

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Запорізький національний технічний університет

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ ЗАВДАННЯ
З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ
(II семестр)

для студентів спеціальностей
«Радіотехніка» та «Інформаційні мережі зв'язку»
усіх форм навчання

2014

Розрахунково-графічні завдання з математичного аналізу (II семестр) для студентів спеціальностей «Радіотехніка» та «Інформаційні мережі зв'язку» усіх форм навчання / Укл.: В.М.Онуфрієнко, Н.В.Сніжко, Н.М.Антоненко. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2014. – 50 с.

Укладачі: В.М.Онуфрієнко, професор, д.ф.-м.н.
Н. В. Сніжко, доцент, к.ф.-м.н.
Н. М. Антоненко, ст. викл., к. ф.-м.н.

Експерт
спеціальності: В.С. Кабак, доцент, к.т.н.

Рецензент: В.П.Чумаченко, професор, д.ф.-м.н.

Відповідальний
за випуск: Н. В. Сніжко, доцент, к.ф.-м.н.

Затверджено
Радою загальнотехнічного
факультету ЗНТУ
Протокол № 6
від 12.03.14

Затверджено
на засіданні кафедри загальної
математики ЗНТУ
Протокол № 7
від 06.03.14

ЗМІСТ

Вступ	4
1 Кратні інтеграли	6
2 Криволінійні інтеграли.	18
3 Поверхневі інтеграли. Елементи теорії поля	25
4 Найпростіші типи диференціальних рівнянь.	35
5 Лінійні диференціальні рівняння та системи зі сталими коефіцієнтами	44
Література	50

ВСТУП

Як відомо, одним з видів самостійної роботи студентів є виконання на протязі семестру типових розрахункових завдань. Їхньою метою є відпрацювання практичних вмінь та навичок. Вони покликані допомогти студентам більш глибоко засвоїти теоретичний матеріал і навчитися застосовувати набуті знання для розв'язання практичних задач. Запропоновані типові розрахунково-графічні завдання відповідають курсу «Математичний аналіз», який читається для студентів спеціальностей «Радіотехніка» та «Інформаційні мережі зв'язку» у II семестрі.

Даний практикум охоплює практично всі основні розділи II семестру даного курсу; тут містяться завдання по всіх темах курсу, запропоновано 30 варіантів завдань для самостійної роботи. Крім того, наведений список рекомендованої літератури, як основної, так і додаткової.

Типові розрахунково-графічні завдання виконуються протягом семестру, що забезпечує студентам систематичне вивчення курсу на основі опрацювання рекомендованих підручників та посібників, самостійного пошуку необхідних літературних джерел та матеріалів, їх аналізу та узагальнення, самостійного дослідження та письмового викладення практичних питань.

Номер варіанту студент обирає за номером у списку в журналі. Робота виконується українською або російською мовою в письмовій формі, бажано в зошиті у клітинку. Необхідно залишати поля для приміток. На титульному аркуші роботи потрібно вказати назву предмету, спеціальність, групу та курс, прізвище, ім'я та по батькові студента, прізвище викладача, який приймає роботу.

В типовому розрахунково-графічному завданні студент повинен розв'язати подані задачі методами, вказаними у завданнях, а також зробити всі необхідні креслення (графічні розв'язки). При цьому студентові необхідно показати набуті теоретичні знання з курсу.

При виконанні роботи можна використовувати як лекційний матеріал та матеріал практичних занять, так і допоміжну літературу, наведену в кінці даного посібника. Перед виконанням завдань рекомендується спочатку вивчити відповідний теоретичний матеріал,

потім розібратись у розв'язаннях задач, які виконувались на практичних заняттях, і тільки після цього приступати до виконання власне типової розрахунково-графічної роботи.

При оцінюванні роботи показником її якості є, перш за все, те, наскільки студент самостійно і правильно розв'язав поставлені задачі та зрозумів зміст отриманих розв'язків. З цією метою при захисті роботи студенту можуть бути задані додаткові питання, в тому числі і з теоретичного матеріалу, який вноситься на іспит.

Робота, яка відповідає зазначеним вимогам, подається на кафедру викладачу для перевірки і наступного захисту у формі співбесіди у визначений термін (як правило, під час модульного контролю). На захисті роботи студент повинен вміти:

- викласти зміст поставлених задач та довести їхні розв'язки;
- відповісти на запитання щодо змісту одержаних розв'язків;
- відповісти на додаткові питання.

Позитивні результати захисту роботи оформлюються відповідною кількістю рейтингових балів. Роботи, які не відповідають зазначеним вимогам, не зараховуються і повертаються студенту для доопрацювання із зазначенням терміну повторного захисту.

1 КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

Завдання 1.1. Змінити порядок інтегрування, зобразити область інтегрування.

$$1. \int_1^2 dx \int_{2x}^{4x^2} f(x, y) dy$$

$$2. \int_1^2 dx \int_{-x+4}^{6-2x} 2 dx$$

$$3. \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y}} f(x, y) dx$$

$$4. \int_0^{\sqrt{3}} dx \int_{\sqrt{2x}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y) dy$$

$$5. \int_0^{\sqrt{2}} dx \int_x^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy$$

$$6. \int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{2-y}} f(x, y) dx.$$

$$7. \int_0^3 dx \int_{-1}^{x^2+2} f(x, y) dy.$$

$$8. \int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x^2} f(x, y) dx$$

$$9. \int_0^2 dy \int_{y^2}^{y^2+4} f(x, y) dx.$$

$$10. \int_0^2 dx \int_{x^2}^{8-x^2} f(x, y) dx$$

$$11. \int_1^2 dx \int_{6x}^{3x^2} \frac{3}{4} dy$$

$$12. \int_0^{16} dy \int_{y/8}^{\sqrt{y}/2} f(x, y) dx.$$

$$13. \int_0^9 dy \int_0^{\sqrt{y}} dx.$$

$$14. \int_0^4 dx \int_{\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} 8 dy$$

$$15. \int_0^3 dx \int_{x^2}^{2x+3} f(x, y) dy$$

$$16. \int_1^2 dx \int_{x^{2+1}}^{4-2x} f(x, y) dy$$

$$17. \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} dx \int_x^{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2} dy$$

$$18. \int_0^5 dy \int_5^{5+\sqrt{25-y^2}} f(x, y) dx.$$

$$19. \int_1^2 dx \int_{4-2x}^{3-x} f(x, y) dy$$

$$20. \int_0^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{4-x}} f(x, y) dy$$

$$21. \int_{-1}^1 dx \int_{x^2+2}^3 f(x, y) dy$$

$$\begin{array}{lll}
22. \int_2^3 dx \int_x^{(x-2)^2+2} f(x,y) dy & 23. \int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y) dx & 24. \int_0^2 dx \int_{x^3/2}^{x^2} f(x,y) dy \\
25. \int_{-3}^0 dx \int_{x^2+1}^{-2x+4} f(x,y) dy & 26. \int_0^2 dy \int_{y^2-1}^{5-y} f(x,y) dx & 27. \int_0^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} f(x,y) dx \\
28. \int_{-4}^0 dy \int_{-\sqrt{16-y^2}}^{-\sqrt{y+4}} f(x,y) dx & 29. \int_{-4}^4 dy \int_{\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{16-y^2}} f(x,y) dx & 30. \int_0^3 dx \int_{x^2}^9 f(x,y) dy
\end{array}$$

Завдання 1.2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями.

Зобразити фігуру.

1. $y^2 = x$; $x + y = 2$.
2. $x = -2$; $x = 0$; $y = 2x^2$; $8x + y = -8$.
3. $y = 2x$; $y = -2x$; $x = 2$.
4. $x^2 + y^2 = 2y$; $y \geq 1$; $x \geq 0$.
5. $y = -(x+1)^2 + 2$; $y = (x+1)^2$.
6. $x = 0$; $x = 9$; $y = -\sqrt{x}$; $6y = -9 - x$.
7. $x + y \geq 2$; $x^2 + y^2 = 4$.
8. $y = -x^2 + 1$; $y = (x-1)^2$.
9. $y = 0$; $2y + x = 3$; $x = \sqrt{y}$..

10. $y = 0$; $x = 4$; $x = 6$; $y = 2/x$.
11. $x = 4$; $y^2 = x + 2$.
12. $x = 0$; $y = 0$; $x = 2$; $y = e^x$.
13. $x^2 + y^2 = 9$; $x + y \geq 3$.
14. $y = 2x^3$; $y = x^2$.
15. $x = 1$; $x = 3$; $y = 0$; $y = 2x$; $2x + y = 8$.
16. $x = 0$; $y = -2x + 2$; $y = \sqrt{x}$.
17. $x = 2$; $x = 3$; $y = x + 3$; $y = x$.
18. $x = 2$; $y = 4x^3$; $y = 8x^2$.
19. $x = 1$; $x = 4$; $y = 3\sqrt{x}$; $y = \sqrt{x}$.
20. $x = 1$; $x = 3$; $y = x^3$; $y = x^2/2$.
21. $y = 1$; $x = \sqrt{y}$; $x = 3\sqrt{y}$.
22. $x = 2$; $y = 4$; $2x + y = 10$.
23. $x = \cos y$; $x = \sin y$; $y = 0$.
24. $x = 3$; $2y + x = 3$; $x = \sqrt{y}$.
25. $y = 1$; $y = 2$; $x = 4y^2$; $x = 8y$.
26. $x = 1$; $x = 2$; $y = 6x$; $y = 6x^2$.
27. $y = x^2 - 4$; $y = -4$; $x = -2$; $x = 2$.
28. $x = 1$; $x = 2$; $y = x$; $y = x^3$.
29. $y = 3x^2$; $y = 12$.

30. $x \leq 1; x \geq -1; x^2 + y^2 \leq 4.$

Завдання 1.3. Обчислити подвійні інтеграли.

1. $\iint_D \cos(x+y) dx dy \quad D: y=2x; y=0; x=\frac{\pi}{3}.$

2. $\iint_D (2x+3y^2) dx dy \quad D: y=x; y=2x; x=1.$

3. $\iint_D \frac{y}{x^2} dx dy \quad D: x=1; x=2; y=x; y=\frac{1}{2}x.$

4. $\iint_D \sin(x+y) dx dy \quad D: x+y=\frac{\pi}{2}; y=0; x=0.$

5. $\iint_D (3x+2y) dx dy \quad D: y=1-x^2; y=0.$

6. $\iint_D (\sqrt{y} + \sqrt{x}) dx dy \quad D: x=1; y=x; y=\frac{1}{2}x.$

7. $\iint_D x dx dy \quad D: y=2^x; y=2; x=0.$

8. $\iint_D \frac{y}{x} dx dy \quad D: y=x; y=\frac{1}{2}x; x=2.$

9. $\iint_D 2^y dx dy \quad D: y=2-x; y=x; x=0.$

10. $\iint_D (x^2 + 6y^2) dx dy \quad D: y=x; y=x^2.$

$$11. \iint_D (x^2 + y^2) dx dy \quad D : y = x; x + y = 1; y = 0.$$

$$12. \iint_D xy dx dy \quad D : x = 0; y = 0; y + x = 1.$$

$$13. \iint_D (x + 2) dx dy \quad D : y = \ln x; y = 0; x = e.$$

$$14. \iint_D (2y - 4x) dx dy \quad D : x = 1; x = 2; x = 2y.$$

$$15. \iint_D (x^2 + y^2) dx dy \quad D : y = x; x + y = 1; x = 0.$$

$$16. \iint_D xy dx dy \quad D : y = x^2; y = x.$$

$$17. \iint_D (3 - y) dx dy \quad D : x^2 = 2y; y = 2.$$

$$18. \iint_D yx dx dy \quad D : x = 1; y = x^2; y = 0.$$

$$19. \iint_D (\sqrt{x} - y) dx dy \quad D : x = 4; y = \sqrt{x}; y = 0.$$

$$20. \iint_D (x - 3y) dx dy \quad D : y = x; y = x^2.$$

$$21. \iint_D (x^2 + 3y^2) dx dy \quad D : x = 0; x + y = 2; y = x.$$

$$22. \iint_D (x + y + 1) dx dy \quad D : y = x; y = 2x; y = 2.$$

$$23. \iint_D \cos(x + 3y) dx dy \quad D : x = 0; y = x; y = \frac{\pi}{3}.$$

$$24. \iint_D x^2 y dx dy \quad D: y = x^2; y = \sqrt{x}.$$

$$25. \iint_D (x + 2y) dx dy \quad D: x = 1; x = 2; y = x; y = \frac{1}{2}x.$$

$$26. \iint_D (3 - 2y) dx dy \quad D: y = x^2; y = 4; x = 0.$$

$$27. \iint_D 2^{x+y} dx dy \quad D: x = 0; y = x; y = 1.$$

$$28. \iint_D (x - 8y) dx dy \quad D: y = 2 - x^2; y = x^2.$$

$$29. \iint_D (8y + 1) dx dy \quad D: y = \frac{x}{2}; y = -\frac{x}{2}; x = 1.$$

$$30. \iint_D xy dx dy \quad D: x = 3; y = x; xy = 1.$$

Завдання 1.4. Обчислити подвійні інтеграли.

$$1. \iint_D (x + y) dx dy; \quad D: y = \sqrt{9 - x^2}; y = 0.$$

$$2. \iint_D e^{-x^2 - y^2} dx dy; \quad D: x^2 + y^2 = 16; y = 0; y \geq 0.$$

$$3. \iint_D \frac{2 dx dy}{4 + x^2 + y^2}; \quad D: y = \sqrt{4 - x^2}; y = 0.$$

4. $\iint_D \frac{\operatorname{tg} \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy; D: x^2 + y^2 = \frac{\pi^2}{16}.$
5. $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}; D: y = -\sqrt{5 - x^2}; y = 0.$
6. $\iint_D \sqrt{4 + x^2 + y^2} dx dy; D: x^2 + y^2 = 5.$
7. $\iint_D \ln \sqrt{x^2 + y^2} dx dy; D: x^2 + y^2 = 1; x^2 + y^2 = 9.$
8. $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2 + 9} dx dy; D: x^2 + y^2 = 9; x^2 + y^2 = 27.$
9. $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} e^{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy; D: x^2 + y^2 = 4.$
10. $\iint_D \frac{\cos \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy; D: x^2 + y^2 = \frac{\pi^2}{4}; x^2 + y^2 = \pi^2.$
11. $\iint_D (4 + x^2 + y^2) dx dy; D: x^2 + y^2 = 16; y = 0; y \geq 0.$
12. $\iint_D \sqrt{16 - x^2 - y^2} dx dy; D: x^2 + y^2 = 16; x \leq 0; y \geq 0.$
13. $\iint_D \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) dx dy; D: x^2 + y^2 = 1; y = x; y = 0; y \geq 0.$
14. $\iint_D (x + y)^2 dx dy; D: x^2 + y^2 = 1; x = 0; y \geq 0.$
15. $\iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2} dx dy; D: x^2 + y^2 = 3; x = 0; x \geq 0.$

$$16. \iint_D \operatorname{arctg} \frac{x}{y} dx dy;$$

$$D: x^2 + y^2 = 1; x^2 + y^2 = 4; y = \frac{x}{\sqrt{3}}; y = \sqrt{3}x; y \geq 0.$$

$$17. \iint_D (2x + 5y) dx dy; D: x^2 + y^2 = 6x.$$

$$18. \iint_D y dx dy; D: x^2 + y^2 = 1; x^2 + y^2 = 4.$$

$$19. \iint_D \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dx dy;$$

$$D: x^2 + y^2 = 1; x^2 + y^2 = 4; y = \frac{x}{\sqrt{3}}; y = \sqrt{3}x; y \geq 0.$$

$$20. \iint_D \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy; D: x^2 + y^2 = 1; x^2 + y^2 = 9; y = x; y \geq 0.$$

$$21. \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}; D: x^2 + y^2 = 8y.$$

$$22. \iint_D (2 + x^2 + y^2) dx dy; D: x^2 + y^2 = 2x; x^2 + y^2 = 4x.$$

$$23. \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy;$$

$$D: x^2 + y^2 = 1; x^2 + y^2 = 4; y = x; y = \sqrt{3}x; y \geq 0.$$

$$24. \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy; D: x^2 + y^2 = 2x.$$

$$25. \iint_D x dx dy; D: x^2 + y^2 = 2y.$$

$$26. \iint_D y dx dy; D: x^2 + y^2 = 2x.$$

$$27. \iint_D e^{1+x^2+y^2} dx dy; D: y = \sqrt{1-x^2}; y = 0.$$

$$28. \iint_D \ln(1 + \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy; D: x^2 + y^2 = 1; x \geq 0; y \geq 0.$$

$$29. \iint_D \frac{x dx dy}{x^2 + y^2}; D: x^2 + y^2 = 2y; x^2 + y^2 = 4.$$

$$30. \iint_D \frac{xy dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}; D: x^2 + y^2 = 4.$$

Завдання 1.5. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями, зобразити рисунок.

$$1. x = 2; y = 2; x + 2y + 3z = 6; x = 0; y = 0; z > 0.$$

$$2. z = y^2; z = 2y; x = 0; x = 2.$$

$$3. z = \sqrt{y-1}; z = y; x = 0; x = 2; z = 0.$$

$$4. x + z = 5; y = 2; x = 0; x = 2; y = 0; z = 0.$$

$$5. z = x^2; z = \sqrt{x}; y = 0; y = 2.$$

$$6. x = y^2; x = 4; z = 0; z = 2.$$

$$7. x = \sqrt{y}; x = y^2; z = 0; z = 4.$$

$$8. y + z = 5; y = 2; x = 0; x = 4; z = 0.$$

9. $y = \sqrt{x}$; $y = x^2$; $z = 0$; $z = 9$.
10. $z = 2y$; $z = 3y$; $y + z = 6$; $x = 2$.
11. $x = z^2$; $x = 2$; $z = y$; $z \geq 0$; $y \geq 0$.
12. $z = \sqrt{x}$; $z = x$; $y = 0$; $y = 2$.
13. $y = 2\sqrt{x}$; $y = \frac{2}{3}x$; $z = 0$; $z = 9$.
14. $z = 2\sqrt{x}$; $y^2 = 4x$; $x = 0$; $z = 0$.
15. $z = y^2$; $2x + 3y = 6$; $x = 0$; $z = 0$.
16. $y = x^2$; $z = \sqrt{4 - y}$; $z = 0$.
17. $x = \sqrt{y}$; $x + y + 2z = 2$; $z = 0$; $y = 0$.
18. $3x + 2y + 4z = 12$; $x = 0$; $x = 3$; $y = 1$; $y = 3$.
19. $y = x^2$; $y = 8 - x^2$; $z = 0$; $z = 2$.
20. $x = y^2$; $x = 16 - y^2$; $z = 0$; $z = 3$;
21. $y = \sqrt{x}$; $y = x$; $z = 1$; $z = 4$.
22. $x + y + z = 6$; $x = z$; $x = 0$; $y = 0$.
23. $z = y^2$; $z = 4y$; $x = 0$; $x = 2$.
24. $z = \sqrt{x}$; $z = 3x$; $y = 0$; $y = 4$.
25. $y = \sqrt{x}$; $x = 4 - 4y$; $y = 0$; $z = 0$; $z = 2$.
26. $y = x^2$; $y + z = 2$; $z = 0$.
27. $x = y^2$; $x + z = 1$; $z = 0$.

28. $x + y + z = 6$; $2x + y + z = 6$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$.

29. $z = 2x^2$; $z = 6 - 4x^2$; $y = 0$; $y = 3$;

30. $z = y^2$; $z = 3y$; $x = 0$; $x = 3$.

Завдання 1.6. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями, зобразити рисунок.

1. $x^2 + y^2 = 16$; $x^2 + y^2 = 9$; $y + 8z = 4$; $z = 0$.

2. $y = x^2 + z^2$, $x^2 + z^2 = 10$, $y = 0$.

3. $y = 2 - x^2 - z^2$; $y = 1$.

4. $4y = x^2 + y^2$; $y = 2$.

5. $x^2 = y^2 + z^2$; $y^2 + z^2 = 4$; $x = 0$.

6. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$; $y^2 + z^2 < 4$; $y > 0$.

7. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$; $y^2 + z^2 = x^2$; $y > 0$; $x > 0$.

8. $x^2 = y^2 + z^2$; $y^2 + z^2 = 1$; $z > 0$; $x > 0$.

9. $y = 4 - x^2 - z^2$; $y = 0$.

10. $x^2 + y^2 = 4$; $x^2 + y^2 = 1$; $z = 0$; $y + 2z = 2$.

11. $2x = y^2 + z^2$; $y^2 + z^2 = 4$; $x = 0$.

12. $x^2 + y^2 = 2y$; $z = 0$; $z = y$.

13. $y = x^2 + z^2$; $y = 0$; $y = 1$; $x = 0$; $z = 0$.

14. $x^2 + y^2 = 4y$; $z = 0$; $y + z = 6$.
15. $x^2 + y^2 + z^2 = 16$; $x^2 + y^2 = 6z$, $z \geq 0$.
16. $x^2 + y^2 = 9$; $x^2 + y^2 = 4$; $z = 0$; $y + 6z = 3$.
17. $z^2 + y^2 = 1$; $x = 0$; $x = 1$; $y > 0$; $z > 0$..
18. $y^2 + z^2 = 4$; $x = 2 - y^2 - z^2$; $x \geq 1$.
19. $x = y^2 + z^2$; $z^2 + y^2 = 1$; $x = 0$.
20. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$; $x^2 + y^2 < 3$; $x > 0$.
21. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$; $x^2 + y^2 = 3z^2$; $x > 0$; $z > 0$.
22. $x^2 + y^2 = z^2$; $x^2 + y^2 = 1$; $y > 0$; $z > 0$.
23. $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$; $x^2 + y^2 = 9$; $z = 0$.
24. $2z - x^2 - y^2 = 0$; $x^2 + y^2 = 4$; $z = 0$.
25. $y^2 + z^2 = 2z$; $x = 0$; $x + z = 6$.
26. $x^2 + y^2 = 4x$; $z = 0$; $z = x$.
27. $x^2 + y^2 = 2y$; $z = 0$; $y + z = 4$.
28. $z^2 + y^2 = 8y$; $x = 0$; $y = 4x$.
29. $x^2 + y^2 = 25$; $x^2 + y^2 = 16$; $y + 10z = 5$.
30. $2z = y^2 + z^2$; $x = 0$; $x + z = 3$.

2 КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

Завдання 2.1. Обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду

$\int_l f(x,y)dl$, де l – відрізок прямої від точки $A(x_1, y_1)$ до точки

$B(x_2, y_2)$.

1. $f(x,y) = x + 5y$; $A(0;1)$; $B(5;2)$.
2. $f(x,y) = -4x + 7y$; $A(-3;0)$; $B(4;1)$.
3. $f(x,y) = -5x + 2y$; $A(2;-3)$; $B(3;-2)$.
4. $f(x,y) = x - 3y$; $A(-4;3)$; $B(2;2)$.
5. $f(x,y) = -x + 2y$; $A(1;2)$; $B(3;4)$.
6. $f(x,y) = 4x - 2y$; $A(-1;2)$; $B(3;2)$.
7. $f(x,y) = -4x + 3y$; $A(-4;1)$; $B(-3;2)$.
8. $f(x,y) = -5x - 3y$; $A(1;2)$; $B(4;3)$.
9. $f(x,y) = -5x + 6y$; $A(-3;7)$; $B(2;3)$.
10. $f(x,y) = 5x - 6y$; $A(2;5)$; $B(3;2)$.
11. $f(x,y) = -x + 3y$; $A(-1;-1)$; $B(3;3)$.
12. $f(x,y) = 3x + y$; $A(-1;4)$; $B(2;7)$.
13. $f(x,y) = 3x - 2y$; $A(0;2)$; $B(1;3)$.
14. $f(x,y) = -3x - y$; $A(3;0)$; $B(1;2)$.

15. $f(x,y) = -3x - y$; $A(4;1)$; $B(2;-1)$.
16. $f(x,y) = 7x + 6y$; $A(-5,2)$; $B(1,3)$.
17. $f(x,y) = 2x + 10y$; $A(-3;2)$; $B(2;3)$.
18. $f(x,y) = 5x + y$; $A(1;3)$; $B(2;4)$.
19. $f(x,y) = 5x + 3y$; $A(-3;1)$; $B(-4;1)$.
20. $f(x,y) = 5x + 2y$; $A(-2;3)$; $B(3;2)$.
21. $f(x,y) = x + 3y$; $A(1;-1)$; $B(2;0)$.
22. $f(x,y) = 3x - 2y$; $A(2;3)$; $B(2;-3)$.
23. $f(x,y) = x + 9y$; $A(-1;0)$; $B(2;1)$.
24. $f(x,y) = -3x + 5y$; $A(-3;1)$; $B(2;2)$.
25. $f(x,y) = 7x + 2y$; $A(1;1)$; $B(3;2)$.
26. $f(x,y) = x + 4y$; $A(-2;0)$; $B(2;1)$.
27. $f(x,y) = -x + y$; $A(-4;1)$; $B(2;-1)$.
28. $f(x,y) = x - 5y$; $A(-6;2)$; $B(-1;1)$.
29. $f(x,y) = x - 2y$; $A(3;-2)$; $B(2;1)$.
30. $f(x,y) = x - 3y$; $A(-2;2)$; $B(1;1)$.

Завдання 2.2. Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду

$$\int_l P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

$$1. P(x, y) = 2x; Q(x, y) = -2x + y;$$

$$l: y = 2x - 3; \text{ від точки з } x_1 = 1 \text{ до точки з } x_2 = 2.$$

$$2. P(x, y) = -3y; Q(x, y) = 3x + y;$$

$$l: y = -x + 2; \text{ від точки з } x_1 = 0 \text{ до точки з } x_2 = 4.$$

$$3. P(x, y) = x - 3y; Q(x, y) = 2y;$$

$$l: x = 2 \cos t; y = \sin t; \text{ від точки з } t_1 = 0 \text{ до точки з } t_2 = \pi.$$

$$4. P(x, y) = -2x + 2y; Q(x, y) = x^2 y;$$

$$l: y = x - 1; \text{ від точки з } x_1 = 0 \text{ до точки з } x_2 = 3.$$

$$5. P(x, y) = -3x + 2y; Q(x, y) = x + 2y;$$

$$l: y = x + 4; \text{ від точки з } x_1 = 0 \text{ до точки з } x_2 = 2.$$

$$6. P(x, y) = y^2 + 5; Q(x, y) = -xy;$$

$$l: y = -x; \text{ від точки з } x_1 = 0 \text{ до точки з } x_2 = 3.$$

$$7. P(x, y) = 3x - 5; Q(x, y) = x - y;$$

$$l: y = -2x + 1; \text{ від точки з } x_1 = 1 \text{ до точки з } x_2 = 2.$$

$$8. P(x, y) = 2x + 3y; Q(x, y) = x^2 y;$$

$$l: y = 2x + 1; \text{ від точки з } x_1 = 0 \text{ до точки з } x_2 = 3.$$

$$9. P(x, y) = x + y; Q(x, y) = x;$$

$$l: x = \cos t; y = \sin t; \text{ від точки з } t_1 = 0 \text{ до точки з } t_2 = \pi.$$

$$10. P(x, y) = -x + y; Q(x, y) = x^2 - y^2;$$

$$l: y = x + 2; \text{ від точки з } x_1 = 0 \text{ до точки з } x_2 = 2.$$

$$11. P(x, y) = 4x + 2y; Q(x, y) = 2x + y;$$

$$l: y = -2x + 1; \text{ від точки з } x_1 = 2 \text{ до точки з } x_2 = 3.$$

$$12. P(x, y) = -x + y; Q(x, y) = -x - y;$$

$$l: y = -x + 4; \text{ від точки з } x_1 = 1 \text{ до точки з } x_2 = 4.$$

$$13. P(x, y) = 4x^2 - y^2; Q(x, y) = 2x - y;$$

$$l: y = 2x + 1; \text{ від точки з } x_1 = 0 \text{ до точки з } x_2 = 2.$$

$$14. P(x, y) = 3x - y; Q(x, y) = x^2 y;$$

$$l: y = 2x - 1; \text{ від точки з } x_1 = 1 \text{ до точки з } x_2 = 3.$$

$$15. P(x, y) = x + 2y; Q(x, y) = x + y;$$

$$l: y = x + 1; \text{ від точки з } x_1 = 0 \text{ до точки з } x_2 = 4.$$

$$16. P(x, y) = 2x + y; Q(x, y) = -x + y;$$

$$l: y = 2x + 1; \text{ від точки з } x_1 = 0 \text{ до точки з } x_2 = 2.$$

$$17. P(x, y) = 4x; Q(x, y) = x + y;$$

$$l: x = 2 \cos t; y = 2 \sin t; \text{ від точки з } t_1 = 0 \text{ до точки з } t_2 = \frac{\pi}{2}.$$

$$18. P(x, y) = 4x - y; Q(x, y) = x - y;$$

$$l: y = x + 4; \text{ від точки з } x_1 = 2 \text{ до точки з } x_2 = 4.$$

$$19. P(x, y) = 5x + y; Q(x, y) = x - y;$$

$$l: y = x^2 + 1; \text{ від точки з } x_1 = 1 \text{ до точки з } x_2 = 2.$$

$$20. P(x, y) = x - 2y; Q(x, y) = xy;$$

$$l: y = \sqrt{x}; \text{ від точки з } x_1 = 1 \text{ до точки з } x_2 = 4.$$

$$21. P(x, y) = x - y; Q(x, y) = 2x - 2y;$$

$$l: y = \sqrt{x}; \text{ від точки з } x_1 = 0 \text{ до точки з } x_2 = 2.$$

$$22. P(x, y) = x + y; Q(x, y) = x - y;$$

$$l: x = 3 \cos t, y = \sin t; \text{ від точки з } t_1 = 0 \text{ до точки з } t_2 = \frac{\pi}{6}.$$

$$23. P(x, y) = -2x + y; Q(x, y) = x - 2y;$$

$$l: y = -3x + 2; \text{ від точки з } x_1 = 0 \text{ до точки з } x_2 = 3.$$

$$24. P(x, y) = 2x + 4y; Q(x, y) = -4x + 4y;$$

$$l: x = \cos t, y = \sin t; \text{ від точки з } t_1 = 0 \text{ до точки з } t_2 = \frac{\pi}{2}.$$

$$25. P(x, y) = 3x - 4y; Q(x, y) = 3x + 1;$$

$$l: y = -x + 2; \text{ від точки з } x_1 = 0 \text{ до точки з } x_2 = 2.$$

$$26. P(x, y) = -2xy; Q(x, y) = 2x^2 - 1;$$

$$l: y = -2x + 3; \text{ від точки з } x_1 = 0 \text{ до точки з } x_2 = 2.$$

$$27. P(x, y) = x^2 + 4y; Q(x, y) = 4xy;$$

$$l: y = -2x + 1; \text{ від точки з } x_1 = 0 \text{ до точки з } x_2 = 3.$$

$$28. P(x, y) = x + 2y; Q(x, y) = x^2 + 2;$$

$$l: y = 2 - \frac{x^2}{2}; \text{ від точки з } x_1 = 0 \text{ до точки з } x_2 = 1.$$

$$29. P(x, y) = x + 6y; Q(x, y) = x + y;$$

$$l: y = x + 2; \text{ від точки з } x_1 = 0 \text{ до точки з } x_2 = 3.$$

$$30. P(x, y) = 3x + 2y; Q(x, y) = x + 2y;$$

$l: y = 3x + 1$; від точки з $x_1 = 1$ до точки з $x_2 = 2$.

Завдання 2.3. Відновити функцію $u = u(x, y)$ за її повним диференціалом $du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$.

$$1. P(x, y) = y^4 + 4x^3y - 2; Q(x, y) = 4xy^3 + x^4 + 3.$$

$$2. P(x, y) = 3x^2y^2 + 2xy; Q(x, y) = 2x^3y + x^2.$$

$$3. P(x, y) = xy^2 + 4x^3y + 5; Q(x, y) = x^2y + x^4 - 2.$$

$$4. P(x, y) = 2xy^3 + 3xy^2 + 5y; Q(x, y) = 3x^2y^2 + 3x^2y + 5x.$$

$$5. P(x, y) = xy^2 + x^2y^3 + 2y; Q(x, y) = x^2y + x^3y^2 + 2x.$$

$$6. P(x, y) = 4x^3y^2 + 2xy^4 + 3; Q(x, y) = 2x^4y + 4x^2y^3 - 2.$$

$$7. P(x, y) = 3x^2e^y + 2xy - 4y; Q(x, y) = x^3e^y + x^2 - 4x.$$

$$8. P(x, y) = xy^2 + 6xy^2 - 1; Q(x, y) = x^2y + 6x^2y + 1.$$

$$9. P(x, y) = 2xy^3 - 3y; Q(x, y) = 3x^2y^2 - 3x + 2.$$

$$10. P(x, y) = 10x^3y^2 - y + 1; Q(x, y) = 5x^4y^2 - x - 2.$$

$$11. P(x, y) = 3x^2y^3 - 8y^2; Q(x, y) = 3x^3y^2 - 16xy + 2.$$

$$12. P(x, y) = 3y^4 + 4x^3y - 2; Q(x, y) = 12xy^3 + x^4.$$

$$13. P(x, y) = 2xy^4 + 5x^4y^2 + 4x; Q(x, y) = 4x^2y^3 + 2x^5y - 2y.$$

14. $P(x, y) = 2xy^4 + xy^2$; $Q(x, y) = 4x^2y^3 + x^2y + 3$.
15. $P(x, y) = 4xy + y^3 + 3$; $Q(x, y) = 2x^2 + 3xy^2$.
16. $P(x, y) = 2e^y + 3y^2e^{3x} - y$; $Q(x, y) = 2xe^y + 2ye^{3x} - x$.
17. $P(x, y) = 6x^5y^2 + 4xy^3 - 3$; $Q(x, y) = 2x^6y + 6x^2y^2 + 3$.
18. $P(x, y) = x^4y^5 + 8xy^3 + 3$; $Q(x, y) = x^5y^4 + 12x^2y^2$.
19. $P(x, y) = 2xy^3 + 5y^2 + 1$; $Q(x, y) = 3x^2y^2 + 10xy$.
20. $P(x, y) = 2xy^5 + y^3$; $Q(x, y) = 5x^2y^4 + 3xy^2 + 4$.
21. $P(x, y) = 4x^3y + e^y$; $Q(x, y) = x^4 + xe^y$.
22. $P(x, y) = 3x^2y + y^2 + \sin(x + y)$; $Q(x, y) = x^3 + 2xy + \sin(x + y)$.
23. $P(x, y) = xe^{2y} - \sin y + y$; $Q(x, y) = x^2e^y - x \cos y + x$.
24. $P(x, y) = 3x^2 \sin y + y^2 + 2$; $Q(x, y) = x^3 \cos y + 2xy$.
25. $P(x, y) = y^3 \cos x + y^2 + 1$; $Q(x, y) = 3y^2 \sin x + 2xy + 2$.
26. $P(x, y) = 2x \cos y + y$; $Q(x, y) = -x^2 \sin y + x + 3$.
27. $P(x, y) = -\cos^2 y + e^{2x}$; $Q(x, y) = \sin y + 2x \cos y \cdot \sin y + 2$.
28. $P(x, y) = 4xy^2 + x$; $Q(x, y) = 4x^2y + y$.
29. $P(x, y) = 2x \sin 2y - y^2 \sin x$; $Q(x, y) = 2x^2 \cos 2y + 2y \cos x$.
30. $P(x, y) = 2xe^y + 2y^2e^x + 1$; $Q(x, y) = x^2e^y + 4ye^x$.

3 ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

Завдання 3.1. Знайти похідну функції $U = U(x, y, z)$ у напрямі вектора $\overline{A_1 A_2}$ в точці A_1 та $\text{grad}U(A_1)$.

1. $U = \sqrt{1 + 2x^2 + z^2}$, $A_1(1;1;1)$, $A_2(3;2;3)$.
2. $U = y^2x + zx^2 - 2y$, $A_1(1;1;-1)$, $A_2(2;-1;3)$.
3. $U = xe^z + ze^x - y^2$, $A_1(3;0;2)$, $A_2(4;1;3)$.
4. $U = 3xy^2 + z^2 - xz$, $A_1(1;1;2)$, $A_2(3;-1;3)$.
5. $U = 3x^2yz - y^2 + 2yz^2$, $A_1(1;1;1)$, $A_2(9;-3;9)$.
6. $U = (zx^2 + zy^2 + z^2)^2$, $A_1(1;1;-1)$, $A_2(0;-1;1)$.
7. $U = y^{xz}$, $A_1(3;1;4)$, $A_2(1;1;4)$.
8. $U = \frac{y}{2x} + x + 2z + 1$, $A_1(1;2;0)$, $A_2(3;4;1)$.
9. $U = 2x + y + z - \sqrt{x^2 + y^2}$, $A_1(3;4;1)$, $A_2(3;2;1)$.
10. $U = 5(x - y)^2 + 2y + x$, $A_1(3;1;1)$, $A_2(2;-1;3)$.
11. $U = 2\text{tg}\left(\sqrt{x} - \frac{1}{y} + 2z\right)$, $A_1(1;1;0)$, $A_2(3;3;1)$.
12. $U = 1 + x^2 - y^2 + z^2 + x$, $A_1(1;1;1)$, $A_2(3;2;3)$.
13. $U = 2\sin(x^2 + y - 2z) + 2x + y + 3$, $A_1(1;1;1)$, $A_2(0;1;1)$.

14. $U = xy + 3y + 2 + 3z$, $A_1(1;-1;1)$, $A_2(1;0;1)$.
15. $U = x^2 + y^4 - 2z + 2y + 4$, $A_1(1;1;1)$, $A_2(1;1;0)$.
16. $U = 2x^2y + 4y^2z + z^2x$, $A_1(1;-1;2)$, $A_2(3;1;1)$.
17. $U = y^2x + yz^2 - 2$, $A_1(1;1;-1)$, $A_2(2;3;1)$.
18. $U = x + \frac{y}{2x} + x + 1 + 4z$, $A_1(1;2;0)$, $A_2(3;4;1)$.
19. $U = \sqrt{x^2 + y^2} + 2yxz + 2x + 2y + z$, $A_1(3;4;1)$, $A_2(4;2;-1)$.
20. $U = (x - y)^3 + 2xy + 2xz + 2yz$, $A_1(3;1;1)$, $A_2(2;-1;3)$.
21. $U = 2 \cos\left(\sqrt{x} - \frac{1}{y} + 2z\right) + y + 2z + 1$, $A_1(1;1;0)$, $A_2(3;3;-1)$.
22. $U = \cos(x^2 + y^2 - 2) + y + 5z + 1$, $A_1(1;1;1)$, $A_2(0;1;1)$.
23. $U = xye^y + 2y + 4 + z^2$, $A_1(1;0;1)$, $A_2(1;0;0)$.
24. $U = tg(x + y - 2z^2) + 2yx + 4xz + 6$, $A_1(1;1;1)$, $A_2(1;1;0)$.
25. $U = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + 2x + 2y + 2z$, $A_1(2;3;6)$, $A_2(3;5;8)$.
26. $U = xy + yz + zx$, $A_1(1;-1;2)$, $A_2(3;2;-4)$.
27. $U = 2xy^2z^2$, $A_1(2;1;-1)$, $A_2(4;-1;0)$.
28. $U = zx^2 + xy^2 + yz^2$, $A_1(-1;0;1)$, $A_2(1;1;-1)$.
29. $U = zx^2 + zy^2 + z^2$, $A_1(2;1;-1)$, $A_2(3;-1;1)$.
30. $U = xy + yz + xz + 2xyz$, $A_1(-2;3;-1)$, $A_2(0;1;0)$.

Завдання 3.2. Обчислити течію векторного поля $\vec{a}(M)$ через зовнішню поверхню піраміди, створену площиною (P) та координатними осями, двома способами:

а) за означенням;

б) за допомогою формули Остроградського-Гаусса.

1. $\vec{a} = (3x + y)\vec{i} + (y + 2z)\vec{j} + (3x + 2z)\vec{k}$; $(P): 3x - 2y + 2z = 6$.
2. $\vec{a} = (x + y + 3z)\vec{i} + 2z\vec{j} + (3y - z)\vec{k}$; $(P): 2x + 3y + z = 6$.
3. $\vec{a} = (x + 2z)\vec{i} + (y - 2x)\vec{j} + (x + 2z)\vec{k}$; $(P): x - y + z = 2$.
4. $\vec{a} = 2(y - z)\vec{i} + (x + 2y)\vec{j} + x\vec{k}$; $(P): x + 2y + 2z = 4$.
5. $\vec{a} = (2z - 3x)\vec{i} + (x - 2y)\vec{j} + (3x + 2z)\vec{k}$; $(P): x + y + 2z = 2$.
6. $\vec{a} = (3x + 2z)\vec{i} + (x + 2y)\vec{j} + y\vec{k}$; $(P): x + y + 2z = 2$.
7. $\vec{a} = (2x + z)\vec{i} + 2z\vec{j} + 2(x + y)\vec{k}$; $(P): 2x + 2y + z = 4$.
8. $\vec{a} = (x + 2y)\vec{i} + (3x + z)\vec{j} + 2y\vec{k}$; $(P): x + 2y + z = 2$.
9. $\vec{a} = (y + 3z)\vec{i} + (2x - 6z)\vec{j} + (y + 3z)\vec{k}$; $(P): 2x + y + 3z = 6$.
10. $\vec{a} = (y + 4z)\vec{i} + (x + 6y)\vec{j} + 2y\vec{k}$; $(P): x + 2y + 2z = 2$.
11. $\vec{a} = (3y - 2z)\vec{i} + (x + 3y)\vec{j} + y\vec{k}$; $(P): x + 3y + 2z = 6$.
12. $\vec{a} = (2y + z)\vec{i} + 2x\vec{j} + (y + z)\vec{k}$; $(P): 2x + 2y + z = 2$.
13. $\vec{a} = (3x + z)\vec{i} + z\vec{j} + (3x - y)\vec{k}$; $(P): 3x + 2y + z = 6$.
14. $\vec{a} = 2z\vec{i} + (2x + y)\vec{j} + 2y\vec{k}$; $(P): 2x + y + 2z = 2$.

15. $\bar{a} = x\bar{i} + (y + 2z)\bar{j} + (x + 3z)\bar{k}$; $(P): x + 3y + z = 3$.
16. $\bar{a} = (5x - 1)\bar{i} + (y - 3x + z)\bar{j} + (y + z)\bar{k}$; $(P): 2x - y + 2z = 2$.
17. $\bar{a} = (x + 2y)\bar{i} + (x + 8z)\bar{j} + (y + 2z)\bar{k}$; $(P): 3x + 3y + z = 3$.
18. $\bar{a} = (x + 6z)\bar{i} + (z - 4x)\bar{j} + (x + z)\bar{k}$; $(P): x + y + z = 2$.
19. $\bar{a} = (y + 4z)\bar{i} + (x + 4z)\bar{j} + (2x + y)\bar{k}$; $(P): 2x + y + 2z = 2$.
20. $\bar{a} = (x - z)\bar{i} + y\bar{j} + (x + y - 2z)\bar{k}$; $(P): x + 2y + z = 2$.
21. $\bar{a} = (x - 2y)\bar{i} + (y + z)\bar{j} + (2z - x)\bar{k}$; $(P): 2x - 3y + z = 6$.
22. $\bar{a} = (y + 2z)\bar{i} + (x - 2y)\bar{j} + 4z\bar{k}$; $(P): x - y + z = 2$.
23. $\bar{a} = (2x + y)\bar{i} + y\bar{j} + (2y + z)\bar{k}$; $(P): 2x - y - 2z = -2$.
24. $\bar{a} = (2x + y - 2z)\bar{i} - y\bar{j} + (x + 2z)\bar{k}$; $(P): x + 2y + z = 2$.
25. $\bar{a} = (2y - z)\bar{i} + (x + y)\bar{j} + 2z\bar{k}$; $(P): 2x + y + z = 2$.
26. $\bar{a} = 2x\bar{i} + (4y - z)\bar{j} + (2x - y + z)\bar{k}$; $(P): x + 2y + 2z = 2$.
27. $\bar{a} = (x + 4z)\bar{i} + (y - 6z)\bar{j} + 2z\bar{k}$; $(P): x + 2y + 2z = 2$.
28. $\bar{a} = 2x\bar{i} + (x - 2y - z)\bar{j} + (y + 2z)\bar{k}$; $(P): 2x + y + z = 4$.
29. $\bar{a} = (2z + x)\bar{i} + (x + 4y)\bar{j} + 2z\bar{k}$; $(P): x + 4y + 2z = 8$.
30. $\bar{a} = 8z\bar{i} + (x - 2y - z)\bar{j} + 2(y + z)\bar{k}$; $(P): x - 2y + 2z = 2$.

Завдання 3.3. Обчислити двома способами течію вектора $\bar{a}$ крізь замкнену поверхню σ (нормаль зовнішня).

1. $\bar{a} = (3z^2 + x)\bar{i} + (e^x - 2y)\bar{j} + 2z\bar{k}$; $\sigma : \{z^2 = x^2 + y^2, z = 1, z = 4\}$.
2. $\bar{a} = (8x + 1)\bar{i} + (zx - 4y)\bar{j} + (e^x - z)\bar{k}$; $\sigma : \{x^2 + y^2 + z^2 = 2y\}$.
3. $\bar{a} = -2x\bar{i} + z\bar{j} + (x + y)\bar{k}$; $\sigma : \{x^2 + y^2 = 2y, z = x^2 + y^2, z = 0\}$.
4. $\bar{a} = xy^2\bar{i} + x^2y\bar{j} + z\bar{k}$; $\sigma : \{x^2 + y^2 = 1, z = 0, z = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.
5. $\bar{a} = (x + z)\bar{i} + (y + z)\bar{k}$; $\sigma : \{x^2 + y^2 = 9, z = x, z = 0, z > 0\}$.
6. $\bar{a} = 2(z - y)\bar{j} + (x - z)\bar{k}$; $\sigma : \{z = x^2 + 3y^2 + 1, z = 0, x^2 + y^2 = 1\}$.
7. $\bar{a} = x\bar{i} + z\bar{j} - y\bar{k}$; $\sigma : \{z = 4 - 2(x^2 + y^2), z = 2(x^2 + y^2)\}$.
8. $\bar{a} = (x + y)\bar{i} + (y + z)\bar{j} + (x + z)\bar{k}$;
 $\sigma : \{y = 2x, y = 4x, x = 1, z = y^2, z = 0\}$.
9. $\bar{a} = (x + z)\bar{i} + y\bar{k}$; $\sigma : \{z = 2 - x^2 - y^2, z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$.
10. $\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$; $\sigma : \{z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, z = 0\}$.
11. $\bar{a} = x\bar{i} + z\bar{j} - y\bar{k}$; $\sigma : \{z = 4 - 2(x^2 + y^2), z = 2(x^2 + y^2)\}$.
12. $\bar{a} = 4x\bar{i} - 2y\bar{j} - z\bar{k}$; $\sigma : \{x^2 + y^2 = 1, z = 0, x + 2y + 3z = 6\}$.
13. $\bar{a} = 2x\bar{i} + z\bar{k}$; $\sigma : \{z = 3x^2 + 2y^2 + 1, x^2 + y^2 = 4, z = 0\}$.
14. $\bar{a} = 8x\bar{i} - 2y\bar{j} + x\bar{k}$; $\sigma : \{x + y = 1, x = 0, z = x^2 + y^2, z = 0\}$.
15. $\bar{a} = 4x\bar{i} - 2y\bar{j} - z\bar{k}$; $\sigma : \{x^2 + y^2 = 1, z = 0, x + 2y + 3z = 6\}$.
16. $\bar{a} = 2x\bar{i} + z\bar{k}$; $\sigma : \{z = 3x^2 + 2y^2 + 1, x^2 + y^2 = 4, z = 0\}$.
17. $\bar{a} = (x + z)\bar{i} + (z + y)\bar{k}$; $\sigma : \{x^2 + y^2 = 9, z = x, z = 0, z > 0\}$.
18. $\bar{a} = 2(z - y)\bar{j} + (x - z)\bar{k}$; $\sigma : \{z = x^2 + 3y^2 + 1, z = 0, x^2 + y^2 = 1\}$.

$$19. \bar{a} = z\bar{i} + (3y - x)\bar{j} - z\bar{k}; \sigma : \{x^2 + y^2 = 1, z = x^2 + y^2, z = 0\}.$$

$$20. \bar{a} = (y + z)\bar{i} + (x - z)\bar{j} - z\bar{k}; \sigma : \{x^2 + y^2 = 1, z = x^2 + y^2 + 2, z = 0\}.$$

$$21. \bar{a} = (x + y + z)\bar{i} + (2y - x)\bar{j} + (3z + y)\bar{k};$$

$$\sigma : \{y = x, y = 2x, x = 1, z = x^2 + y^2, z = 0\}.$$

$$22. \bar{a} = (6x - \cos y)\bar{i} + (e^x + z)\bar{j} + (2y + 3z)\bar{k};$$

$$\sigma : \{x^2 + y^2 = z^2, z = 1, z = 2\}.$$

$$23. \bar{a} = 3x\bar{i} - z\bar{j}; \sigma : \{y = 6 - x^2 - y^2, z = \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

$$24. \bar{a} = x^2\bar{i} + y^2\bar{j} + z\bar{k}; \sigma : \{x^2 + y^2 + z^2 = 4, z = \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

$$25. \bar{a} = 17x\bar{i} + 7y\bar{j} + 11z\bar{k};$$

$$\sigma : \{z = x^2 + y^2, z = 2(x^2 + y^2), y = x^2, y = x\}.$$

$$26. \bar{a} = 4x\bar{i} - 2y\bar{j} - z\bar{k};$$

$$\sigma : \{3x + 2y = 12, 3x + y = 6, y = 0, z = 0, x + y + z = 6\}.$$

$$27. \bar{a} = (y + z)\bar{i} + y\bar{j} - x\bar{k}; \sigma : \{x^2 + y^2 = 2y, y = 2\}.$$

$$28. \bar{a} = 2x\bar{i} + 2y\bar{j} + z\bar{k}; \sigma : \{y = x^2, y = 4x^2, y = 1, z = y, z = 0, x \geq 0\}.$$

$$29. \bar{a} = (2y - 15)\bar{i} + (z - y)\bar{j} - (x - 3y)\bar{k};$$

$$\sigma : \left\{ z = 3x^2 + y^2 + 1, x^2 + y^2 = \frac{1}{4}, z = 0 \right\}.$$

$$30. \bar{a} = (x^2 + xy)\bar{i} + (y^2 + yz)\bar{j} + (z^2 + xz)\bar{k};$$

$$\sigma : \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, z = \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

Завдання 3.4. Для даного векторного поля

$\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ знайти $\operatorname{div} \vec{a}$ і $\operatorname{rot} \vec{a}$ в точці M_0 .

1. $P = 4xz + 2zy$; $Q = 3x + z$; $R = x^2 + y + z$; $M_0(-1, 2, 1)$.
2. $P = xz^2 + y$; $Q = 2x + y^3 + z$; $R = y + z$; $M_0(1, 0, 1)$.
3. $P = xz^2 + 2y$; $Q = 5xy + 2z$; $R = x + z$; $M_0(-1, 2, 0)$.
4. $P = xz + y$; $Q = 2yz + 2x^2$; $R = x + yz$; $M_0(0, -1, 2)$.
5. $P = 2yz + 3x$; $Q = 3yz + x$; $R = y^3 + z^3$; $M_0(1, -1, 1)$.
6. $P = 2xz + y$; $Q = x + z^2$; $R = y^2 + 2z$; $M_0(-1, 2, 0)$.
7. $P = xz - 3y$; $Q = 5y + 2z$; $R = y^2z + 2x$; $M_0(-2, 0, 1)$.
8. $P = y^2 + z^2$; $Q = x - yz$; $R = 5x^2z$; $M_0(-2, 0, -2)$.
9. $P = x^2y + zx$; $Q = z + y$; $R = 2xz$; $M_0(1, -2, 1)$.
10. $P = x - yz$; $Q = 2xz$; $R = 2x - z$; $M_0(1, -1, 1)$.
11. $P = xy + 2z$; $Q = 4x^2z$; $R = x + 2z$; $M_0(1, -1, 0)$.
12. $P = x^2y + 2$; $Q = 4y + z$; $R = x + yz$; $M_0(0, 2, 1)$.
13. $P = xy + 4z$; $Q = yz^2$; $R = 4yz$; $M_0(2, 1, 0)$.
14. $P = xz + y$; $Q = 5y^2z$; $R = x - 2z$; $M_0(-1, 0, 1)$.
15. $P = x + y$; $Q = yz + x$; $R = xz + x$; $M_0(2, 1, 0)$.

16. $P = xy + z$; $Q = -xy^2$; $R = z^2 + y^2$; $M_0(1, -1, 1)$.
17. $P = xy - 2z$; $Q = 2xy + xz$; $R = y - z$; $M_0(1, 2, 0)$.
18. $P = xy + z$; $Q = -y - z$; $R = xz + y^2$; $M_0(4, 0, 1)$.
19. $P = xy + 2y^2$; $Q = y - y^2z$; $R = x^2 - xz$; $M_0(0, -2, 1)$.
20. $P = 7x^2y^3$; $Q = xz^2 + y$; $R = 3x^2z + y$; $M_0(3, -1, 1)$.
21. $P = xy$; $Q = -y^2z$; $R = 2x^2z + 3y$; $M_0(-2, 1, -1)$.
22. $P = 3xy^2 + z$; $Q = x - 3z$; $R = 3x^2z + 2y$; $M_0(1, 2, 0)$.
23. $P = yz + 3x$; $Q = x + y + z$; $R = x + z$; $M_0(-1, 0, 1)$.
24. $P = y^2z + 4y$; $Q = z^2y$; $R = y + 2z$; $M_0(1, -1, 1)$.
25. $P = y^2z - 2z$; $Q = 2x + y^2$; $R = 2x + z$; $M_0(1, 1, -1)$.
26. $P = yz^2 + 2x$; $Q = 2x + z$; $R = yz^2$; $M_0(1, -2, 0)$.
27. $P = 2xz + y$; $Q = 5x + y$; $R = xz^2$; $M_0(1, 3, -1)$.
28. $P = xz^3 + 2y$; $Q = x + 2z$; $R = 2yz$; $M_0(1, -1, 0)$.
29. $P = 3xz + 4y$; $Q = 3x + 2z$; $R = x^3y$; $M_0(-1, 1, 0)$.
30. $P = yz + 3x$; $Q = x + 2xz$; $R = xy + z$; $M_0(-1, 1, 2)$.

Завдання 3.5. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{a}$ вздовж контура трикутника, який утворюється внаслідок перетину площини (P) з координатними площинами, двома способами:

а) за означенням;

б) із застосуванням формули Стокса.

$$1. \bar{a} = (y - 2z)\bar{i} + (-x + 2y)\bar{j} + 4y\bar{k} ; P : 2x + 2y + z = 4 .$$

$$2. \bar{a} = (x + 7z)\bar{i} + (z + 5y)\bar{j} + 4x\bar{k} ; P : 2x + 3y + 2z = 6 .$$

$$3. \bar{a} = (y - z)\bar{i} + (z + 2x)\bar{j} + y\bar{k} ; P : x + y + z = 2 .$$

$$4. \bar{a} = x\bar{i} + (5z + x)\bar{j} + (y + x)\bar{k} ; P : x - y + z = 2 .$$

$$5. \bar{a} = (x + 4z)\bar{i} + (y + 2x)\bar{j} + (x + z)\bar{k} ; P : x + 2y + 2z = 2 .$$

$$6. \bar{a} = (x - z)\bar{i} + (2y - x)\bar{j} + (4x - z)\bar{k} ; P : 2x + y + z = 4 .$$

$$7. \bar{a} = (3x + z)\bar{i} + (4x + y)\bar{j} + (y + 3z)\bar{k} ; P : x - 2y + 3z = 6 .$$

$$8. \bar{a} = (x - z)\bar{i} + (3y - 2z)\bar{j} + (x - 2z)\bar{k} ; P : 3x + 2y + 3z = 6 .$$

$$9. \bar{a} = (2x + y)\bar{i} + (x + z)\bar{j} + (2x - y)\bar{k} ; P : x + 2y + 2z = 4 .$$

$$10. \bar{a} = (x + y)\bar{i} + 2z\bar{j} + (x + 4y)\bar{k} ; P : x + 2y + 2z = 4 .$$

$$11. \bar{a} = (y + z)\bar{i} + (-x + y)\bar{j} + (x + y)\bar{k} ; P : 2x + y + z = 4 .$$

$$12. \bar{a} = (y + 2z)\bar{i} + (-x + 2y)\bar{j} + (3y - z)\bar{k} ; P : x + y + 2z = 2 .$$

$$13. \bar{a} = (3x - 2y)\bar{i} + (3y - 2z)\bar{j} + x\bar{k} ; P : 2x + y + z = 4 .$$

$$14. \bar{a} = (2x + y)\bar{i} + (2y - 3z)\bar{j} + y\bar{k} ; P : 2x + 2y + z = 4 .$$

$$15. \bar{a} = (3x + 2z)\bar{i} + (x + z)\bar{j} + x\bar{k} ; P : 2x + 3y + 2z = 6 .$$

$$16. \bar{a} = (2y + z)\bar{i} + (3y + 2x)\bar{j} + 2z\bar{k} ; P : 3x + 2y + z = 6 .$$

$$17. \bar{a} = (2y - z)\bar{i} + (x + 2y)\bar{j} + 4y\bar{k} ; P : 3x + 2y + 3z = 6 .$$

$$18. \bar{a} = (y + 3z)\bar{i} + (2x - y)\bar{j} + 3x\bar{k} ; P : 3x + y + 3z = 3.$$

$$19. \bar{a} = (y - 4z)\bar{i} + (x - 2y)\bar{j} + 3x\bar{k} ; P : x + 3y + 3z = 3.$$

$$20. \bar{a} = (3y + x)\bar{i} + (2z + y)\bar{j} + 5y\bar{k} ; P : 3x - y + 3z = 3.$$

$$21. \bar{a} = (y + 4x)\bar{i} + (3z + 2y)\bar{j} + 4x\bar{k} ; P : 6x + y + 2z = 6.$$

$$22. \bar{a} = 2y\bar{i} + (x + 2z)\bar{j} + z\bar{k} ; P : x + 2y + z = 2.$$

$$23. \bar{a} = (2x + z)\bar{i} + 2z\bar{j} + (y + 2z)\bar{k} ; P : 2x + y + z = 4.$$

$$24. \bar{a} = (x - y)\bar{i} + y\bar{j} + (2x + z)\bar{k} ; P : x + 2y + z = 2.$$

$$25. \bar{a} = (x + 4y)\bar{i} + (y + 2z)\bar{j} + 2y\bar{k} ; P : x + y + z = 1.$$

$$26. \bar{a} = (x + z)\bar{i} + x\bar{j} + (2y + z)\bar{k} ; P : x + y + z = 4.$$

$$27. \bar{a} = (y + z)\bar{i} + z\bar{j} + (x + 2z)\bar{k} ; P : x + 3y + z = 3.$$

$$28. \bar{a} = (2x + z)\bar{i} + (2y + z)\bar{j} + 4y\bar{k} ; P : 2x + y + z = 4.$$

$$29. \bar{a} = (2x + z)\bar{i} + (x + 4y)\bar{j} + (2x + z)\bar{k} ; P : 2x - y + z = 2.$$

$$30. \bar{a} = (x - z)\bar{i} + (x + 2y)\bar{j} + 2x\bar{k} ; P : x - 2y + 2z = 2.$$

4 НАЙПРОСТІШІ ТИПИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Завдання 4.1. Знайти загальний розв'язок рівняння з відокремлюваними змінними.

$$1. \frac{dx}{dt} = 4t^3 \sqrt{x}.$$

$$2. 3x^2 \frac{dy}{dx} - 1 = \cos 2y.$$

$$3. xy' + y = 2y^2.$$

$$4. 2x^2 yy' - y^2 = 8.$$

$$5. (1 + e^y) dx - e^{2y} \sin^3 x dy = 0.$$

$$6. 1 + \frac{dy}{dx} = \sin 2x.$$

$$7. \frac{dz}{dx} = 5^{x-z}.$$

$$8. 2y \frac{dy}{dt} + 5t^4 = 1.$$

$$9. \frac{dy}{dx} = \frac{2(y+1)}{x+1}.$$

$$10. y' = 4x - 2.$$

$$11. x(1 + y^2) + y(1 + x^2) \frac{dy}{dx} = 0.$$

$$12. x^3 y^2 y' + 2 = 2y.$$

$$13. (x^2 - 1) \frac{dy}{dx} + 2xy = 0.$$

$$14. \frac{dy}{dx} = x^2 y^2 + 2xy^2.$$

$$15. xy dx + (x + 5) dy = 0.$$

$$16. \sqrt{y^2 + 9} dx = 2(x + 3) y dy.$$

$$17. \frac{dx}{y^3} - \frac{dy}{x^5} = 0.$$

$$18. ye^x dx = \ln y dy.$$

$$19. (y^2 - 5) \frac{dy}{dx} + 2x^3 y^2 = 0.$$

$$20. y' \operatorname{ctg} x + y = 2.$$

21. $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$.

22. $\operatorname{ctgx} \frac{dy}{dx} = y \ln y$.

23. $\frac{dy}{dx} - (5x - 2) \operatorname{ctgy} = 0$.

24. $(x^2 + 16) \frac{dy}{dx} + 4y^2 = 0$.

25. $\operatorname{tgx} \frac{dy}{dx} = y + 3$.

26. $\sin x \cdot \operatorname{ctg} y \, dx - \frac{dy}{\sin x} = 0$.

27. $\sin y \, dx + x \cos y \, dy = 0$.

28. $y' \sqrt{1 - x^2} - \operatorname{tg} y = 0$.

29. $xy' = y + 4$.

30. $(4 + y^2) \, dx - 2(y + yx^2) \, dy = 0$.

Завдання 4.2. Знайти загальний розв'язок однорідного рівняння.

1. $x^2 y' = y^2 - 2xy$.

2. $y \, dx + (2x^2/y + x) \, dy = 0$.

3. $2x \, dy = (x + 2y) \, dx$.

4. $xy' = y - 5xe^{5y/x}$.

5. $\left(x - y \cos \frac{y}{x}\right) \, dx + x \cos \frac{y}{x} \, dy = 0$.

6. $\frac{dy}{dx} = \frac{y + 6x}{x}$.

7. $xy' - y = (x + y) \ln \frac{x + y}{x}$.

8. $(5x + 2y) \, dx - x \, dy = 0$.

9. $(x - y) \, dx + (x + y) \, dy = 0$.

10. $(y^3 - 2x^2 y) \, dx + x^3 \, dy = 0$.

11. $\frac{dy}{dx} = \frac{xy + y^2 e^{-x/y}}{x^2}$.

12. $2x^3 y' = y(2x^2 - y^2)$.

13. $y^2 + x^2 y' = xy y'$.

14. $(x^2 + y^2) y' = 2xy$.

$$15. xy' - y = 5x \operatorname{ctg} \frac{y}{x}.$$

$$16. 2xy + 2y^2 = (x^2 + xy)y'.$$

$$17. 5x(x - y)y' = xy - y^2.$$

$$18. xy' + y \left(\ln \frac{y}{x} - 1 \right) = 0.$$

$$19. x^2 y' = y(x + y).$$

$$20. y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

$$21. ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0.$$

$$22. y'x^2 + xy + y^2 = 0.$$

$$23. xy' = y \ln(y/x) + y.$$

$$24. (y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0.$$

$$25. \ln(y/x)xy' = y.$$

$$26. (y + \sqrt{xy})dx = xdy.$$

$$27. y' = \frac{y}{x} - 5.$$

$$28. \left(x - y \operatorname{tg} \frac{y}{x} \right) dx + x \operatorname{tg} \frac{y}{x} dy = 0.$$

$$29. xyy' = 5x^2 + y^2.$$

$$30. \left(x - y \sin \frac{y}{x} \right) dx + x \sin \frac{y}{x} dy = 0.$$

Завдання 4.3. Знайти загальний розв'язок лінійного рівняння першого порядку або рівняння Бернуллі.

$$1. y' = \frac{x}{y} e^{2x} + y.$$

$$2. \frac{dx}{x} = \left(\frac{1}{y} - 2x \right) dy.$$

$$3. (x^2 - 1)y' - xy = x^3 - x.$$

$$4. x \frac{dy}{dx} + y = \sin x.$$

$$5. x \frac{dy}{dx} + y = \ln x + 1.$$

$$6. x^2 \frac{dy}{dx} + xy + 1 = 0.$$

7. $xy' - 2y + x^2 = 0$.

8. $\frac{dy}{dx} - 2xy = 3x^2 - 2x^4$.

9. $\frac{dy}{dx} - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x$.

10. $xy' - 2y = 2x^4$.

11. $y' + y \operatorname{tg} x = \sec x$.

12. $(xy + e^x)dx - xdy = 0$.

13. $x^2 y' + xy + 1 = 0$.

14. $\frac{dy}{dx} - y \cos x = e^{-\sin x}$.

15. $xy' - 2x^2 \sqrt{y} = 4y$.

16. $xy' + 2y + x^5 y^3 e^x = 0$.

17. $2y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2 - 1}$.

18. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^2$.

19. $\frac{dy}{dx} - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x$.

20. $2x(x^2 + y)dx = dy$.

21. $y = x(y' - x \cos x)$.

22. $(xy' - 1) \ln x = 2y$.

23. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} + \frac{x^2}{2y}$.

24. $x \frac{dy}{dx} + (x+1)y = 3x^2 e^{-x}$.

25. $xy^2 y' = x^2 + y^3$.

26. $(x+1)(y' + y^2) = -y$.

27. $y' + 2y = y^2 e^x$.

28. $\frac{dy}{dx} = y^4 \cos x + y \operatorname{tg} x$.

29. $x^2 y' = 2xy + 3$.

30. $\frac{dy}{dx} + 2xy = x e^{-x^2}$.

Завдання 4.4. Знайти загальний розв'язок рівняння в повних диференціалах.

$$1. (3y^2 + 2xy + 2x)dx + (6xy + x^2 + 3)dy = 0.$$

$$2. (x + y + 1)dx + (x - y^2 + 3)dy = 0.$$

$$3. e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0.$$

$$4. \left(4 - \frac{y^2}{x^2}\right)dx + \frac{2y}{x}dy = 0.$$

$$5. (\sin 2x + 2\cos(x + y))dx - 2\cos(x + y)dy = 0.$$

$$6. xy^2dx + y(x^2 + y^2)dy = 0.$$

$$7. \left(xe^x + \frac{y}{x^2}\right)dx - \frac{1}{x}dy = 0.$$

$$8. \frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0.$$

$$9. 3x^2e^ydx + (x^3e^y - 1)dy = 0.$$

$$10. (2x + 3x^2y)dx + (x^3 - 3y^2)dy = 0.$$

$$11. (2xy + 3y^2)dx + (x^2 + 6xy - 3y^2)dy = 0.$$

$$12. (2 - 9xy^2)xdx + (-6x^3 + 4y^2)ydy = 0.$$

$$13. 2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0.$$

$$14. 3x^2(1 + \ln y)dx - \left(2y - \frac{x^3}{y}\right)dy = 0.$$

$$15. 2x(1 + \sqrt{x^2 - y})dx - \sqrt{x^2 - y}dy = 0.$$

$$16. \frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0.$$

$$17. (2x + e^{x/y})dx + \left(1 - \frac{x}{y}\right)e^{x/y}dy = 0.$$

$$18. (10xy - 8y + 1)dx + (5x^2 - 8x + 3)dy = 0.$$

$$19. (x^2 + y^2 - 1)xdx + (x^2 + y^2 + 1)ydy = 0.$$

$$20. (ychx + shy)dx + (xchy + shx)dy = 0$$

$$21. e^y dx + (\cos y + xe^y)dy = 0.$$

$$22. \frac{y}{x^2} dx - \frac{xy + 1}{x} dy = 0.$$

$$23. (y^3 + \cos x)dx + (3xy^2 + e^y)dy = 0.$$

$$24. (x^3 - 3xy^2 + 2)dx - (3x^2y - y^2)dy = 0.$$

$$25. e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0.$$

$$26. (5x^4y^4 + 28x^6)dx + (4x^5y^3 - 3y^2)dy = 0.$$

$$27. (3y^3 \cos 3x + 7)dx + (3y^2 \sin 3x - 2y)dy = 0.$$

$$28. \left(\frac{1}{x-y} + 3x^2y^7\right)dx + \left(7x^3y^6 - \frac{1}{x-y}\right)dy = 0.$$

$$29. \left(\sin y + y \sin x + \frac{1}{x}\right)dx + \left(x \cos y - \cos x + \frac{1}{y}\right)dy = 0.$$

$$30. (x^3 - 4xy^2 + 2)dx - (4x^2y - y^2)dy = 0$$

Завдання 4.5. Знайти загальний розв'язок рівняння вищого порядку.

1. $yy'' + 1 = y'^2$. 2. $y''' = y''^2$. 3. $y''' = 2(y'' - 1)\operatorname{ctgx}$.
4. $y'''^3 + xy'' = 2y'$. 5. $y'' + y'^2 = 2e^{-y}$. 6. $y''^2 = y'^2 + 1$.
7. $y'' - xy''' + y'''^3 = 0$. 8. $y^4 - y^3y'' = 1$. 9. $y''(2y' + x) = 1$.
10. $(1 - x^2)y'' + xy' = 2$. 11. $(y' + 2y)y'' = y'^2$. 12. $y''' \cdot y'^2 = y'''^3$.
13. $xy'' = y' + x(y'^2 + x^2)$. 14. $xyy'' - xy'^2 = yy'$. 15. $xy''' = y'' - xy''$.
16. $x^2y'' = y'^2$. 17. $y^3y'' = 1$. 18. $y'' = 2yy'$.
19. $y''(e^x + 1) + y' = 0$. 20. $yy'' = y'^2 - y'^3$. 21. $2yy'' = y^2 + y'^2$.
22. $y''^2 + y' = xy''$. 23. $y''' = y'' - xy''$. 24. $y'' = e^y$.
25. $2y'(y'' + 2) = xy'''^2$. 26. $y'^2 = (3y - 2y')y''$. 27. $y''^2 - 2y'y''' + 1 = 0$.
28. $yy'' + y = y'^2$. 29. $2xy'y'' = y'^2 - 1$. 30. $y'^2 + 2yy'' = 0$.

Завдання 4.6. Знайти розв'язок задачі Коші.

1. $y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}$, $y(2) = 0$, $y'(2) = 4$.
2. $2y' = 3y^2$, $y(-2) = 1$, $y'(-2) = 1$.
3. $yy'' = y'^2 - y'^3$, $y(1) = 1$, $y'(1) = -1$.
4. $y^3y'' = -1$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.

$$5. y^4 - y^3 y'' = 1, y(0) = \sqrt{2}, y'(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$6. y'' = e^{2y}, y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

$$7. y'' = xy' + y' + 1, y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

$$8. 2y'^2 = y''(y-1), y(1) = 2, y'(1) = -1.$$

$$9. (1+x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1.$$

$$10. y'' \cos y + y'^2 \sin y - y' = 0, y(-1) = \frac{\pi}{6}, y'(-1) = 2.$$

$$11. yy'' = 2xy'^2, y(2) = 2, y'(2) = 0,5.$$

$$12. y''/y' = 2yy'/(1+y^2), y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

$$13. yy'' - y'^2 = y^2, y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

$$14. y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}, y(2) = 0, y'(2) = 4.$$

$$15. y'' = e^{2y}, y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

$$16. y'' = 2\sqrt{y'}, y(0) = 1, y'(0) = 1.$$

$$17. yy'' - y'^2 = y^2 \ln y, y(0) = y'(0) = 1.$$

$$18. y' = xy'' - \frac{1}{2}(y'')^2, y(1) = 0, y'(1) = 0,5.$$

$$19. 3y'y'' = e^y, y(-3) = 0, y'(-3) = 1.$$

$$20. yy'' = y'^2 - y'^3, y(1) = 1, y'(1) = -1.$$

$$21. y'y''' - 3y''^2 = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 0.$$

$$22. 2y'^2 = (y-1)y'', y(1)=2, y'(1)=0.$$

$$23. (y'' - 2x)y - 2(y' - x^2)y' = 0, y(1) = \frac{1}{3}, y'(1) = 1.$$

$$24. 2yy'' - 3y'^2 = 4y^2, y(0)=1, y'(0)=0.$$

$$25. 3y'y'' = e^y, y(-3)=0, y'(-3)=1.$$

$$26. 4y' + y''^2 = 4xy'', y(0)=0, y'(0)=-1.$$

$$27. 2xy'' + y''' = 0, y(0) = \alpha_1, y'(0) = \alpha_2, y''(0) = \alpha_3.$$

$$28. y''^2 = 4(y' - 1), y(0)=0, y'(0)=2.$$

$$29. y''(x^2 + 1) = 2xy', y(0)=1, y'(0)=3.$$

$$30. xy'' + xy'^2 - y' = 0, y(2)=2, y'(2)=1.$$

5 ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТА СИСТЕМИ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Завдання 5.1. Знайти загальний розв'язок рівняння методом невизначених коефіцієнтів (з відшукуванням числових значень коефіцієнтів).

- | | |
|---|---|
| 1. $y'' - 5y' = 3x^2 + \sin 5x$. | 2. $y'' - 2y' + y = 3xe^x$. |
| 3. $y'' - 2y' + y = 2xe^x$. | 4. $y^{IV} - 2y^{IV} + y''' = 3x + 5e^x$. |
| 5. $y'' + 2y' + y = xe^{-x} + \cos x$. | 6. $y'' - 4y' + 3y = xe^x - 3e^{3x}$. |
| 7. $y'' - 5y' = 4x^2 - e^{5x}$. | 8. $y^{IV} - 8y' = xe^{2x} + x$. |
| 9. $y'' - 2y' + 2y = e^x + x \cos x$. | 10. $y'' + y = 4xe^x$. |
| 11. $y'' - y = 2 \sin x - 4 \cos x$. | 12. $y'' + 4y = \sin 2x$. |
| 13. $y'' + y = \cos x + \cos 2x$. | 14. $y'' - 3y' = e^{3x} - 18x$. |
| 15. $y'' - 2y' + y = 4e^x$. | 16. $y^{IV} + 2y'' + y = \cos x$. |
| 17. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 2e^x$. | 18. $y'' + y = 4x \cos x$. |
| 19. $y'' - 9y = e^{3x} \cos x$. | 20. $y^{IV} - y = 5e^x \sin x$. |
| 21. $y^{IV} - 8y' = xe^{2x}$. | 22. $y'' + 2y' + y = e^{-x} \cos x + xe^{-x}$. |
| 23. $y''' + y = x^2 - x + 1$. | 24. $y''' - 7y'' + 6y = x^2$. |
| 25. $y'' - 4y' + 3y = x$. | 26. $y''' - 2y'' + 2y' = 2x + e^x$. |
| 27. $y^{IV} - 2y^{IV} + y''' = e^x$. | 28. $y^{IV} + 2y'' + y = \cos x + \sin 2x$. |

$$29. y'' - 2y' + 5y = e^x + x \sin 2x. \quad 30. y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin 2x.$$

Завдання 5.2. Знайти загальний розв'язок рівняння методом невизначених коефіцієнтів (без відшукування числових значень коефіцієнтів).

$$1. y'' + 2y' + 5y = e^x((2x+1)\cos 2x + \sin 2x).$$

$$2. y'' - 4y' = (x-1)^2 + x^2 e^{4x}.$$

$$3. y^{IV} - y = (x+2)\cos x + e^x.$$

$$4. y''' - y = e^{-x/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + \sin x.$$

$$5. y^{VI} - y^V = 2xe^x + x.$$

$$6. y'' + 4y = e^{2x}(x^2 \sin 2x + \cos 2x).$$

$$7. y''' - 3y'' + 3y' - y = 2xe^x + 4.$$

$$8. y''' - 2y'' + y' = 4x + e^x + \cos 4x.$$

$$9. y'' + 3y' + 2y = e^{-2x} + 2.$$

$$10. y^{IV} + y'' = 7x - 3\cos x.$$

$$11. y'' + 4y' = 2x + e^{-2x} + x \cos 2x.$$

$$12. y''' - 9y' = 3 + e^{3x} + e^{3x} \sin 3x.$$

$$13. y''' - 5y'' + 4y' = x^2 + 2x^2 e^x + \cos x.$$

$$14. y^{IV} - 5y''' + 6y'' = 6\sin x + xe^{2x} + e^{2x} \cos 3x.$$

$$15. y^{IV} - 4y''' + 5y'' = x^2 \cos 2x + 2e^x \sin 2x.$$

$$16. y''' + 6y'' + 10y' = 2xe^{-3x} \sin x + 3x.$$

$$17. y'' + 9y = \cos 3x + 2x^2 \sin 3x.$$

$$18. y''' + 2y'' + y' = (x+1)\cos x + (x-4)x \sin x.$$

$$19. y'' + 4y = x^3(1 - \cos 2x).$$

$$20. y'' - 2y' + 2y = e^x(x \sin x + \cos x).$$

$$21. y'' + y = (2x+1)\cos x - 2\sin x + e^x.$$

$$22. y'' - 2y' + y = e^x(5 + \cos x).$$

$$23. y^{IV} - 2y'' + 1 = 6x^3 \sin x + e^x \cos x.$$

$$24. y'' + 2y' + y = e^x + xe^{-x}.$$

$$25. y^V - 2y^{IV} = x + (x+4)e^{2x}.$$

$$26. y^{IV} + 4y'' + 4y = x \sin 2x + \cos 2x.$$

$$27. y'' - 4y' + 13y = e^{2x}(x \cos 3x - (x+2)\sin 3x).$$

$$28. y'' - 4y' = xe^{4x} + 2x \sin x.$$

$$29. y'' + 4y' + 4 = xe^{-2x} + e^{4x} \sin x.$$

$$30. y'' - 8y' + 16y = (1-x)e^{4x} + \cos x.$$

Завдання 5.3. Знайти загальний розв'язок рівняння методом варіації довільних сталих.

$$1. y'' + 2y' + y = \frac{1}{xe^x}.$$

$$2. y'' + y = \operatorname{tg}^2 x.$$

$$3. y'' - 2y' + 2y = e^x x \sin x.$$

$$4. y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}.$$

$$5. y'' + y = \operatorname{tg} x.$$

$$6. y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}.$$

$$7. y'' + 9y = \frac{1}{\sin 3x}.$$

$$8. y'' + 9y = \sin 3x + \frac{1}{\cos 3x}.$$

$$9. y'' + 3y' + 2y = e^{2x} + \frac{1}{e^x + 1}.$$

$$10. y'' + y = \frac{4}{1 - \cos 2x}.$$

$$11. y'' - y = x + \operatorname{sh} x.$$

$$12. y'' - y' = 2e^{3x} \sin(e^{2x}).$$

$$13. y'' + 2y' = x + e^x \sin x.$$

$$14. y'' + 4y' + 4y = \frac{1}{4} e^{-2x} \ln x.$$

$$15. y'' + 4y = \cos^2 x.$$

$$16. y'' - 3y' + 2y = 1 + \frac{1}{e^x + 1}.$$

$$17. y'' - 2y' + y = \frac{2-x}{x^3} e^x.$$

$$18. y''' + y' = -\operatorname{tg}^2 x.$$

$$19. y'' + 4y' + 3y = \operatorname{ch} x.$$

$$20. y'' + 2y' + y = 6e^{-x} \sqrt{x+1}.$$

$$21. y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}.$$

$$22. y'' - 2y' + 2y = \frac{e^x}{\sin x}.$$

$$23. y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x.$$

$$24. y'' + 16y = \operatorname{ctg} 4x.$$

$$25. y'' + y' = \operatorname{ctg} x.$$

$$26. y'' - y' = e^{2x} \cos(e^x).$$

$$27. y'' + 16y = \frac{1}{\cos 4x}.$$

$$28. y'' - 4y' + 4 = \frac{e^{2x}}{x^2}.$$

$$29. y'' - 2y' + y = \frac{x^2 + 1}{x^2} e^x.$$

$$30. y'' + y = -\frac{1}{\sin^3 x}.$$

Завдання 5.4. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

а) методом виключення;

б) матричним методом.

$$1. \begin{cases} x' = 3x + 4y, \\ y' = y + 2x. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x' = -x - 5y, \\ y' = x + y. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 4x + 3y. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} y' = 8x - y, \\ x' = x + y. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x' = -3x + 2y, \\ y' = -2x + y. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x' = 3x - y, \\ y' = x + y. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x' = -3x + y, \\ y' = 4x + 2y. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} y' = x + 2y, \\ x' = -x + y. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x' = 5x + 2y, \\ y' = -4x - y. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 2x - y. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} x' = 5x + 2y, \\ y' = -4x - y. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = -x + y. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} x' = 3x + 2y, \\ y' = -x - y. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} x' = 5x - 2y, \\ y' = 3x - 2y. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} x' = 4x + 3y, \\ y' = x + 2y. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} x' = x + y, \\ y' = 8x - y. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} x' = x - y, \\ y' = y - 4x. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} x = x + y, \\ y = 8x + 3y. \end{cases} \quad 20. \begin{cases} x = -x + y, \\ y = 3x + y. \end{cases} \quad 21. \begin{cases} x = -3x + 2y, \\ y = y - 2x. \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} x = 2x + y, \\ y = x + 2y. \end{cases} \quad 23. \begin{cases} x = 2x + 2y, \\ y = -x - y. \end{cases} \quad 24. \begin{cases} x = x - y, \\ y = x + 3y. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} x = 5x + 2y, \\ y = -4x - y. \end{cases} \quad 26. \begin{cases} x = -x + 7y, \\ y = x + 5y. \end{cases} \quad 27. \begin{cases} x = 3x - y, \\ y = 4x - y. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} x = x + y, \\ y = 3x - y. \end{cases} \quad 29. \begin{cases} x = 4x - y, \\ y = x - 2y. \end{cases} \quad 30. \begin{cases} x = x - 2y, \\ y = 2x - 3y. \end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н. Берман. – М.: Наука, 1985. – 383 с.
2. Бугров Я.С. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М.: Наука, 1981. – 448 с.
3. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. пособие для вузов. Ч. 2 / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М. : Высш. шк., 1980. – 365 с.
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для ВТУЗов: в 2 т. / Н.С. Пискунов. – М.: Наука, 1985. – Т.1. – 432 с.
5. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для ВТУЗов: в 2 т. / Н.С. Пискунов. – М.: Наука, 1985. – Т.2. – 560 с.
6. Сборник задач по математике (для ВТУЗов). Специальные курсы / под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. – М. : Наука, 1984. – 610 с.
7. Сборник задач по курсу высшей математики / под ред. Г.И. Кручковича. – М.:Высш. шк., 1973. – 576 с.