

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний університет «Запорізька політехніка»

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
з дисципліни
“ОСНОВИ 3D МОДЕЛЮВАННЯ В
МАШИНОБУДУВАННІ”

для здобувачів освіти за другим (магістерським)
рівнем вищої освіти, спеціальностей:

G11 Машинобудування, G9 Прикладна механіка,
G12 Авіаційна та ракетно-космічна техніка
усіх освітніх програм та форм навчання

Конспект лекцій з дисципліни «Основи 3D моделювання в машинобудуванні» для здобувачів освіти за другим (магістерським) рівнем вищої освіти, спеціальностей: G11 Машинобудування, G9 Прикладна механіка, G12 Авіаційна та ракетно-космічна техніка усіх освітніх програм та форм навчання / Укл.: М.В. Фролов, С.В. Танченко – НУ «Запорізька політехніка», 2025. – 94 с.

Укладачі: М.В. Фролов, доц., к.т.н.

С.В. Танченко, ст. викладач

Рецензент: В.В. Солоха, доц., к.т.н

Відповідальний за випуск: В.П. Загородній

Затвержено
на засіданні кафедри
«Металорізальні верстати та
інструменти»
Протокол № 1 від 21.08.2025 р.

Рекомендовано
до видання НМК
Машинобудівного факультету.
Протокол № 1 від 26.08.2025 р.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
1. ОСНОВИ ГЕОМЕТРИЧНОГО 3D МОДЕЛЮВАННЯ	8
1.1. Опис геометричних об'єктів	8
1.2. Модифікації векторів	11
1.4. Однорідні координати	11
1.5 Питання для самоперевірки.....	12
2. ТОПОЛОГІЯ ОБОЛОНОК	13
2.1. Топологічні об'єкти	13
2.2 Ейлерова характеристика оболонок.....	17
2.3 Зв'язність оболонок.....	18
2.4 Орієнтованість оболонок	21
2.5. Формула Ейлера-Пуанкаре для замкнених орієнтованих оболонок	22
2.6 Оболонки для моделювання тіл	23
2.7 Питання для самоперевірки.....	26
3. СИСТЕМИ ГЕОМЕТРИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ.....	27
3.1. Системи каркасного моделювання	27
3.2 Системи поверхневого моделювання	28
3.3. Системи твердотільного моделювання.....	34
3.4 Нерізнорозмірні системи моделювання	38
3.5 Гібридне моделювання.....	39
3.6 Питання для самоперевірки.....	41
4. ПЕРЕТВОРЕННЯ СИСТЕМ КООРДИНАТ	42
4.1 Трансляція (паралельне переміщення)	42
4.2 Поворот систем координат	43
4.3 Масштабування.....	45
4.4 Відображення.....	47

4.5 Питання для самоперевірки.....	49
5. ГЕОМЕТРІЯ КРИВИХ ЛІНІЙ ТА ПОВЕРХОНЬ	50
6. ПРЕДСТАВЛЕННЯ КРИВИХ І ПОВЕРХОНЬ В 3D МОДЕЛЮВАННІ	58
6.1 Типи рівнянь кривих	58
6.2 Еквідистантні криві та перетин кривих.....	61
6.3 Способи побудови двовимірних та тривимірних (просторових) ліній.....	62
6.4 Типи рівнянь поверхонь.....	65
6.5 Білінійна поверхня.....	66
6.6 Клапоть Куна	67
6.7 Способи побудови поверхонь.....	70
6.8 Перетинання поверхонь	72
6.9 Питання для самоперевірки.....	73
7. АПРОКСИМАЦІЯ КРИВИХ ТА ПОВЕРХОНЬ. СПЛАЙНИ.....	74
7.1 Ламана лінія	75
7.2 Сплайн Лагранжа.....	76
7.3 Сплайн Ньютона	77
7.4 Сплайн Ерміта.....	78
7.5 Криві Без'є.....	79
7.6 В-сплайни	82
7.7 NURBS криві.....	84
7.8. Апроксимація поверхонь	85
7.9 Питання для самоперевірки.....	87
8. ВАРІАЦІЙНІ ЗВ'ЯЗКИ. ПАРАМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ	88
ЛІТЕРАТУРА.....	94

ВСТУП.

Підсистеми геометричного моделювання (ГМ) і машинної графіки (МГ) займають центральне місце в машинобудівних САПР-К (системах автоматизованого проектування). Конструювання виробів в них, як правило, проводиться в інтерактивному режимі при операції геометричними моделями, т.е. математичними об'єктами, що відображають форму деталей, структуру складальних вузлів і можливо деякі додаткові параметри (масу, момент інерції, кольори поверхні і т. п.).

У підсистемах ГМ і МГ типовий маршрут обробки даних передбачає отримання проектного рішення у прикладній програмі, його представлення у вигляді геометричної моделі (геометричне моделювання), підготовку проектного рішення до візуалізації, власне візуалізацію в апаратурі робочої станції і при необхідності коректування рішення в інтерактивному режимі. Дві останні операції реалізуються на базі апаратних засобів машинної графіки.

Коли говорять про математичне забезпечення ГМ і МГ, мають на увазі, перш за все моделі, методи і алгоритми для геометричного моделювання і підготовки до візуалізації. При цьому часто саме математичне забезпечення підготовки до візуалізації називають математичним забезпеченням машинної графіки.

Розрізняють математичне забезпечення двовимірного (2D) і тривимірного (3D) моделювання. Основною сферою застосування 2D-графіки є підготовка креслярської документації в машинобудівних САПР. У розвинених машинобудівних САПР використовують як 2D, так і 3D моделювання для синтезу конструкцій, представлення траєкторій робочих органів верстатів при обробці заготовок, генерації сітки кінцевих елементів при аналізі міцності і т. п.

В процесі 3D моделювання створюються геометричні моделі, тобто моделі, що відображають геометричні властивості виробів. Розрізняють геометричні моделі *каркасні (дротяні)*, *поверхневі* і *об'ємні (твердотільні)*.

Каркасна модель представляє форму деталі у вигляді кінцевої безлічі ліній, що лежать на поверхнях деталі. Для кожної лінії відомі координати кінцевих точок і вказана їх інцидентність (умова приналежності) ребрам або поверхням. Оперувати каркасною моделлю

на подальших операціях маршрутів проектування незручно, і тому каркасні моделі в даний час використовуються достатньо рідко.

Поверхнева модель відображає форму деталі за допомогою завдання поверхонь, що обмежують її, наприклад, у вигляді сукупності даних про грані, ребра і вершини. Особливе місце займають моделі деталей з поверхнями складної форми, так званими складними (скульптурними) поверхнями. До таких деталей відносяться корпуси багатьох транспортних засобів (наприклад, суден, автомобілів), деталі, що обтікають потоками рідини і газів (лопатки турбін, крила літаків) і ін.

Об'ємні моделі відрізняються тим, що в них в явній формі містяться дані щодо приналежності елементів внутрішньому або зовнішньому по відношенню до деталі простору. Розглянуті моделі відображають тіла із замкнутими об'ємами, що є так званими *різноманіттями* (*manifold*). Деякі системи геометричного моделювання допускають операцію *нерізноманітними* моделями (*nonmanifold*), прикладами яких можуть бути моделі тіл, що дотикаються один одного в одній точці або уподовж прямої. Нерізноманітні моделі зручні в процесі конструювання, коли на проміжних етапах корисно працювати одночасно з тривимірними і двовимірними моделями без задання товщини стінок конструкції і т. п.

Кінцевою метою 3D моделювання є побудова математичних моделей геометрії об'єктів. Ці моделі потрібні для рішень, проведення досліджень і виробництва матеріальних цінностей.

Геометричне моделювання вивчає методи побудови математичної моделі, що описує геометричні властивості предметів навколишнього світу. Як вже зазначалось, геометричне моделювання базується на аналітичній і диференціальній геометрії, обчислювальній математиці, варіаційному, топології і розробляє власні математичні методи моделювання.

Інструментом для геометричного моделювання служать математичні методи вирішення тих або інших. Використовувані методи дозволяють описувати геометричні властивості об'єктів, створювати їх математичні моделі і досліджувати їх шляхом проведення різних розрахунків і чисельних експериментів. За необхідності модельовані об'єкти редагуються і візуалізуються (побудова їх графічних відображень).

Для опису геометричних властивостей навколишніх предметів будують тверді тіла або просто тіла. Тіла у свою чергу описують, лініями і поверхнями. Усі вони мають певні загальні властивості, тому ними можна оперувати як об'єктами. Точки, лінії, поверхні і тіла називатимемо геометричними об'єктами. Геометричні об'єкти служать основними елементами математичної моделі геометрії реальних або уявних об'єктів. Будуватимемо їх в тривимірному евклідовому просторі, вважаючи за їх незмінними в часі.

У більшості випадків використовують декартову систему координат. У декартовій системі базисні вектори мають однакову довжину і постійний напрям в будь-якому місці простору. Це спрощує опис об'єктів, оскільки базисні вектори при диференціюванні виступають в ролі констант.

1. ОСНОВИ ГЕОМЕТРИЧНОГО 3D МОДЕЛЮВАННЯ

1.1. Опис геометричних об'єктів

Геометричні об'єкти

Геометричне моделювання вивчає форму оточуючих предметів, їх розміри, взаємне розташування та не розглядає їх фізичні властивості. Кінцевою метою 3D моделювання є побудова математичних моделей геометрії об'єктів. Ці моделі потрібні для рішень, проведення досліджень і виробництва матеріальних цінностей.

Геометричне моделювання вивчає методи побудови математичної моделі, що описує геометричні властивості предметів навколишнього світу. Як вже зазначалось, геометричне моделювання базується на аналітичній і диференціальній геометрії, обчислювальній математиці, варіаційному , топології і розробляє власні математичні методи моделювання.

Інструментом для геометричного моделювання служать математичні методи вирішення тих або інших. Використовувані методи дозволяють описувати геометричні властивості об'єктів, створювати їх математичні моделі і досліджувати їх шляхом проведення різних розрахунків і чисельних експериментів. За необхідності модельовані об'єкти редагуються і візуалізуються (побудова їх графічних відображень). Для опису геометричних властивостей навколишніх предметів будують тверді тіла або просто тіла. Тіла у свою чергу описують , лініями і поверхнями. Усі вони мають певні загальні властивості, тому ними можна оперувати як об'єктами. Таким чином, *лінії, поверхні і тіла називатимемо геометричними об'єктами.* (Рис. 1.1).

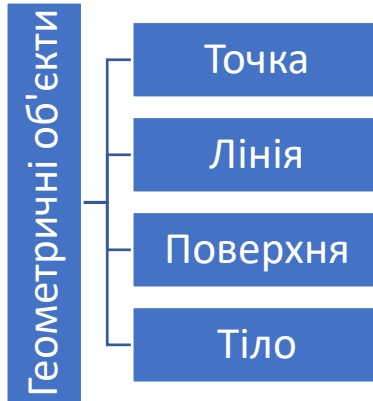


Рисунок 1.1 – Види геометричних об'єктів

Геометричні об'єкти служать основними елементами математичної моделі геометрії реальних або уявних об'єктів. Будуватимемо їх в тривимірному евклідовому просторі, вважаючи за їх незмінними в часі.

У більшості випадків використовують декартову систему координат. У декартовій системі базисні вектори мають однакову довжину і постійний напрям в будь-якому місці простору. Це спрощує опис об'єктів, оскільки базисні вектори при диференціюванні виступають в ролі констант.

Позначення

Для кількісних характеристик геометричних об'єктів використовують скалярні величини, вектори, а також тензори.

Скалярні величини позначатимемо рядковими латинського або грецького алфавіту. Вектори в просторі позначатимемо рядковими латинського алфавіту. Систему координат з початком в точці O і базисними векторами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ позначатимемо через $O\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

Для векторів в просторі використовуватимемо записи типу

$$\mathbf{r} = r_1 \mathbf{e}_1 + r_2 \mathbf{e}_2 + r_3 \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = [r_1 \quad r_2 \quad r_3]^T \quad (1.1)$$

де r_1, r_2, r_3 - компоненти вектору $\mathbf{r}$.

В ряді випадків зручніше використовувати позначення компонент векторів з індексами – у вигляді узагальнених ортів. В інших - також використовують більш звичні позначення компонент векторів через x, y, z .

Для опису складних геометричних об'єктів потрібні вектори, як у тривимірному, так і у двовимірному просторі, наприклад, на області параметрів поверхні. Для двовірних векторів використовуватимемо запис типу

$$\mathbf{p} = p_1 \mathbf{e}_1 + p_2 \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = [p_1 \quad p_2]^T \quad (1.2)$$

де p_1, p_2 - компоненти вектору $\mathbf{p}$.

Операцію скалярного векторів позначатимемо точкою. Наприклад:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \quad (1.3)$$

Символом “ $\times$ ” позначатимемо операцію векторного добутку векторів. Наприклад:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{e}_3 \quad (1.4)$$

Точка

Геометричне моделювання доцільно розпочинати вивчати з простих об'єктів з поступовим переходом до складнішим. Точка $\mathbf{R}$ простору в загальному випадку описується координатами u^1, u^2, u^3 деякої системи координат. У декартовій прямокутній системі координат точку можна описати за допомогою радіус-вектору $\mathbf{r} = [r_1 \quad r_2 \quad r_3]^T$

$r_3]^T$. Радіус-вектор визначає перетворення перенесення, що переводить початкову точку декартової системи координат в задану точку простору. Компоненти радіус-вектору точки дорівнюють її координатам.

Радіус-вектор на відміну від просто вектору пов'язаний з початком координат. Ця різниця позначається на формулах перетворення координат і на формулах зміни положення в просторі.

1.2. Модифікації векторів

Модифікаціями називатимемо зміни положення і форми геометричних об'єктів. Багато ліній, поверхні і тіла описуються зв'язаним (певним чином) набором , векторів і скалярів. При зміні положення геометричного об'єкту у просторі потрібно виконувати відповідні модифікації радіус-векторів і векторів, що описують даний об'єкт.

Простою модифікацією точки є її зсув в просторі на вектор зсуву t . Положення точки до модифікації називатимемо початковим, і описуватимемо радіус-вектором r_0 . Положення точки після модифікації називатимемо новим, і описуватимемо радіус-вектором r . Положення точки після модифікації описуватиметься радіус-вектором, рівним сумі радіус-вектору її початкового положення r_0 і вектору зсуву t :

$$r = r_0 + t \quad (1.5)$$

Компоненти вектору r дорівнюють сумі відповідних компонент векторів r_0 і t .

1.4. Однорідні координати

Модифікації зсуву, повороту і масштабування радіус-векторів описуються формулами, що мають однаковий вигляд. Тому перетворенням координат і модифікаціям точки можна надати єдиний простий вигляд:

$$R = A_t \cdot R_0 \quad (1.6)$$

Для цього потрібно збільшити розмірність векторів і матриць на одиницю. Вектор, доповнений ще однією компонентою, називається розширеним вектором. Компоненти розширеного вектору називаються **однорідними координатами**.

Представимо кожен радіус-вектор в розширеному вигляді

$$R = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ 1 \end{bmatrix} = [r_1 \quad r_2 \quad r_3 \quad 1]^T \quad (1.7)$$

Матриця A_t є матрицею A , окаймованою знизу нулями, а справа - вектором зсуву t у розширеному вигляді.

$$A_t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & t_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & t_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

Індекс матриці A_t свідчить про те, що вона є розширеною і включає вектор зсуву t .

1.5 Питання для самоперевірки

1. Розкрийте зміст поняття «геометричні об'єкти».
2. Як записуються рівняння векторів на площині та в просторі?
3. Які операції можуть виконуватися над векторами?
4. Які є основні принципи модифікації векторів і точок?
5. Розкрийте зміст поняття «однорідні координати».
6. Як записується матриця перетворення в однорідних координатах?

2. ТОПОЛОГІЯ ОБОЛОНОК

2.1. Топологічні об'єкти

Моделювання оточуючих нас предметів вимагає залучення більш складних геометричних об'єктів, ніж точки, криві і поверхні. За допомогою тільки однієї поверхні в загальному випадку неможливо описати геометричну форму деякого конкретного предмету, але це можна зробити за допомогою декількох поверхонь, зв'язавши їх певним чином. Те, яким чином поверхні будуть зв'язані між собою, створює додаткову інформацію для нових об'єктів, які побудовані на основі вже розглянутих геометричних об'єктів. Нашою метою є одержання геометричної моделі навколишніх предметів. Всі ці предмети займають деяку частину простору, або, інакше кажучи, займають кінцевий обсяг простору. Для їх моделювання потрібно описати сукупність поверхонь, що відокремлюють внутрішній об'єм предмета від іншої частини простору. Для цього потрібен набір певним чином побудованих і зрізаних поверхонь та інформація про взаємний зв'язок цих поверхонь, тобто, як одна поверхня переходить в іншу.

Оболонки

Поверхні можуть бути замкнутими за одним або двома параметричними напрямками, або незамкнутими. Незамкнуті поверхні мають межу. *Межею* називатимемо лінію на поверхні, яка відповідає руху її параметрів по межі їх області визначення. Лінію на замкнутій поверхні, по якій вона замикається сама на себе, будемо називати швом. Поверхні можуть стикуватися одна з одною по межах. Можна сказати, що по шву замкнута поверхня стикується сама із собою. Сукупність поверхонь, що стикаються по межах, називатимемо оболонкою. Оболонка може складатися з однієї поверхні або декількох поверхонь. Також як і окрема поверхня, оболонка може бути замкнутою й незамкнутою. Замкнута оболонка не має межі. Незамкнута оболонка має одну або кілька меж.

В топології нас будуть цікавити властивості геометричних об'єктів, які не залежать від кількісних характеристик. Розглядатимемо безперервний зв'язок між точками геометричних об'єктів. Припустимо, що оболонка виконана з еластичного матеріалу, що не розривається і не

склеюється. Досліджуймо властивості цієї оболонки, які зберігаються при всіляких її деформаціях. *Деформацією* називатимемо зміну форми оболонки шляхом розтягування, стиску, зсуву або вигину її поверхні, які не призводять до розривів і не потребують склеювання поверхонь оболонки. Наприклад, еластична оболонка у вигляді кубу може бути деформована в сферу, еліпсоїд, або оболонку у вигляді тетраедру, але не може бути деформована в тороїдальну оболонку. Сфера, еліпсоїд, оболонка у вигляді тетраедру або кубу можуть бути перетворені один в другий шляхом безперервних і зворотніх відображень, тому з точки зору топології вони є ідентичні або *гомеоморфні*.

Властивості геометричних об'єктів, які зберігаються при безперервних і зворотніх відображеннях одного простору в інший, вивчає наука *топологія*. З топологічної точки зору сфера, еліпсоїд, оболонка у вигляді тетраедру або кубу еквівалентні. Властивості, які характеризують безперервність точок деякої оболонки, є топологічними властивостями. Незважаючи на уявну невизначеність, топологічні властивості геометричних об'єктів пов'язані з фундаментальними математичними поняттями.

Топологія вивчає загальний випадок оболонок, які можуть самоперетинатися, мати або не мати межі, іти в нескінченність. Топологія оперує своїми об'єктами, які несуть інформацію про їх взаємний зв'язок, і встановлює між ними співвідношення. При моделюванні навколишніх нас об'єктів будуватимемо оболонки з *топологічних об'єктів*. Вони нестимуть і кількісну геометричну інформацію, і топологічну інформацію. Кількісна геометрична інформація топологічного об'єкту міститься у його геометричному носії, яким може бути точка, крива або поверхня.

Вершини, ребра, цикли, грані

Розглянемо оболонки, побудовані на основі поверхонь у тривимірному евклідовому просторі. Для відстеження зв'язків, які складають оболонку поверхонь, доповнимо поверхні інформацією про ці зв'язки та введемо топологічні об'єкти. Топологічні об'єкти нестимуть одночасно метричну і топологічну інформацію. Одним з топологічних об'єктів є оболонка.

При побудові оболонки використовуватимемо такі топологічні об'єкти, як грані, ребра, вершини і цикли (Рис. 2.1). Всі топологічні об'єкти мають загальні принципи побудови.

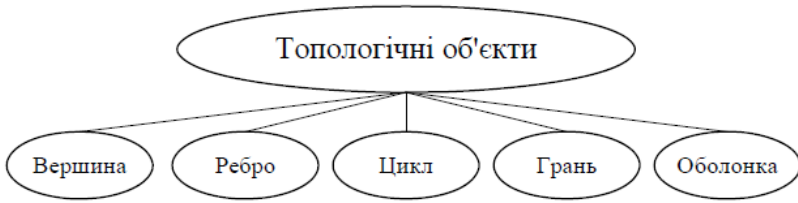


Рисунок 2.1 – Топологічні об'єкти

Гранню називатимемо топологічний об'єкт, який побудований на основі поверхні. Фактично грань є поверхнею плюс інформація про те, яка сторона поверхні є зовнішньою стороною грані, і інформація про її положення в оболонці, тобто інформація про її сусідів. Інформацію про сусідні грані оформлюють у вигляді циклів.

Цикл - це топологічний об'єкт, що описує одну із меж грані, і містить інформацію про те, де і як до даної грані примикають сусідні грані. Оскільки уздовж одного циклу до даної грані можуть примикати кілька сусідніх граней, то цикл складається з декількох ділянок. Кожна ділянка циклу опирається на деяке ребро. *Ребром* називатимемо топологічний об'єкт, який побудований на основі лінії стикування сусідніх граней або на основі межевої лінії оболонки. Грані стикуються тільки по ребрах. Таким чином, кожна грань з усіх боків оточена ребрами.

Вершиною називатимемо топологічний об'єкт, який побудований на основі точки, у якій стикуються ребра. Вершини можуть лежати тільки на краях ребер. Кожне ребро починається і кінчається у вершині.

Якщо ребро замкнуто, то воно починається і кінчається в одній і тій же вершині. Цикл складається з ребер, що утворюють замкнуту лінію уздовж однієї з меж грані. Цикл завжди замкнутий і йому приписують певний напрямок. Грань може містити кілька циклів, причому один з них є зовнішнім, а інші – внутрішніми, які цілком лежать всередині зовнішнього циклу. За позитивний напрямок циклу приймається напрямок руху уздовж циклу, за яким грань завжди знаходиться ліворуч, якщо дивитися з зовнішньої сторони грані. Таким чином, зовнішній цикл грані орієнтовано проти годинникової стрілки, а внутрішні цикли – за годинниковою стрілкою, якщо дивитися з

зовнішньої сторони грані. Кожний цикл проходить по одній з меж поверхні. На рис. 2.2 наведено приклад грані з її циклами.

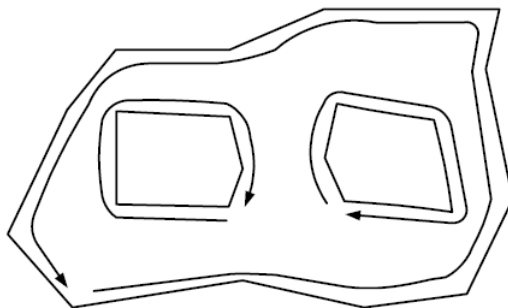


Рисунок 2.2 - Орієнтація зовнішнього та внутрішнього циклів грані

Грані, ребра та вершини будують на базі відомих геометричних об'єктів (точок, кривих і поверхонь) додаванням до них інформації про своїх сусідів і про взаємну орієнтацію. У результаті геометричні об'єкти набувають нову якість, чим і обумовлено введення топологічних об'єктів. Співвідношення між топологічними поняттями і традиційними поняттями з «конструкційної» геометрії показані на Рис. 2.3

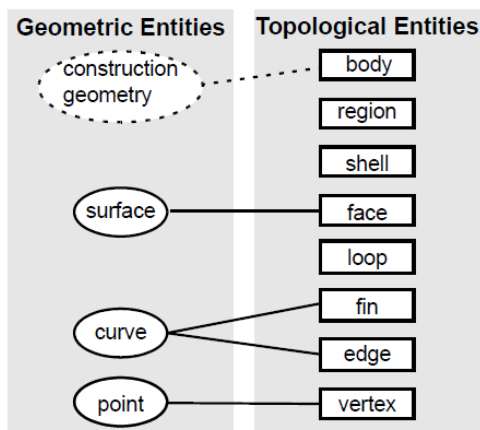


Рисунок 2.3 – Співвідношення між топологічними і геометричними елементами

2.2 Ейлерова характеристика оболонки

Ейлерова характеристика є однією з кількісних оцінок топологічних об'єктів. Об'єкти що мають однакову Ейлерову характеристику є гомеоморфними. Позначимо кількість топологічних об'єктів в оболонці:

- ✓ V – вершини;
- ✓ E – ребра;
- ✓ L – цикли;
- ✓ F – грані.

Визначається Ейлерова характеристика за наступним рівнянням:

$$H = F - E + V + (F - L) = 2F + V - E - L \quad (2.1)$$

Приклад

В наведеному прикладі (Рис.2.4) можна побачити, що додавання ребер, граней та циклів не змінює Ейлерову характеристику. Вона змінюється тільки при формуванні отвору в оболонці – тобто коли оболонки перестають бути гомеоморфними.

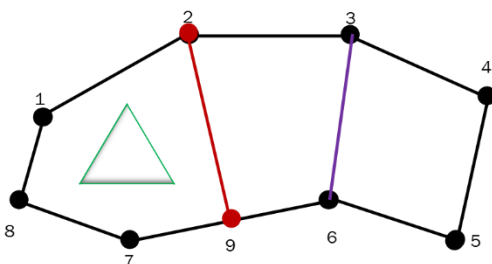


Рисунок 2.4 – Приклад оболонки

а) Оболонка обмежена контуром чорного кольору 1- 8

$$F = 1$$

$$H = 2 \cdot 1 + 8 - 8 - 1 = 1$$

$$E = 8$$

$$V = 8$$

$$L = 1$$

б) Додавання ребра 3-6

$$F = 2 \quad H = 2 \cdot 2 + 8 - 9 - 2 = 1$$

$$E = 9$$

$$V = 8$$

$$L = 2$$

в) Додавання ребра 2-9 и вершини 9. Формування додаткових ребер:

7-9, 9-6

$$F = 3 \quad H = 2 \cdot 3 + 9 - 11 - 3 = 1$$

$$E = 11$$

$$V = 9$$

$$L = 3$$

г) Додавання отвору трикутної форми

$$F = 3 \quad H = 2 \cdot 3 + 12 - 14 - 4 = 0$$

$$E = 14$$

$$V = 12$$

$$L = 4$$

Теорема Пуанкаре: Будь які дві замкнені поверхні з різними Ейлеровими характеристиками не гомеоморфні.

2.3 Зв'язність оболонок

Зв'язність – це топологічне поняття, яке характеризує цілісність деякого об'єкту. З іншого боку зв'язність відображає можливість розділити деякий топологічний об'єкт на окремі частини. Найпростішою є незамкнута оболонка з однією межею (одним циклом) топологічно еквівалентна колу. Якщо представити, що оболонки

виконані з легко деформовуваного матеріалу, то найпростішою є оболонка, якій шляхом деформування можна надати плоску форму з межею у вигляді кола. Прямокутна, еліптична, будь-яка плоска оболонка з однією межею є найпростішою. Розглянемо питання: яке мінімальне число ліній можна провести на поверхні оболонки, щоб по цих лініях її можна було б розрізати на дві найпростіші? Найпростіша оболонка ділиться на дві окремі частини будь-якою лінією, проведеною від однієї точки межі до іншої. Найпростішій оболонці приписують зв'язність, яка дорівнює одиниці. Її називають *однотвірною* (Рис.2.5).

Таким чином:

Зв'язність – топологічне поняття, що характеризує цілісність об'єкту.

Простіша оболонка (однотвірна) – незамкнена оболонка з однією межею (циклом)

Кількість ліній, що з'єднують границі і ділять оболонку на дві простіші - зв'язність (h).

Для замкненої оболонки лінія розрізу повинна бути замкненою.

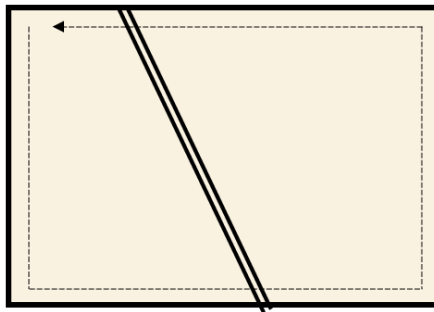


Рисунок 2.5 – Простіша оболонка

На оболонці зв'язності h можна побудувати $h-1$ кривих, що не порушують її цілісність.

Для того, щоб оболонку зв'язності h розкрити в однотвірну оболонку її треба розрізати по $h-1$ лініям.

На Рис. 2.6 представлена оболонка зв'язності $h = 4$.

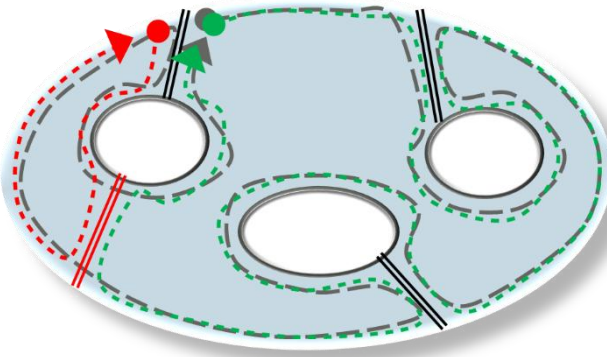


Рисунок 2.6 – Оболонка зв'язності $h=4$

Замкнені оболонки мають непарну зв'язність, замкнені – парну.
Так наприклад (Рис. 2.7):

- Сфера – $h = 1$
- Циліндр – $h = 2$
- Тор – $h = 3$



Рисунок 2.7 – Замкнені та незамкнені оболонки

- Якщо в замкненій оболонці W зв'язності h виконати один отвір з однією замкнутою межею, то зв'язність отриманої незамкнутої оболонки Q не зміниться
- Кожний наступний отвір з замкнутою межею буде збільшувати зв'язність оболонки Q на одиницю. (Рис.2.8)



Рисунок 2.8 – Отвори в оболонках та зв'язність

2.4 Орієнтованість оболонок

Оболонки є орієнтовними, якщо одну їх сторону можна визначити як зовнішню, а іншу – як внутрішню (сторони можна зафарбувати у різні кольори). Зовнішні та внутрішні сторони визначаються направленням вектору нормалі до поверхні, що направляється в протилежному напрямку до «тіла» оболонки (Рис. 2.9). До не орієнтованих оболонок відносяться : лист Мебіуса та пляшка Клейна (Рис. 2.10)

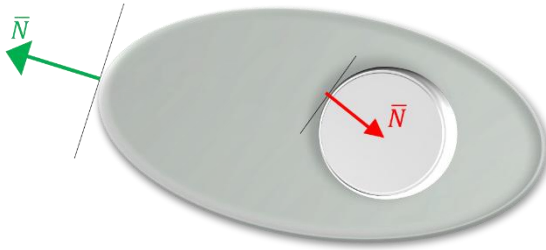


Рисунок 2.9 – Орієнтованість оболонки

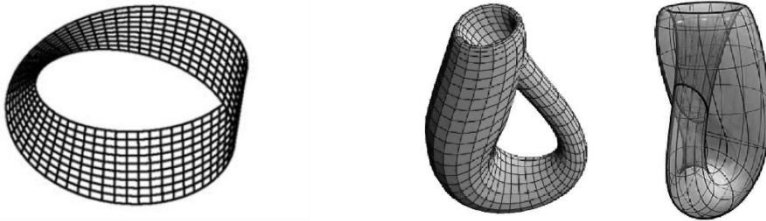


Рисунок 2.10 – Неорієнтовані оболонки

2.5. Формула Ейлера-Пуанкаре для замкнених орієнтованих оболонок

Для замкнених, орієнтуємих оболонок, що не перетинаються самі на себе, Ейлерову характеристику можна виразити наступним чином:

$$H = 3 - h \quad (2.2)$$

Будь якій замкненій оболонці можна придати форму сфери з G «ручками» шляхом деформації (Рис.2.11). Тут G характеризує топологічний тип (род) об'єкту – *genus*, що використовується замість зв'язності (Рис.2.12). Співвідношення між G та зв'язністю h визначається:

$$h = 2G + 1 \quad (2.3)$$

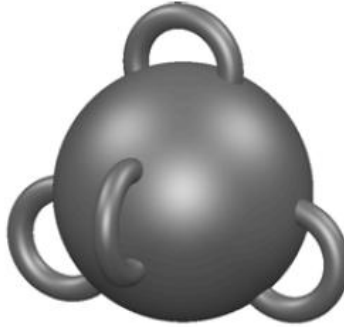


Рисунок 2.11 – Сфера з «ручками»

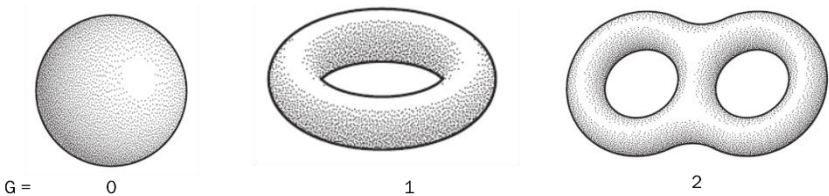


Рисунок 2.12 – Топологічний род об'єкту (genus)

2.6 Оболонки для моделювання тіл

Розглянемо взаємно однозначне і безперервне відображення однієї оболонки на іншу. При цьому відображенні сусідні точки залишаються сусідніми. Таке відображення може спотворювати оболонку, але при цьому зв'язані частини залишаються зв'язаними. Одним з видів відображення є деформація. При деформації топологічний об'єкт як ціле безупинно переходить сам у себе.

Рух оболонки в просторі є окремим випадком деформації, тоді як дзеркальне відображення оболонки відносно площини не є деформацією. При дзеркальному відображенні змінюється на зворотний напрямок обходу всякої замкнутої кривої на оболонці, а деформація зберігає напрямок обходу незмінним.

Все різноманіття оболонок можна класифікувати з топологічної точки зору. До одного і того ж типу відносять оболонки, які топологічно можуть бути безперервно і взаємно однозначно відображені одна на іншу. Для цього повинні бути виконані наступні умови:

- 1) *оболонки повинні мати однакову зв'язність;*
- 2) *оболонки повинні бути орієнтованими, або неорієнтованими;*
- 3) *оболонки повинні бути замкнутими, або мати однакове число меж.*

Ці три необхідних умови безперервного і взаємно однозначного відображення двох оболонок також є і достатніми умовами. Природно, що оболонки, які мають різне число меж, не можуть бути відображені одна на іншу.

Зв'язність обумовлює існування системи розрізів оболонки, що при топологічному відображенні переходить у систему розрізів такої ж структури на іншій оболонці. Отже, оболонки різної зв'язності не можуть бути відображені одна на іншу.

Можна довести, що всяка оболонка, яку можна відобразити на орієнтовану оболонку, також є орієнтованою. Це визначає третю умову приналежності оболонок до одного типу. Оболонки, що мають однакову зв'язність, орієнтованість і число меж, є топологічно еквівалентними.

Для моделювання деталей підходять замкнуті двобічні оболонки, які не перетинають самі себе. До них відносять оболонки, топологічно еквівалентні сфері з G ручками. Саме такі замкнуті оболонки використовуватимемо для геометричного моделювання. До вершин, ребр, циклів і граней висуємо наступні вимоги:

- Грані не повинні перетинати самі себе.
- Грані стикаються тільки по ребрах, причому в кожному ребрі стикаються тільки дві грані. Оболонка, представлена на рис. 2.13, некоректна, оскільки в ребрі AB стикаються чотири грані. Така оболонка топологічно повинна бути представлена одним зі способів, наведених на рис. 2.14.
- Ребра стикаються тільки у вершинах. У кожній вершині може стиковатися будь-яке кінцеве число ребер. Кожну вершину можна обійти по поверхні оболонки, але при цьому необхідно перетнути всі ребра, що стикаються у вершині, і обійти всі грані, які примикають до вершини. Такі вершини називатимемо простими.

Оболонка, представлена на рис. 2.15, також некоректна, оскільки вершину *A* можна обійти по поверхнях граней, не перетинаючи всіх ребер, які стікуються в ній.

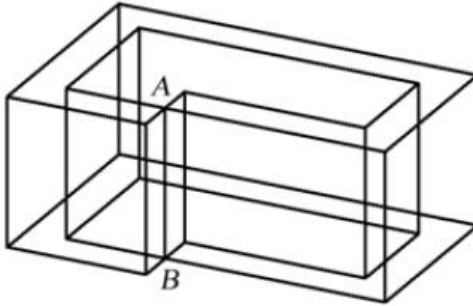


Рисунок 2.13 – У кожному ребрі повинні перетинатися тільки 2 грані

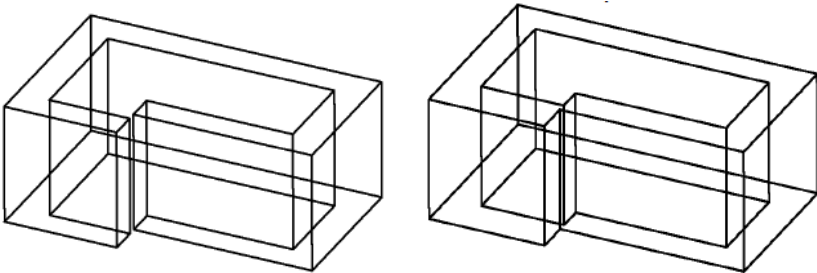


Рисунок 2.14 – Коректні оболонки

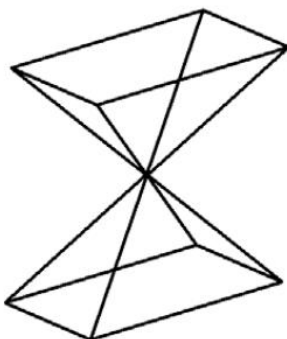


Рисунок 2.15 – Некоректна оболонка

Таким чином, для моделювання використовуватимемо оболонки, вершини яких є простими, грані перетинаються по ребрах, причому в кожному ребрі стикаються тільки дві грані. Такі оболонки називатимемо однорідними. В однорідних оболонках всі топологічні елементи побудовані за єдиними правилами.

2.7 Питання для самоперевірки.

1. Дайте коротку характеристику топологічних об'єктів.
2. Укажіть топологічні особливості оболонок.
3. Укажіть порівняльні топологічні особливості вершин, ребер, циклів і граней.
4. Як визначається напрямок внутрішніх та зовнішніх циклів?
5. Розкрийте зміст поняття «Ейлерова характеристика оболонок».
6. Яка оболонка є простішою?
7. Розкрийте зміст поняття «зв'язність оболонок».
8. Розкрийте зміст поняття «орієнтованість оболонок».
9. Які є топологічні особливості листа Мебіуса?
10. Які є топологічні особливості пляшки Клейна?
11. Які є загальні принципи вибору оболонок для моделювання тіл?
12. Що таке топологічний рід (genus) оболонки?
13. Як визначити топологічний рід оболонки, якщо відоме число її граней, ребер, вершин і циклів?
14. Як формулюється теорема Пуанкаре?

3. СИСТЕМИ ГЕОМЕТРИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Розрізняють наступні системи геометричного моделювання, розвиток яких відбувався саме в цьому порядку:

- 1) Каркасне
- 2) Поверхневе
- 3) Твердотільне
- 4) Нерізноманітне
- 5) Гібридне

3.1. Системи каркасного моделювання

У системах каркасного моделювання (*wireframe modeling systems*) форму представляють у вигляді набору характеристичних ліній, що характеризують її, і їх кінцевих точок. Лінії і точки використовують для представлення тривимірних об'єктів на екрані, а зміну форми здійснюють шляхом зміни положення і розмірів відрізків і точок. Іншими словами, візуальна модель є каркасним кресленням форми, а відповідним математичним описом є набір рівнянь кривих, координат точок і відомостей про зв'язність кривих і точок. Відомості про зв'язність описують приналежність точок до конкретних кривих, а також перетин кривих одна з одною. Системи каркасного моделювання були популярні у ті часи, коли геометричне моделювання тільки почало зароджуватися. Їх популярність пояснювали тим, що в системах каркасного моделювання створення форм виконували через послідовність простих дій, так що користувачам було досить легко створювати форми самостійно. Проте візуальна модель, яку складають лише одні лінії, може бути неоднозначною. Більш того, відповідний математичний опис не містить відомостей про внутрішні і зовнішні поверхні модельованого об'єкту. Без цих відомостей неможливо розрахувати масу об'єкту, визначити траєкторії переміщення інструменту при обробці об'єкту або створити сітку для скінченоелементного аналізу, не дивлячись на те, що об'єкт здається тривимірним. Оскільки ці операції є невід'ємною частиною процесу проектування, системи каркасного моделювання були поступово

вигінені системами поверхневого і твердотільного моделювання. Приклад каркасного моделювання представлено на Рис. 3.1

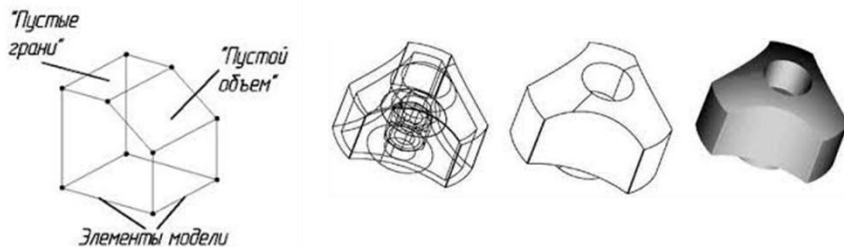


Рисунок 3.1 – Каркасне моделювання

3.2 Системи поверхневого моделювання

У системах поверхневого моделювання (*surface modeling systems*) математичний опис візуальної моделі включає не тільки відомості про характеристичні лінії і їх кінцеві точки, як в каркасному моделюванні, але і дані про поверхні. При роботі з моделлю, яка відображається на екрані, змінюються рівняння поверхонь, рівняння кривих і координати кінцевих точок. Якщо поверхні не забарвлені і не затушовані, візуальна модель в системі поверхневого моделювання може виглядати точно так, як і в системі каркасного моделювання.

Математичний опис може включати відомості про зв'язність поверхонь, тобто про те, як поверхні з'єднані одна з одною і по яких кривих. Інколи ці відомості є дуже корисними. Наприклад, програма для формування траєкторії переміщення фрези на верстаті з ЧПК може використовувати цю інформацію для перевірки, чи не зачіпає фреза поверхонь, які примикають до оброблюваної. Проте в математичний опис моделей, що створювали в системах поверхневого моделювання, зазвичай включали рівняння нескінченних поверхонь (або їх параметри) без відомостей про зв'язність.

Прикладами атрибутів, що визначають поверхню, є положення і напрям центральної осі і радіус циліндру.

Існує три стандартні методи створення поверхонь в системах поверхневого моделювання:

- інтерполяція вхідних ;
- інтерполяція криволінійних сіток;
- трансляція або обертання заданої кривої.

Способи введення для кожного методу можуть залежати від конкретної системи поверхневого моделювання. Проте базовий метод введення для кожної системи легко визначити за представленням кривих і .

Системи поверхневого моделювання використовують для створення моделей зі складними поверхнями, тому що візуальна модель дозволяє оцінити естетичність проекту, а математичний опис дозволяє побудувати програму для обробки поверхонь деталі на верстаті з ЧПК.

Зазвичай поверхневе моделювання відбувається в наступній послідовності:

- 1) Створення окремих поверхонь;
- 2) Обрізка поверхонь по лініям перетину;
- 3) Спряження поверхонь (заокруглення, переходи та ін.)
- 4) Модифікація оболонки та створення ребер жорсткості.

Шляхом поверхневого моделювання можуть створюватися замкнені та незамкнені поверхні. Приклади приведені на Рис. 3.2

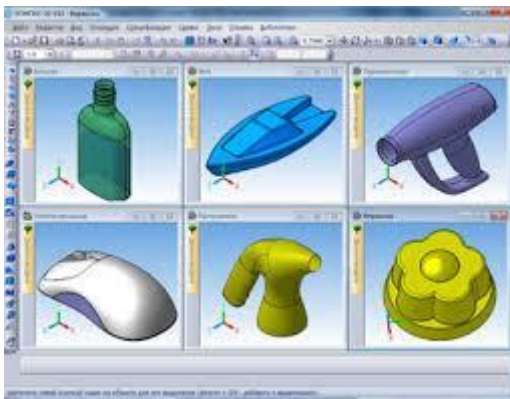


Рисунок 3.2 – Поверхневі моделі

Для придання поверхні товщини h до вихідної поверхні додається еквідистантна. У цьому випадку кажуть про створення тіла у формі листа. Отримане тіло описується наступним рівнянням:

$$r(u, v) = b(u, v) + h \cdot n(u, v) \quad (3.1)$$

Тут $n(u, v)$ – вектор нормалі до вихідної поверхні. Приклад наведено на Рис. 3.3

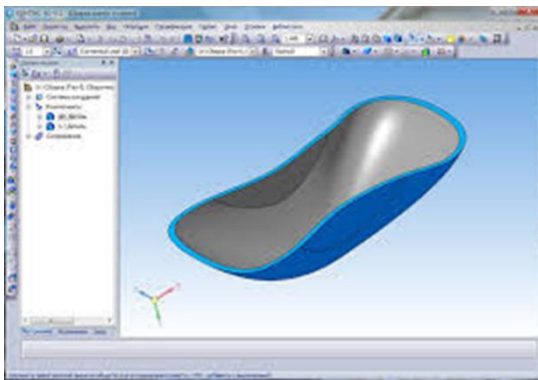


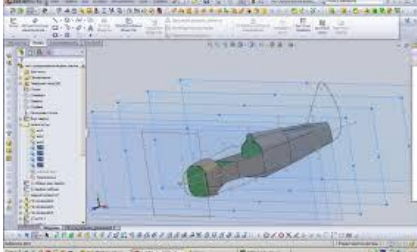
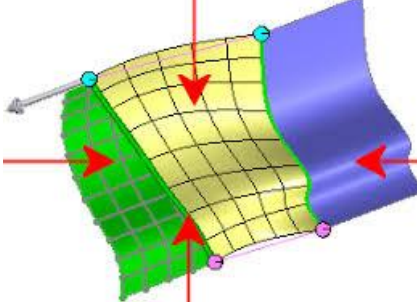
Рисунок 3.3 – Поверхнева модель – тіло у формі листа

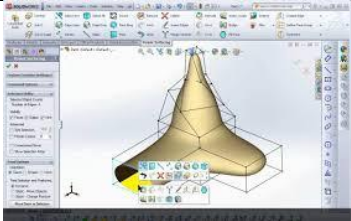
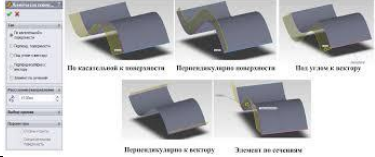
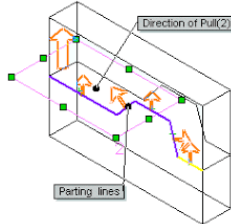
При поверхневому моделюванні використовуються поверхні, наведені в Табл. 3.1. Там-же наведено деякі пояснення до них.

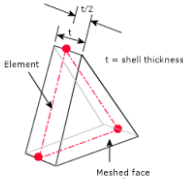
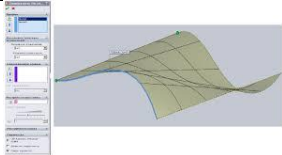
З поверхнями можуть виконуватися наступні дії:

- Подовження
- Обрізка
- Заповнення
- Нарощування
- Зшивка
- Заокруглення (спряження)
- Переміщення / обертання / копіювання
- Видалення

Таблиця 3.1 – Типи поверхонь, що використовуються при поверхневому моделюванні

Найменування поверхні	Пояснення	Приклад
Поверхня по перетинам	Будується по декільком поперечним перетинам з направляючими кривими	
Гранична поверхня	Аналог поверхні по перетинам; відрізняється тим, що будується по декільком довільно зорієнтованим в просторі 3D-кромкам інших поверхонь зі збереженням дотичних до них та з додержанням безперервності по другій похідній (гладке стикування); при побудові можуть використовуватися направляючі криві	

Найменування поверхні	Пояснення	Приклад
Поверхня довільної форми	Будується розбиттям сітки з контрольними точками на поверхні грані 3D-моделі; зміненням форми поверхні досягається перетаскуванням контрольних точок;	
Еквідистантна поверхня	Утворюється зміщенням на визначену відстань від існуючих граней чи поверхонь;	
Поверхня роз'єму	Використовується при проектуванні ливарних форм в якості допоміжної геометрії для розділення матриці та пуансона;	

Найменування поверхні	Пояснення	Приклад
Серединна поверхня	Створюється на середині (чи заданому проценті) товщини тонкостінної деталі;	 The diagram shows a triangular element of a shell. The total thickness is labeled as t = shell thickness. The mid-surface is indicated at a distance of $t/2$ from the top and bottom faces. The top face is labeled 'Element' and the bottom face is labeled 'Meshed face or surface'.
Лінійчатa поверхня	Будується під кутом до вибраної кромки і призначена для побудови граней з нахилом	 The image shows a screenshot of a CAD software interface. On the left is a vertical toolbar with various icons. The main area displays a 3D wireframe model of a curved, saddle-shaped surface, likely representing a shell or a complex face.

3.3. Системи твердотільного моделювання

Системи твердотільного моделювання (solid modeling systems) призначені для роботи з об'єктами, які складені із замкнутого об'єму або *моноліту (solid)*. У системах твердотільного моделювання, на відміну від систем каркасного і поверхневого моделювання, не допускають створення наборів поверхонь характеристичних ліній, якщо вони не утворюють замкнутого об'єму. Математичний опис об'єкту, створеного в системі твердотільного моделювання, містить відомості, за якими система може визначити, де знаходиться будь-яка : усередині об'єму, зовні або на його межі. За цими відомостями можна отримати будь-яку інформацію про об'єм тіла, тобто можуть бути розроблені додатки, які працюватимуть з об'єктом на рівні об'єму, а не на рівні поверхні. Наприклад, можна написати додаток, що формує сітку елементів об'ємного типу за твердотільною моделлю. Можна написати програму для формування всіх траєкторій фрези для верстату з ЧПК, необхідних для виготовлення деталі із заготовки. Ця програма працюватиме не з окремою , а з об'ємом, що виключить потребу у введенні даних для кожної . Всі ці можливості можуть бути реалізовані у тому випадку, якщо модель створюють у вигляді замкнутого об'єму. Проте створення моделі у вигляді замкнутого об'єму вимагає більшої кількості початкових даних у порівнянні з кількістю даних для математичного опису. Це одна з причин, за якими були розроблені системи моделювання нерізноманітних об'єктів. Такі системи моделювання дозволяють працювати з поверхнями і замкнутими об'ємами одночасно.

Якби система твердотільного моделювання вимагала введення всіх даних для повного математичного опису, вона була б складною для користувачів і вони відмовилися б від неї. Процес деталізації форми не був би схожий на інтуїтивний процес фізичного моделювання, і в результаті вийшло б зовсім не те, на що розраховували творці систем геометричного моделювання. Тому розробники систем твердотільного моделювання прагнуть надати прості і природні функції, аби користувачі могли працювати з об'ємними формами аналогічно роботі з фізичними моделями, не вдаючись до деталей математичного опису.

Функції моделювання, подібні до створення примітивів, Булевих операцій, підняття, побудови фігури обертання, повороту і

закруглення, вимагають від користувача зовсім небагато. Про всі деталі математичного опису системи піклуються самі.

Функції моделювання, підтримувані більшістю систем твердотільного моделювання, можуть бути розділені на п'ять основних груп.

До першої групи входять функції, що використовуються для створення простих форм на основі об'ємних заготовок, наявних в програмі, - так звані *функції створення примітивів (primitive creation functions)*. До цієї ж групи відносяться функції додавання і віднімання об'єму - *булеві оператори (Boolean operations)*. Функції моделювання з першої групи дозволяють проектувальникові швидко створити форму, близьку до кінцевої форми деталі.

Деякі з імовірних примітивів показані на Рис. 3.4, а логіка виконання булевих операцій над ними зрозуміла з Рис. 3.5



Рисунок 3.4 – Геометричні примітиви

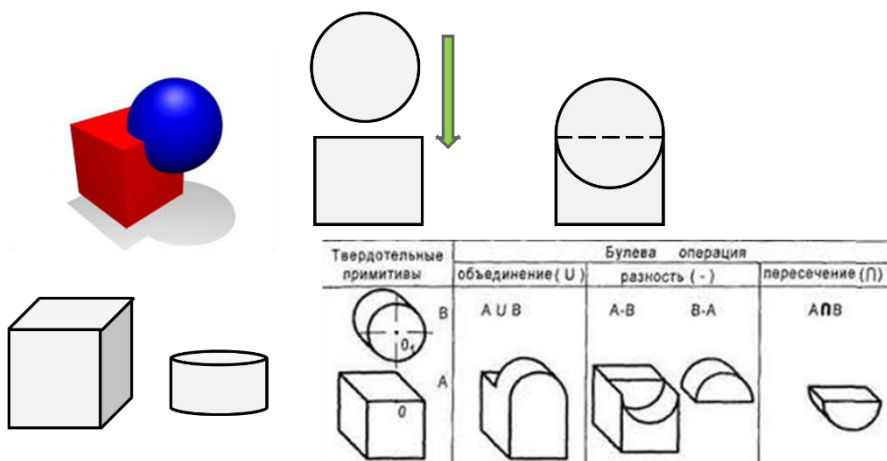


Рисунок 3.5 – Булеві операції над примітивами.

Результати виконання булевих операцій формулюються наступним чином:

- В об'єднання тіл ($A \cup B$) входить частина граней тіла A , яка лежить за межами тіла B та частина граней тіла B , яка лежить за межами тіла A .
- В перетин тіл ($A \cap B$) входить частина граней тіла A , яка лежить всередині тіла B і частина граней тіла B , яка лежить всередині тіла A .
- В різницю тіл ($A - B$) входить частина граней тіла A , яка лежить за межами тіла B та частина граней тіла B , яка лежить всередині тіла A .
- В різницю тіл ($B - A$) входить частина граней тіла B , яка лежить за межами тіла A та частина граней тіла A , яка лежить всередині тіла B .

До другої групи відносять функції створення об'ємних тіл шляхом переміщення поверхні. Функція *замітання* (*sweeping*) дозволяє створювати об'ємне тіло трансляцією або обертанням області, яка задана на площині. Побудова тіла обертання з плоскої кривої

називається також гойданням або *обертальним замінанням (swinging)*. Задаючи замкнуту плоску область, користувач може вказувати геометричні обмеження або вводити дані про розміри, а не малювати форму вручну. Тут під геометричними обмеженнями розуміють співвідношення між елементами рисунку (перпендикулярність відрізків, дотик дуги кола відрізком і т. п.). У цьому випадку система самостійно побудує точну форму, що задовольняє обмеженням. Зміна геометричних обмежень або розмірів дасть іншу плоску область і інше об'ємне тіло. Такий підхід називають параметричним моделюванням, оскільки зміна параметрів дозволяє отримати різні об'єкти. Параметрами можуть бути сталі (константи), що входять до геометричних обмежень, а також розміри. Функція *скінінгу (skinning)* створює об'ємне тіло, натягуючи поверхню на задані поперечні перерізи. Функції цієї групи дозволяють проектувальникові почати моделювання з форми, близької до кінцевого результату, оскільки одних поперечних перерізів цілком достатньо для точного опису кінцевого об'ємного тіла (Рис. 3.6)



Рис. 5.9. Заметание при трансляции



Рис. 5.10. Заметание при вращении

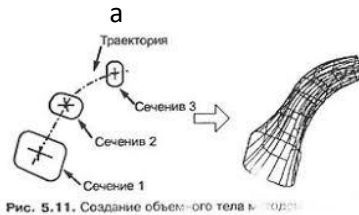


Рис. 5.11. Создание объемного тела методом

в

а) Трансляция; б) Замінання при обертанні; в) Скінінг

Рисунок 3.6 – Створення об'ємних тіл

До третьої групи входять функції моделювання, призначені головним чином для зміни існуючої форми. Типовими прикладами є функції *округлювання* або *плавного сполучення* (*rounding, blending*) і *підняття* (*lifting*).

До четвертої групи відносять функції, що дозволяють безпосередньо маніпулювати складовими об'ємних тіл, тобто вершинами, ребрами та гранями. Роботу з цими функціями (аналогічними функціям систем поверхневого моделювання) називають *моделюванням меж* (*boundary modeling*). До цієї групи входять функції, при використанні яких проектувальник може моделювати тверде тіло за допомогою вільних форм. Наприклад, він може давати системі команди типу «зробити отвір необхідного розміру в певному місці» або «зробити фаску необхідного розміру в певному місці». Роботу з такими функціями називають *об'єктно-орієнтованим* (або *характеристичним*) моделюванням (*feature-based modeling*).

Останнім часом функціям **п'ятої групи** приділяють особливу увагу, оскільки модель, побудована з їх допомогою, містить інформацію про процес створення, без якої неможливе автоматичне формування плану технологічного процесу виготовлення деталі. Модель, створена іншими засобами, містить тільки елементарні геометричні відомості про вершини, ребра і грані.

3.4 Нерізноманітні системи моделювання

Розглянуті вище системи базуються на тілах з замкненим об'ємом, тобто на різноманіттях (*manifold*). Такі системи не дозволяють створення структур, що не є різноманіттями. Порушенням цього правила, наприклад, є перетинання двох поверхонь в одній точці; дотик двох поверхонь вздовж кривої; два замкнених об'єма зі спільною гранню, ребром або вершиною; ребро, що виступає з точки на поверхні. Деякі приклади нерізноманітних структур наведені на Рис. 3.7.

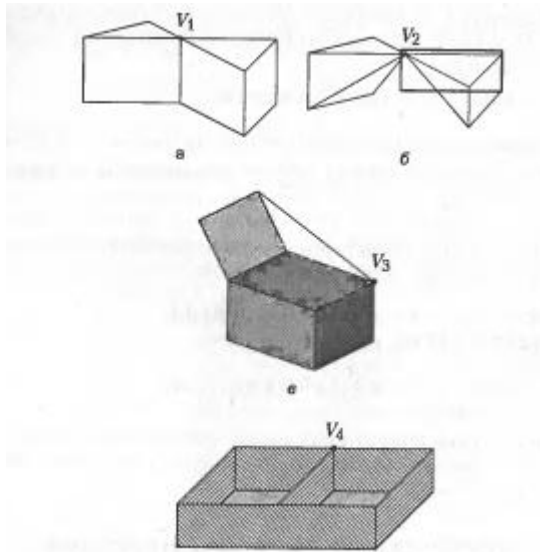


Рисунок 3.7 – Моделі, що не є різноманіттями.

В нерізноманітних системах все це дозволяється і моделі створені в них є абстрактними. Системи дозволяють використання каркасних, поверхневих і твердотільних моделей одночасно в одній середі моделювання, що розширює діапазон доступних моделей зверх можливостей кожної з систем. В нерізноманітних системах одночасно можуть використовуватися тримірні та двомірні моделі.

Абстрактна модель зручна тим, що вона не сковує творчу думку конструктора та може служити основою для проведення аналізу.

3.5 Гібридне моделювання

Використовує можливості розглянутих вище систем. Та дозволяє:

- створення твердотільного елемента шляхом придання поверхні товщини;
- заповнення замкнутого об'єму та отримання твердого тіла;

- вибір кромки і вершини поверхні, щоб використати їх в якості направляючої твердотільного елементу по кривій і по траєкторії;
- видалення грані твердого тіла, заміни грані поверхнею і т.п.

Приклади гібридного моделювання наведені на Рис. 3.8

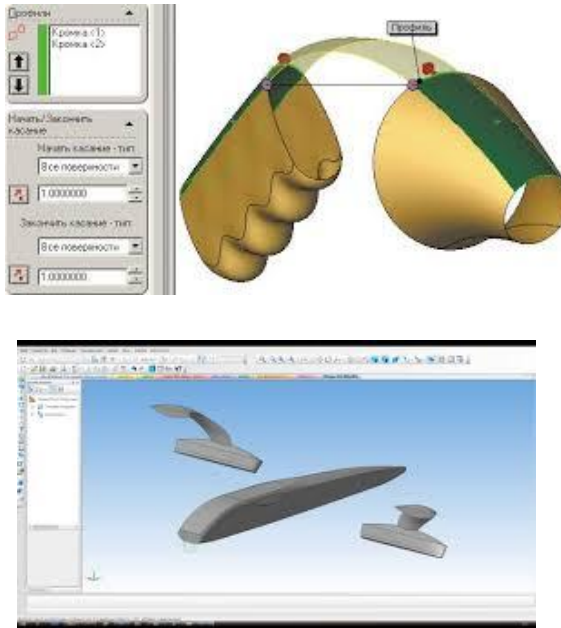


Рисунок 3.8 – Гібридне моделювання

3.6 Питання для самоперевірки.

1. Назвіть основні види систем геометричного моделювання.
2. Які є особливості систем каркасного моделювання?
3. Які є особливості систем поверхневого моделювання?
4. Які є типи поверхонь при поверхневому моделюванні?
5. Які є особливості систем твердотільного моделювання?
6. В чому полягають особливості нерізноманітних систем моделювання?
7. В чому полягає гібридне моделювання?
8. Які є особливості побудови тіл, отриманих рухом плоского контуру?
9. Як Ви розумієте суть побудови тіла видавлювання?
10. Як Ви розумієте суть побудови тіла обертання?
11. Як Ви розумієте суть побудови кінематичного тіла?
12. Які є особливості побудови тіла за плоскими перетинами?
13. Які є особливості побудови тіла у формі листа?
14. У чому полягають особливості застосування Булевих операцій над тілами?
15. Дайте визначення Булевим операціям.
16. Які дії можуть виконуватися з поверхнями?

4. ПЕРЕТВОРЕННЯ СИСТЕМ КООРДИНАТ

При 3D моделюванні типовою процедурою є переміщення в просторі точок, поверхонь або тіл. При цьому треба вміти визначати їх нове положення з урахуванням виду та характеру переміщення. Завдання вирішується пошуком нових координат точки або сукупності точок. Іншими словами, треба визначити координати точки у новій (загальній, світовій) системі, знаючи її координати в старій (модельній, місцевій) системі з урахуванням виду і характеру переміщень.

Координати довільної точки M в старій системі координат позначимо $M(X_m, Y_m, Z_m)$. Координати цієї ж точки в новій - $M(X_w, Y_w, Z_w)$

4.1 Трансляція (паралельне переміщення)

На Рис. 4.1 Показано переміщення нової системи координат відносно старої. В вихідному положенні вони співпадають. Переміщення відбувається: вздовж вісі X – на величину a ; вісі Y – b ; вісі Z – c .

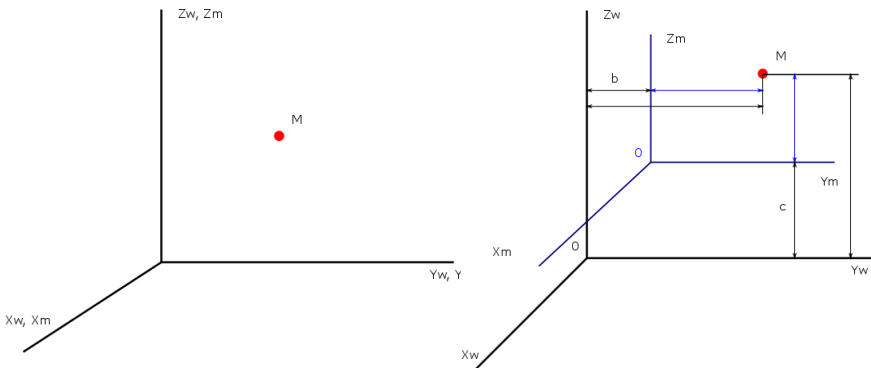


Рисунок 4.1 – Паралельне переміщення систем координат

Таким чином, нові координати, що цілком зрозуміло з Рис. 4.1 визначаються:

$$\begin{aligned} X_w &= X_m + a \\ Y_w &= Y_m + b \\ Z_w &= Z_m + c \end{aligned} \quad (4.1)$$

Або в більш загальному та універсальному матричному вигляді:

$$\begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} = Trans(a, b, c) \begin{bmatrix} X_m \\ Y_m \\ Z_m \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Де матриця трансляції:

$$Trans(a, b, c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

4.2 Поворот систем координат

Для наочності розглянемо поворот на площині використовуючи направляючі косинуси – косинуси кутів між осями (Рис. 4.2)

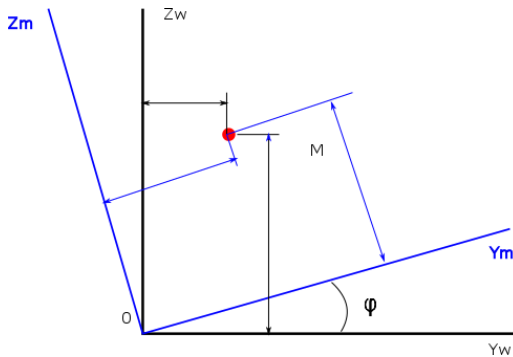


Рисунок 4.2 - Поворот систем координат

На зображеній схемі обертання відбувається проти часової стрілки – цей напрямок прийнято за позитивний, навколо осі X на кут φ . Використовуючи направляючі косинуси, матриця повороту навколо осі X буде визначатися:

$$R_x = \begin{bmatrix} \cos(Y_w Y_m) & \cos(Y_w Z_m) \\ \cos(Z_w Y_m) & \cos(Z_w Z_m) \end{bmatrix}$$

$$R_x = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \cos(90 + \varphi) \\ \cos(90 - \varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix}$$

$$R_x = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Сам поворот при цьому буде описуватися:

$$\begin{bmatrix} Y_w \\ Z_w \end{bmatrix} = R_x \begin{bmatrix} Y_m \\ Z_m \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Або у вигляді системи:

$$\begin{cases} Y_w = Y_m \cos(\varphi) - Z_m \sin(\varphi) \\ Z_w = Y_m \sin(\varphi) + Z_m \cos(\varphi) \end{cases} \quad (4.6)$$

У просторі, поворот навколо однієї з осей Ax буде описуватися:

$$\begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} = Rot(A_x, \varphi) \begin{bmatrix} X_m \\ Y_m \\ Z_m \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Матриці повороту у просторі мають наступний вигляд:

$$Rot(X, \varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Rot(Y, \varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$$Rot(Z, \varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.3 Масштабування

Розглянемо масштабування як процес змінення координат точки R_0 (Рис. 4.3) при якому вона переходить в точку R . При цьому точка Q є нерухомою і не змінює свого положення. Положення точки Q відносно початку координат визначається вектором q ; положення точки R_0 – вектором r_0 , а точки R – вектором r . Положення точок R_0 та R відносно точки Q визначаються відповідно векторами p та p_m . Масштабування вздовж осей не обов’язково має бути пропорційним.

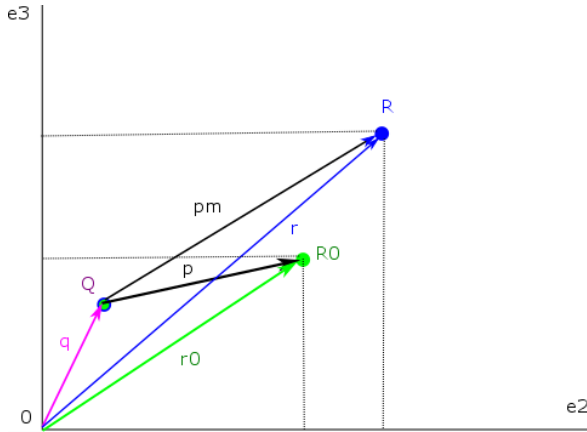


Рисунок 4.3 – Масштабування

З Рис. 4.3 запишемо векторні рівняння:

$$r_0 = q + p$$

$$p = r_0 - q$$

$$r = q + p_m$$

$$p_m = M \cdot p$$

Тут M – матриця масштабування. Виходячи з наведених рівнянь, з урахуванням масштабування, запишемо:

$$r = q + M(r_0 - q) \quad (4.9)$$

Де відповідні вектори мають наступні рівняння через орти e_1, e_2, e_3 :

$$q = q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3$$

$$r_0 = X_1 e_1 + Y_1 e_2 + Z_1 e_3$$

$$r = X_2 e_1 + Y_2 e_2 + Z_2 e_3$$

Матриця масштабування має вигляд:

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & q_1 \\ 0 & m_2 & 0 & q_2 \\ 0 & 0 & m_3 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

В рівнянні (4.10) m_1, m_2, m_3 – масштабні коефіцієнти по відповідним осям координат.

Виходячи з рівняння (4.9) процес масштабування буде виглядати:

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \\ 1 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} X_1 - q_1 \\ Y_1 - q_2 \\ Z_1 - q_3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Розкриваючи рівняння (4.11) масштабування по осям координат буде мати вигляд:

$$\begin{aligned}
 X_2 &= m_1(X_1 - q_1) + q_1 \\
 Y_2 &= m_2(Y_1 - q_2) + q_2 \\
 Z_2 &= m_3(Z_1 - q_3) + q_3
 \end{aligned}
 \tag{4.12}$$

4.4 Відображення

Процес відображення полягає у визначенні координат точки R, що була задана в системі орт $(i_1 i_2 i_3)$, в системі орт $(e_1 e_2 e_3)$ – Рис.4.4

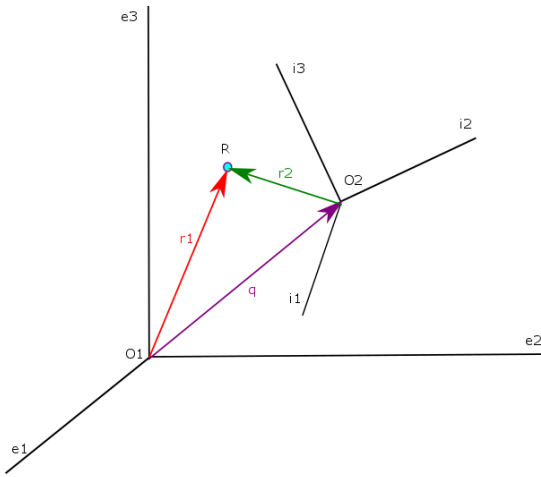


Рисунок 4.4 – Відображення

Як зрозуміло з Рис.4.4, запишемо наступні векторні рівняння:

$$\begin{aligned}
 r_1 &= x_1 e_1 + y_1 e_2 + z_1 e_3 \\
 r_2 &= x_2 i_1 + y_2 i_2 + z_2 e_3 \\
 q &= q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3 \\
 r_1 &= q + r_2
 \end{aligned}
 \tag{4.13}$$

Орти $(i_1 i_2 i_3)$ в системі орт $(e_1 e_2 e_3)$ будуть записані:

$$i_1 = a_{11} e_1 + a_{12} e_2 + a_{13} e_3$$

$$\begin{aligned} i_2 &= a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3 \\ i_3 &= a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3 \end{aligned} \quad (4.14)$$

З рівнянь (4.13), (4.14) можна записати:

$$\begin{aligned} r_2 &= x_2(a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3) + y_2(a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3) \\ &\quad + z_2(a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3) \end{aligned}$$

Та в остаточному вигляді:

$$\begin{aligned} r_1 &= e_1(q_1 + a_{11}x_2 + a_{21}y_2 + a_{31}z_2) + e_2(q_2 + a_{12}x_2 + a_{22}y_2 + a_{32}z_2) \\ &\quad + e_3(q_3 + a_{13}x_2 + a_{23}y_2 + a_{33}z_2) \end{aligned}$$

Виходячи з викладеного, матриця відображення R буде мати вигляд:

$$R = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & q_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & q_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

А процес відображення:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

4.5 Питання для самоперевірки.

1. Які є принципи перетворення декартових прямокутних координат?
2. Які є особливості перетворення координат точок у просторі?
3. Надайте принципову схему перетворення координат двомірних точок.
4. Що таке і як описується трансляція у векторному вигляді?
5. Як у векторному вигляді описується поворот на площині та у просторі?
6. Надайте розрахункову схему для опису масштабування.
7. Як виглядає матриця та процес масштабування?
8. Що собою являє і як описується відображення?

5. ГЕОМЕТРІЯ КРИВИХ ЛІНІЙ ТА ПОВЕРХОНЬ

В системах 3D геометричного моделювання рівняння кривої представляється у векторній параметричній формі – через орти відповідних осей координат (e_i):

$$r(u) = \sum_{i=1}^3 r_i(u) e_i \quad (5.1)$$

В рівнянні (5.1) параметр u використовується в нормалізованому вигляді, тобто приймає значення: $0 \leq u \leq 1$. Це досягається шляхом перерахунку натурального значення параметру t між точками t_i та t_{i+1} :

$$u = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \quad (5.2)$$

Важливою характеристикою кривої є її кривизна в точці (Рис. 5.1):

$$S = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{r_t^2(u)} du \quad (5.3)$$

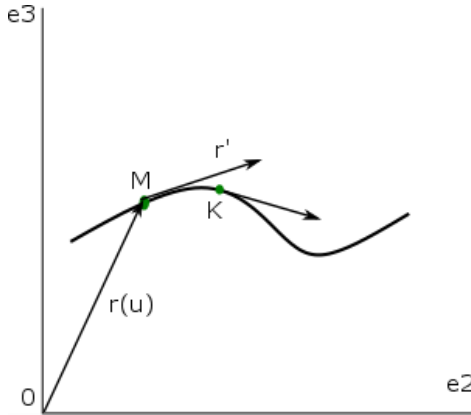


Рисунок 5.1 – До визначення кривизни лінії

Позначимо $MK = \Delta S$ – довжина дуги. Тоді середня кривизна на ділянці МК (Рис.5.1) визначається:

$$k_m = \frac{\Delta\varphi}{\Delta S} \quad (5.4)$$

$\Delta\varphi$ - змінення кута нахилу дотичної в точках М та К. Кривизна в точці М буде визначатися при $\Delta S \rightarrow 0$. Тобто:

$$k = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta S} = \frac{d\varphi}{dS} \quad (5.5)$$

Радіус кривизни:

$$R = \frac{1}{|k|} \quad (5.6)$$

По аналогії з (5.1) параметричне рівняння поверхні у векторному вигляді буде записуватися:

$$r(u, v) = \sum_{i=1}^3 r_i(u, v) e_i \quad (5.7)$$

З тією різницею, що тут будуть присутні два параметри: $0 \leq u \leq 1$ та $0 \leq v \leq 1$ (Рисунок 5.2).

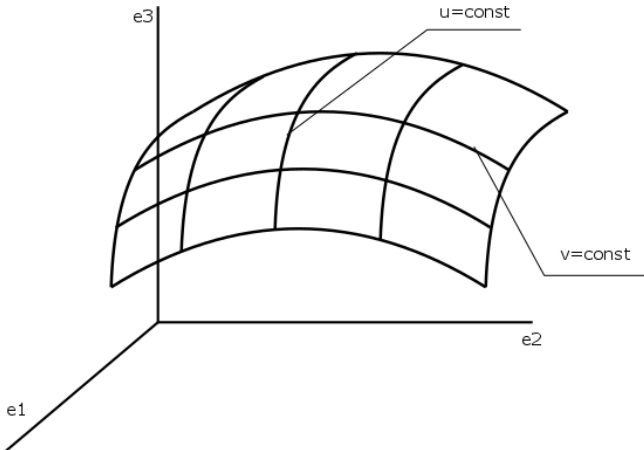


Рисунок 5.2 – Представлення поверхні

Поверхню можна представити як сукупність повздовжніх та поперечних кривих які відповідно називають *лонгітуди* та *латерали*.

Дотична площина до поверхні визначається як така, в якій лежать вектори дотичні до лонгітуди та латерала, що проходять через відповідну точку – q_1 та q_2 (Рис.5.3).

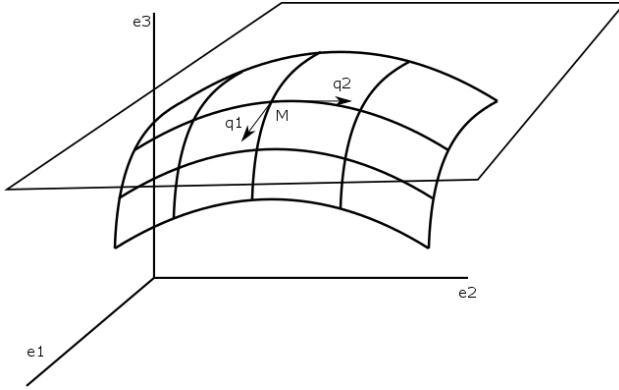


Рисунок 5.3 – Площина, дотична до поверхні

Нормальним перетином поверхні називають криву яка утворюється як результат перетину поверхні, площиною, що проходить через нормаль до поверхні N (Рис 5.4).

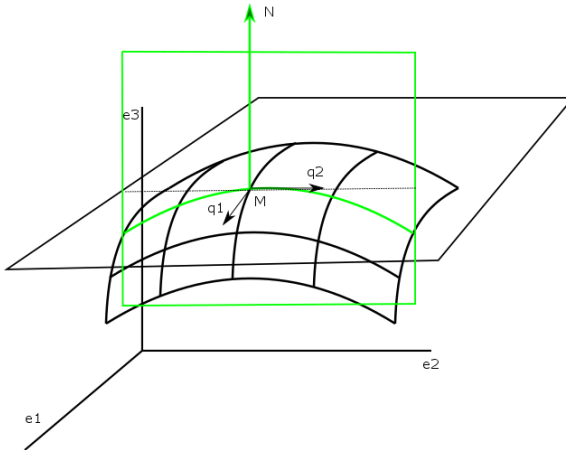


Рисунок 5.4 – Нормальний перетин поверхні

Знаючи кривизну нормального перетину k_N , можна визначити кривизну у довільній площині, що розташована під кутом Θ до нормальної та проходить через ту саму точку M – теорема Меньє. (Рис. 5.5)

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_N} \cos \theta \quad (5.8)$$

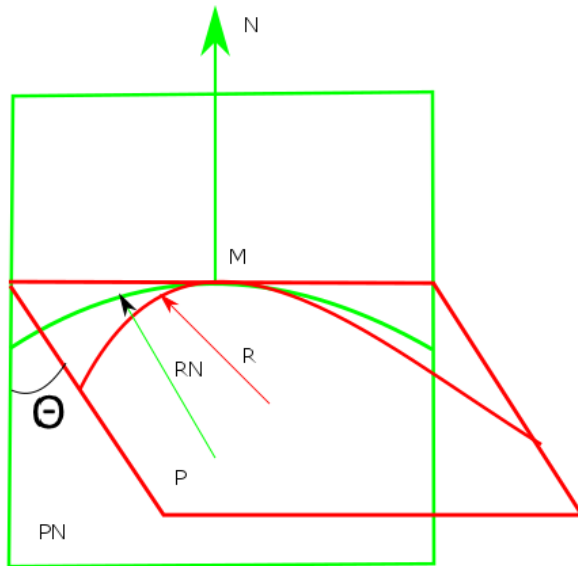


Рисунок 5.5 – До визначення радіусу кривизни в довільній площині P

Через нормаль до поверхні можна провести безліч нормальних площин та відповідно отримати безліч нормальних перетинів, але серед них можна виділити два *головних* перетину – тих що мають найбільший та найменший радіуси кривизни. Площини в яких знаходяться головні перетини називають *головними напрямками*, а відповідні радіуси кривизни - *головними*. На Рис. 5.6 позначено: $C1$, $C2$ – головні напрямки; C – довільний напрямок; R_1 , R_2 – головні радіуси кривизни.

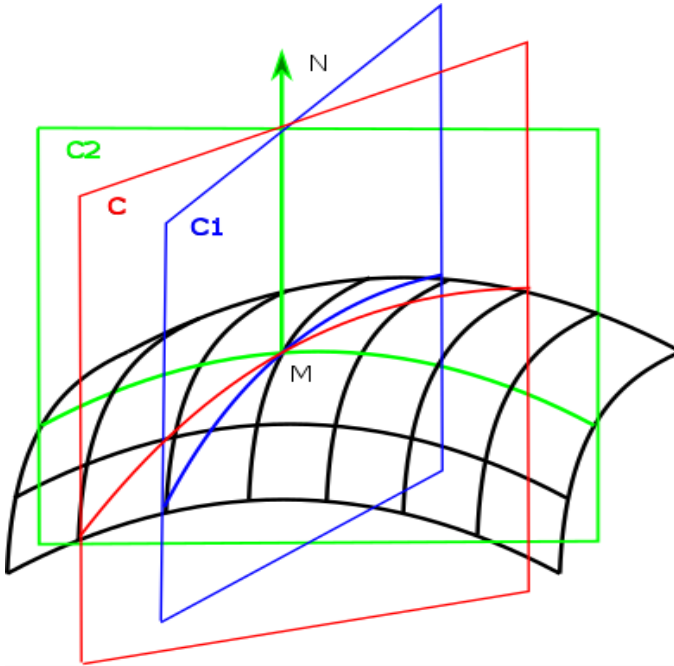


Рисунок 5.6 – Головні та довільний напрямки

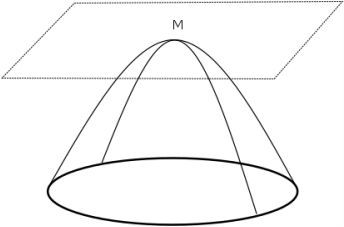
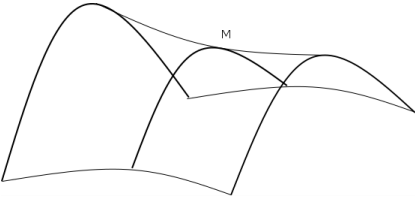
Головні напрямки взаємно перпендикулярні. Співвідношення між радіусами кривизни в головних та довільному напрямках визначаються:

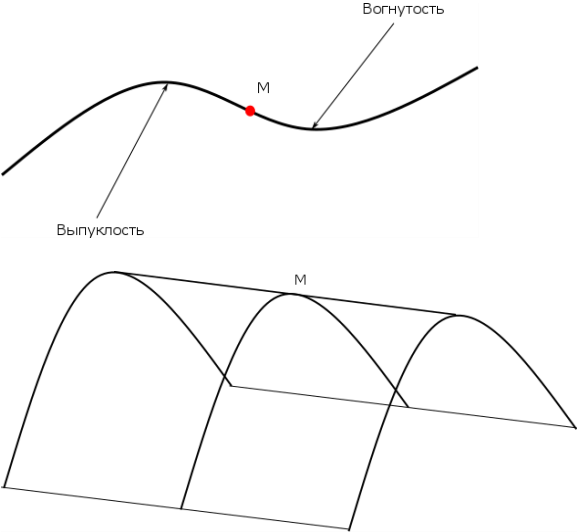
$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2(\alpha)}{R_1} + \frac{\sin^2(\alpha)}{R_2} \quad (5.9)$$

В рівнянні (5.9) α – кут між напрямками C і $C1$.

В залежності від співвідношення головних радіусів кривизни в точці M , розрізняють види точок, що наведено в Табл. 5.1

Таблиця 5.1 – Види точок поверхні

Співвідношення між головними радіусами кривизни	Назва точки	Ескіз	Коментар
Радіуси мають однакові знаки	Еліптична точка		Поверхня розташована з одного боку площини, дотичній в точці
Радіуси мають різні знаки	Гіперболічна точка		Поверхня розташована по різні боки площини, дотичній в точці

Співвідношення між головними радіусами кривизни	Назва точки	Ескіз	Коментар
$R_1 = \infty$ або $R_2 = \infty$	Параболічна точка		Точка є точкою перегину чи одним з перетинів є пряма лінія

Питання для самоперевірки

1. Як записується векторне рівняння кривої у просторі?
2. Як записується векторне рівняння поверхні у просторі?
3. Як розраховується нормалізований параметр?
4. Як розраховується кривизна в точці?
5. Що таке лонгітуди та латерали?
6. Як визначається кривизна поверхні в перерізі відмінному від нормального?
7. Що таке головні напрямки або перерізи?
8. Чи є головні перерізи нормальними?
9. Як визначається радіус кривизни у довільному нормальному перерізі відмінному від головного?
10. Як розташовані головні перерізи відносно один до одного?
11. Які є різновиди точок поверхонь в залежності від значень радіусів кривизни в головних перерізах?

6. ПРЕДСТАВЛЕННЯ КРИВИХ І ПОВЕРХОНЬ В 3D МОДЕЛЮВАННІ

6.1 Типи рівнянь кривих

Криві в просторі можуть бути представлені наступними рівняннями:

- Непараметричне рівняння: $z = f(x, y)$
- Параметричне рівняння: $x = f_1(u)$, $y = f_2(u)$, $z = f_3(u)$

Наприклад, рівняння кола на площині XOY виглядає:

- В непараметричному виді: $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ або $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$ при цьому $z = 0$
- В параметричному виді: $x = R\cos(u)$, $y = R\sin(u)$ де також $z = 0$

Частіше в 3D моделюванні, як зазначалося вище, використовуються векторні параметричні рівняння, причому параметри є нормалізованими (див. п.5). Для плоских кривих:

$$r(u) = \sum_{i=1}^2 r_i(u)e_i \quad (6.1)$$

Для просторових кривих:

$$r(u) = \sum_{i=1}^3 r_i(u)e_i \quad (6.2)$$

Для замкнених кривих повинна виконуватися умова:

$$r[u \pm (u_{\max} - u_{\min})] = r(u) \quad (6.3)$$

Ось рівняння деяких найбільш розповсюджених кривих:

- Пряма

$$r(u) = p + u \cdot a \quad (6.4)$$

- Відрізок між точками p_1 та p_2

$$r(u) = (1 - u)p_1 + up_2 \quad (6.5)$$

- Коло:

$$r(u) = p + r \cdot \cos(u) \cdot e_1 + r \cdot \sin(u) \cdot e_2 \quad (6.6)$$

- Еліпс:

$$r(u) = p + a \cdot \cos(u) \cdot e_1 + b \cdot \sin(u) \cdot e_2 \quad (6.7)$$

- Гіпербола (Рис. 6.1)

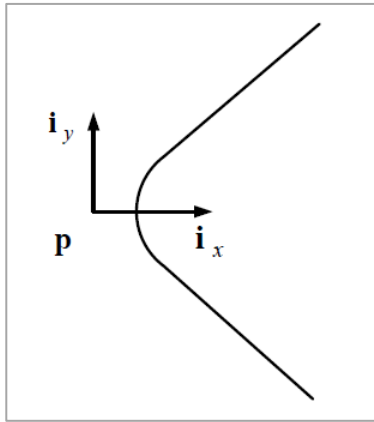


Рисунок 6.1 – Гіпербола

$$r(u) = p + a \cdot ch(u) \cdot e_1 + b \cdot sh(u) \cdot e_2 \quad (6.8)$$

➤ Парабола (Рис. 6.2)

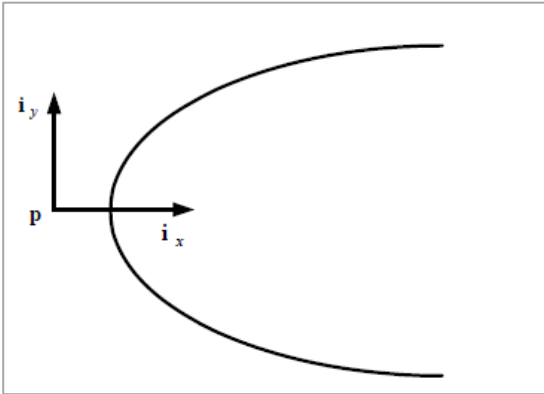


Рисунок 6.2 – Парабола

$$r(u) = p + \frac{1}{2}cu^2e_1 + c \cdot u \cdot e_2 \quad (6.9)$$

➤ Циліндрична спіраль (Рис. 6.3)

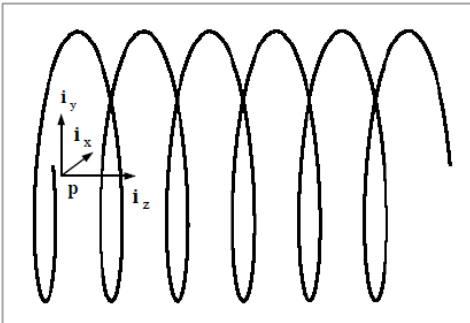


Рисунок 6.3 – Циліндрична спіраль

$$r(u) = p + r \cdot \cos(u) \cdot e_1 + r \cdot \sin(u) \cdot e_2 + h \frac{u}{2\pi} e_3 \quad (6.10)$$

6.2 Еквідистантні криві та перетин кривих

Рівняння еквідистантної кривої $r(u)$, що розташована на відстані a по відношенню до базової $r_b(u)$ (Рис. 6.4) визначається рівнянням (6.11).

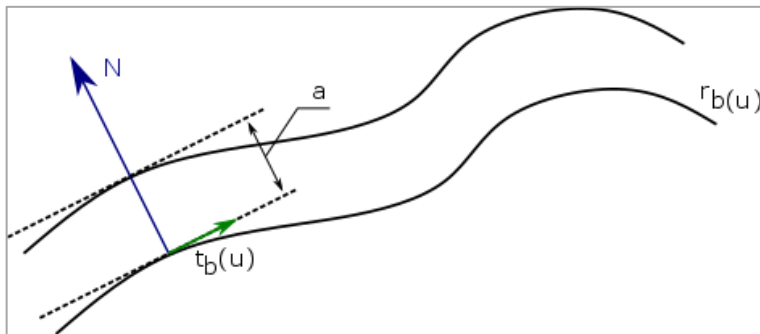


Рисунок 6.4 – Еквідистантні криві

$$r(u) = r_b(u) + a \times t_b(u) \quad (6.11)$$

У рівнянні (6.11) $t_b(u)$ – одиничний вектор дотичний до базової кривої в точці.

$$t_b(u) = \frac{r'_b}{\sqrt{r'_b r'_b}} \quad (6.12)$$

Будь яка точка M на поверхні (Рис. 6.5) може бути представлена як перетин відповідної лонгітуди ($Q(v)$ коли $u = const$) та латерала ($P(u)$ коли $v = const$). У векторній формі перетин буде відображатися рівнянням:

$$P(u) - Q(v) = 0 \quad (6.13)$$

Або через проекції векторів на відповідні осі координат:

$$\begin{cases} P_x(u) - Q_x(v) = 0 \\ P_y(u) - Q_y(v) = 0 \\ P_z(u) - Q_z(v) = 0 \end{cases} \quad (6.14)$$

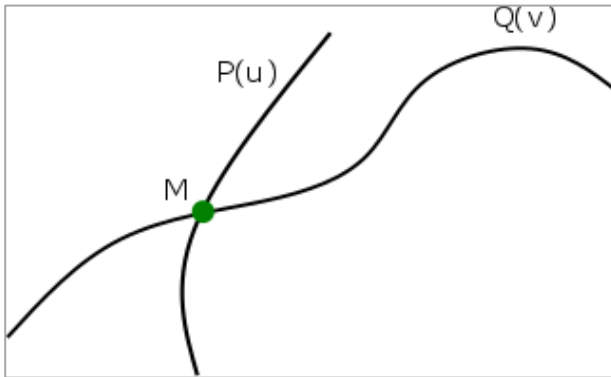


Рисунок 6.5 – Перетин кривих

6.3 Способи побудови двовимірних та тривимірних (просторових) ліній

Всі криві можна поділити на дві великі групи: просторові криві та двовірні криві. Такий розподіл базують на тому, що просторові криві та двовірні криві (рис. 6.6) мають різне число вимірів.

На базі будь-якої двовірної кривої може бути побудована просторова крива. Якщо двовірна крива побудована на площині, то для цього потрібно знати положення й орієнтацію в просторі цієї площини. У загальному випадку двовірні криві можуть бути розташовані на довільній поверхні. У цьому випадку для обчислення точки кривої необхідно знати поверхню.

Таким чином, двовірні криві та частина просторових кривих побудовані аналогічно, тільки перші побудовані на основі двовірних об'єктів, а другі – тривимірних.

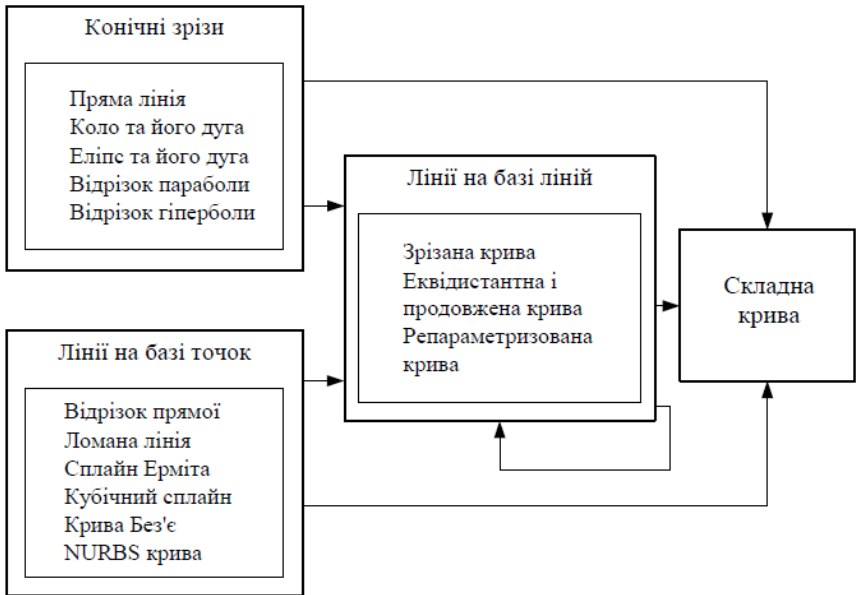


Рисунок 6.6 – Способи побудови двовимірних ліній

Просторові криві на базі двомірних кривих за формою можуть збігатися зі своїми тривимірними аналогами, але мають відмінну від останніх структуру даних і частину виконуваних функцій. Рис. 2.14 відображає процес побудови ліній при читанні його зліва направо. Спочатку криві лінії можуть бути побудовані в місцевій системі координат і скалярних параметрів або за характерними точками. Далі ці криві можуть бути подовжені або зрізані. На базі декількох кривих можна побудувати найбільш загальну лінію - складну криву.

Всі криві мають різні структури даних, але повинні виконувати ті ж самі функції. Остання властивість забезпечує рівнозначність всіх кривих ліній. До загальних функцій довільного геометричного об'єкту для кривих ліній варто додати функції обчислення радіус-вектору кривої, похідних радіус-вектору за параметром, дотичного вектору, нормалі та бінормалі кривої, функції надання інформації про область визначення параметру кривої (початкового параметру, кінцевого параметру, замкнутості), функції модифікації форми кривої.

Математична модель кривої не обмежується перерахованими функціями. Вона повинна бути доповнена функціями, що забезпечують взаємодію кривої з іншими геометричними об'єктами і виконання з нею різних операцій.

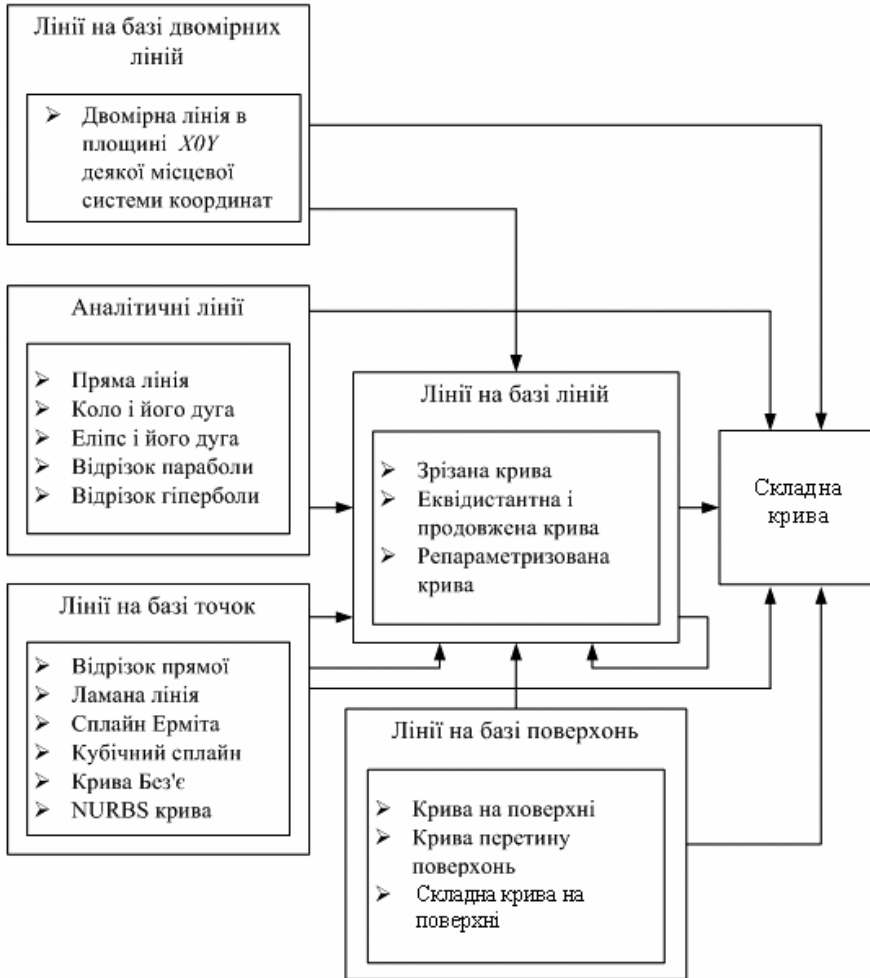


Рисунок 6.7 – Способи побудови тривимірних ліній

6.4 Типи рівнянь поверхонь

Рівняння поверхонь, як і рівняння кривих, поділяють на два основних типи. До першого типу відносять непараметричні рівняння, що зв'язують координати x , y та z безпосередньо одну з одною будь-якою функцією.

$$z = f(x, y) \quad (6.15)$$

До другого – параметричні рівняння, що зв'язують значення координат x , y и z зі значеннями параметру. На відміну від кривих параметрів буде два - u , v

$$x = f_1(u, v), y = f_2(u, v), z = f_3(u, v) \quad (6.16)$$

Параметричне рівняння може бути подане в векторній формі через орти e_i :

$$r(u, v) = \sum_{i=1}^3 r_i(u, v) e_i \quad (6.17)$$

Пояснимо ці визначення на простому прикладі. Розглянемо сферу радіуса R з центром на початку координат. Непараметричне рівняння сфери буде мати вигляд:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - R^2 = 0$$

Або

$$Z = \pm \sqrt{R^2 - X^2 - Y^2}$$

Параметричне векторне рівняння цієї сфери матиме вигляд:

$$P(u, v) = R \cos(u) \cos(v) \cdot e_1 + R \sin(u) \sin(v) \cdot e_2 + R \sin(v) \cdot e_3 \quad (6.18)$$

6.5 Білінійна поверхня

Знайдемо векторне параметричне рівняння поверхні, що задається прямими лініями. Параметри рівняння є нормалізованими, тобто: $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$. Поверхня обмежена чотирма точками $P_{u,v}$ де в якості індексу надаються значення параметрів (Рис. 6.8)

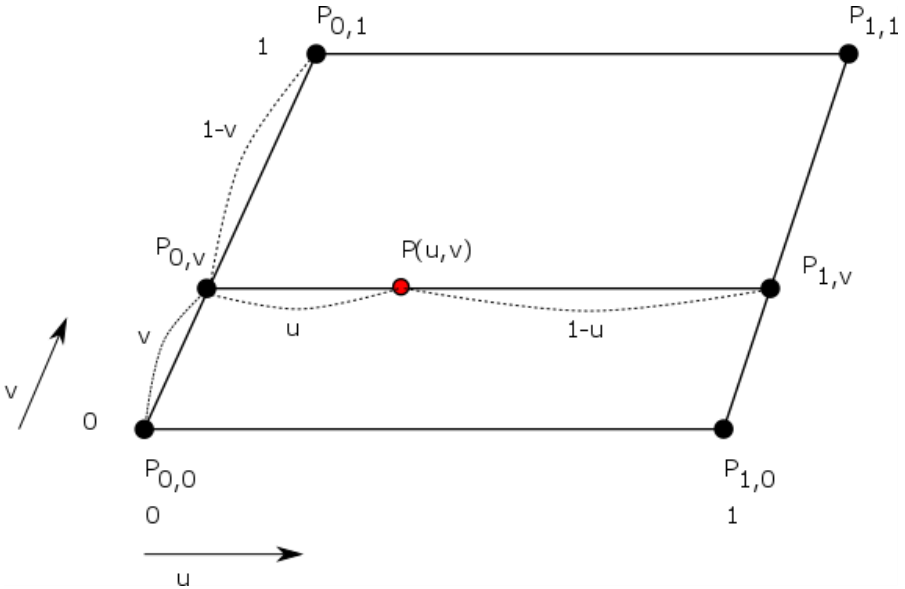


Рисунок 6.8 – Білінійна поверхня

Положення довільної точки $P(u, v)$ визначається відстанню u від точки $P_{0,v}$ вздовж відрізка $[P_{0,v}, P_{1,v}]$. Положення відрізка визначається параметром v (Рис.6.8). При цьому виконується пропорція:

$$\frac{P_{0v} - P_{00}}{P_{01} - P_{0v}} = \frac{v}{1 - v} \quad (6.19)$$

Розкривши пропорцію (6.19) отримуємо:

$$P_{0v} = (1 - v)P_{00} + vP_{01} \quad (6.20)$$

Та аналогічно:

$$P_{1v} = (1 - v)P_{10} + vP_{11} \quad (6.21)$$

Для відрізка $[P_{0,v}, P_{1,v}]$ записується аналогічна пропорція:

$$\frac{P(u, v) - P_{0v}}{P_{1v} - P(u, v)} = \frac{u}{1 - u} \quad (6.22)$$

З якої:

$$P(u, v) = (1 - u)P_{0v} + uP_{1v} \quad (6.23)$$

Скориставшись рівняннями (6.20), (6.21) та (6.23) отримаємо рівняння білінійної поверхні:

$$P(u, v) = (1 - u)(1 - v)P_{00} + (1 - u)vP_{01} + u(1 - v)P_{10} + uvP_{11} \quad (6.24)$$

В більш універсальному матричному вигляді рівняння білінійної поверхні буде мати вигляд:

$$P(u, v) = \begin{bmatrix} (1 - u)(1 - v) & (1 - u)v & u(1 - v) & uv \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{00} \\ P_{01} \\ P_{10} \\ P_{11} \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

6.6 Клапоть Куна

На відміну від білінійної поверхні, що задається відрізками, клопоть Куна задається довільними кривими $P(v)$ та $Q(u)$ (Рис. 6.9). Позначення $Q_v(u)$ – це точка на кривій $Q(u)$, положення якої визначається параметром u , а от розташування самої кривої визначається параметром v . Аналогічно: $P_u(v)$ – точка, розташована на кривій P (залежить від параметра v), положення самої кривої визначається параметром u .

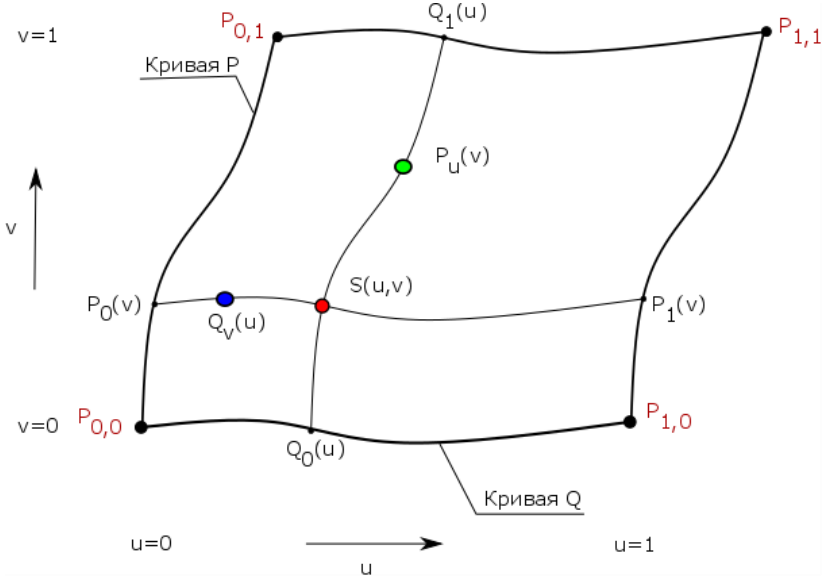


Рисунок 6.9 - Клапоть Куна

Для точки $Q_v(u)$ записується пропорція:

$$\frac{P_1(v) - Q_v(u)}{Q_v(u) - P_0(v)} = \frac{1 - u}{u} \quad (6.26)$$

З якої:

$$Q_v(u) = (1 - u)P_0(v) + uP_1(v) \quad (6.27)$$

Для точки $P_u(v)$ маємо:

$$\frac{Q_1(u) - P_u(v)}{P_u(v) - Q_0(u)} = \frac{1 - v}{v} \quad (6.28)$$

$$P_u(v) = (1 - v)Q_0(u) + vQ_1(u) \quad (6.29)$$

З Рис.6.9 цілком зрозуміло, що

$$\begin{aligned}
 P_{00} &= P_0(0) = Q_0(0) \\
 P_{01} &= P_0(1) = Q_1(0) \\
 P_{10} &= P_1(0) = Q_0(1) \\
 P_{11} &= P_1(1) = Q_1(1)
 \end{aligned} \tag{6.30}$$

Чи буде поверхня - клапоть Куна механічною сумою точок $Q_v(u)$ та $P_u(v)$? Тобто:

$$R(u, v) = Q_v(u) + P_u(v) \tag{6.31}$$

$$R(u, v) = (1 - u)P_0(v) + uP_1(v) + (1 - v)Q_0(u) + vQ_1(u)$$

Повинні виконуватися наступні граничні умови:

$$\begin{cases} R(0, v) = P_0(v) \\ R(1, v) = P_1(v) \\ R(u, 0) = Q_0(u) \\ R(u, 1) = Q_1(u) \end{cases} \tag{6.32}$$

Але виходячи з рівняння (6.31):

$$\begin{cases} R(0, v) = P_0(v) + [(1 - v)Q_0(0) + vQ_1(0)] \\ R(1, v) = P_1(v) + [(1 - v)Q_0(1) + vQ_1(1)] \\ R(u, 0) = Q_0(u) + [(1 - u)P_0(0) + uP_1(0)] \\ R(u, 1) = Q_1(u) + [(1 - u)P_0(1) + uP_1(1)] \end{cases} \tag{6.33}$$

Як бачимо, в рівнянні (6.33) права частина, та що в квадратних дужках, є зайвою.

Запишемо рівняння білінійної поверхні для граничних точок клапотя, приймаючи до уваги (6.30):

$$P(u, v) = (1 - u)(1 - v)P_{00} + (1 - u)vP_{01} + u(1 - v)P_{10} + uvP_{11} \quad (6.34)$$

Або для граничних точок:

$$\begin{aligned} P(0, v) &= (1 - v)P_{00} + vP_{01} = (1 - v)Q_0(0) + vQ_1(0) \\ P(1, v) &= (1 - v)P_{10} + vP_{11} = (1 - v)Q_0(1) + vQ_1(1) \\ P(u, 0) &= (1 - u)P_{00} + uP_{10} = (1 - u)P_0(0) + uP_1(0) \\ P(u, 1) &= (1 - u)P_{01} + uP_{11} = (1 - u)P_0(1) + uP_1(1) \end{aligned} \quad (6.35)$$

Порівнюючи (6.33) та (6.35) можна побачити, що права частина рівнянь (6.33) є елементами білінійної поверхні. Тобто, остаточно можна записати рівняння клопотя Куна як різницю рівняння (6.31) та білінійної поверхні (6.34) або в наступному вигляді:

$$S(u, v) = R(u, v) - P(u, v) \quad (6.36)$$

$$S(u, v) = Q_v(u) + P_u(v) - P(u, v)$$

6.7 Способи побудови поверхонь

Найпоширеніші способи побудови поверхонь наведені на рис. 6.10, який відображає процес побудови поверхонь при читанні його зліва направо. Первісно поверхні можуть бути побудовані або за місцевою системою координат і скалярних параметрів, або за характерними точками, або на основі ліній. Далі ці поверхні можуть бути продовжені або зрізані, на їх основі можуть бути отримані еквідистантні поверхні. Всі згадані поверхні мають прямокутну або трикутну область визначення параметрів. На базі поверхонь із прямокутною або трикутною областю визначення параметрів можна побудувати обмежені контурами поверхні довільної форми.

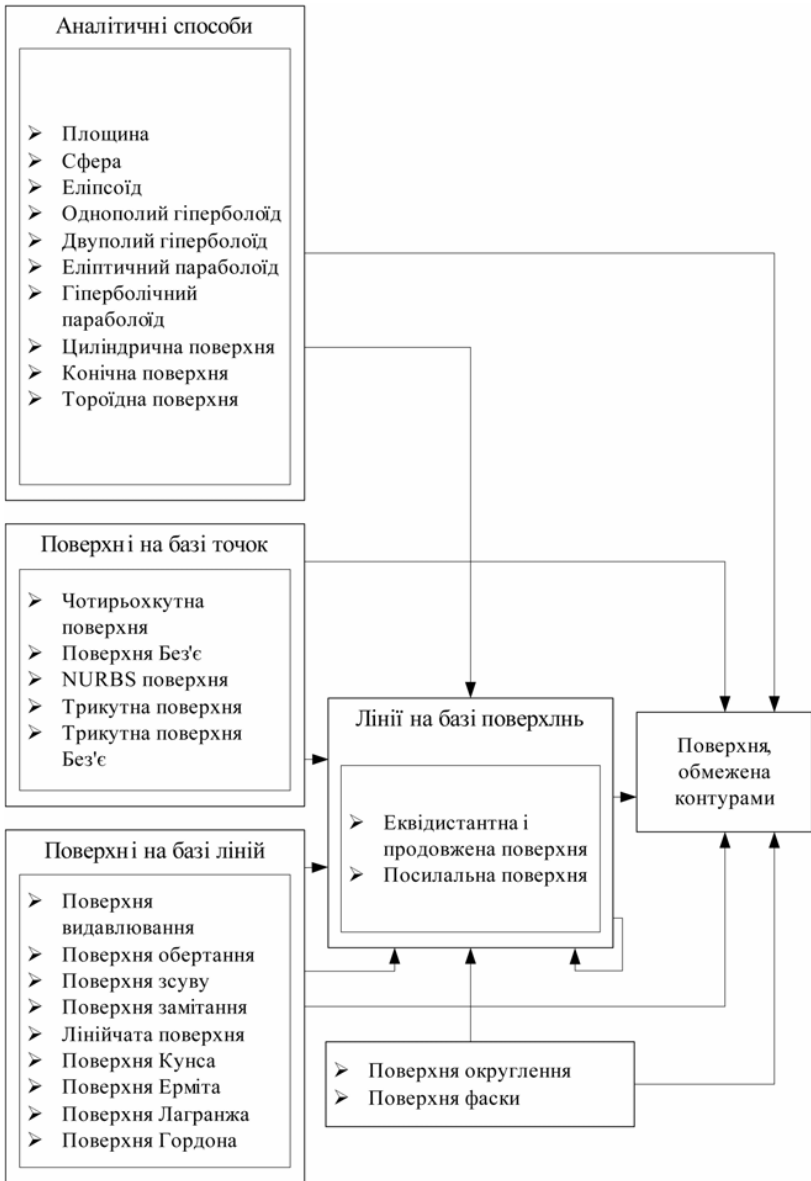


Рисунок 6.10 – Способи побудови поверхонь

6.8 Перетинання поверхонь

Розглянемо обчислення кривих перетину поверхонь. Через внутрішні обмеження чисельних методів шукатимемо точки на кривих перетину. Криві перетину поверхонь необхідні для реалізації булевих операцій. Криві перетину потрібні також для реалізації відсікання поверхонь іншими поверхнями у системах поверхневого моделювання. Коротко викладемо основні ідеї, що лежать в основі алгоритмів для розрахунку кривих перетину поверхонь, заданих параметричними рівняннями. Розглянемо тільки параметричні рівняння, оскільки саме їх найчастіше використовують для представлення поверхонь.

Методи розрахунку кривих перетину поверхонь можуть бути розділені на два класи. Методи першого класу полягають у чисельному рішенні нелінійного рівняння:

$$P(u, v) - Q(s, t) = 0 \quad (6.37)$$

де $P(u, v)$ і $Q(s, t)$ - параметричні рівняння поверхонь, які перетинаються. Рівняння (6.37) розкладається на три скалярних рівняння з чотирма невідомими: u , v , s і t . Вирішення цієї системи вимагає присвоєння довільного значення одному з параметрів. При цьому отримують значення параметрів, які відповідають точці на кривій перетину. Зміна обраного довільного значення дає всі інші точки кривої перетину. Недоліком цього методу є те, що його збіжність залежить від початкових наближень невідомих у рівнянні (6.37). Більш того, він не завжди дозволяє знайти всі криві перетину. Інакше кажучи, при великих інтервалах зміни параметру, що задають довільно, деякі криві можуть бути втрачені повністю, а деякі – частково.

Методи з другої категорії засновані на теорії послідовного розподілу. Кожну поверхню ділять послідовно на безліч частин доти, поки кожна з них не буде близькою до плоского чотирикутника. Потім чотирикутники однієї поверхні перевіряють на перетинання із чотирикутниками іншої поверхні. У результаті утворюються пари чотирикутників, що перетинаються, а точки прямих, по яких вони перетинаються, дають гарне початкове наближення для рівняння (6.37). Однак може виявитися непросто перевіряти пари чотирикутників у вірній послідовності так, щоб точки перетинання утворювали криві. Методи, засновані на теорії послідовного розподілу, вимагають

більшого обсягу обчислень у порівнянні з методами першого класу, проте вони рідше пропускають криві перетинання.

6.9 Питання для самоперевірки

1. Назвіть принципи побудови математичних моделей кривих ліній.
2. Проведіть порівняльний аналіз основних аналітичних ліній.
3. Напишіть рівняння прямої лінії і дайте опис її параметрів.
4. Напишіть рівняння відрізка прямої лінії і дайте опис його параметрів.
5. Напишіть рівняння окружності і дайте опис її параметрів.
6. Напишіть рівняння еліпса і дайте опис його параметрів.
7. Напишіть рівняння гіперболи і дайте опис її параметрів.
8. Напишіть рівняння параболи і дайте опис її параметрів.
9. Які є особливості моделювання циліндричної спіралі?
10. Наведіть рівняння еквідистантних кривих.
11. Наведіть рівняння для перетину кривих.
12. Наведіть способи побудови двовимірних ліній.
13. Наведіть способи побудови тривимірних ліній.
14. Наведіть типи рівнянь поверхонь
15. Як будується білінійна поверхня?
16. Як будується клапот Куна?
17. В чому принципова різниця між білінійною поверхнею та клапотом Куна?
18. Наведіть способи побудови поверхонь.

7. АПРОКСИМАЦІЯ КРИВИХ ТА ПОВЕРХОНЬ. СПЛАЙНИ

В широкому сенсі під апроксимацією це заміна однієї кривої або невідомої кривої іншою – більш простою, технологічною або наближеною до точок вихідної кривої. Апроксимуючу криву називають також інтерполяційною. Сплайни є одним з видів інтерполяційної кривої.

У багатьох практичних задачах потрібно побудувати плавну криву лінію, що проходить через задані точки. З цією метою будують *сплайни*. Термін «сплайн» для кривих ліній запозичено з назви креслярського інструменту - пружної гнучкої лінійки, що може вигинатися так, щоб проходити через задані точки.

Під сплайном з математичної точки зору зазвичай розуміють агрегатну функцію, що збігається з функціями більш простої природи на кожному елементі розбивки своєї області визначення.

Функції, подібні тим, що зараз називають сплайнами, були відомі математикам давно, починаючи як мінімум з Ейлера, але інтенсивно вивчати їх почали тільки із середини ХХ століття. В 1946 році Ісаак Шенберг вперше вжив цей термін як позначення класу поліноміальних сплайнів. До 1960 року сплайни були переважно інструментом теоретичних досліджень, вони часто з'являлися як рішення різних екстремальних і варіаційних задач, особливо в теорії наближень. Після 1960 року з розвитком обчислювальної техніки сплайнні почали використовувати у комп'ютерній графіці і моделюванні.

У багатьох практичних задачах аналітична формула лінії не відома, але потрібно, наприклад, щоб крива проходила через задані точки, мала певний ступінь гладкості або в певних точках – задані похідні. Розглянемо такі криві. Великий клас ліній можна побудувати по сукупності точок. Такі лінії називають точково-заданими. Це ламана лінія і різні сплайни.

Задачу ставлять таким чином: є сукупність точок у просторі, радіус-вектори яких рівні $\mathbf{r}_i$, де $i = 0, 1, 2, \dots, n$, n – номери точок; потрібно побудувати лінію, радіус-вектор якої при значеннях параметру t_i , $i = 0, 1, 2, \dots, n$ дорівнював би $\mathbf{r}_i$. Іншими словами – необхідно побудувати інтерполяційну криву.

Точки $\mathbf{p}_i$, які визначають лінію і є її внутрішніми даними, будемо називати *характеристичними точками кривої*, точки t_i на числовій вісі будемо називати *вузлами*, а значення параметру t_i – вузловими.

Розглянемо деякі зі сплайнів.

7.1 Ламана лінія

Найпростішою точково-заданою лінією є *ламана лінія* (Рис 7.1). Вона складається з відрізків, які послідовно з'єднують задані точки.

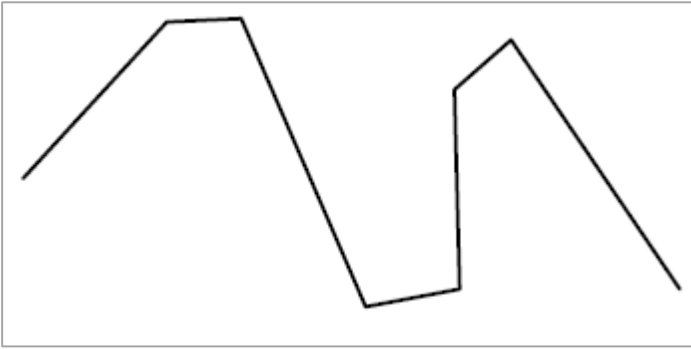


Рис. 7.1 – Ламана лінія

Значення параметру в кожній наступній точці повинно бути більше значення параметру в попередній точці $t_i < t_{i+1}$. Радіус-вектор ламаної визначають рівністю

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{p}_i(1 - w) + \mathbf{p}_{i+1}w \quad (7.1)$$

Параметр w називають місцевим параметром на ділянці кривої між точками $\mathbf{p}_i$ і $\mathbf{p}_{i+1}$. Цей параметр є нормалізованим на ділянці точок $[i; i+1]$.

$$w = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \quad (7.2)$$

Перша похідна ламаної лінії в точках $\mathbf{p}_i$ розривається по довжині і по напрямку. Параметр ламаної лінії змінюється в одновимірному просторі.

У цьому просторі для визначення параметру t можливо використовувати будь-яку систему координат. Для параметру можна використовувати систему координат, де його значення в точці p_i дорівнює номеру точки: $ti = i$. Таку параметризацію називають рівномірною, а параметрична довжина ламаної в такому випадку дорівнює числу точок мінус один. Ламана може бути замкнутою, у цьому випадку перша характеристична точка одночасно є і останньою. Параметрична довжина замкнутої ламаної лінії дорівнює числу точок, якими вона задана. Ламана має ряд корисних властивостей: її точки легко обчислювати, легко редагувати (вставити нову точку, видалити або зрушити існуючу), легко розрізати на частини, кожна з яких також буде ламаною лінією.

7.2 Сплайн Лагранжа

Інтерполяційна формула Лагранжа є рішенням завдання побудови кривої по заданими точками у вигляді

$$r(t) = \sum_{i=1}^n L_i(t)p_i \quad (7.3)$$

де функції $L_i(t)$ рівні 1 при $t = ti$ і рівні 0 в інших вузлах $tj, j \neq i$. Функції $L_i(t)$ будемо шукати у вигляді багаточленів ступеня n , а саме:

$$L_i(t) = \lambda_i(t - t_0)(t - t_1) \dots (t - t_{i-1})(t - t_{i+1})(t - t_{i+2}) \dots (t - t_n) \quad (7.4)$$

З умови $L_i(ti) = 1$ знаходимо

$$\frac{1}{\lambda_i} = (t_i - t_0)(t_i - t_1) \dots (t_i - t_{i-1})(t_i - t_{i+1}) \dots (t_i - t_n) \quad (7.5)$$

і, відповідно, одержимо формули для коефіцієнтів Лагранжа

$$L_i(t) = \frac{\prod_{j=0, j \neq i}^n (t - t_j)}{\prod_{j=0, j \neq i}^n (t_i - t_j)}. \quad (7.6)$$

7.3 Сплайн Ньютона

Інтерполяційний багаточлен Ньютона, що проходить через задані точки, знаходять у формі

$$r(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)(t - t_1) + \dots + a_n(t - t_0)(t - t_1) \dots (t - t_{n-2})(t - t_{n-1}) \quad (7.7)$$

Вектори $\mathbf{a}_i$ будемо визначати з умови проходження векторної функції $\mathbf{r}(t)$ через точки $\mathbf{r}_i$ при значеннях параметру t_i , $i = 0, 1, 2, \dots, n$:

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{a}_0,$$

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1(t_1 - t_0),$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1(t_2 - t_0) + \mathbf{a}_2(t_2 - t_0)(t_2 - t_1), \quad (7.8)$$

.....

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_n = & \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1(t_n - t_0) + \mathbf{a}_2(t_n - t_0)(t_n - t_1) + \dots \\ & \dots + \mathbf{a}_n(t_n - t_0)(t_n - t_1) \dots (t_n - t_{n-2})(t_n - t_{n-1}). \end{aligned}$$

Матриця цієї системи рівнянь є трикутною, систему вирішують за одній прямій прохід. Перше рівняння системи (7.8) дає $\mathbf{a}_0$. Підставляючи цей результат у друге рівняння, одержимо $\mathbf{a}_1$. Із третього рівняння знайдемо $\mathbf{a}_2$ і так далі до $\mathbf{a}_n$. Помітимо, що додаючи додаткову точку $\mathbf{r}_{n+1}$ ми збільшуємо систему (7.8) на ще одне рівняння, а всі інші рівняння залишаються незмінними. Це є перевагою формули Ньютона порівняно з формулою Лагранжа при побудові кривих із збільшенням числа точок.

7.4 Сплайн Ерміта

Якщо задано послідовність $m + 1$ точок, через які повинна пройти крива, та похідні її радіус-вектору в цих точках, то за цими даними можна побудувати сплайн Ерміта, який описують поліномом ступеня $2m + 1$. Ми розглянемо окремий випадок сплайну Ерміта для $m = 1$.

Ламану лінію можна розглядати в якості складової кривої, що побудована з відрізків прямої лінії. За аналогією можна побудувати складену кубічну криву зі сплайнів Ерміта третього ступеня, що гладко стикаються між собою. Побудуємо складовий сплайн Ерміта, що проходить через задану послідовність точок і має в цих точках задані похідні. Нехай радіус-вектори цих точок рівні $\mathbf{p}_i$, вектори похідних кривої у цих точках рівні $\mathbf{q}_i$, а значення параметру в цих точках рівні t_i ($t_i < t_{i+1}$), де $i = 0, 1, 2, \dots, n$ – номери точок. На ділянці між точками $\mathbf{p}_i$ і $\mathbf{p}_{i+1}$ складовий сплайн Ерміта є поліномом третього ступеня місцевого параметру w (Див. рівняння (7.2))

$$P(w) = [x(w), y(w), z(w)] = a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + a_3 w^3 \quad (7.9)$$

Місцевий параметр w змінюється від 0 до 1. Вектори $\mathbf{a}_j, j = 0, 1, 2, 3$ визначають на границі ділянки кривої:

$$\mathbf{r}_i(0) = \mathbf{p}_i, \quad \mathbf{r}_i(1) = \mathbf{p}_{i+1}, \quad \mathbf{r}_i'(0) = \mathbf{q}_i, \quad \mathbf{r}_i'(1) = \mathbf{q}_{i+1}. \quad (7.10)$$

Після рішення цієї системи рівнянь і підстановки значень в (7.10), одержимо залежність радіус-вектору для сплайну Ерміта

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{p}_i (1 - 3w^2 + 2w^3) + \\ &+ \mathbf{p}_{i+1} (3w^2 - 2w^3) + \mathbf{q}_i (w - 2w^2 + w^3) + \mathbf{q}_{i+1} (-w^2 + w^3) = \quad (7.11) \\ &= \alpha_0(w) \mathbf{p}_i + \alpha_1(w) \mathbf{p}_{i+1} + \beta_0(w) \mathbf{q}_i + \beta_1(w) \mathbf{q}_{i+1}, \end{aligned}$$

де $t_i \leq t \leq t_{i+1}$. В (7.11) введено позначення для функцій

$$(7.12)$$

$$\alpha_0(w) = 1 - 3w^2 + 2w^3, \quad \alpha_1(w) = 3w^2 - 2w^3,$$

$$\beta_0(w) = w - 2w^2 + w^3, \quad \beta_1(w) = -w^2 + w^3,$$

що задовольняють рівнянням:

$$\begin{aligned} \alpha_0(0) &= 1, & \alpha_0(1) &= 0, & \alpha_1(0) &= 0, & \alpha_1(1) &= 1, \\ \alpha_0'(0) &= 0, & \alpha_0'(1) &= 0, & \alpha_1'(0) &= 0, & \alpha_1'(1) &= 0, \\ \beta_0(0) &= 0, & \beta_0(1) &= 0, & \beta_1(0) &= 0, & \beta_1(1) &= 0, \\ \beta_0'(0) &= 1, & \beta_0'(1) &= 0, & \beta_1'(0) &= 0, & \beta_1'(1) &= 1, \end{aligned} \quad (7.13)$$

де штрих означає диференціювання по w . Якщо точки $\mathbf{p}_i$ розташовані рівномірно, то можна прийняти значення параметру в точках $\mathbf{p}_i$ рівними номерам точок: $ti = i$. При нерівномірному розташуванні точок $\mathbf{p}_i$ параметричну відстань $ti+1 - ti$ можна прийняти пропорційною відстані між відповідними точками $|\mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i|$. Складовий сплайн Ерміта може бути замкнутим.

Характерною особливістю сплайна Ерміта є те, що крива дотична до першого та останнього відрізка з низки відрізків між характеристичними точками.

Ламана лінія та сплайн Ерміта зображені на Рис. 7.2

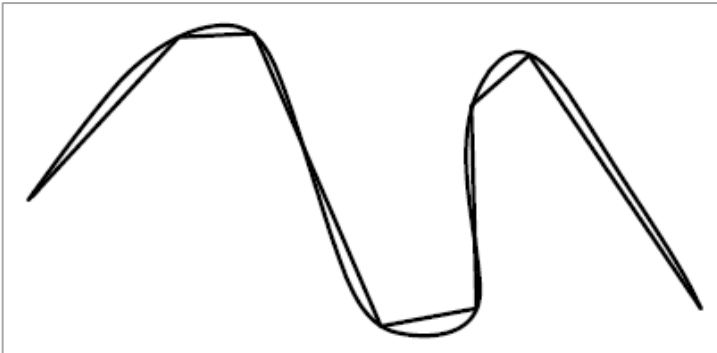


Рисунок 7.2 – Ламана лінія та складовий сплайн Ерміта

7.5 Криві Без'є

Досить гнучкою й у той же час простою для практичного застосування є кубічна крива Без'є, радіус-вектор якої описують залежністю

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)^3 \mathbf{p}_0 + 3t(1 - t)^2 \mathbf{p}_1 + 3t^2(1 - t) \mathbf{p}_2 + t^3 \mathbf{p}_3 \quad (7.14)$$

Приклади кубічних кривих Без'є та їх характеристичні ламані представлено на рис. 7.3.

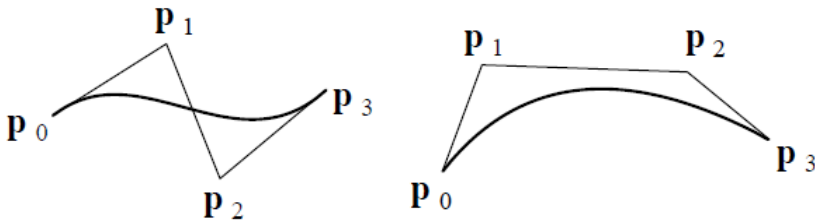


Рисунок 7.3 – Криві Без'є

Оскільки крива не проходить через внутрішні вершини своєї характеристичної ламаної, досить складно задати її точне положення. Криві у формі Без'є зручніші там, де важлива форма ліній, наприклад, при комп'ютерному дизайні конструкцій типу кузова автомобіля. Чим ільше точок беруть участь у побудові кривої, тим вона гладкіша.

Розглянемо побудову кривої Без'є в залежності від кількості характеристичних точок. При наявності 2-х точок – крива співпадає з відрізком між цими точками (Рис. 7.4). На Рис. 7.4 крива описується рухом точки В.

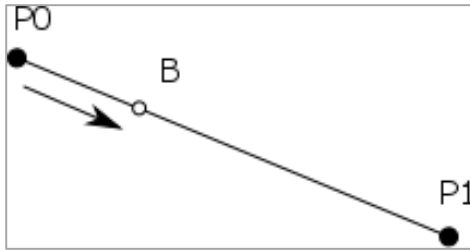


Рисунок 7.4 – Крива Без'є при 2-х характеристичних точках

При наявності 3-х точок, крива Без'є описується рухом точки В (Рис. 7.5). При цьому виконується умова пропорційності руху – кожна точка за визначений проміжок часу переміщується на однакову частину відповідного відрізка:

$$t = \frac{P_0Q_1}{P_0P_1} = \frac{P_1Q_2}{P_1P_2} = \frac{Q_1B}{Q_1Q_2} \quad (7.15)$$

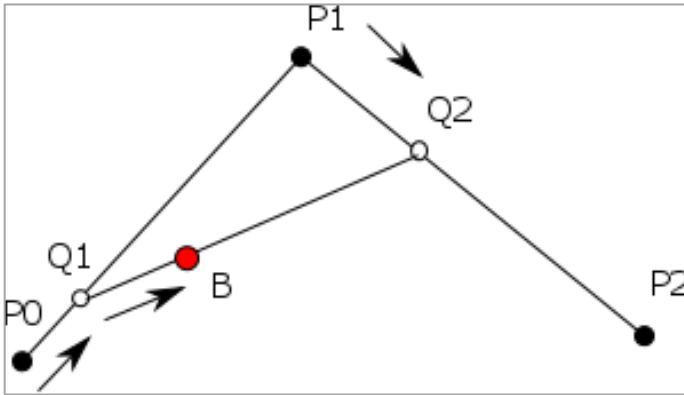


Рисунок 7.5 – Утворення кривої Без'є при наявності 3-х характеристичних точок

Умова пропорційності руху виконується і зі збільшенням кількості точок. На Рис. 7.6 показано утворення кривої при 4-х точках. Умова пропорційності при цьому буде мати вигляд:

$$t = \frac{P_0Q_1}{P_1P_0} = \frac{P_1Q_2}{P_1P_2} = \frac{P_2Q_3}{P_2P_3} = \frac{Q_1R_1}{Q_1Q_2} = \frac{Q_2R_2}{Q_2Q_3} = \frac{R_1B}{R_1R_2} \quad (7.16)$$

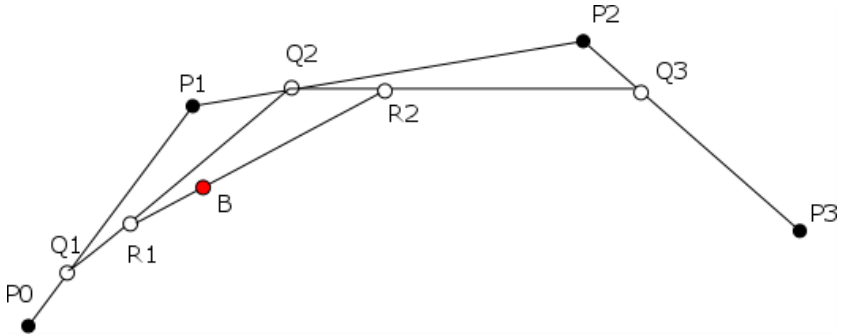


Рисунок 7.6 – Утворення кривої Без'є при наявності 4-х характеристичних точок

Взагалі, крива Без'є має наступні властивості:

1. Проходить через першу та останню вершини багатогранника;
2. Направлення вектору, дотичного в першій точці співпадає з першим відрізком. Останній відрізок є напрямком дотичної в останній точці;
3. Похідна ступеню n в початковій (кінцевій) точці кривої визначається положенням перших (останніх) $n+1$ вершин багатогранника.

7.6 В-сплайни

Ступінь кривої Без'є визначають кількістю заданих точок, причому всі вони впливають на форму кривої. Ці особливості кривих Без'є створюють певні незручності. По-перше, при апроксимації кривої складної форми за допомогою кривої Без'є неминуче використовують безліч заданих точок, у результаті чого утворюється крива високого порядку. Така крива може осцилювати і в результаті збільшувати обчислювальне навантаження на комп'ютер. Чому б у такому випадку не спробувати представити ту ж вихідну криву безліччю кривих Без'є

нижчих порядків, щоб уникнути цих неприємностей? Проблема у тому, що з'єднання кривих із забезпеченням безперервності похідних потрібних порядків є досить складною процедурою. По-друге, трудомістким є також локальна зміна форми кривої. Здається природним перемістити задані точки поблизу змінюваної ділянки кривої, і дійсно, це призводить до модифікації потрібної області, але разом з нею змінюється і вся крива. Цю особливість називають властивістю глобальності змін (*global modification property*). Глобальність змін небажана при створенні кривих заданої форми, оскільки криві завжди створюють або проектують шляхом безперервної модифікації грубої форми початкового наближення. У системах автоматизованого проектування бажана наявність протилежної властивості - локальності змін (*local modification property*).

Описані недоліки кривих Без'є пов'язані з вибором функцій сполучення. Таким чином, нам потрібно вибрати новий набір функцій сполучення, що мають певні властивості. По-перше, у визначення нової функції сполучення не повинно входити число точок n , на відміну від функції $B_i^n(t)$. Ступінь функції сполучення, а отже і ступінь кривої, повинні бути незалежними від числа заданих точок n . По-друге, всі функції сполучення повинні бути відмінними від нуля тільки на обмежених підмножинах значень параметру, при чому для кожної функції така підмножина повинна бути унікальною. У цьому випадку форму сегменту визначають тільки тими заданими точками, які враховані функціями сполучення, що мають ненульові значення на даному сегменті.

У 1972 р. Кокс і де Бур [3] запропонували використовувати функції $N_{i,k}(t)$, визначені рекурсивно. Криву, що будують таким чином, називають В-сплайном (B-spline) і записують у наступному вигляді: __

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i N_{i,k}(t), \quad t_{k-1} \leq t \leq t_{k+1}, \quad (7.17)$$

$$N_{i,k}(t) = \frac{(t - t_i)N_{i,k-1}(t)}{t_{i+k-1} - t_i} + \frac{(t_{i+k} - t)N_{i+1,k-1}(t)}{t_{i+k} - t_{i+1}},$$

$N_{i,1}(t) = 1$ якщо $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ 0 – у протилежному випадку.

Значення t , називають *вузловими* - вони обмежують відрізки значень параметру, всередині яких функції сполучення мають ненульові значення.

7.7 NURBS криві

NURBS криві є різновидом В-сплайну - неоднорідний раціональний В-сплайн або скорочено NURBS (nonuniform rational B-spline curve) подібний звичайному неоднорідному В-сплайну, оскільки заснований на тих же функціях. Однак точки, що задають раціональний В-сплайн, вказують з використанням однорідних координат. Функції сполучення застосовують саме до цих однорідних координат. Координати точки на кривій NURBS в однорідному просторі знаходять з формул:

$$\begin{aligned}x h &= \sum_{i=0}^n (h_i x_i) N_{i,k}(t); \\y h &= \sum_{i=0}^n (h_i y_i) N_{i,k}(t); \\z h &= \sum_{i=0}^n (h_i z_i) N_{i,k}(t); \\h &= \sum_{i=0}^n h_i N_{i,k}(t).\end{aligned}\tag{7.18}$$

Координати точки в тривимірному просторі x , y и z одержують діленням $x h$, $y h$ і $z h$ на h , тому рівняння кривої NURBS у векторному вигляді записують наступним чином:

$$\mathbf{p}(t) = \frac{\sum_{i=0}^n h_i \mathbf{p}_i N_{i,k}(t)}{\sum_{i=0}^n h_i N_{i,k}(t)},\tag{7.19}$$

Рівняння (7.19) відображає наступні властивості кривої NURBS:

- Крива NURBS, обов'язково проходить через першу і останню точки, які задають
- Дотична в початковій точці збігається за напрямком з вектором $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0$, а дотична у кінцевій точці - з вектором $\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{n-1}$.
- Рівняння NURBS може описувати не тільки NURBS-криві, але й звичайні B-сплайни. Крива Без'є є окремим випадком B-сплайну, тому рівняння NURBS може так само описувати криві Без'є і раціональні криві Без'є.

Рівняння NURBS-кривої має певні переваги перед рівнянням B-сплайну:

- Форма B-сплайну змінюється при зміні координат x, y, z точок, які задають. Таким чином, для кожної точки, яку задають, є три ступені вільності. Крива NURBS дозволяє змінювати четверту координату для кожної точки - h_i . З'являється можливість працювати із кривою на більш тонкому рівні. Збільшення значення однорідної координати точки, яку задають, призводить до того, що NURBS-крива притягається ближче до цієї точки.

- Рівняння NURBS дозволяє точно відтворити всі кінчні перерізи - коло, еліпс, параболу і гіперболу. B-сплайни, навпаки, допускають лише наближення до кінчних перерізів. Таким чином, в NURBS-представленні можна працювати з кінчними перерізами, кривими Без'є, раціональними кривими Без'є та B-сплайнами. Перетворення всіх цих кривих до NURBS може значно скоротити обсяг програмування. Наприклад, можна написати одну-єдину програму для розрахунку точки перетинання кривих NURBS і використовувати її для розрахунку перетинань кривих будь-яких типів, оскільки ці криві завжди можуть бути перетворені до відповідного NURBS-представлення.

7.8. Апроксимація поверхонь

Концепції кривих, розглянутих вище, можна розширити на один вимір, у результаті чого вийдуть відповідні поверхні. Наприклад, рівняння поверхні Без'є буде виглядати таким чином:

$$P(u, v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P_{i,j} B_{i,n}(u) B_{j,m}(v); \quad 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1 \quad (7.20)$$

де $\mathbf{P}_{i,j}$ - радіус-вектори точок, що перебувають у вершинах багатогранника, який їх задає (рис. 7.7), а $\mathbf{B}_{i,n}$ і $\mathbf{B}_{j,m}$ - функції сполучення, звичайні для кривих Без'є.

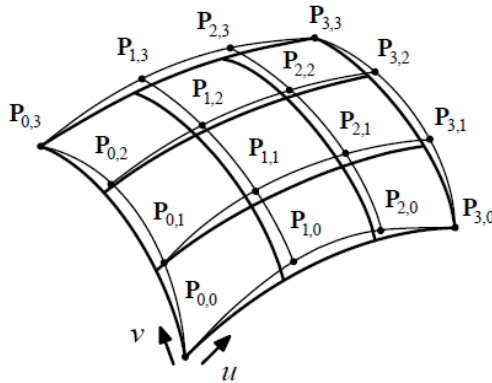


Рисунок 7.7 – Поверхня Без'є

У разі необхідності моделювання складної поверхні доводиться створювати декілька поверхонь – клапотів та з'єднувати їх між собою. Поверхні повинні бути з'єднані таким чином, щоб забезпечити безперервність на межі, по якій здійснюють з'єднання. Це досягають накладенням обмежень на точки, що задають, які розташовані ліворуч і праворуч від межі. Обмеження полягає у тому, що ці точки повинні лежати на прямій, що проходить через точку, яка її задає та лежить на загальній межі (рис. 7.8). Якщо ця вимога виконується, перша похідна виявляється безперервною у всіх точках межі.

Поверхня Без'є є лише окремих випадком В-сплайнової поверхні, а переходячи до однорідних координат точок – з рівняння В-сплайну одержимо рівняння NURBS-кривої; так само рівняння поверхні NURBS утворюють з В-сплайнової поверхні. Рівняння NURBS-поверхні часто використовують для внутрішнього

представлення квадратичних поверхонь у системах геометричного моделювання.

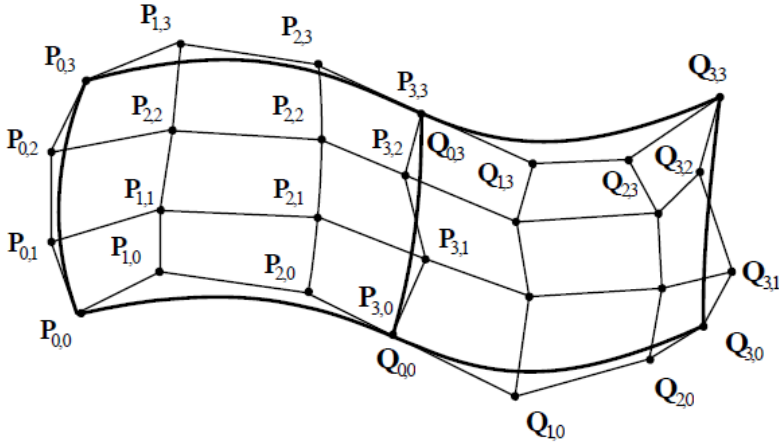


Рисунок 7.8 – Об'єднання клапотів Без'є

7.9 Питання для самоперевірки

1. Для чого будуються інтерполяційні криві?
2. Що таке сплайн? Яке його призначення?
3. Наведіть рівняння ламаної лінії.
4. Як описується сплайн Ерміта?
5. Як описується сплайн Ньютона?
6. Назвіть основні властивості сплайна Ерміта.
7. Як будується крива Без'є?
8. Які основні властивості кривої Без'є?
9. Як будується В-сплайн?
10. Яка основна відмінність В-сплайну та кривої Без'є?
11. Назвіть особливості NURBS кривих.
12. Як створюються апроксимуючі поверхні?

8. ВАРІАЦІЙНІ ЗВ'ЯЗКИ. ПАРАМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

До сих пір геометричні об'єкти розглядалися та існували незалежно один від одного. Редагування одного об'єкту зводиться до змінення значень його параметрів, при цьому значення параметрів інших об'єктів не змінюється. В цьому випадку кажуть про незалежність об'єктів. З практичної точки зору накладання зв'язків на параметри об'єкту є дуже корисним. На Рис. 8.1 приклад накладання зв'язків на два кола та замкнену ламану лінію на площині. Залежність геометричних об'єктів полягає в тому, що кола повинні дотикатися одне до одного, ломана повинна являти собою прямокутник, діаметри d і D пов'язані між собою коефіцієнтом k , центри кіл повинні відстояти на відстанях a та b від сторін прямокутника, розмір горизонтальної сторони прямокутника повинен дорівнювати c . Перелічені зв'язки представлені числами та алгебраїчними рівняннями, зображеними на Рис. 8.1. Ескіз автоматично перебудовується при зміні одного чи декількох параметрів, зберігаючи співвідношення між ними.

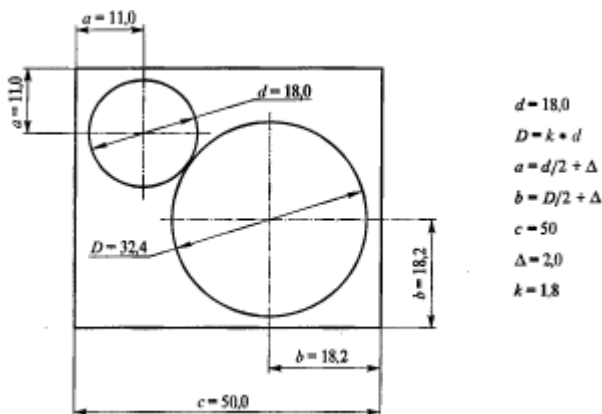


Рисунок 8.1 – Варіаційні зв'язки геометричних об'єктів

Накладені зв'язки називаються варіаційними, а таке моделювання параметричним.

Накладання зв'язків полегшує працю при проектуванні однотипних деталей, а також при збірці.

Будемо називати зв'язуючі параметри варіаційними зв'язками. Крім координат точок, компонентів векторів, скалярних величин зі структури даних геометричних об'єктів, параметрами можуть бути додаткові скалярні величини та координати точок. Для накладання варіаційних зв'язків, потрібно щоб геометричні об'єкти надавали свої параметри у «зовнішнє користування» і перебудовувалися по зміненим параметрам. Варіаційними зв'язками можуть служити будь які алгебраїчні рівняння.

Керування геометричними об'єктами за допомогою варіаційних зв'язків здійснюється наступним чином. Варіаційними зв'язками формується система рівнянь відносно параметрів, що беруть в цьому участь. Якщо ми змінили деякий параметр, то й інші повинні змінитися таким чином щоб система рівнянь знов задовольнялася. Про результати вирішення системи рівнянь треба сповістити геометричні об'єкти, які повинні перебудуватися у зв'язку з новим рішенням. Якщо рівняння є нелінійними, то їх вирішення в загальному випадку провадиться ітераційними методами. Зв'язки доповнені інформацією про геометричні об'єкти та також функціями спілкування, називають *варіаційними об'єктами*. Таким чином в структурі даних варіаційних об'єктів повинні бути: інформація про зв'язані параметри; вихідні значення параметрів; рівняння зв'язку; функції що надають та змінюють необхідну інформацію про параметри що варіюються; функції, що змінюють параметри в процесі рішення; функції повернення до вихідного становища.

Розглянемо деякі варіаційні зв'язки.

Фіксуєчий зв'язок. Встановлює значення параметру, що не змінюється в процесі вирішення системи рівнянь. До фіксуєчого зв'язку відноситься закріплення точки. В загальному вигляді:

$$q = q^{(0)} = const \quad (8.1)$$

Кількість параметрів в фіксуєчих зв'язках завжди дорівнює кількості рівнянь. Тому вони можуть розглядатися як окрема група і рівняння з ними вирішуватися окремо.

Лінійний розмір. Наприклад, на Рис. 8.2 – Лінійний розмір між центрами.

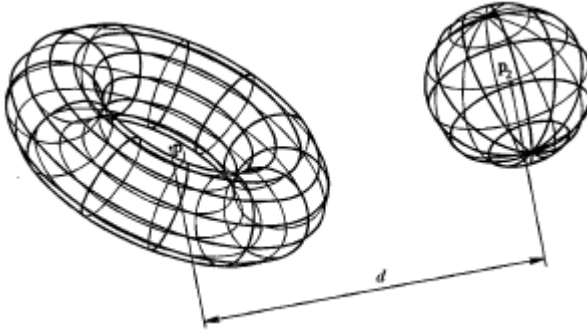


Рисунок 8.2 – Лінійний розмір між центрами тора та сфери.

У векторному виді записується:

$$|p_2 - p_1| - d = 0 \quad (8.2)$$

Або через координати:

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} - d = 0 \quad (8.3)$$

Рівняння (8.3) має шість параметрів та одну константу d . Для того щоб знайти шість невідомих, треба скласти деякі додаткові рівняння, що зв'язують ті самі параметри. Від цих додаткових зв'язків буде залежати поведінка точок. В даному випадку, такою додатковою умовою може бути симетричне переміщення точок. Тобто, щоб центри переміщалися вздовж лінії, що їх з'єднує, а центр тяжіння залишався б нерухомим. Ще однією умовою могла би бути нерухомість одного з центрів.

Розмір вздовж однієї з координат. Буде описуватися одним з рівнянь

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= d_x, \\ y_2 - y_1 &= d_y, \\ z_2 - z_1 &= d_z, \end{aligned} \quad (8.4)$$

Розмір вздовж заданого напрямку. Описується рівнянням:

$$|(p_2 - p_1)m| = d \quad (8.5)$$

Де m – вектор одиничної довжини, що задає напрямок

$m = [m_x, m_y, m_z]^T$. Рівняння (8.5) встановлює, що проекція вектору $p_2 - p_1$ на напрямок вектору m дорівнює d .

Суміщення точок. Описується простим векторним рівнянням:

$$p_2 = p_1 \quad (8.6)$$

Цей зв'язок включає три скалярних рівняння

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= 0, \\ y_2 - y_1 &= 0, \\ z_2 - z_1 &= 0. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Симетрія точок відносно площини. Площину будемо вважати нерухомою (Рис. 8.3)

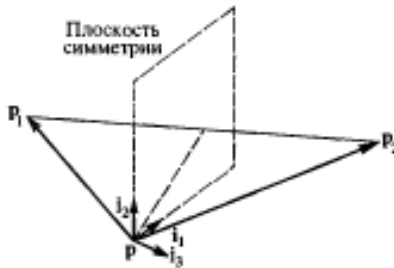


Рисунок 8.3 – Симетрія відносно площини

Описується векторним рівнянням

$$r(x, y) = p + xi_1 + yi_2 \quad (8.8)$$

Або системою:

$$\begin{aligned}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{i}_1 &= (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{i}_1, \\(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{i}_2 &= (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{i}_2, \\(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{i}_3 + (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{i}_3 &= 0,\end{aligned}\tag{8.9}$$

Де $\mathbf{i}_3 = \mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_2$

Кут між векторами. Нехай є чотири точки $\mathbf{p}_1 = [x_1 \ y_1 \ z_1]^T$, $\mathbf{p}_2 = [x_2 \ y_2 \ z_2]^T$, $\mathbf{p}_3 = [x_3 \ y_3 \ z_3]^T$, $\mathbf{p}_4 = [x_4 \ y_4 \ z_4]^T$ по цих чотирьох точках можна побудувати 2 вектори: $\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$ та $\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1$. Кут між ними визначається:

$$\alpha = \arctg \left(\frac{(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \times (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1)}{(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \cdot (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1)} \right)\tag{8.10}$$

Ортогональність векторів

$$(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \cdot (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1) = 0\tag{8.11}$$

Паралельність векторів

$$(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \times (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1) = 0\tag{8.12}$$

Окремим видом зв'язків є алгебраїчні зв'язки, що встановлюються між такими величинами як відстані, розміри та кути, які зазвичай розглядаються як константи або вільні параметри. Іноді алгебраїчні зв'язки використовуються щоб зробити рівними декілька параметрів різних геометричних об'єктів. Для цього вводять вільний параметр і сукупність рівнянь, що прирівнює потрібні параметри геометричних об'єктів вільному параметру.

Питання для самоперевірки

1. Що таке варіаційні зв'язки та параметричне моделювання?
2. Коли застосовується параметричне моделювання?
3. Яким чином здійснюється керування об'єктами за допомогою варіаційних зв'язків?
4. Що і як описує фіксуючий зв'язок?
5. Навіщо потрібні і якими можуть бути додаткові умови якщо варіаційним зв'язком є лінійний розмір?
6. Як записується розмір вздовж однієї з координат?
7. Як записується суміщення точок?
8. Як записується умова симетрії відносно площини?
9. Як визначається кут між векторами?
10. Як записується умова ортогональності векторів?
11. Як записується умова паралельності векторів?
12. Що таке алгебраїчні зв'язки?

ЛІТЕРАТУРА

1. Грабченко, А.І. Теорія 3D моделювання / А.І.Грабченко, В.Л. Доброскок. – Х.: НТУ "ХП", 2009. – 230 с.
2. Solidworks у завданнях 3D моделювання та інжинірингу технічних систем. Навч. посібник / В.Я. Ворощук, Т.М. Вітенько. Тернопіль: ФОП Паляниця В.А., 2021. 164 с.
3. Зінько, Р.В. Системи 3D моделювання: навчальний посібник / Р.В. Зінько, В.Г. Топільницький. Львів: Галицька видавнича спілка, 2021. – 150 с.
4. Системи 3D моделювання: Навчальний посібник / Пальчевський Б.О., Валецький, Б.П., Вараніцький Т.Л. / Луцьк:, 2016 – 176с.
5. Kunwoo Lee. Principles of CAD/CAM/CAE Systems/ - Addison-Wesley, Reading, MA, 1999. - 582p.