потоку, і тривалості процесу dt, тобто

$$dQ_\tau = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n} dF\, d\tau \tag{1.4}$$

Знак «мінус» в правій частині рівняння відображає протилежність напрямків векторів теплового потоку і температурного градієнта: теплота поширюється у бік зниження температури, приріст температури в цьому напрямку від'ємний.

Для теплового потоку рівняння (1.4) виглядає:

$$Q = -\lambda \int_F \frac{\partial t}{\partial n} dF \tag{1.5}$$

і для густини теплового потоку:

$$q = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n} \tag{1.6}$$

Коефіцієнт пропорційності λ в рівняннях (1.4—1.6) називається коефіцієнтом теплопровідності.

$$|\lambda| = -\frac{q}{(\partial t/\partial n)} \tag{1.7}$$

Коефіцієнт теплопровідності — це величина, що чисельно дорівнює кількості теплоти, яка передається в одиницю часу через одиничну ізотермічну поверхню тіла при одиничному температурному градієнті. Коефіцієнт теплопровідності вимірюється у Вт/(м·К) [13].

1.5 Рівняння нерозривності, руху та енергії

Рівняння, що виражають закони збереження маси (нерозривності), кількості руху та енергії (або ентальпії) можна вивести, аналізуючи характеристики потоку, що впадає і витікає із нескінченно малого контрольного об'єму (КО) типу показаного на рисунку 1.2. Довжини сторін dx і dy досить малі, так що можна знехтувати величинами порядку dx^2, dy^2. Закон збереження будь-якої величини Q можна записати для контрольного об'єму (КО) наступним чином

Зміна Q у КО по часу	-	Потік Q через обмежуючі поверхні всередину КО	+	Потік Q через обмежуючі з КО	=	Сума джерел та стоків Q у КО

Рисунок 1.1 — Закон збереження величини

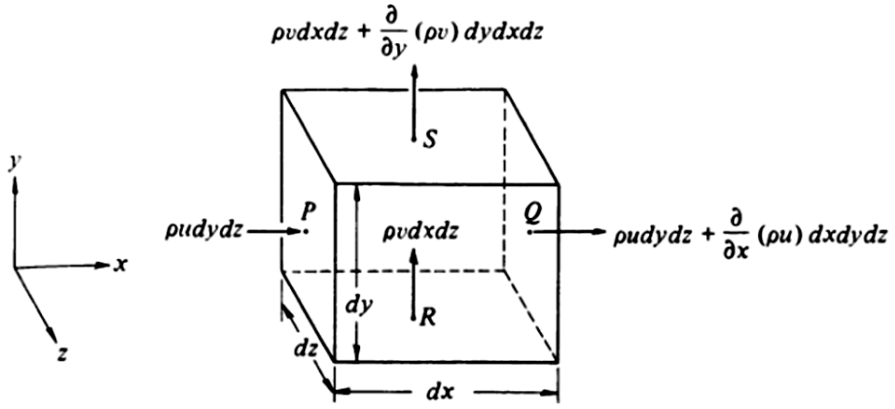


Рисунок 1.2 — Нескінченно малий контрольний обсяг, що розглядається при виводі рівняння збереження маси

2 ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ ТА ПРОГРАМНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ

2.1 Метод скінченних елементів

2.1.1 Теоретичні основи МСЕ

У науковій і технічній практиці часто виникає необхідність розрахунків систем зі складною геометричною формою та неоднорідною фізичною структурою. Завдяки комп'ютерам такі задачі можна вирішувати за допомогою наближених чисельних методів. Одним із найбільш поширених і ефективних є метод скінченних елементів (МСЕ), який за останні десятиліття зайняв провідне місце серед чисельних методів. Розглянемо принцип його роботи та основні переваги.

Припустимо, що стан системи можна описати певною функцією, яка є єдиним розв'язком математичної задачі, сформульованої на основі фізичних законів. Щоб знайти цей розв'язок, потрібно з нескінченної множини можливих функцій вибрати таку, що задовольняє заданим рівнянням. Проте для складних задач аналітичне розв'язання часто недоступне. Щоб спростити процес, замість пошуку функції серед усіх можливих, розглядають лише певне сімейство функцій, які описуються скінченним числом параметрів. Як правило, точний розв'язок серед них відсутній, але, правильно підбираючи параметри, можна наближено задовольнити умови задачі й отримати її наближений розв'язок. Такий підхід властивий багатьом чисельним методам. Особливістю методу скінченних елементів є спосіб побудови цього сімейства функцій.

Уявімо, що потрібно побудувати наближене сімейство функцій u(x) на відрізку [a; b]. Цей інтервал розбивають на скінченну кількість частин — елементів, які з'єднуються між собою у вузлових точках x_i (див. рисунок 2.1). У межах кожного елемента функцію задають, наприклад, у вигляді лінійного полінома. Значення цієї функції визначаються у вузлах на кінцях елемента. Якщо відшукувана функція має бути безперервною, тоді її значення у спільних вузлових точках для сусідніх елементів повинні співпадати. У підсумку

утворюється сімейство кусково-лінійних безперервних функцій, які виглядають як ламані лінії та визначаються кінцевим числом параметрів — значеннями функції у вузлових точках.

На рисунку 2.1 наведено одну з функцій, що належать до такого сімейства. У цьому випадку маємо 5 елементів, 6 вузлів та відповідно 6 вузлових параметрів U. Якщо система залежить від кількох змінних, загальний принцип методу скінченних елементів залишається незмінним. Таким чином, цей метод зводить задачу знаходження функції до визначення кінцевої кількості її наближених значень у певних точках — вузлах.

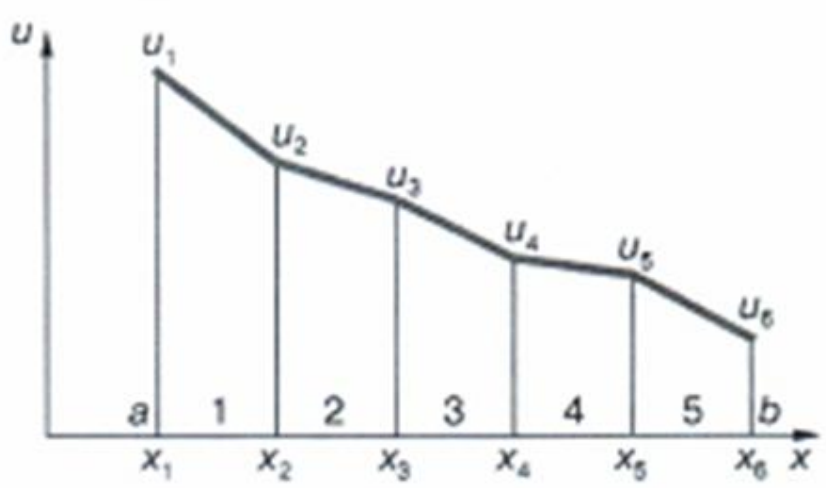


Рисунок 2.1 — Функція кусково-лінійних безперервних функцій

При цьому, якщо початкова задача для функції формулюється як функціональне рівняння (наприклад, диференціальне рівняння з відповідними граничними умовами), то метод скінченних елементів перетворює її на систему алгебраїчних рівнянь для вузлових значень шуканої функції.

Зменшуючи максимальний розмір елементів, збільшується кількість вузлів і, відповідно, невідомих параметрів. Це дає можливість точніше виконувати умови задачі й наближатися до її реального розв’язку. На сьогодні добре досліджені властивості збіжності наближеного рішення, отриманого методом скінченних елементів, до точного. Для лінійних задач, у яких функції та операції над ними входять у рівняння лише в першому ступені, метод має повне

математичне обґрунтування. Надалі будемо розглядати саме лінійні задачі, для яких метод скінченних елементів зводиться до розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Варто виділити кілька важливих переваг методу скінченних елементів:

- цей метод дає змогу вибудувати зручну схему формування системи алгебраїчних рівнянь для вузлових значень шуканої функції. Наближене рішення будують за допомогою простих поліноміальних функцій, а всі обчислення виконуються для окремого стандартного елемента. Далі ці елементи об’єднуються, що дозволяє сформувати повну систему алгебраїчних рівнянь. Такий підхід особливо зручний для задач зі складною геометрією та неоднорідною фізичною структурою;
- кожне алгебраїчне рівняння, отримане в межах методу скінченних елементів, містить лише обмежену кількість вузлових невідомих порівняно з загальним числом параметрів. Тобто, більшість коефіцієнтів у системі дорівнюють нулю, що значно спрощує обчислення;
- задачі, розв’язки яких описуються функціями, що задовольняють функціональні рівняння, називаються континуальними. На відміну від них, дискретні задачі передбачають знаходження кінцевого числа параметрів, які задовольняють відповідну систему алгебраїчних рівнянь. Метод скінченних елементів, як і інші чисельні методи, фактично перетворює континуальну задачу на дискретну. У цьому методі така заміна має наочний фізичний зміст, що дозволяє краще зрозуміти весь процес обчислень, уникнути типових помилок і об’єктивно оцінювати результати;
- окрім континуальних задач, метод скінченних елементів ефективно застосовується для побудови алгебраїчних рівнянь під час розв’язання дискретних задач. Це суттєво розширює сферу його застосування;

Метод скінченних елементів успішно реалізовано у великих універсальних комп’ютерних програмних комплексах, що широко використовуються на практиці [14, 15].

2.1.2 Математична база МСЕ

На сьогодні метод скінченних елементів (МСЕ) є одним із найпоширеніших підходів для розв’язання крайових задач у системах автоматизованого проєктування (САПР). З математичної точки зору він належить до групи варіаційно-різницевих методів. Строге теоретичне підтвердження таких важливих характеристик, як стійкість, збіжність і точність цього методу, здійснюється в спеціальних розділах математики і часто є доволі складною задачею. Попри це, МСЕ динамічно розвивається, і навіть без повного аналітичного обґрунтування багатьох прийомів, успішно використовується для вирішення складних інженерних і технічних задач. Надійність та ефективність алгоритмів і програм, які реалізують цей метод, зазвичай перевіряють шляхом порівняння результатів із відомими точними розв’язками.

Спочатку МСЕ був розроблений для потреб будівельної механіки, однак згодом швидко знайшов широке застосування в багатьох галузях інженерії, таких як авіа- та автомобілебудування, проєктування космічних ракет, електричних і теплових двигунів, турбін, теплообмінних апаратів тощо.

До основних переваг цього методу можна віднести його простоту для розуміння, універсальність для задач із довільною геометрією області розрахунку, а також можливість створення на його основі потужних універсальних програмних комплексів для обчислювальної техніки.

У межах МСЕ розрахункова область поділяється на сітку, яка, як правило, є нерівномірною, що дозволяє враховувати особливості геометрії та умов задачі. Ця сітка складається з окремих частин — скінченних елементів. Шукана безперервна функція замінюється наближеною, побудованою з окремих кусково-безперервних функцій, що визначені на множині цих елементів. Для апроксимації зазвичай застосовують поліноми, які підбирають так, щоб забезпечити безперервність наближеної функції у вузлових точках на межах елементів.

Для прикладу можна розглянути використання МСЕ для розрахунку одномірного температурного поля в однорідному стрижні. Припустимо, що є стрижень довжиною L і площею поперечного перерізу S. Один його кінець жорстко закріплений, і до нього підводиться тепловий потік q заданої інтенсивності. Інший, вільний кінець стрижня охолоджується внаслідок конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем з відомими коефіцієнтом теплообміну α і температурою навколишнього середовища T∗. Бічна поверхня стрижня теплоізольована.

Температурний розподіл у стрижні описується рівнянням теплопровідності, яке для одномірного випадку має вигляд:

$$\lambda_x \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right) = 0 \tag{2.1}$$

Для опису крайових умов використовуються рівняння:

$$\lambda_x \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) + q = 0, \text{ при } x = 0 \tag{2.2}$$

$$\lambda_x \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \alpha(T - T*) = 0, \text{ при } x = L \tag{2.3}$$

Температурне поле, яке необхідно знайти, являє собою безперервну функцію від координати x. У методі скінченних елементів стрижень поділяють на довільну кількість скінченних елементів — відрізків, що можуть мати різну довжину. На кожному з цих елементів безперервна функція $T(x)$ наближено замінюється лінійною залежністю. Апроксимуюча кусочно-лінійна функція визначається за значеннями у вузлових точках $T_1 - T_6$, які,зазвичай, на початку обчислень є невідомими та знаходяться в процесі розв'язання задачі МСЕ.

Подібний принцип застосовується і до дво- та тривимірних областей, де потрібно визначити шукану функцію.

Для двовимірних випадків найчастіше використовують елементи у вигляді трикутників чи чотирикутників. Причому їхні межі можуть бути як

прямолінійними, так і криволінійними, що дозволяє з достатнім ступенем точності апроксимувати границю будь-якої форми.

У тривимірних задачах зазвичай застосовують елементи форми тетраедра або паралелепіпеда, які також можуть мати як прямі, так і криволінійні межі.

В загальному вигляді реалізація методу скінченних елементів охоплює чотири основні етапи:

Етап 1. Розбиття заданої області на скінченні елементи.

Етап 2. Побудова апроксимуючої функції для кожного елемента. На цьому етапі значення безперервної функції $\varphi^{(e)}$ в довільній точці е-го обраного елемента апроксимується поліномом.

$$\varphi^{(e)} = A^{(e)}R + A_0, \tag{2.4}$$

де $A^{(e)}$— вектор-рядок коефіцієнтів полінома;

A_0 — вільний член;

R=(x,y,z) — вектор координат у розглянутій точці.

Далі задачею етапу є визначення невідомого вектора $A^{(e)}$ й вільного члена A_0. Для цього, використовуючи умову безперервності функції у вузлах, коефіцієнти полінома виражають через вектор $\Phi^{(e)}$ вузлових значень функції й координати вузлів і, після виконання перетворень, отримують

$$\varphi^{(e)} = N^{(e)}\Phi^{(e)}, \tag{2.5}$$

де $N^{(e)}$ — матриця-рядок, елементи якої називають функціями форми скінченного елемента.

Функції форми легко обчислюють у кожній точці скінченного елемента через координати самої точки й координати вузлів елемента.

Етап 3. Формування загальної системи. На цьому етапі рівняння, що описують окремі скінченні елементи, об’єднуються в єдину систему алгебраїчних рівнянь:

$$\varphi = N\Phi \tag{2.6}$$

Ця система є моделлю шуканої безперервної функції.

Етап 4. Обчислення вектора вузлових значень функції. Процедура визначення вектора Φ вузлових значень функції є найбільш трудомістким етапом у МСЕ, оскільки в початковий момент цей вектор є невідомим.

Існує низка алгоритмів його обчислення, серед яких особливе місце займає алгоритм, заснований на мінімізації функціонала, що відображає фізичний зміст задачі. Цей алгоритм включає такі етапи:

Етап 1. Вибір функціонала F, що залежить для стаціонарних задач від шуканої функції φ і її частних похідних $\dot{\varphi}_x$, $\dot{\varphi}_y$, $\dot{\varphi}_z$, по вектору просторових координат:

$$F = \int_V f\left(\varphi, \dot{\varphi}_x, \dot{\varphi}_y, \dot{\varphi}_z\right) dV, \tag{2.7}$$

де V — об’єм.

Функціонал F представляється сумою відповідних функціоналів, що відносяться до окремих скінченних елементів:

$$F = \sum_{e=1}^{N} F^{(e)} = \sum_{e=1}^{N} \int_{V^{(e)}} f\ \left[\!\left[(\varphi)\right]\!\right]^{(e)}, \dot{\varphi}_x^{(e)}, \dot{\varphi}_y^{(e)}, \dot{\varphi}_z^{(e)}\Big) dV^{(e)} \tag{2.8}$$

де N — число елементів.

Етап 2. Підстановка апроксимуючого виразу в обчислення похідних $\dot{\varphi}_x^{(e)}, \dot{\varphi}_y^{(e)}, \dot{\varphi}_z^{(e)}$ по формулах виду

$$\dot{\varphi}_x^{(e)} = \frac{\partial \varphi^{(e)}}{\partial x} = \left(\frac{\partial N^{(e)}}{\partial x}\right) \Phi^{(e)} \quad (2.9)$$

Етап 3. Мінімізація по вектору Φ функціонала F. Для цього складаються рівняння

$$\frac{\partial F^{(e)}}{\partial \Phi^{(e)}} = 0 \quad (2.10)$$

Сума виразів по скінченним елементам утворює систему алгебраїчних рівнянь

$$K\Phi = B \quad (2.11)$$

де K — матриця коефіцієнтів (матриця жорсткості);

B — вектор навантаження.

Етап 4. Розв'язок системи, що дозволяє визначити невідомий вектор вузлових значень.

Отримані значення вектора Φ підставляють у початок, після чого значення функції φ просто обчислюється в усіх точках заданої області [14, 15].

2.1.3 Розбиття Діріхле та тріангуляція Делоне

Метод скінченних елементів передбачає дискретизацію диференціальних рівнянь на спеціальних координатних сітках (тріангулярних), що складаються з елементарних осередків трикутної форми у двовимірному випадку або призм (тетраедрів) у тривимірному просторі.

Припустімо, необхідно розбити певну двовимірну область Θ на таку тріангулярну сітку. Для цього розглянемо множину точок $\{p_i \mid i = 1, 2, ..., n\}$ усередині області Θ. Тоді осередок Діріхле Ω_i для точки являє собою множину всіх точок області Θ, що розташовані ближче до цієї точки p_i, ніж до будь-якої іншої p_j (рисунок 2.2).

Рисунок 2.2 — осередок Діріхле

Така множина осередків $\{\Omega_i \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$ називається розбиттям Діріхле. Вона повністю покриває область Θ без накладень (рисунок 2.3).

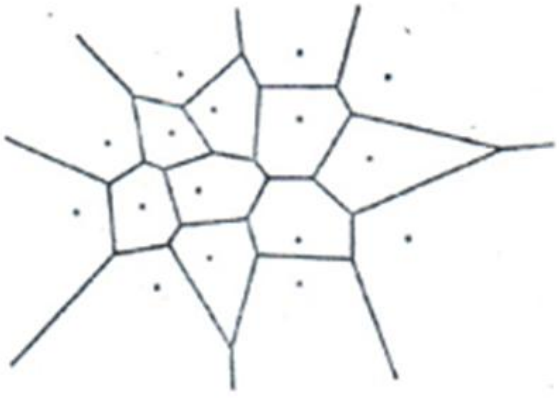


Рисунок 2.3 — розбиття Діріхле

Координатна сітка, яка є зручною для дискретизації рівнянь математичної фізики, формується в результаті тріангуляції Делоне, що визначається таким чином.

Вважається, що дві точки сітки є сусідніми за критерієм Діріхле тоді й тільки тоді, коли їхні відповідні багатокутники Діріхле мають спільну межу ненульової довжини. Тріангуляція Делоне — це граф, утворений шляхом з'єднання сусідніх у сенсі Діріхле точок відрізками прямих (рисунок 2.4) і такий, що задовольняє наступним вимогам:

- усі вершини будь-якого трикутника сітки лежать на деякому колі;

- всередині кола, описаного навколо будь-якого трикутника, не повинно бути інших точок сітки;

- не існує двох елементів сітки, які мали б одну й ту саму описану окружність, тобто не допускається, щоб більше трьох точок сітки одночасно належали одній окружності.

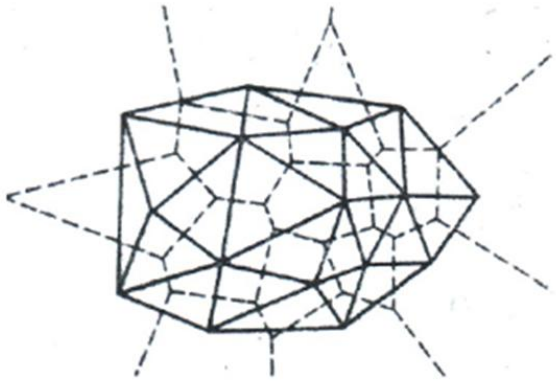


Рисунок 2.4 — Тріангуляція Делоне (суцільні лінії) і відповідне розбиття Діріхле (пунктирні лінії)

У разі, якщо хоча б одна з умов тріангуляції Делоне порушується, це призводить до небажаних труднощів.

Наприклад, коли чотири або більше точок сітки лежать на одній окружності, можливий довільний варіант їх тріангуляції (рисунок 2.5). У такій ситуації тріангуляція Делоне втрачає однозначність.

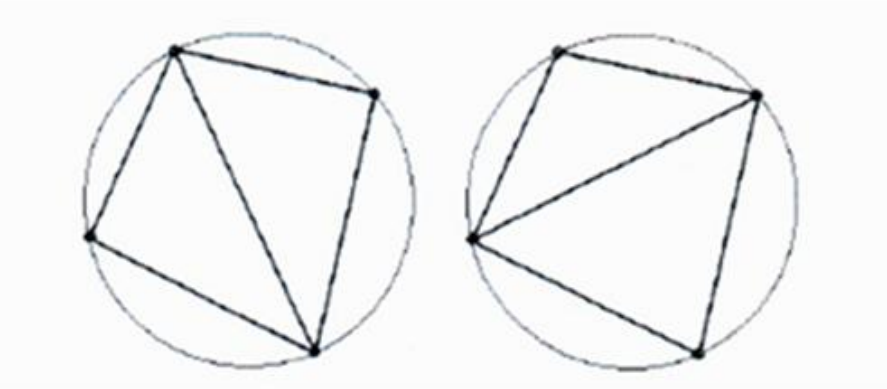


Рисунок 2.5 — Два варіанти тріангуляції чотирьох точок сітки, лежать на одному колі

Приклад тріангуляції заданої області (рисунок 2.6—2.10).

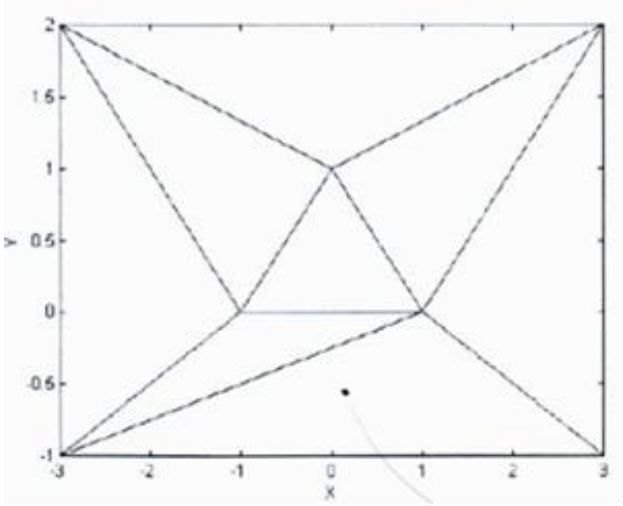


Рисунок 2.6 — Вихідна область для тріангуляції

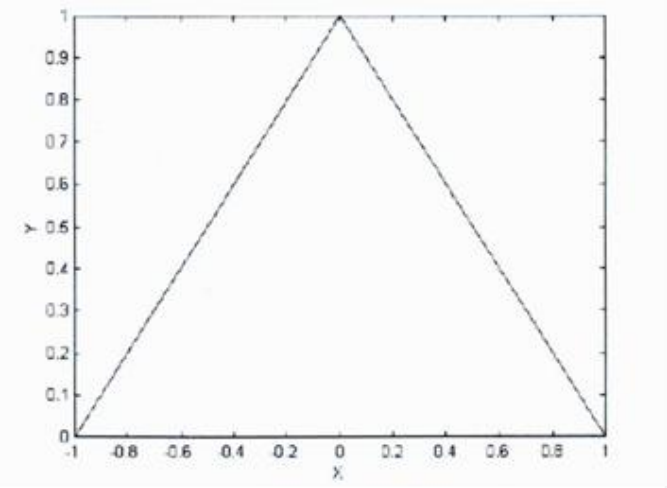


Рисунок 2.7 — Початкове розбиття штучної області на елементи з додаванням кутових точок реальної межі

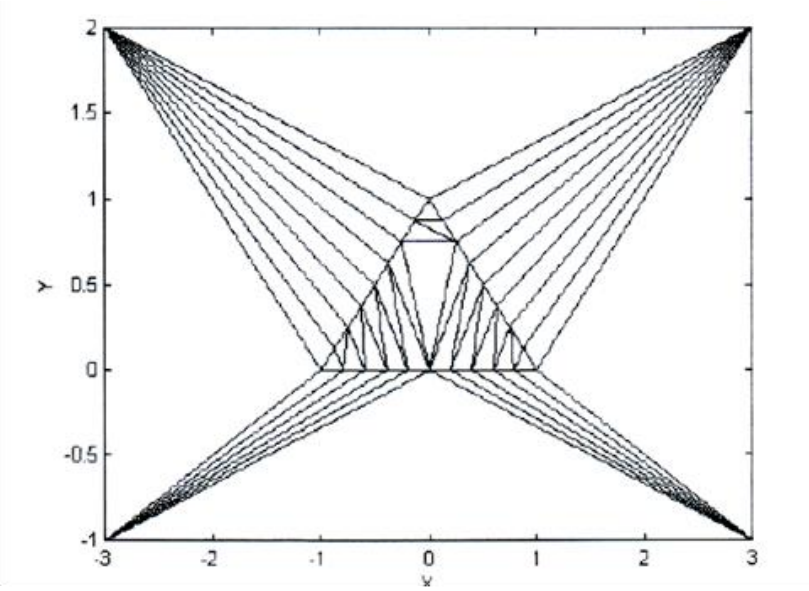


Рисунок 2.8 — Тріангуляція з розбивкою відрізків реальної межі на частини

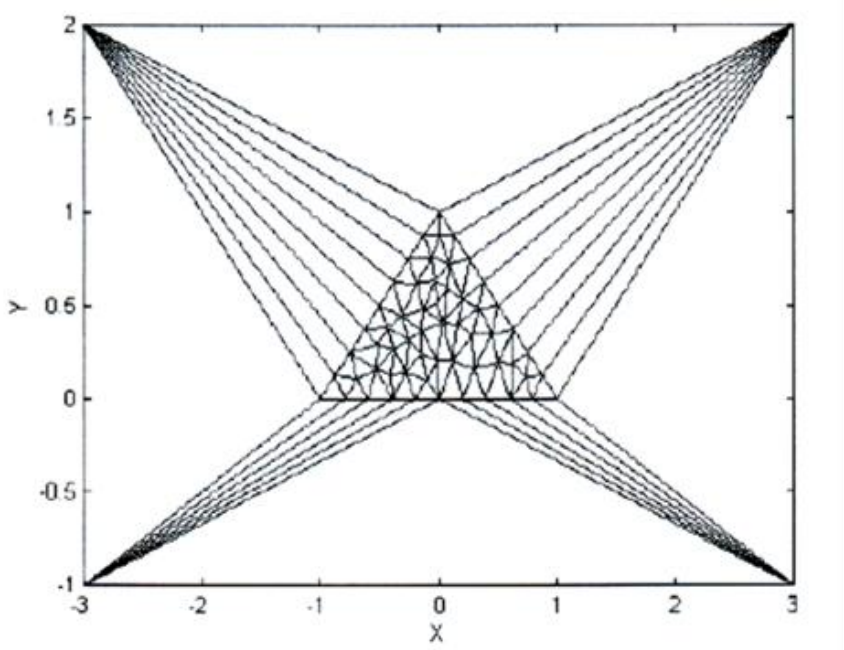


Рисунок 2.9 — Тріангуляція реальної та штучної областей

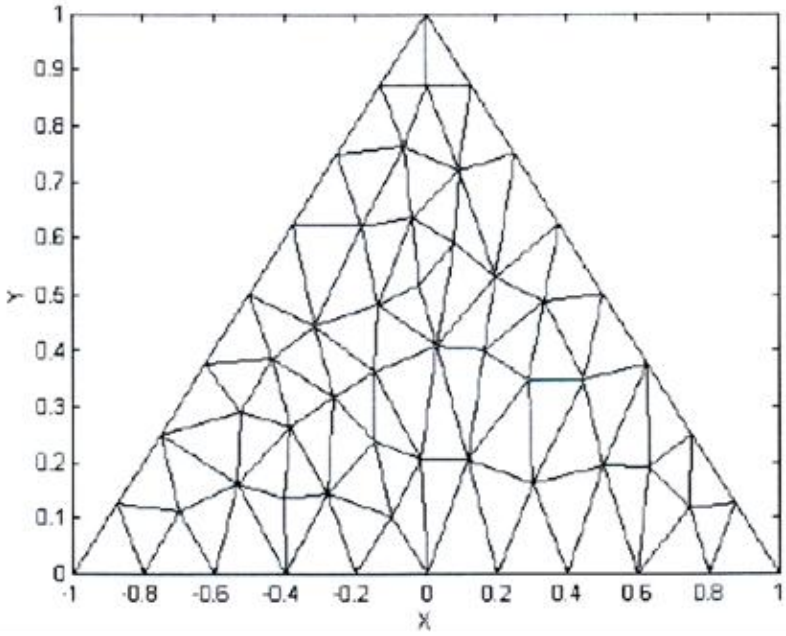


Рисунок 2.10 — Тріангуляція Делоне для заданої множини точок

При перевірці умов Делоне часто використовують такі теореми:

- тріангуляція Делоне має максимальну суму мінімальних кутів усіх своїх трикутників серед всіх можливих тріангуляції
- тріангуляція Делоне має мінімальну суму радіусів кіл, описаних близько трикутників, серед усіх можливих тріангуляцій

- для будь-якого трикутника тріангуляції Делоне — жодна інша точка множини не лежить всередині описаного навколо цього трикутника кола
- ребро між двома точками належить тріангуляції Делоне тоді і тільки тоді, коли круг, діаметром якого є це ребро, не містить жодної іншої точки множини
- якщо два суміжні трикутники порушують умову Делоне, їх можна перебудувати шляхом зміни спільного ребра, і після обмеженої кількості таких перебудов завжди можна отримати коректну тріангуляцію Делоне [14, 16].

2.2 Програмне забезпечення

COMSOL Multiphysics — це універсальний програмний пакет для чисельного моделювання фізичних процесів, які описуються системами диференціальних рівнянь у частинних похідних. Платформа надає користувачам повний набір засобів для побудови моделей, визначення фізичних властивостей, створення розрахункових сіток, проведення моделювань та аналізу результатів. Заснована у 1986 році у Стокгольмі (Швеція) компанія COMSOL Group сьогодні є визнаним лідером на ринку програмного забезпечення для мультифізичного моделювання та має представництва у багатьох країнах світу, зокрема у Данії, Норвегії, Фінляндії, Франції, Німеччині, Нідерландах, Індії, Італії, Великій Британії, США та інших.

COMSOL застосовується не тільки в класичних галузях (машинобудування, електротехніка, теплоенергетика), а й в біомедицині (моделювання кровотоку, теплових процедур, ультразвукових маніпуляцій), акустичних системах, аеро- та гідродинаміці, нанотехнологіях та екологічних дослідженнях.

В основі COMSOL Multiphysics лежить метод скінченних елементів (МСЕ), який дозволяє моделювати задачі механіки деформованого твердого тіла,

теплообміну, гідродинаміки, електродинаміки та інших фізичних явищ. Завдяки постійному розвитку обчислювальних технологій розширюється як функціонал методу, так і спектр задач, які можна розв’язати за допомогою цього програмного забезпечення.

Пакет має модульну структуру, кожен модуль спеціалізується на розв’язанні задач у певній галузі фізики, а також забезпечує можливість мультифізичного моделювання — коли декілька фізичних явищ взаємодіють в межах однієї задачі:

- Structural Mechanics Module — для аналізу напружено-деформованого стану конструкцій, урахування пружно-пластичних властивостей матеріалів, великих деформацій, динамічного аналізу та взаємодії з іншими фізичними ефектами.

- Heat Transfer Module — моделює теплоперенос за рахунок теплопровідності, конвекції та випромінювання, у тому числі між поверхнями й у тонкошарових конструкціях.

- Acoustics Module — дозволяє досліджувати поширення акустичних хвиль у повітрі, воді, твердих тілах і ґрунті, що важливо для задач аероакустики, ультразвукової діагностики, шумозаглушення тощо.

- Chemical Engineering Module — орієнтований на моделювання хімічних і суміжних процесів із урахуванням кінетики реакцій, масо- та теплопереносу, а також гідродинаміки.

- Reaction Engineering Module — виконує моделювання систем із реагуючими компонентами в умовах зміни температури та складу в часі.

- AC/DC Module — аналізує електромагнітні явища, включаючи електростатику, магнітостатику, квазістатику, моделює електричні машини, трансформатори, електрозварювання тощо.

- MEMS Module — спеціалізований модуль для дослідження фізичних явищ у мікроелектромеханічних системах (MEMS), таких як датчики, мікронасоси, мікроперетворювачі.

- Earth Science Module — призначений для моделювання підземного потоку рідин і газів у пористих середовищах, процесів нафтовидобутку, забруднення ґрунту та підземних вод.

- Optimization Module — забезпечує проведення параметричної оптимізації геометрії, матеріалів, умов навколишнього середовища та інших змінних з метою поліпшення характеристик об’єкта чи процесу. Підтримує методи оптимізації на основі градієнтів та без похідних.

COMSOL Multiphysics дозволяє здійснювати мультифізичне моделювання, тобто враховувати взаємодію кількох фізичних полів у межах однієї задачі — наприклад, електромеханічних, термомеханічних чи акустомеханічних систем.

Окрім численних галузевих модулів, COMSOL підтримує інтеграцію з CAD-системами сторонніх розробників через модулі LiveLink (SolidWorks, Inventor, AutoCAD, PTC Creo), а також MATLAB. Це дозволяє здійснювати паралельну роботу над геометрією та чисельним моделюванням або створювати власні чисельні скрипти та автоматизацію моделювання.

Одна з сучасних «фішок» — можливість створювати власні додатки на базі моделей. Це дозволяє зробити інтерфейс для запуску розрахунків доступним навіть для користувачів без знань чисельного моделювання. Наприклад, конструктор може налаштувати модель, а інженер-експлуатаційник користуватиметься готовим застосунком з мінімальним набором параметрів.

Сучасні версії COMSOL підтримують розрахунки на кластерних обчислювальних системах, а також у хмарному середовищі, що суттєво пришвидшує вирішення складних завдань із великим обсягом елементів.

На відміну від багатьох інших пакетів, COMSOL дозволяє інтегрувати різні фізичні явища в єдину задачу без потреби створювати складні зовнішні зв’язки. Наприклад, можна одночасно моделювати нагрівання конструкції, деформацію, зміну електричних властивостей і розподіл електромагнітного поля — усе в межах одного середовища.

Користувач має змогу власноруч формулювати диференціальні рівняння, додавати власні рівняння до моделі або редагувати наявні, що відкриває можливості для унікальних, нетипових задач [17—19].

3 МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОІЗОЛЯЦІЙНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ БАГАТОШАРОВИХ СКЛОПАКЕТІВ

3.1 Конструктивні особливості склопакетів

Склопакет є конструкцією, яка складається з двох або трьох стекол (рідше — більше), що з'єднані між собою за допомогою дистанційних рамок, які в результаті утворюють камеру (2 скла — одна камера, 3 скла — дві камери).

Наведено кілька формул склопакетів:

4/16/4 — найпоширеніший однокамерний склопакет. Дана формула означає: 4 мм скло, 16 мм відстань між склом, 4 мм скло.

4/9/4/9/4 — двокамерний склопакет з однаковими дистанціями.

4/8/4/12/4 — двокамерний склопакет з різними дистанціями.

4/12/4/16/4 — розширений двокамерний склопакет з різними дистанціями.

Зазвичай у склопакетах використовується скло 4 мм, для більшої звукоізоляції використовується скло 6 мм та різні дистанції між камерами та шарами скла у склопакеті. Для прикладу, склопакети зі склом завтовшки 4 та 6 мм, окрім показників пропускання тепла, пропускають на 32 дб менше шуму, в порівнянні зі стандартними шибками по 4 мм кожна. Простір між шибками заповнений або повітрям, або інертним газом (аргон, криптон). Останні застосовуються для поліпшення енергоощадних властивостей склопакета, всередині також може бути вакуум [20].

Ширина склопакета залежить від ширини профілю, чим ширша монтажна глибина профілю, тим ширше склопакет ми можемо використовувати. Мінімальна ширина склопакета — 24 мм, максимальна —50 мм.

Характеристика сучасного склопакета:

а) пропускання видимого світла — це процент видимого світла, що напряму проходить крізь скло. Даний показник відповідає за природне освітлення приміщення;

б) відбиття назовні видимого світла — процент видимого світла, що відбивається від зовнішньої поверхні скла. Даний показник відповідає за дзеркальність фасаду;

в) сонячний фактор — загальна кількість сонячної енергії, котра проникає в приміщення. Чим нижчий сонячний фактор, тим менше сонячного тепла надходить в приміщення, і тим менше навантаження на систему кондиціонування;

г) опір теплопередачі — величина, що визначає властивості скла опиратися переносу тепла. Чим вище значення опору передавання тепла, тим менше навантаження на систему опалення приміщення в холодну пору року;

д) коефіцієнт теплопередачі — величина, що характеризує теплові втрати безпосередньо крізь скло. Чим нижче коефіцієнт теплопередачі — тим краще скло бореться з тепловтратами;

е) селективність — це відношення пропускання світла до сонячного фактору. Чим вище показник селективності, тим затишніше буде в приміщенні;

ж) пропускання ультрафіолетового випромінення — величина, що свідчить про властивість скла пропускати ультрафіолетове випромінення;

з) індекс передавання кольору — величина, що показує здатність скла передавати кольори предметів порівняно з тим як вони виглядають без скла. Чим нижче індекс передавання кольору, тим скло тьмяніше;

и) поглинання сонячної енергії — величина, що визначає властивість скла поглинати частку сонячної енергії [21].

Конструктивні рішення мають бути націлені на оптимізацію теплоізоляційних властивостей, зменшення тепловтрат, покращення енергоефективності та забезпечення високого рівня комфорту в приміщенні.

Використання спеціальних газових наповнювачів:

- інертні гази (аргон, криптон, ксенон): Заміна повітря в камерах на інертні гази, такі як аргон або криптон, може значно знизити теплопередачу через склопакет, оскільки ці гази мають низьку теплопровідність порівняно з повітрям;

- газові суміші: Використання сумішей газів, наприклад, аргон з невеликою кількістю криптону, може оптимізувати характеристики теплоізоляції, знижуючи як теплопровідність, так і вплив на вартість матеріалів.

Тонкоплівкові покриття на склі:

- низькоемісійні покриття: нанесення спеціальних тонких покриттів, таких як оксиди металів, на скло дозволяє знизити втрати тепла через випромінювання. Такі покриття зменшують емісію інфрачервоного випромінювання і допомагають утримувати тепло всередині приміщення;

- нанопокриття: використання наноматеріалів для створення покриттів, що сприяють покращенню теплоізоляційних властивостей та водночас знижують коефіцієнт відбиття світла, може підвищити як енергоефективність, так і освітленість в приміщеннях.

Збільшення кількості камер у склопакеті:

- трьох- та чотирикамерні склопакети: додавання більше камер до конструкції склопакету підвищує теплоізоляційні властивості завдяки збільшенню товщини прошарку повітря або газу. Багатокамерні системи зменшують кількість тепла, яке може пройти через вікно, знижуючи таким чином енерговтрати. Але варто враховувати, що такі склопакети мають більшу вагу та товщину, що вимагає посилення рами вікна або додаткової конструкційної підтримки, також мають обмеження в проектуванні (проблемно встановити в дерев’яних будівлях), а це в свою чергу підвищує їх вартість;

- мультикамера з різними наповнювачами: Для кожної камери можна використовувати різні інертні гази, що дозволяє створити систему з оптимальними теплоізоляційними характеристиками для кожної окремої камери;

Використання спеціальних профілів та ущільнень:

- теплоізоляційні профілі: використання профілів з матеріалів з високими теплоізоляційними властивостями, таких як поліуретан, пінополістирол або поліамід, допомагає зменшити втрати тепла через рамки вікон;

- ущільнення та герметизація: використання багатошарових ущільнювальних систем для забезпечення герметичності між склом і рамкою вікна дозволяє знизити потік повітря та зменшити тепловтрати через щілини.

Покращення внутрішнього повітряного потоку (конвекції):

- активна циркуляція в камерах: замість звичайної пасивної циркуляції повітря в камерах можна використати технології, які оптимізують конвективні потоки в середині камери для рівномірного розподілу температури. Це може бути досягнуто шляхом використання спеціальних фільтрів чи вставок, які сприяють регулюванню напрямку та швидкості повітряних потоків.

Конструкція з "теплим" краєм:

- технології теплих країв: вони дозволяють зменшити тепловтрати через краї скла, де традиційно утворюється конденсат або спостерігаються підвищені тепловтрати. Це досягається використанням спеціальних теплоізоляційних матеріалів на краях склопакетів.

Теплозберігаючі жалюзі або штори:

Встановлення вбудованих віконних жалюзі або штор, які заповнюють простір між камерами склопакету, може допомогти зменшити втрати тепла шляхом додаткової теплоізоляції, зокрема в зимовий період [10, 22].

3.2 Постановка задачі

На сьогоднішній день удосконалення теплоізоляційних характеристик будівельних конструкцій є одним із ключових напрямів енергозбереження. Особливе значення має підвищення ефективності віконних систем, оскільки саме через прозорі огороджувальні конструкції відбуваються значні тепловтрати. Актуальність роботи обумовлена сучасними вимогами до енергоефективності будівель і споруд. Пошук оптимальних рішень щодо конструкцій склопакетів та їх теплофізичних характеристик дозволяє зменшити енергоспоживання та

покращити комфорт у приміщеннях. Практичне значення дослідження полягає у можливості впровадження вдосконалених склопакетів із покращеними теплоізоляційними властивостями у будівельну галузь. Багатокамерні склопакети, які заповнюються різними газовими середовищами, дозволяють значно знизити коефіцієнт теплопередачі. Однак їх теплофізичні характеристики суттєво залежать від ряду факторів, зокрема:

- кількості камер (дво-, трикамерні конструкції);
- типу газового наповнення (повітря, аргон, криптон);
- геометричних параметрів склопакета (товщина скла, товщина камер);
- зовнішніх температурних умов експлуатації;
- характеру конвективних потоків усередині газових камер.

Достатнє вивчення впливу вказаних параметрів на теплопередачу крізь склопакети потребує комплексного підходу, що передбачає об’єднання чисельних та експериментальних методів. Особливістю дослідження є врахування складної внутрішньої конвекції в камерах склопакетів, яка суттєво впливає на загальні теплоізоляційні властивості конструкції, особливо за умов різкого перепаду температур.

У рамках даної роботи необхідно виконати:

- моделювання дво- та трикамерних склопакетів з різними газовими наповненнями, з урахуванням геометричних параметрів;
- чисельне дослідження конвективно-теплопровідних процесів усередині камер;
- побудову температурних полів та розподілів теплових потоків у склопакетах із використанням програмного комплексу COMSOL Multiphysics;
- порівняння теплоізоляційних властивостей різних конструкцій склопакетів та аналіз ефективності застосування конкретних газових середовищ (повітря, аргон, криптон);
- визначення впливу геометрії склопакета (товщина камер) на його теплофізичні характеристики;

- формування рекомендацій щодо вибору оптимальної конструкції склопакета для сучасних енергоефективних будівель.

У роботі буде виконано 6 серій чисельних розрахунків для наступних конфігурацій:

Таблиця 3.1 — Серії чисельних розрахунків

№	Кількість камер	Газове наповнення
1	2	Повітря
2	2	Аргон
3	2	Криптон
4	3	Повітря
5	3	Аргон
6	3	Криптон

Отримані результати дозволять визначити, як змінюється теплоізоляційна здатність склопакетів залежно від кількості камер та типу газового наповнення.

3.3 Математична модель

В роботі розглядається дво- та тривимірна мультифізична модель склопакету. Процес теплообміну описується рівнянням теплопровідності для скла

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \nabla T\right) = a\Delta T \tag{3.1}$$

та рівняннями вільної конвекції в наближені Бусінеска в камерах між шарами скла

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p + \nu \Delta \vec{v} - \beta \Delta T \cdot \vec{g} \tag{3.2}$$

$$(\nabla \cdot \vec{v}) = 0 \tag{3.3}$$

де $\vec{v}$ — швидкість течії; (м/с);

ΔT — відхилення температури; (°C або К);

β — коефіцієнт об'ємного теплового розширення; (1/К);

p — тиск; (Па);

α — коефіцієнт температуропровідності; (м²/с);

$\vec{g}$ — прискорення вільного падіння; (м/с²);

ν — кінематична в'язкість. (м²/с) [22].

3.4 Створення геометричної моделі

Для моделювання багатокамерних склопакетів у COMSOL Multiphysics була побудована спрощена двовимірна геометрична модель, що відображає поперечний переріз склопакета. Такий підхід дозволяє зменшити обчислювальні ресурси, зберігаючи при цьому точність моделювання розподілу температурного поля.

Усі варіанти моделюються у вигляді послідовних шарів скла та камер з газовим наповненням.

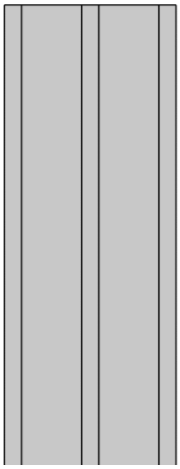


Рисунок 3.1 — Розріз двокамерного склопакету (товщина скла – 4мм, ширина камери – 14мм)

Модель побудована в COMSOL за допомогою базових інструментів створення прямокутників. Кожен шар скла та кожна камера моделюється окремим прямокутником із заданими геометричними розмірами. Шари щільно прилягають один до одного без зазорів, що відповідає реальній конструкції склопакета [24].

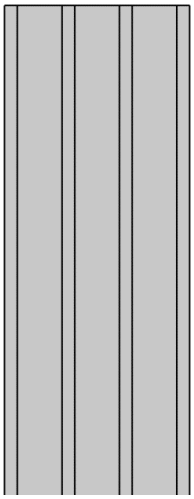


Рисунок 3.2 — Розріз трикамерного склопакету (товщина скла – 4мм, ширина камери – 14мм)

Геометричні параметри складових склопакету, показані вище є вхідними, в процесі дослідження змінюватиметься розмір склопакету та ширина камер. Незмінною залишатиметься висота склопакету – 1.3 м.

3.5 Задання фізичних властивостей та граничні умови

На цьому етапі для кожного елемента геометричної моделі у COMSOL Multiphysics були призначені відповідні фізичні властивості матеріалів. Від правильного задання цих параметрів залежить точність чисельного моделювання.

В моделі використовувалися такі матеріали: скло та, в залежності від варіанту, повітря, аргон або криптон. Для кожного з матеріалів були задані параметри зі значеннями:

Таблиця 3.2 — Параметри матеріалів

Матеріал	Теплопровідність, Вт/(м·К)	Густина, кг/м³	Питома теплоємність, Дж/(кг·К)
Скло	1.05	2500	750
Повітря	0.026	1.205	1005
Аргон	0.016	1.784	520
Криптон	0.0095	3.75	248

Для проведення чисельного моделювання необхідно задати граничні умови, які визначають, яким чином склопакет взаємодіє з навколишнім середовищем.

В якості граничних умов для швидкостей конвективних потоків використовувались умови прилипання на поверхні скла. На торцевих поверхнях склопакету ставились умови теплоізоляції.

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{q} = 0 \tag{3.4}$$

На зовнішніх вертикальних поверхнях склопакету ставились граничні умови

$$-\mathbf{n}\cdot\mathbf{q} = q_0$$

$$q_0 = h(T_{ext} - T)$$

$$h = \begin{cases} \frac{k}{L}\left(0.68 + \frac{0.67\mathrm{Ra}_L^{1/4}}{\left(1+\left(\frac{0.492k}{\mu C_p}\right)^{9/16}\right)^{4/9}}\right) & \text{if } \mathrm{Ra}_L \le 10^9 \\ \frac{k}{L}\left(0.825 + \frac{0.387\mathrm{Ra}_L^{1/6}}{\left(1+\left(\frac{0.492k}{\mu C_p}\right)^{9/16}\right)^{8/27}}\right)^2 & \text{if } \mathrm{Ra}_L > 10^9 \end{cases} \quad (3.5)$$

де q_0 – потік тепла, Вт;

h – коефіцієнт пропорційності;

Text – зовнішня температура;

T – поточна температура на поверхні скла;

$Ra = \frac{gL^3\beta\Delta T}{\nu\cdot\alpha} = Gr\cdot \mathrm{Pr}$ – число Релея.

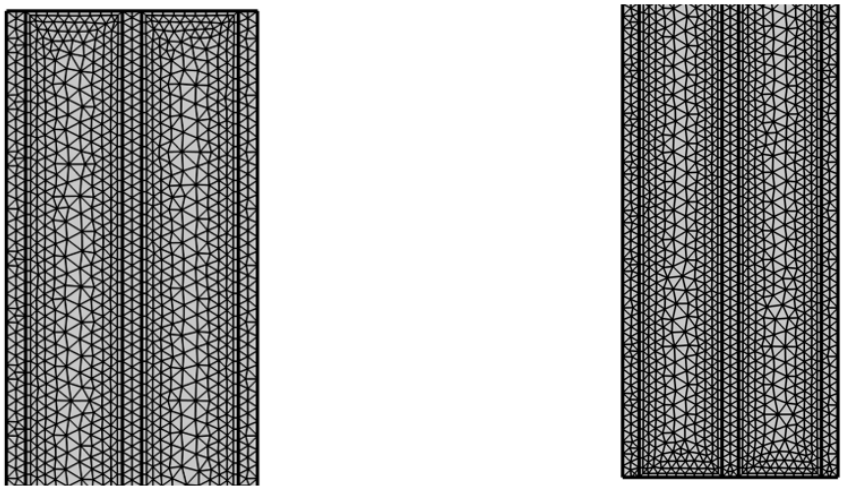
У рамках даної моделі враховується теплопровідність у матеріалах, тобто, у склі – теплопровідність твердого тіла, у камерах з газом – теплопровідність газу. В камерах склопакета формується складна структура конвективних потоків. Циркуляційні комірки виникають через явище вільної конвекції, яке проявляється під дією різниці температур у середовищі. У камерах склопакету тепло передається від внутрішньої сторони (теплої) до зовнішньої (холодної). Ця різниця температур викликає зміни густини повітря або іншого наповнювача в камерах.

3.6 Побудова обчислювальної сітки

Тріангуляція в контексті чисельного моделювання в COMSOL Multiphysics відіграє важливу роль у забезпеченні точності та ефективності обчислень.

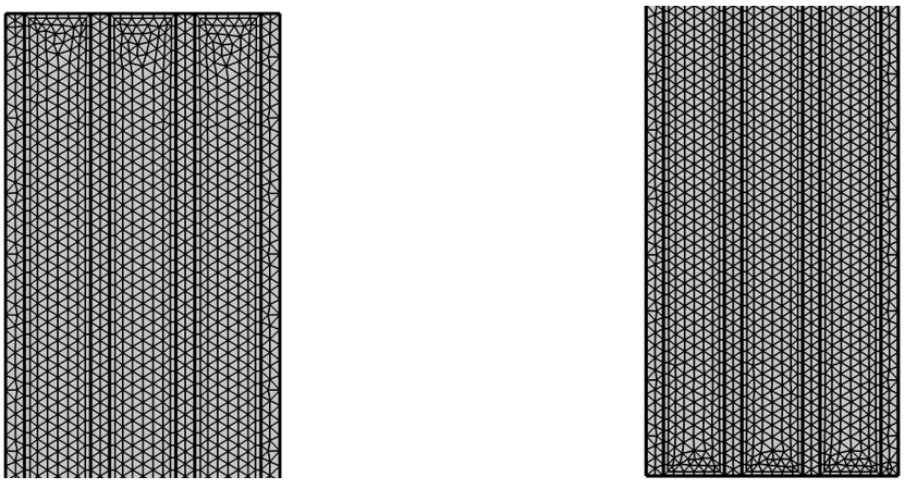
Обчислювальна сітка використовується для спрощення та збільшення точності (процесом розбиття області на піделементи, що легше обраховуються) чисельного розв’язання диференційних рівнянь методом кінцевих елементів.

У COMSOL Multiphisycs доступні два керовані режими – автоматичний, який орієнтований на фізичні особливості та геометрію задачі, та ручний, у якому користувач може самостійно визначати області зі значними градієнтами, пограничні шари тощо. Ручний режим забезпечує більш надійні результати, дозволяє зекономити ресурси компьютеру та час, але вимагає від користувача глибокого знання фізики процесу та певного досвіду в розрахунках [25].



а б

Рисунок 3.3 — Тріангуляція розрахункової області для двох камер (а – верхня частина склопакету, б – нижня частина склопакету)



а б

Рисунок 3.4 – Тріангуляція розрахункової області для трьох камер (а – верхня частина склопакету, б – нижня частина склопакету)

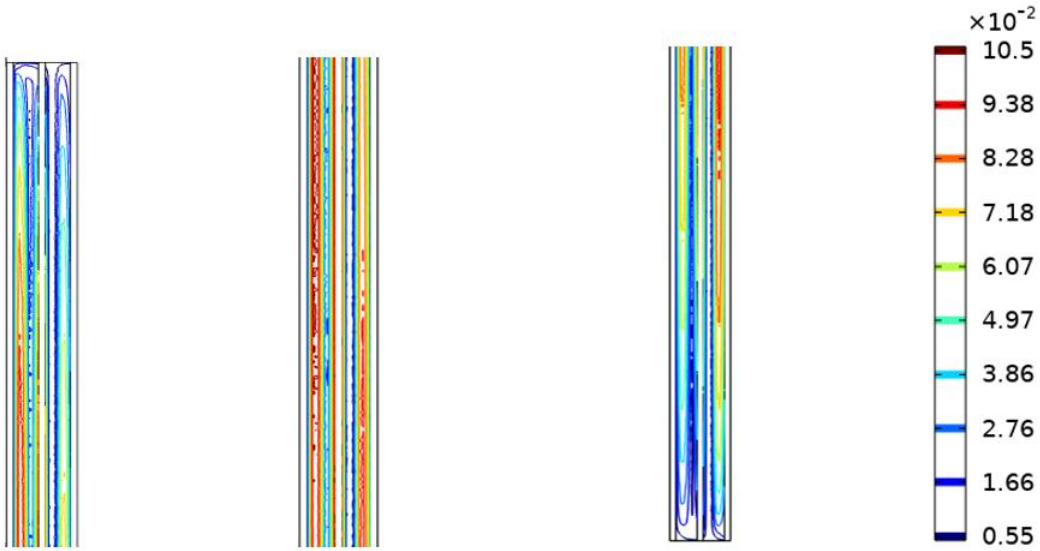
3.7 Чисельна реалізація та її результати

3.7.1 Двокамерний склопакет

Проведена серія чисельних досліджень для різних геометричних параметрів склопакетів, зовнішніх умов від -20°С до 0°С та для таких наповнювачів: аргон, криптон, повітря.

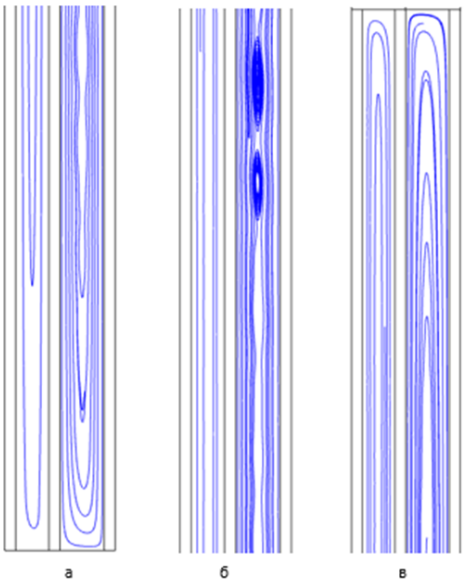
Наведено результати розрахунків для двокамерного склопакету товщиною 40 мм, який наповнено повітрям, аргоном та криптоном – три різних дослідження. Висота склопакету становить 1.3 м. Товщина скла 4 мм, а ширина камер h1=14 мм та h2= 14 мм (рис. 3.5). Зовнішня температура -20°С, внутрішня +20°С. На рисунку спостерігається формування складної структури конвективних потоків в камерах склопакета. Циркуляційні комірки виникають через явище вільної конвекції, яке проявляється під дією різниці температур у середовищі. У камерах склопакету тепло передається від внутрішньої сторони (теплої) до зовнішньої (холодної). Ця різниця температур викликає зміни

густини повітря або іншого наповнювача в камерах. Максимальні швидкості зосереджуються в центральному фрагменті склопакету. В приграничних шарах біля поверхні скла утворюються висхідний (біля внутрішнього скла, де тепло піднімається) та низхідний (біля зовнішнього, де охолоджене повітря спускається вниз) потоки, а в центральній області спостерігаються циркуляційні комірки (рис. 3.6). У центральній частині камери циркуляційні комірки виникають через те, що тепле повітря (або інший наповнювач), яке піднімається, не може піднятися вище певного рівня через охолодження та змушене повертатися назад, утворюючи замкнуті кругові траєкторії. Це створює більш інтенсивний рух у центральній частині порівняно з прикордонними зонами. Чим інтенсивніші ці циркуляційні потоки, тим більші тепловтрати через конвекцію [22].



а – верхній фрагмент; б – середній фрагмент; в – верхній фрагмент

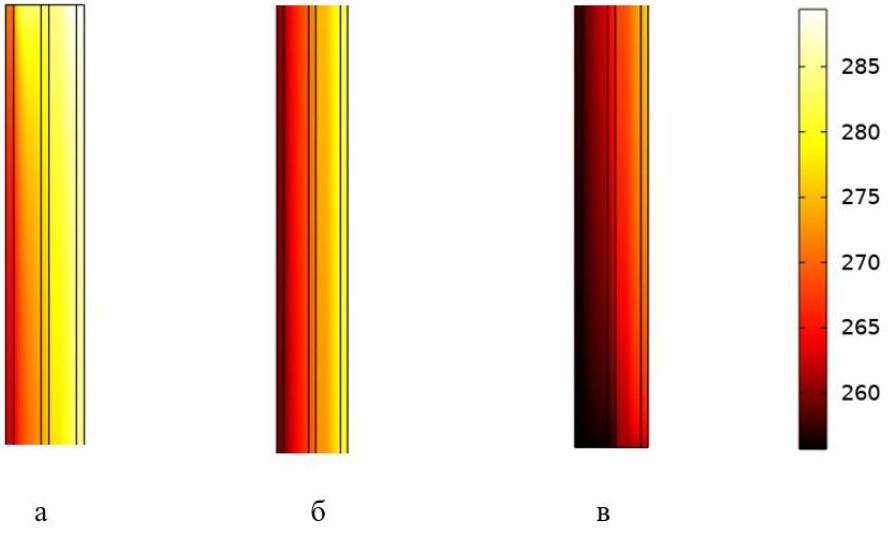
Рисунок 3.5 – Розподіл швидкостей (м/с) конвективних потоків в камерах склопакета



а – нижній фрагмент; б – середній фрагмент; в – верхній фрагмент

Рисунок 3.6 – Лінії току в камерах склопакета

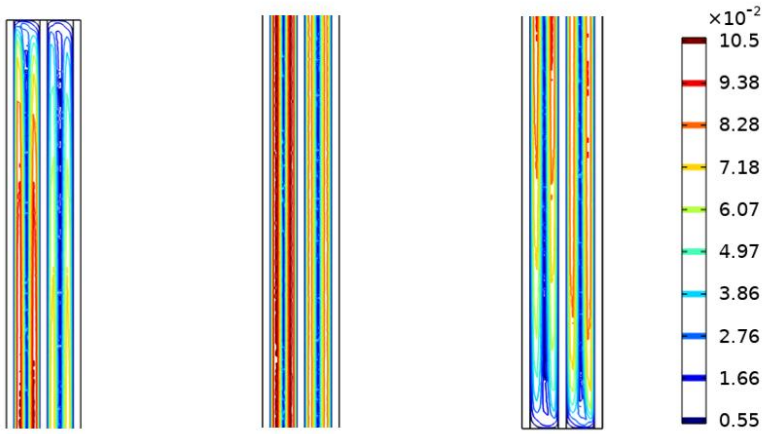
На рисунку 3.7 зображено розподіл температури для трьох фрагментів склопакету. Неоднорідний розподіл температури виникає через наявність конвективних потоків у камерах склопакету за рахунок температурних градієнтів. У верхній частині склопакету формується зона підвищеної температури в порівнянні з нижньою частиною. В центральному фрагменті розподіл температури по ширині склопакету практично незмінний.



а – верхній фрагмент; б – середній фрагмент; в – нижній фрагмент

Рисунок 3.7 – Розподіл температури (К) в двокамерному склопакеті

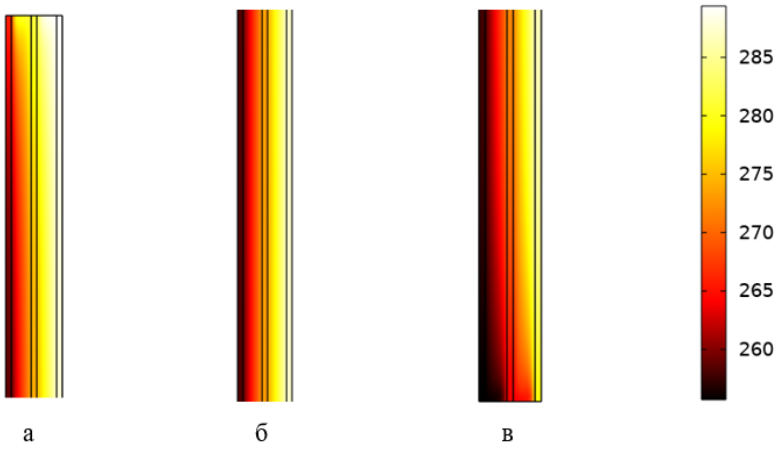
Для аргону спостерігається підвищена швидкість конвективних потоків в першому шарі наповнювача, однак знижена для другого, в порівнянні з камерами, що наповнені повітрям та значно менша кількість циркуляційних комірок (рис. 3.8).



а – верхній фрагмент; б – середній фрагмент; в – нижній фрагмент

Рисунок 3.8 — Розподіл швидкостей (м/с) конвективних потоків в камерах склопакета при наповненні аргоном

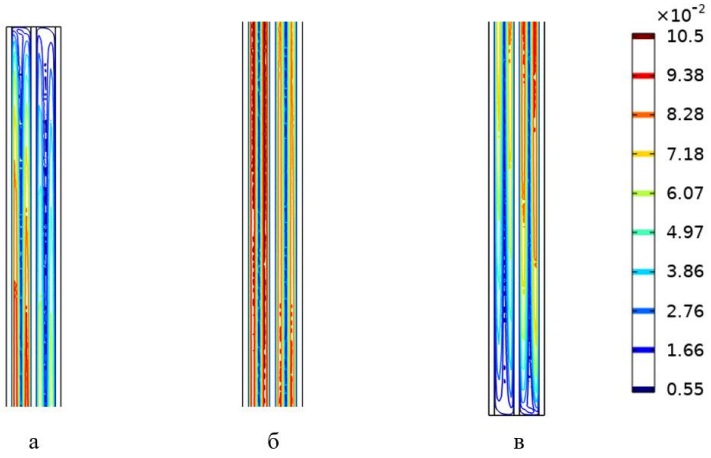
На зображенні розподілу температури в камерах з аргоном бачимо підвищену температуру по всій області склопакету, найхолоднішою частиною є фрагмент зовнішньої камери по всій висоті склопакету (рис. 3.9).



а – верхній фрагмент; б – середній фрагмент; в – нижній фрагмент

Рисунок 3.9 — Розподіл температури (К) в двокамерному склопакеті при наповненні аргоном

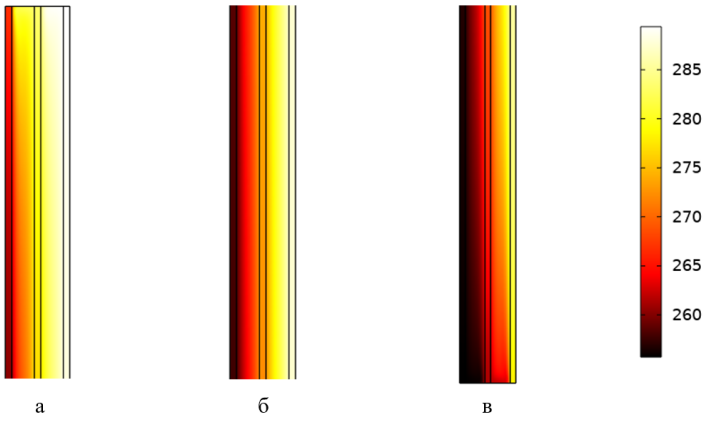
При наповненні камер криптоном максимальні швидкості конвективних потоків зосереджені в центрі зовнішньої камери склопакету. У внутрішній камері помітно мінімальний фрагмент з високою швидкістю потоків, верхня частина зосереджує найнижчу швидкість в порівнянні з попередніми наповнювачами. Збільшення циркуляційних комірок (рис. 3.10).



а – верхній фрагмент; б – середній фрагмент; в – нижній фрагмент

Рисунок 3.10 — Розподіл швидкостей (м/с) конвективних потоків в камерах склопакета при наповненні криптоном

Розподіл температури в склопакеті, що наповнено криптоном демонструє, що найнижчі температури залишаються у нижній частині першої камери, а у верхніх частинах обох камер формується досить висока температура (рис 3.11).



а – верхній фрагмент; б – середній фрагмент; в – нижній фрагмент

Рисунок 3.11 — Розподіл температури (К) в двокамерному склопакеті при наповненні криптоном

Було проведено серію розрахунків щодо впливу розміщення внутрішнього шару скла в двохкамерному пакеті з сумарною шириною камер 40мм з кроком переміщення 5мм від зовнішньої поверхні до внутрішньої на теплоізоляційні властивості при наповненні камер повітрям/аргоном/криптоном.

Представлено результати деяких випадків дослідження, зокрема, в першому випадку розглянуто ширину першої камери 5мм, а другої – 35мм. Перша камера має температуру близьку до температури зовнішнього середовища з мінімальними змінами по всій висоті (рис. 3.12).

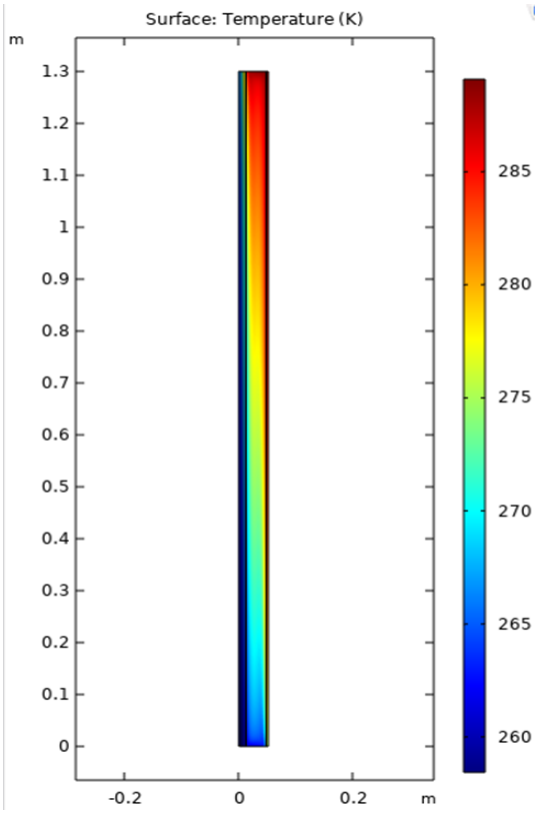
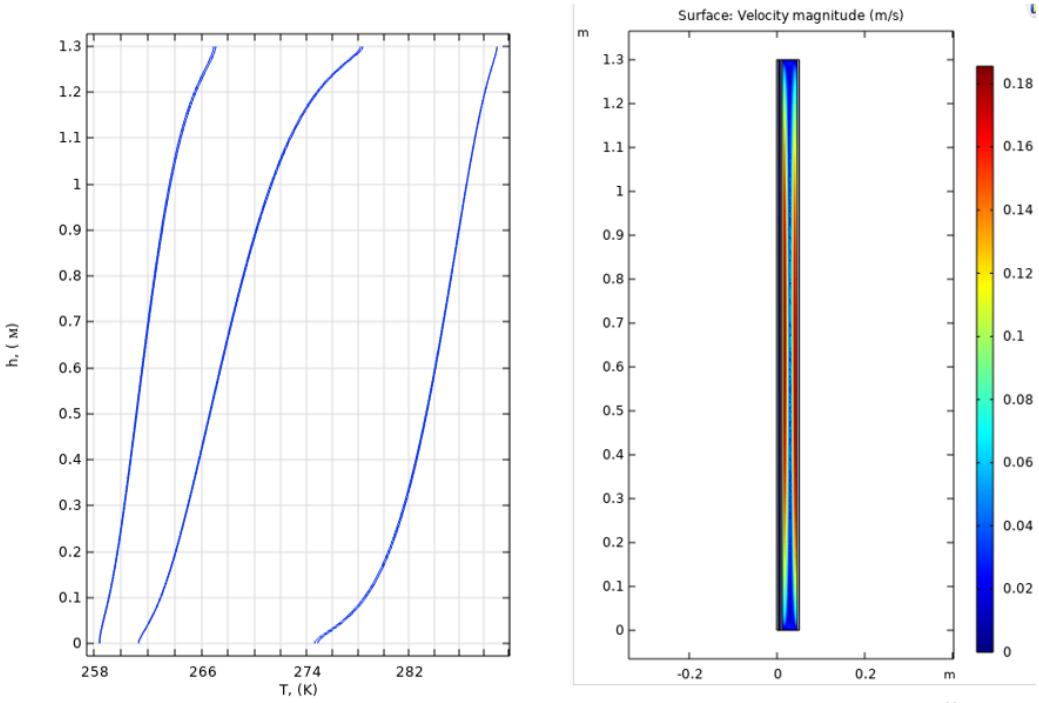


Рисунок 3.12 – розподіл температури (r1=5мм, r2=35мм)

Розподіл швидкостей конвективних потоків демонструє, що весь рух відбувається в другій камері склопакету, максимальна швидкість спостерігається в середньому фрагменті (рис.3.13).



Розподіл температури на поверхнях скла

Розподіл швидкостей конвективних потоків

Рисунок 3.13 – зображення розрахунків (r1=5мм, r2=35мм)

Для другого випадку з шириною першої камери 35мм, а другої 5мм спостерігається схожа ситуація.

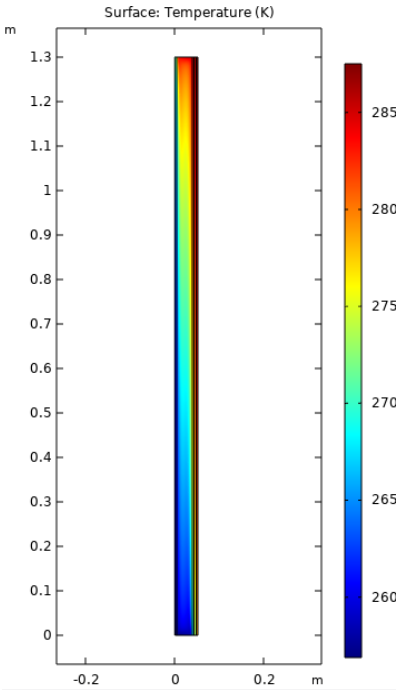
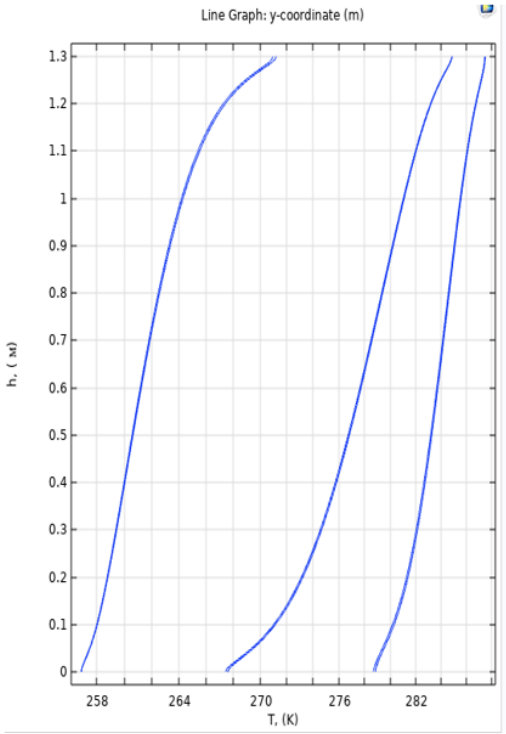
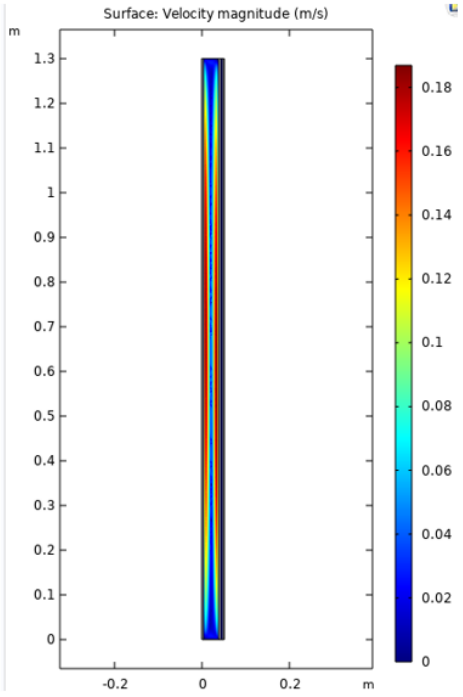


Рисунок 3.14 – Розподіл температури (r1=35мм, r2=5мм)

Основний рух потоків припадає на ширшу камеру найбільшої швидкості вони набирають в середньому сегменті. Практично незмінною температурою є температура у вужчій камері, яка в цьому варіанті ближче до приміщення.



Розподіл температури на поверхнях скла



Розподіл швидкостей конвективних потоків

Рисунок 3.15 – Зображення розрахунків (r1=35мм, r2=5мм)

Другий варіант має вищий тепловий опір, за яким слідують менші тепловтрати. Однак, судячи з графіків (рис.3.16), найкрашим для теплоізоляції за умови зовнішньої температури -20°C та внутрішньої +20°C - виявився варіант із симетричним розміщенням середнього шару скла відносно зовнішньої та внутрішньої стінок склопакету.

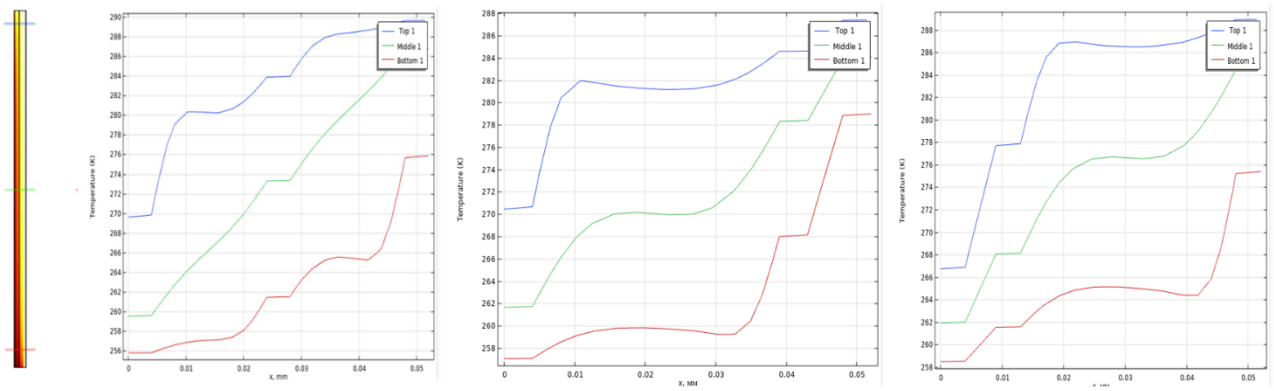


Рисунок 3.16 — Розподіл температури в камерах склопакету в горизонтальних перерізах

Для будь-якого розміру камери найкращим наповнювачем виявляється криптон. Криптон має найбільший тепловий опір та, відповідно, найменше тепловтрат .

Наведено результати досліджень впливу розміщення середнього шару скла в двокамерному склопакеті на тепловтрати за різних розмірів пакету, де сумарна ширина камер 30 мм, 40 мм та 50 мм, а також за різної температури, а саме: -20° С, -10° С, 0° С.

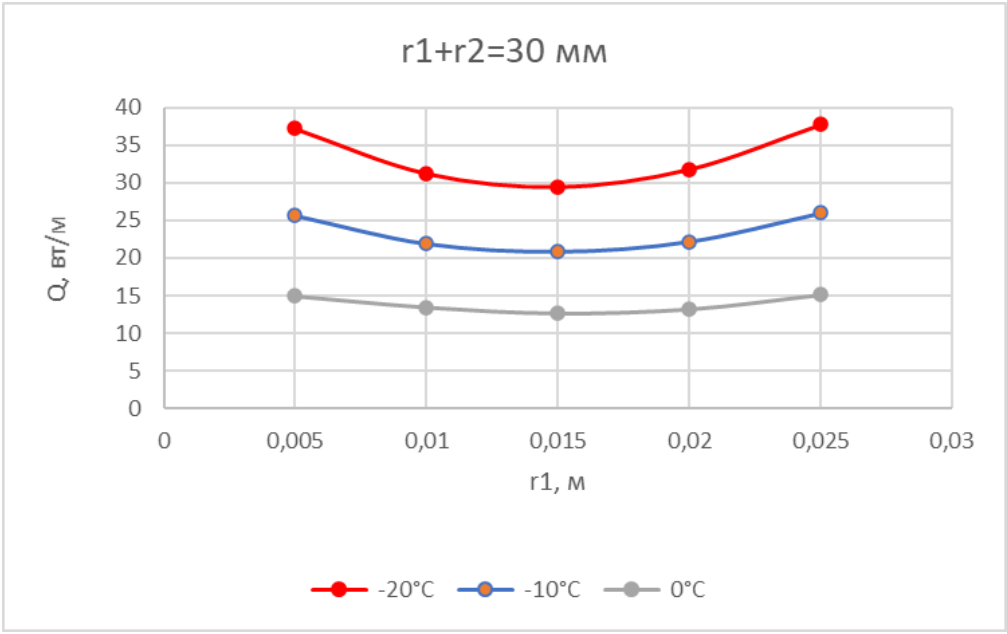


Рисунок 3.17 — Втрати тепла для пакету розміром 42мм

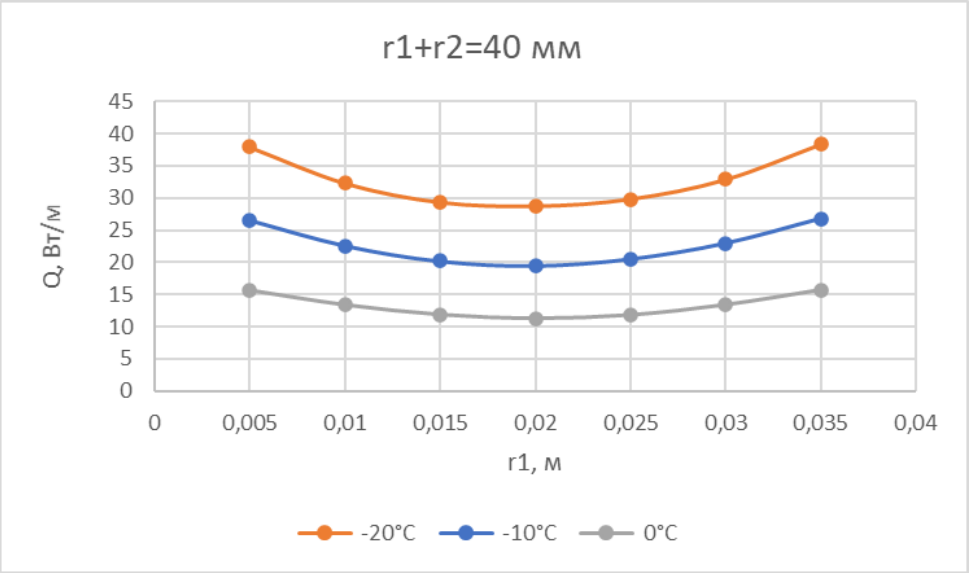


Рисунок 3.18 — Втрати тепла для пакету розміром 52мм

Для пакету більшого розміру було додатково введено температуру - 30°C, так як крива залежності тепловтрат від розташування середнього шару скла веде себе нетипово, порівнюючи з попередніми результатами (рис.3.19).

Спостерігається збільшення втрат тепла при розміщенні посередині середнього шару скла за температури нижче -20°C. Це відбувається через ефекти більш інтенсивного конвективного перемішування повітря, яким наповнені камери, тому для достатньо широких склопакетів оптимальним варіантом буде зміщення другого шару скла в ліву сторону, яка є ближче до зовнішнього середовища.

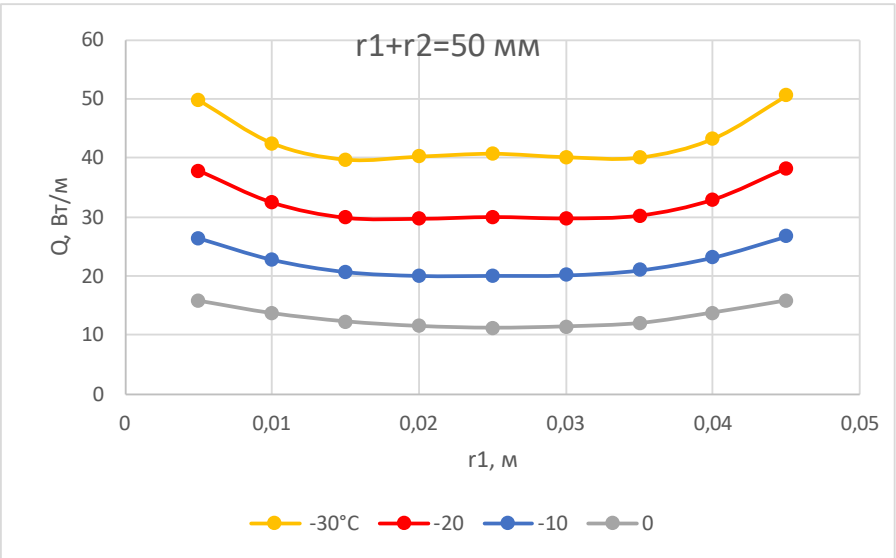


Рисунок 3.19 — Втрати тепла для пакету розміром 62мм

Для більш низьких температур найкращим є склопакет шириною 52мм, він забезпечує найменші тепловтрати (рис.3.20).

Таблиця 3.3 — Втрати тепла в залежності від товщини склопакета та зовнішньої температури

Товщина пакету,мм	-20°C	-10°C	0°C
32	35,584	25,823	16,388
42	29,399	20,878	12,604
52	28,726	19,492	11,256
62	29,959	20,052	11,208

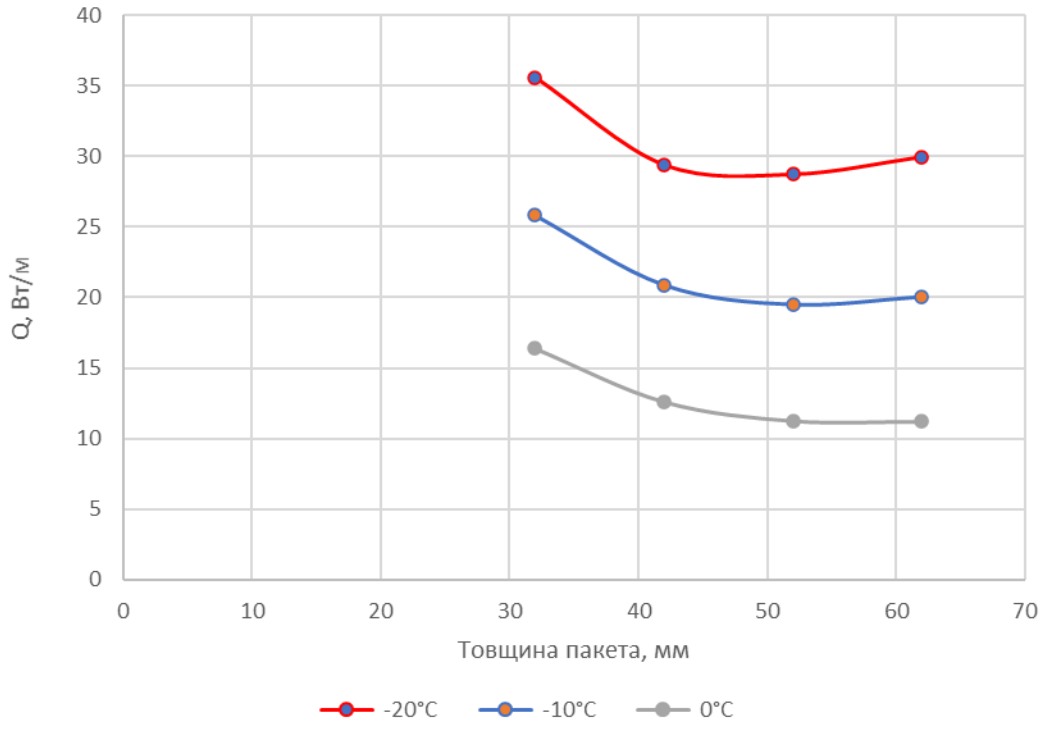
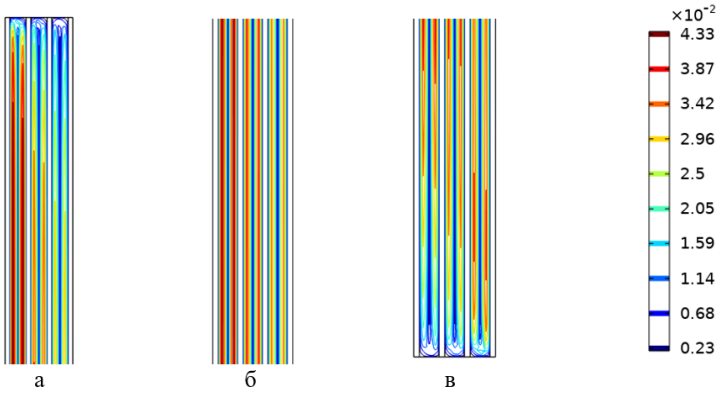


Рисунок 3.20 — Втрати тепла в залежності від товщини пакета і зовнішньої температури

3.7.2 Трикамерний склопакет

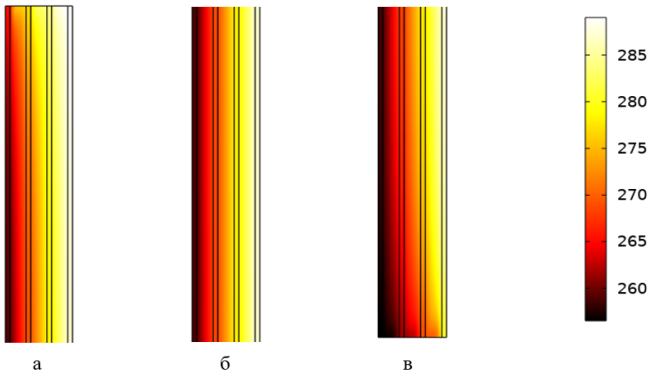
Наведено результати розрахунків для трикамерного склопакету товщиною 58мм, який наповнено повітрям, аргоном та криптоном в різних дослідженнях, відповідно. Товщина скла 4 мм, а ширина камер h1=14мм, h2= 14мм та h3=14мм. Зовнішня температура -20°С, внутрішня +20°С.

Як бачимо, найбільшої швидкості конвективні потоки повітря набувають в першій камері, найближчій до зовнішнього середовища, у двох наступних маємо помірну швидкість (рис. 3.21).



а — верхній фрагмент; б — середній фрагмент; в — нижній фрагмент

Рисунок 3.21 — Розподіл швидкостей (м/с) конвективних потоків повітря в камерах склопакета



а — верхній фрагмент; б — середній фрагмент; в — нижній фрагмент

Рисунок 3.22 — Розподіл температури (К) в трикамерному склопакеті при заповненні повітрям

З розподілу температури в горизонтальному перерізі спостерігається послідовне, повільне підвищення температури, що графічно виглядає практично як пряма для відрізку між шарами скла кожної камери (рис. 3.23).

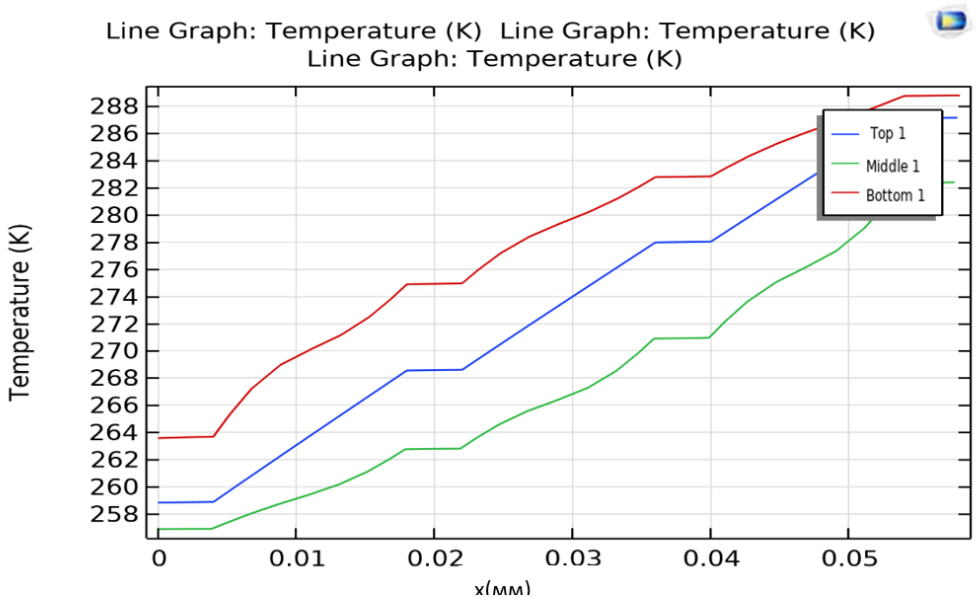
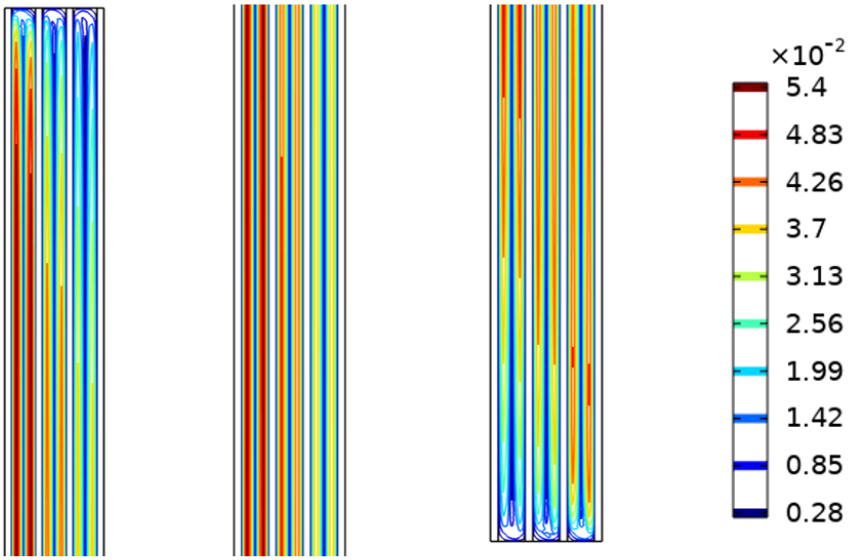


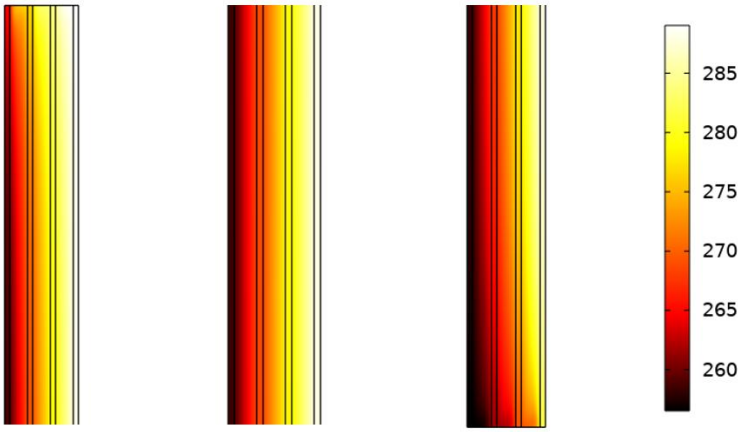
Рисунок 3.23 — Розподіл температури в камерах склопакету з повітрям в горизонтальному перерізі



а — верхній фрагмент; б — середній фрагмент; в — нижній фрагмент

Рисунок 3.24 — Розподіл швидкостей (м/с) конвективних потоків в камерах склопакета з аргоном

В порівнянні з камерами, що наповнені повітрям, аргон демонструє кращі теплоізоляційні властивості, що підтверджує рисунок 3.25.



а — верхній фрагмент; б — середній фрагмент; в — нижній фрагмент

Рисунок 3.25 — Розподіл температури (К) в трикамерному склопакеті при заповненні аргоном

Розподіл температури в камерах з аргоном теж характеризується меншими тепловтратами, візуально лінії графіку виявляють більшу кривизну, що означає більш стрімке підвищення температури для двох приграничних камер. Для середньої камери розподіл залишається лінійним (рис. 3.26).

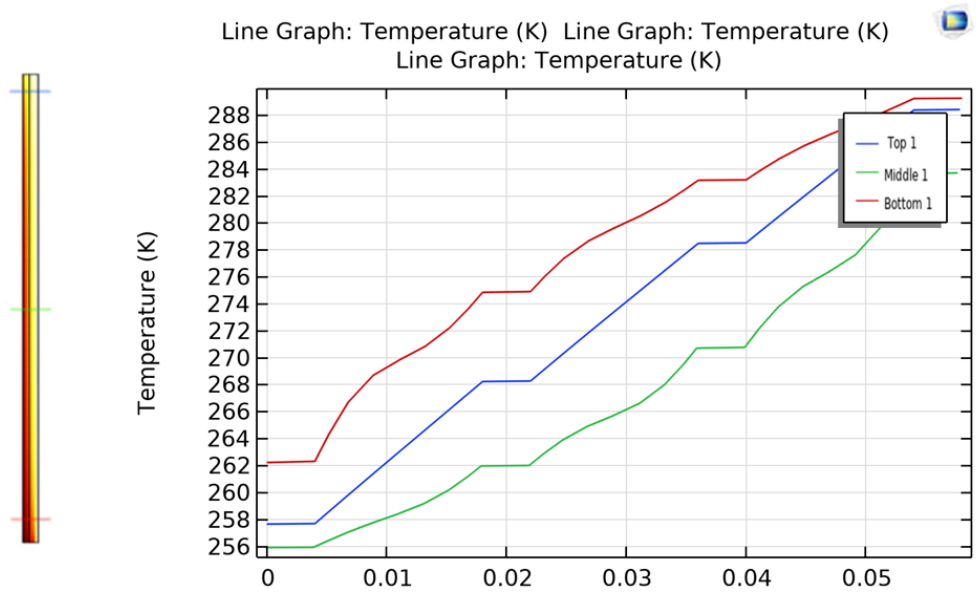
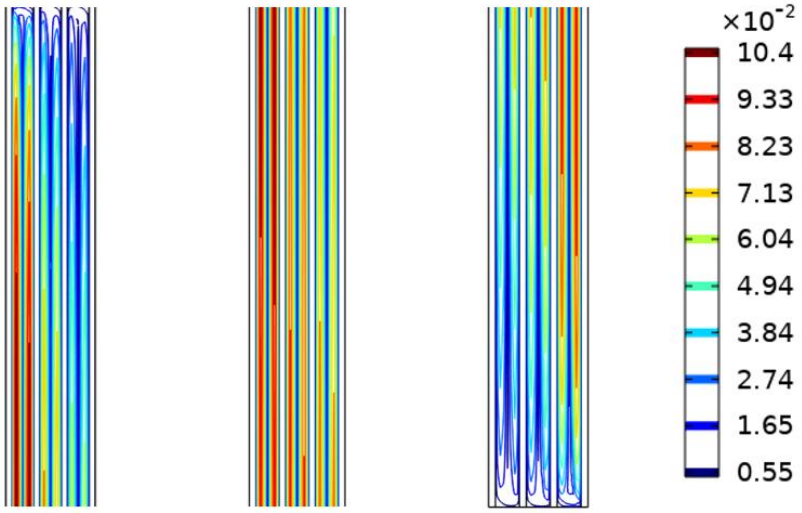


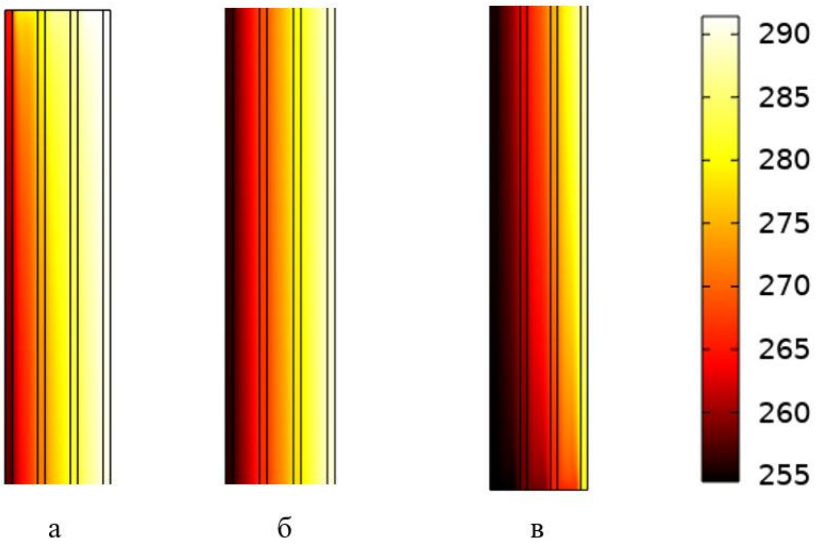
Рисунок 3.26 — Розподіл температури в камерах склопакету з аргоном в горизонтальному перерізі

На рисунку 3.27 видно, що склопакет з криптоном має найбільшу область з мінімальними швидкостями конвективних потоків серед розглянутих варіантів наповнення, однак для нього з'являється область з максимальними у третій камері (найближчій до приміщення), чого не спостерігалося з аргоном.



а — верхній фрагмент; б — середній фрагмент; в — нижній фрагмент

Рисунок 3.27 — Розподіл швидкостей (м/с) конвективних потоків в камерах склопакета з криптоном



а — верхній фрагмент; б — середній фрагмент; в — нижній фрагмент

Рисунок 3.28 — Розподіл температури (К) в трикамерному склопакеті при заповненні криптоном

Розподіл температури в камерах пакету, що наповнений криптоном також показує кращі результати, температура підіймається швидше, проявляється вища динамічність особливо це помітно для першої камери та спостерігаються викривлення в середній (рис. 3.29).

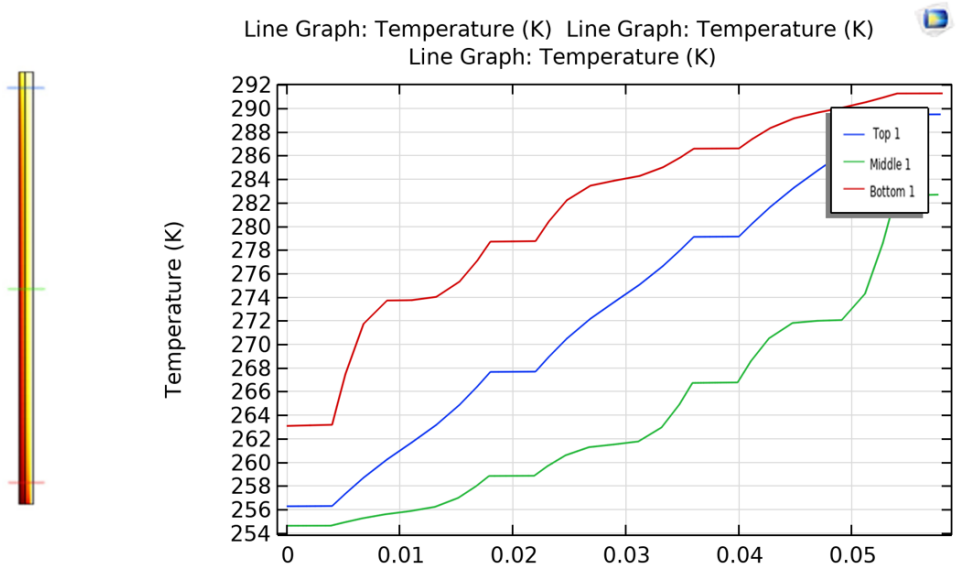


Рисунок 3.29 — Розподіл температури в камерах склопакету з криптоном в горизонтальному перерізі

Для кожного наповнення було проведено інтегрування для визначення потоку тепла по нормалі через зовнішню поверхню (нормальний загальний тепловий потік), результати показали, що найкращий наповнювач — криптон.

Таблиця 3.4 — Нормальний загальний тепловий потік наповнювачів

Наповнення	normal total heat flux w/m
Повітря	22,414
Аргон	16,785
Криптон	12,423

Було проведено дослідження впливу товщини шарів скла в трикамерному склопакеті без змін ширини камер для трьох наповнювачів на властивості теплоізоляції.

Реалізовано розрахунки з шириною шарів скла 3мм, 4мм, 5мм та 6мм із загальним розміром склопакету 54мм, 58мм, 62мм та 66мм відповідно. Граничні умови взяті сталі: зовнішня температура -20°С, внутрішня +20°С.

Для всіх трьох варіантів збільшення шару скла призводить до зменшення тепловтрат (рис.3.30).

Рисунок 3.30 — Тепловтрати в залежності від товщини шарів скла склопакету наповненого повітрям

Оскільки теплопровідність скла досить висока, то зміна ширини шарів скла в інтервалі 3—5мм мінімально впливає на енергозберігаючі властивості склопакету, на відміну від газового наповнення, що сильно відбивається на результатах тепловтрат.

Вибір товщини скла обумовлений лише необхідністю в збільшенні міцності, для підвищення навантаження, котре конструкція здатна витримати. Однак при будь-якій товщині скла найкращу теплоізоляцію забезпечує криптон (таб.3.5).

Лінії графіку практично горизонтальні, так як теплоізоляція змінюється мінімально.

Таблиця 3.5 — Тепловтрати в залежності від ширини скла та наповнення

Ширина скла, мм	Тепловтрати для повітря, Q, вт/м	Тепловтрати для аргону, Q, вт/м	Тепловтрати для криптону, Q, вт/м
3	22,496	16,895	12,468
4	22,414	16,785	12,423
5	22,354	16,737	12,385
6	22,298	16,72	12,352

Розраховано втрати тепла для різної загальної товщини склопакету з сталою шириною шарів скла та різною шириною камер для трьох наповнювачів.

Розглянуто камери шириною: 10мм, склопакет розміром — 46мм; 12мм — 52мм; 14мм — 58мм; та 16мм — 64мм (рис 3.31).

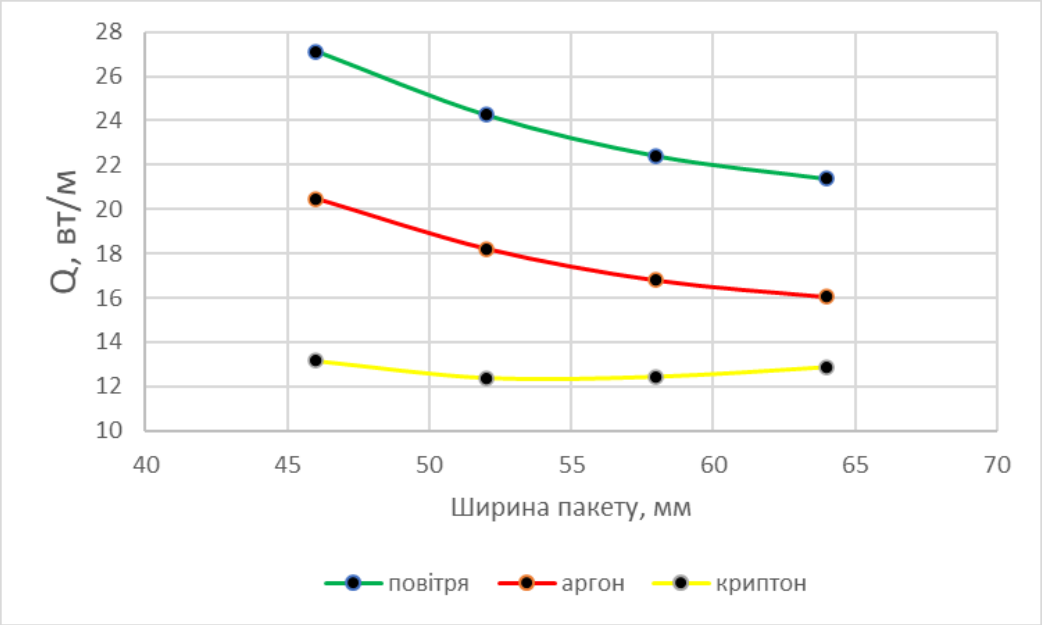


Рисунок 3.31 — Тепловтрати в залежності від товщини пакета для різних газів

На відміну від двокамерного пакету, тут маємо не досить широкі камери, тому конвекція не встигає повністю проявитися. Якби склопакет був 70—80мм, що неможливо в реальному житті, то конвективні швидкості були б високого рівня. Дослідження показало, що для камер менше 14мм найменше тепловтрат

маємо за наповнення камер криптоном, однак при збільшення ширини камер починається вільна конвекція всередині газу, так як даний газ має вищу густину та нижчу в’язкість, то ефекти інтенсивнішого конвективного перемішування для нього починаються раніше, порівняно з повітрям та аргоном.

Для достатньо широких камер більш оптимальним варіантом буде наповнення камер аргоном або повітрям, адже за умови товстого шару камери ефективність криптону падає, однак для тонкого шару газу мінімальні тепловтрати демонструє криптон.

ВИСНОВКИ

У межах виконаного дослідження була розроблена чисельна модель для оцінювання теплофізичних характеристик багатокамерних склопакетів з різною кількістю камер, варіантами наповнення міжскляного простору та геометричними параметрами. Проведене моделювання дозволило дослідити вплив конструктивних особливостей та властивостей газонаповнювачів на загальні теплотехнічні показники склопакетів.

Використання чисельних методів, зокрема методу скінченних елементів, забезпечило можливість отримання детальних даних для складних багатофакторних задач, що описують процеси теплопередачі у склопакетах. Проведено аналіз температурних полів та візуалізацію структури конвективних потоків у камерах, а також виконано оцінку їх впливу на теплові втрати конструкції.

Окрему увагу приділено визначенню інтегральних характеристик теплових потоків крізь віконні конструкції. Результати розрахунків дозволяють обґрунтовано підбирати оптимальні конфігурації склопакетів для конкретних кліматичних умов та режимів експлуатації.

Запропонована модель може бути використана на стадії проєктування для зменшення потреби у дорогих натурних експериментах, а також для прогнозування енергоефективності склопакетів із різними конструктивними параметрами. Одержані результати можуть слугувати основою для подальших досліджень з розроблення більш складних тривимірних моделей, що враховують додаткові чинники — нанесення тепловідбивних плівок, вплив сонячного випромінювання, оптичні властивості скла тощо.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Халатов А. А. Основи теорії конвективного теплообміну: навч. посіб. / А. А. Халатов, Є. В. Мочалін. — Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017. — 120 с.

2. Теплотехніка та теплоенергетика: курс лекцій [для студентів металургійних спеціальностей] — Краматорськ: ДДМА, 2008. — 139 с.

3. Теоретичні основи теплотехніки: консп. лекцій / уклад. Р. В. Закусило. — Суми: Сумський державний ун-т, 2019. — 145 с.

4. Воробйов М. В. Процеси теплопровідності та конвективного теплообміну: лаб. практикум / М. В. Воробйов, О. О. Баскова. — Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024. — 48 с.

5. Панченко Н. А. Основи конвективного теплообміну: метод. вказівки до практич. занять / Н. А. Панченко, А. А. Халатов. — Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017. — 60 с.

6. Som S. K. Introduction to Heat Transfer / S. K. Som. — New Delhi: PHI Learning, 2008. — 500 p.

7. Agrawal A. Microscale Flow and Heat Transfer / A. Agrawal, H. M. Kushwaha, R. S. Jadhav. — Springer, 2019. — 365 p.

8. Dalal R., A CFD study of convection in a double glazed window with an enclosed pleated blind: Energy and Buildings / R. Dalal, D. Naylor, D. Roeleveld. — Lausanne: Elzevier, 2009. — 1256 p.

9. Movassag S. Z. Numerical investigation on the thermal performance of double glazing air flow window with integrated blinds / S. Z. Movassag, K. Zamzamian // Renewable Energy. — 2020. — Vol. 148. — P. 852—863.

10. Denisenko O. Numerical simulation of convective heat transfer in glass units / O. Denisenko // Norwegian Journal of Development of the International Science. – 2024. — Vol. 133. — P. 71—75.

11. Види теплообміну. Теплопровідність: текст лекцій. / уклад. Яніцький А. А. — Кременчук: ХНУВС, 2023. — 9 с.

12. Тепломасообмін: консп. лекцій. / уклад. Соколовська І. Є. — Кам'янське: ДДТУ, 2021. — 116 с.

13. Юшко С. В. Стаціонарна теплопровідність: навч. посіб. / С. В. Юшко, О. Є. Борщ, М. А. Юшко — Харків: НТУ «ХПІ», 2011. — 80 с.

14. Дубенець В. Г. Основи методу скінченних елементів: навч. посіб. / В. Г. Дубенець, В. В. Хільчевський, О. В. Савченко. — Чернігів: ЧДТУ, 2007. — 289 с.

15. Єршов С. В. Метод кінцевих елементів: навч. посіб. / С. В. Єршов — Дніпро: ДДТУ, 2016. — 61 с.

16. Кінзерський А. Комп'ютерне моделювання процесів теплообміну в сучасних теплообмінних системах: дис. магіст.: 09.12.2024 / Кінзерський Антон. — Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024. — 105 с.

17. COMSOL Multiphysics Official Website COMSOL [Електронний ресурс]. — Режим доступу: https://www.comsol.com (дата звернення: 15.04.2025). — Назва з екрана.

18. Computational Geometry: Algorithms and Applications / M. De Berg [et al.]. — Springer, 2008. — 386 p.

19. Mayboudi L. S. Heat Transfer Modelling Using COMSOL: Multiphysics Modeling Series / L. S. Mayboudi — De Gruyter, 2018. – 50 p.

20. Види та технічні характеристики склопакетів [Електронний ресурс]. — Режим доступу: https://ok-no.zp.ua/uk/steklopaket-uk (дата звернення: 15.04.2025). — Назва з екрана.

21. Склопакет [Електронний ресурс]. — Режим доступу: https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%BA%D0%BB%D0%BE%D0%BF%D0%B0%D0%BA%D0%B5%D1%82 (Дата звернення: 18.04.2025). — Назва з екрана.

22. Денисенко О. І. Чисельне моделювання теплофізичних характеристик склопакетів / О. І. Денисенко, А. В. Земляна // Сучасні проблеми і досягнення в галузі радіотехніки, телекомунікацій та інформаційних технологій: тези доп. XII Міжнар. наук.-практ. конф., [Запоріжжя], 10 — 12 груд.2024 р. / М-во освіти і

науки України, Нац. ун-т «Запорізька політехніка». — Запоріжжя, 2024. — С. 472 — 475.

23. Теплопередача через віконні конструкції: монографія / Б. І. Басок [та ін.]. — Київ: Наукова думка, 2024. — 208 с.

24. Доля П. Г. Основи моделювання в COMSOL Multiphysics: навч. посіб. / П. Г. Доля — Харків: ХНУ, 2019. — 167 с.

25. Технології комп’ютерного проєктування: консп. лекцій / уклад. А. В. Пархоменко. — Запоріжжя: ЗНТУ, 2017. — 42 с.