УДК 621.313.33:629.423.24

Дмитро Олександрович Кулагін

ЗАКОН КЕРУВАННЯ МОТОРВАГОННИМ РУХОМИМ СКЛАДОМ ПРИ РУСІ УКЛОНАМИ

Показаний спосіб вирішення задачі управління рухом моторвагонного поїзда на основі оптимальної маршрутної карти. Запропонований спосіб дозволяє раціонально використовувати кінетичну енергію руху поїзда для подолання підйомів.

Ключові слова: *моторвагонний поїзд, електротранспорт, закон руху, карта руху.*

Показан способ решения задачи управления движением моторвагонного поезда на основе оптимальной маршрутной карты. Предложенный способ позволяет рационально использовать кинетическую энергию движения поезда для преодоления подъемов.

Ключевые слова: *моторвагонный поезд, электротранспорт, закон движения, карта движения.*

Shows the method of solving the problem of traffic management EMU-trains based on the optimal route maps. The proposed method allows the efficient use of the kinetic energy of motion of the train to overcome rises.

Keywords: *EMU-train, the electric transport, the law of motion, a map of the movement.*

Постановки проблеми. Для кожної конкретної ділянки залізничного шляху можна провести розрахунок відповідних значень повної енергії моторвагонного поїзда, врахувавши при цьому для заданої ваги моторвагонного поїзда величини уклонів, приблизно врахувавши стан колії та погодні умови, що може істотно вплинути на час руху перегоном. В наслідок проведення таких тягових розрахунків для послідовності ділянок з переходом зі спуску на підйом необхідно визначити приблизні часові межі зміни швидкості при наближенні моторвагонного поїзда до складної частини профілю залізничного шляху, де машиніст (або система автоведення) повинен надати поїзду якомога більшу швидкість в межах припустимого значення швидкості руху моторвагонного поїзда на даній ділянці шляху, що має також певні межі за відстанню [9, 14]. Такий режим зміни швидкості моторвагонного поїзда дасть можливість долати частину підйому за рахунок накопиченої на попередніх ділянках профілю шляху кінетичної енергії і переході її у потенціальну енергію під час руху по підйому [10, 12].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Питанням вибору оптимального керування рухом поїздів присвячена значна кількість наукових праць і дисертаційних досліджень. Зокрема, у монографіях [2-4] узагальнений досвід

© Кулагін Д. О., 2014

вибору способу керування поїздом за критерієм мінімуму витрати енергії на тягу або за критерієм мінімізації витрат на здійснення перевізного процесу по даній ділянці колії. Так само аналіз відомих робіт [19-21, 24] показує необхідність розв'язку завдання оптимального керування рухом поїздів при обмеженні на фазову координату.

Аналіз зазначених робіт підтверджує актуальність досліджень напрямку створення оптимальних структур керування рухомим складом і необхідність удосконалювання існуючих розробок. При цьому умови виконання графіка руху накладають обмеження на фазову координату руху моторвагонного поїзда. Особливості розв'язку завдань із обмеженням на фазову координату, проаналізовані в роботі [17] показали, що якщо на деякі з координат фазового вектора накладаються обмеження, то застосування принципу максимуму в стандартнім формулюванні й теореми про множинні інтервали є некоректним. Хоча адаптація завдання застосування принципу максимуму до умов з обмеженням фазової координати є складним, але актуальним завданням. Дане положення показує застосування принципу максимуму на базі чисельної оптимізації гамільтоніані в дослідженнях ВНИИЖТа [8, 13]. При цьому в дослідженні авторів роботи [3] показано, що застосування теорії варіаційного числення для тягових завдань при обмеженні на фазову координату дозволяє одержати системи керування тягою з необхідними властивостями.

Значна увага приділена виконанню графіка руху в поєднанні з мінімізацією витрати енергії на тягу [6, 7, 15, 16, 18].

Згідно зі змістом Постанови Кабінету міністрів України від 27 грудня 2006 р. № 651-р «Про схвалення Концепції Державної програми реформування залізничного транспорту» та змістом державної програми «Розвиток рейкового рухомого складу соціального призначення для залізничного транспорту та міського господарства», що введена в дію Постановою Кабінету Міністрів України від 2 червня 1998 р. № 769 побудова інформаційно-керуючих систем для приміського транспорту на основі накопиченого досвіду експлуатації вітчизняних тягових одиниць моторвагонного транспорту та досвіду і наукових розробок українських вчених є однією з основних задач, вирішення яких вносить вклад у реалізацію мети та завдань програм розвитку та реформування залізничного транспорту і, таким чином, дозволяють зменшити імпортну залежність України від постачання тягових агрегатів та поїздів з країн Європи та СНД, а також створюють перспективи для експорту вітчизняних розробок до інших країн світу.

Мета статті – визначення математичної функції завдання оптимальної маршрутної карти руху моторвагонного поїзду при русі по уклонах.

Виклад основного матеріалу. Задамося картою руху моторвагонного поїзда (рис. 1), відповідно до якої на основі тягових розрахунків та поїздок досвідчених машиністів та машиністів-інструкорів виділено ділянку відстанню від S_1 до S_2, на якій машиніст або система автоведення повинні надати поїзду якомога більшу швидкість в часових межах від t_1 до t_2, причому такого набору швидкості буде достатньо для подолання певної частини підйому або всього підйому в цілому і такий режим руху забезпечить при русі похилою ділянкою профілю залізничного шляху перед наближенням до підйому достатнє збільшення швидкості руху моторвагонного поїзда на величину, рівну половині значення зменшення швидкості при русі підйомом, відповідно до досліджень, проведених вище.

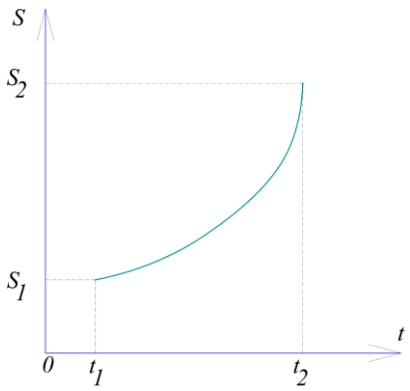

Рис. 1. **Приблизна карта руху моторвагонного поїзда в координатній системі «відстань-час»**

Відповідно до основних задач варіаційного числення [1] зведемо пошук оптимальної кривої виду

$$S = S(t). \tag{1}$$

до задачі пошуку такої гладкої лінії виду (1), що з'єднує точки маршрутної карти руху моторвагонного поїзда з координатами (t_1, S_1) та (t_2, S_2), яка при обертанні її навколо осі часу утворює поверхню найменшої площі. Формулювання задач подібного класу з такими умовами є коректним з огляду на дослідження цього питання в роботі [16].

Варто зазначити, що задача пошуку раціональної кривої, яка з'єднує маршрутної карти руху моторвагонного поїзда з координатами (t_1, S_1) та (t_2, S_2) для досягнення оптимальності певного критерію може вирішуватись на основі критеріїв максимуму провізної здатності, мінімуму часу ходу та витрат первинного енергоносія на тягу, мінімуму собівартості перевезень, максимуму роботи, що її виконує моторвагонний поїзд та багатьох інших критеріїв. Таким чином вказана задача є багатокритеріальною [5, 22].

В задачах багатокритеріальної оптимізації при числі показників два та більше суттєво ускладнюється процедура алгоритмізації рішення, аналізу та відповідна послідуюча інтерпретація отриманих результатів. Тому серед відомих показників ефективності перевізного процесу для моторвагонного електротранспорту обирають головний, всі послідуючі дії та параметри задачі підчиняючи відповідно його вимогам. Інші критерії відбору рішень, як правило, не співпадають з головним критерієм і мають назву локальних [5].

Виділимо на дузі рис. 1 елементарну ділянку dS, яку повинен пройти моторвагонний поїзд за елементарний час dt, що показано на рис. 2.

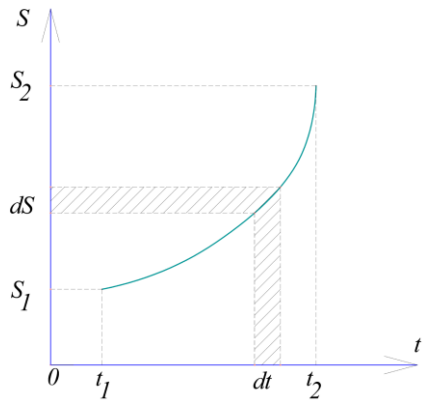

Рис. 2. **Виділення елементарної ділянки на дузі руху в координатній системі «відстань-час»**

При обертанні елемента дуги dS (рис. 2) утворюється поверхня (рис. 3), що має елементарну площу

$$d\,\Pi = 2 \cdot \pi \cdot S \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dS}{dt}\right)^2}\,dt. \qquad (2)$$

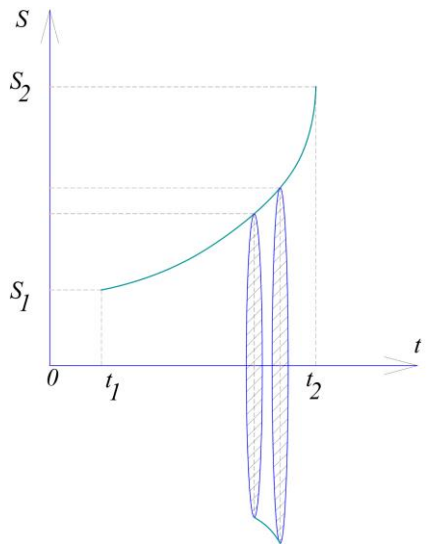

Рис. 3. **Поверхня, розташована між двома заштрихованими еліпсами, що утворюється при обертанні елементарної дуги навколо осі часу**

Тоді при обертанні всієї лінії виду (1) утворюється поверхня (рис. 4), що має площу

$$\Pi = 2 \cdot \pi \cdot \int_{t_1}^{t_2} S \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dS}{dt}\right)^2}\,dt. \qquad (3)$$

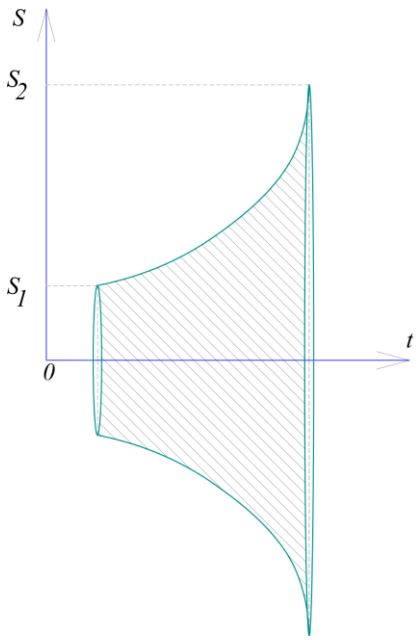

Рис. 4. **Поверхня, що утворюється при обертанні повної дуги навколо осі часу**

Таким чином зводимо задачу до пошуку мінімуму функціоналу (3), який описує фігуру, показану на рис. 4, за наявності системи межових умов

$$\begin{cases} S(t_1) = S_1; \\ S(t_2) = S_2. \end{cases} \tag{4}$$

За теоретичною методикою [11] проведемо дослідження функціоналу виду

$$\phi = \int_{t_1}^{t_2} F\left(t, S, \frac{dS}{dt}\right) dt \tag{5}$$

записаного в загальному вигляді на основі функціоналу (3).

Відносно функції $\left(t, S, \frac{dS}{dt}\right)$ встановимо, що вона має неперервні частинні похідні за всіма аргументами до другого порядку включно. Знайдемо диференціал функціоналу (5). Надамо функції *S(t)* прирощення $h(t)$ і запишемо вираз для прирощення всього функціоналу:

$$\Delta\phi = \int_{t_1}^{t_2} F\left(t, [S+h], \left[\frac{dS}{dt} + \frac{dh}{dt}\right]\right) dt - \int_{t_1}^{t_2} F\left(t, S, \frac{dS}{dt}\right) dt, \tag{6}$$

або з урахуванням неперервності похідних за всіма аргументами

$$\Delta\phi = \int_{t_1}^{t_2} \left[F_S\left(t, S, \frac{dS}{dt}\right) \cdot h + F_{\frac{dS}{dt}}\left(t, S, \frac{dS}{dt}\right) \cdot \frac{dh}{dt} \right] dt + \Delta\phi_m, \tag{7}$$

де $\Delta\phi_m$ - члени розкладу функціоналу, що мають порядок вище першого відносно h та $\frac{dh}{dt}$.

На основі (4) з огляду на те, що функції $S(t)$ та $S(t) + h(t)$ повинні задовольняти умові (4) повинна виконуватись і умова

$$\begin{cases} S(t_1) + h(t_1) = S_1; \\ S(t_2) + h(t_2) = S_2, \end{cases} \tag{8}$$

що дає можливість записати

$$\begin{cases} h(t_1) = 0; \\ h(t_2) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Інтеграл, що знаходиться в правій частині виразу (7), є лінійним функціоналом відносно змінної $h(t)$ і відрізняється від прирощення $\Delta\phi$ лише на доданок, що має порядок малості вище першого відносно норми елементу $\|h\|_1$, тобто він є диференціалом функціоналу (5). Таким чином можна записати

$$\delta\phi = \int_{t_1}^{t_2} \left[F_S\left(t, S, \frac{dS}{dt}\right) \cdot h + F_{\frac{dS}{dt}}\left(t, S, \frac{dS}{dt}\right) \cdot \frac{dh}{dt} \right] dt. \tag{10}$$

Виконаємо інтегрування за частинами:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(F_{\frac{dS}{dt}} \cdot \frac{dh}{dt} \right) dt = F_{\frac{dS}{dt}} \cdot h \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left(h \cdot \frac{d}{dt} F_{\frac{dS}{dt}} \right) dt. \tag{11}$$

На основі (9) диференціал функціоналу (10) запишемо у вигляді:

$$\delta\phi = \int_{t_1}^{t_2} \left[F_S\left(t, S, \frac{dS}{dt}\right) - \frac{d}{dt} F_{\frac{dS}{dt}}\left(t, S, \frac{dS}{dt}\right) \right] \cdot h(t)\, dt. \tag{12}$$

Якщо функція $S(t)$ надає мінімум функціоналу (5), то у відповідності до теореми [23], за якою якщо функціонал досягає в точці мінімуму або максимуму, тобто сама точка є екстремальною для функціоналу, то диференціал функціоналу,

якщо він існує, в цій точці обертається в нуль, що в нашому випадку дає можливість записати:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[F_S-\frac{d}{dt}F_{\frac{dS}{dt}}\right]\cdot h(t)\,dt=0. \tag{13}$$

Рівність (13) повинна мати місце для довільних функцій $h(t)$, що задовольняють межовим умовам (9). Це є можливим, якщо функція $h(t)$ множиться на нуль, тобто при виконанні рівності

$$F_S\left(t,S,\frac{dS}{dt}\right)-\frac{d}{dt}F_{\frac{dS}{dt}}\left(t,S,\frac{dS}{dt}\right)=0. \tag{14}$$

Для доведення правильності даного твердження скористаємося лемою Лагранжа.

Припустімо, що в деякій точці t_0, для якої виконується рівність $t_1<t_0<t_2$ функція $F(t)\neq 0$.

Припустимо, що $F(t_0)>0$. Оскільки функція $F(t)$ неперервна, то існує такий інтервал $(\xi_1,\xi_2)\subset[t_1,t_2]$, що містить точку t_0, для якого $F(t)>0$.

В якості $F(t)$ оберемо наступну функцію:

$$h(t)=\begin{cases}(\xi_1-t)^2\cdot(\xi_2-t)^2, & \text{якщо} \quad t\in(\xi_1,\xi_2),\\ 0, & \text{якщо} \quad t\notin(\xi_1,\xi_2).\end{cases}$$

Обрана таким чином функція $F(t)$ є неперервно диференційованою і задовольняє умові (9). Проте на цій функції

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[F\ (t)\cdot h(t)\right]dt=\int_{\xi_1}^{\xi_2}F\ (t)\cdot(\xi_1-t)^2\cdot(\xi_2-t)^2>0,$$

через те, що під знаком інтегралу стоїть додатна функція. Отримано супереч, бо повинно виконуватись наступне:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[F\ (t)\cdot h(t)\right]dt=\int_{\xi_1}^{\xi_2}F\ (t)\cdot(\xi_1-t)^2\cdot(\xi_2-t)^2=0,$$

що підтверджується лемою Лагранжа, отже можна зробити висновок, що вираз (14) та теоретичне припущення перед ним є вірним.

Розглянемо другий випадок і припустимо, що $F(t_0) < 0$. Оскільки функція $F(t)$ неперервна, то існує такий інтервал $(\xi_1, \xi_2) \subset [t_1, t_2]$, що містить точку t_0, для якого $F(t) < 0$.

В якості $F(t)$ оберемо наступну функцію такого ж виду як і при попередніх міркуваннях. Обрана таким чином функція $F(t)$ є неперервно диференційованою і задовольняє умові (9). Проте на цій функції

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[F\left(t\right) \cdot h(t) \right] dt = \int_{\xi_1}^{\xi_2} F\left(t\right) \cdot (\xi_1 - t)^2 \cdot (\xi_2 - t)^2 < 0,$$

через те, що під знаком інтегралу стоїть від'ємна функція. Отримано супереч, бо повинно виконуватись наступне:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[F\left(t\right) \cdot h(t) \right] dt = \int_{\xi_1}^{\xi_2} F\left(t\right) \cdot (\xi_1 - t)^2 \cdot (\xi_2 - t)^2 = 0,$$

що підтверджується лемою Лагранжа, отже можна зробити висновок, що вираз (14) та теоретичне припущення перед ним є вірним.

Рівняння, записані у формі (14) мають назву рівняння Ейлера.

Таким чином функція $S(t)$, що є рішенням поставленої задачі, повинна задовольняти рівнянню Ейлера, яке є необхідною умовою слабкого мінімуму функціоналу (5) при межових умовах (4) [1].

Запишемо рівняння Ейлера в розгорнутій формі [11]:

$$F_S\left(t, S, \frac{dS}{dt}\right) - F_{\frac{dS}{dt}, t}\left(t, S, \frac{dS}{dt}\right) - F_{\frac{dS}{dt}, S}\left(t, S, \frac{dS}{dt}\right) \cdot \frac{dS}{dt} - F_{\frac{dS}{dt}, \frac{dS}{dt}}\left(t, S, \frac{dS}{dt}\right) \cdot \frac{d^2 S}{dt^2} = 0. \qquad (15)$$

Дане рівняння являє собою диференціальне рівняння другого порядку відносно невідомої функції $S(t)$. Загальне рішення цього рівняння містить дві довільні сталі, які можна визначити за допомогою двох межових умов (4).

За стандартною термінологією [22, 23] така функція $S(t)$ буде мати назву «екстремаль».

Оскільки функція, що знаходиться під знаком інтегралу у виразі (3) не залежить від t, то можна звести функціонал виду (5) до наступного вигляду:

$$\phi = \int_{t_1}^{t_2} F\left(S, \frac{dS}{dt}\right) dt. \qquad (16)$$

Для функціоналу (16) запишемо рівняння виду (15):

$$F_S\left(S,\frac{dS}{dt}\right)-F_{\frac{dS}{dt},S}\left(S,\frac{dS}{dt}\right)\cdot\frac{dS}{dt}-F_{\frac{dS}{dt},\frac{dS}{dt}}\left(t,S,\frac{dS}{dt}\right)\cdot\frac{d^2S}{dt^2}=0. \qquad (17)$$

Помножимо дане рівняння на $\frac{dS}{dt}$:

$$F_S\left(S,\frac{dS}{dt}\right)\cdot\frac{dS}{dt}-F_{\frac{dS}{dt},S}\left(S,\frac{dS}{dt}\right)\cdot\left(\frac{dS}{dt}\right)^2-F_{\frac{dS}{dt},\frac{dS}{dt}}\left(t,S,\frac{dS}{dt}\right)\cdot\frac{dS}{dt}\cdot\frac{d^2S}{dt^2}=0. \qquad (18)$$

Після аналітичних перетворень рівняння (18) зведемо до еквівалентного рівняння

$$\frac{d}{dt}\left[F\left(S,\frac{dS}{dt}\right)-F_S\left(S,\frac{dS}{dt}\right)\cdot\frac{dS}{dt}\right]=0, \qquad (19)$$

з чого слідує

$$F\left(S,\frac{dS}{dt}\right)-F_S\left(S,\frac{dS}{dt}\right)\cdot\frac{dS}{dt}=C, \qquad (20)$$

де C - константа, за якої виконуються межові умови (4).
Запишемо підінтегральну частину виразу (3) у формі (20):

$$S\cdot\sqrt{1+\left(\frac{dS}{dt}\right)^2}-S\cdot\frac{\left(\frac{dS}{dt}\right)^2}{\sqrt{1+\left(\frac{dS}{dt}\right)^2}}=C, \qquad (21)$$

з чого можна записати, після аналітичних перетворень:

$$S=C\cdot\sqrt{1+\left(\frac{dS}{dt}\right)^2}, \qquad (22)$$

або в іншій формі:

$$\frac{dS}{dt}=\sqrt{\frac{S^2-C^2}{C^2}}. \qquad (23)$$

Виконавши інтегрування (23) отримаємо:

$$C \cdot arcch\left(\frac{S}{C}\right) = t + C_1, \tag{24}$$

де C_1 - константа інтегрування.

Перепишемо (24) у вигляді:

$$S = C \cdot ch\left(\frac{t + C_1}{C}\right). \tag{25}$$

Для визначення сталих коефіцієнтів C та C_1 запишемо (25) з урахуванням (4):

$$\begin{cases} S_1 = C \cdot ch\left(\dfrac{t_1 + C_1}{C}\right); \\ S_2 = C \cdot ch\left(\dfrac{t_2 + C_1}{C}\right). \end{cases} \tag{26}$$

Висновки і пропозиції.

1. В залежності від умов (4) для подібних задач можливі наступні випадки:

- система рівнянь (26) має єдине рішення і відповідно існує єдина крива виду (1), яка задовольняє умові пошуку кривої, що з'єднує точки маршрутної карти руху моторвагонного поїзда з координатами (t_1, S_1) та (t_2, S_2).

- система рівнянь (26) має два рішення. В цьому випадку дані функції записуються в загальному вигляді:

$$S = C^{(1)} \cdot ch\left(\frac{t + C_1^{(1)}}{C^{(1)}}\right), \tag{27}$$

де $C^{(1)}$ та $C_1^{(1)}$ - відповідна пара рішень для першої маршрутної кривої,

$$S = C^{(2)} \cdot ch\left(\frac{t + C_1^{(2)}}{C^{(2)}}\right), \tag{28}$$

де $C^{(2)}$ та $C_1^{(2)}$ - відповідна пара рішень для другої маршрутної кривої, після чого знаходимо відповідні значення функціоналів:

$$\Pi_1 = 2 \cdot \pi \cdot \int_{t_1}^{t_2} \left(C^{(1)} \cdot ch\left(\frac{t + C_1^{(1)}}{C^{(1)}}\right)\right) \times \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dt}\left[C^{(1)} \cdot ch\left(\frac{t + C_1^{(1)}}{C^{(1)}}\right)\right]\right)^2}\, dt, \tag{29}$$

$$\Pi_2 = 2 \cdot \pi \cdot \int_{t_1}^{t_2} \left(C^{(2)} \cdot ch\left(\frac{t + C_1^{(2)}}{C^{(2)}} \right) \right) \times \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dt} \left[C^{(2)} \cdot ch\left(\frac{t + C_1^{(2)}}{C^{(2)}} \right) \right] \right)^2} dt, \qquad (30)$$

та за умовою найменшого значення даного функціоналу обирається відповідна крива, що з'єднує точки маршрутної карти руху моторвагонного поїзда з координатами (t_1, S_1) та (t_2, S_2).

- система рівнянь (26) не має рішення. Це ставить питання про необхідність зміни відповідних координат точок маршрутної карти руху моторвагонного поїзда з координатами (t_1, S_1) та (t_2, S_2) для досягнення одного з двох перших варіантів рішення даної задачі.

2. Визначена процедура розрахунків параметрів траєкторії руху моторвагонного поїзда на основі отриманих співвідношень.

3. Режим ведення моторвагонного поїзда вибирається у відповідності з розкладом руху і умовами, які характеризують певні тягово-енергетичні показники. При цьому машиніст повинен обов'язково врахувати можливість використання кінетичної енергії, накопиченої на спусках для руху по наступних підйомів.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Ахиезер Н. И.* Лекции по вариационному исчислению / Ахиезер Н. И. – М. : ГИТТЛ, 1955. – 248 с.

2. *Баранов Л. А.* Микропроцессорные системы автоведения электроподвижного состава / Баранов Л. А., Головичер Я. М., Ерофеев Е. В., Максимов В. М.; под ред. Л. А. Баранова. – М. : Транспорт, 1990. –272 с.

3. *Баранов Л. А.* Оптимизация управления движением поездов. Учебное пособие / Баранов Л. А., Ерофеев Е. В., Мелешин И. С., Чинь Л. М.; под ред. Л. А. Баранова. – М. : МИИТ, 2011. –164 с.

4. *Баранов Л. А.* Системы автоматического и телемеханического управления электроподвижным составом / Баранов Л. А., Астрахан В. И., Головичер Я. М.; Под ред. Л. А. Баранова. – М. : Транспорт, 1984. – 311 с.

5. *Босов А. А.* Функции множества и их применение / А. А. Босов. – Днепродзержинск : Изд. дом «Андрей», 2007. – 182 с.

6. *Гетьман Г. К.* Теория электрической тяги : монография : в 2 т. / Г. К. Гетьман – Д. : Изд-во Маковецкий, 2011. – Т. 2. – 363 с.

7. *Гетьман Г. К.* Научные основы определения рационального мощностного ряда тяговых средств железнодорожного транспорта : монография / Г. К. Гетьман. – Днепропетровский нац. ун-т ж.-д. трансп. – Д. : Вид-во Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп., 2008. – 444 с.

8. *Илютович А. Е.* Выбор вариации спуска в задаче оптимального управления со смешанными ограничениями. Декомпозиционный подход. // Автоматика и телемеханика. – 1989. – №9. – С. 103-114.

9. *Кузьмич В. Д.* Теория локомотивной тяги : Учебник для вузов железнодорожного транспорта / Кузьмич В. Д., Руднев В. С., Френкель С. Я. – М. : Маршрут, 2005. – 448 с.

10. *Кулагін Д. О.* Проектування систем керування тяговими електропередачами моторвагонних поїздів : монографія / Д. О. Кулагін. – Бердянськ : ФО-П Ткачук О. В., 2014. – 154 с.

11. *Методы* классической и совркеменной теории управления в 5 томах. Том 4. Теория оптимизации систем автоматического управления / [Под ред. Егупова Н. Д., Пупкова К. А.]. – М. : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. – 744 с.

12. *Механизация*, автоматизация, информатизация, телекоммуникация и связь в отраслях производств : коллективная монография / Андриенко П. Д., Кулагин Д. А. и др., [под ред. С. М. Ахметова]. – Новосибирск : издательство «СибАК», 2014. – 156 с.

13. *Мугинштейн Л. А.* Энергооптимальный тяговый расчет движения поездов / Мугинштейн Л. А., Виноградов С. А., Ябко И. А. // Железнодорожный транспорт. – 2010. – № 2. – С. 24-29.

14. *Осипов С. И.* Основы тяги поездов / Осипов С. И., Осипов С. С. – М. : УМК МПС России, 2000. – 592 с.

15. *Петров Ю. П.* Вариационные методы теории оптимального управления / Ю. П. Петров. – Л. : Энергия, 1977. – 280 с.

16. *Петров Ю. П.* Оптимальное управление движением транспортных средств. Библиотека по автоматике выпуск 373 / Ю. П. Петров. – Л. : Энергия, 1969. – 96 с.

17. *Теория* автоматического управления: Учеб. для вузов по спец. «Автоматика и телемеханика». В 2-х ч. Ч. II. Теория нелинейных и специальных систем автоматического управления. / А. А. Воронов, Д. П. Ким, В. М. Лохин и др.; Под ред. А. А. Воронова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1986. – 504 с.

18. *Чистов В. П.* Оптимальное управление электрическими приводами постоянного тока / Чистов В. П., Бондаренко В. И., Святославский В. А. – М. : Энергия, 1968. – 232 с.

19. *Энергоэффективность* высокоскоростного движения // Железные дороги мира. – 2010. – №12. – С. 61-65.

20. *Dominguez M.* WCRR Lille, 9th World Congress on Railway Research, May 22-26, 2001 / M. Dominguez, A.P. Cucala, A.Fernandez, R.R. Pecharroman, J. Blanquer // Energy efficiency on train control: design of metro ATO driving and impact of energy accumulation devices, pp. 1-12.

21. *Howlett P. G.* Optimal driving strategies for a train on a track with continuously varying gradient / Howlett P. G., J. Cheng // The Journal of the Australian Mathematical Society. Series B. Applied Mathematics, 1995. – pp. 388-410.

22. *Lebedev L. P.* The Calculus of Variations and Functional Analysis with Optimal Control and Applications in Mechanics / Lebedev L. P., Cloud M. J. – World Scientific, 2003. – 436 P.

23. *Logan J. David* Applied Mathematics / Logan J. David. – 3rd Ed. – Wiley-Interscience, John Wiley & Sons, 2006. – 546 P.

24. *Manuel A. Duarte* Minimum energy trajectories for subway systems / Manuel A. Duarte, Patricia X. Sotomayor // Optimal control applications & methods, 20, 1999. – pp. 283-296.