
УДК 531

Д-р техн. наук А. Д. Шамровский, Е. Н. Богданова
Государственная инженерная академия, г. Запорожье

РЕШЕНИЕ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С ПОМОЩЬЮ ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ

Изучена возможность применения метода последовательных перемещений для решения контактных задач теории упругости, в частности, задачи о штампе.

Ключевые слова: *стержневая модель, сплошная среда, метод последовательных перемещений.*

Введение

Ранее [1] была разработана стержневая модель сплошной среды для решения плоских статических задач теории упругости, а также предложена дискретная модель элемента конечных размеров, который был успешно использован для решения классических задач механики деформируемого твердого тела. В работе Н. И. Мухелишвили приводится полное обоснование решений контактных задач [2]. Также аналитическое решение приводится Галиным [3]. Эта работа базируется на идее моделирования сплошной среды системой упругих стержней, которые деформируются совместно [4]. Для проведения расчетов по указанной модели предлагается использовать метод последовательных перемещений [5]. Особенности данного метода позволяют применять его и при решении контактных задач теории упругости.

Постановка задачи

Решается смешанная граничная задача статики упругого тела. А именно, находится упругое равновесие тела, если заданы смещения части точек его поверхности. Физически это соответствует случаю, когда усилиями, приложенными к точкам поверхности, этим точкам сообщают заданные смещения и закрепляют поверхность в этом виде.

Рассматривается случай одного штампа с прямолинейным основанием, параллельным оси Ox , причем этот штамп может перемещаться лишь вертикально (рис. 1). Отрезок границы, соприкасающийся со штампом, мы будем считать симметричным относительно оси Oy . Штамп вдавливается в упругую конечную область Ω , неизвестной силой, перпендикулярной к границе Γ . Предполагается, что трение настолько велико, что скольжение не может иметь места. Рассматриваемая задача состоит в отыскании усилий, приложенных к области Ω на границе Γ , при известном векторе смещений $\bar{u}(x, y)$ точек этой области, а также отыскании перемещения всех остальных точек тела.

Метод решения

Имеется стержневая система, которая моделирует некую сплошную среду с изначально заданными перемещениями узлов в граничной зоне (рис. 2). Эти начальные перемещения вызваны приложенной к телу

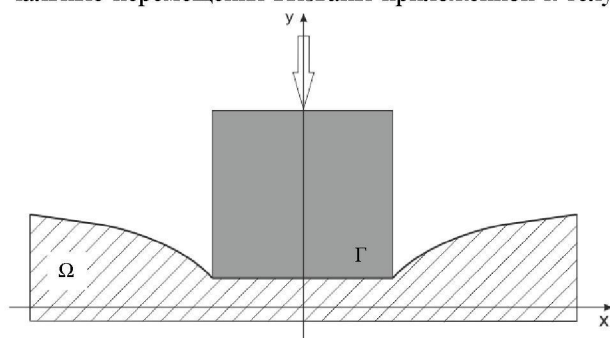


Рис. 1. Штамп с прямолинейным основанием

нагрузкой, в зоне контакта имеется деформация. Для расчета используется метод последовательных перемещений [3]. Отличием решаемых контактных задач теории упругости является то, что для некоторых точек поверхности задаются усилия, а для других перемещения. Метод последовательных перемещений вполне пригоден для таких смешанных задач. Под штампом задаются перемещения узлов, а для остальных узлов поверхности – усилия (нулевые). Разработаны алгоритм и программа для решения соответствующих задач.

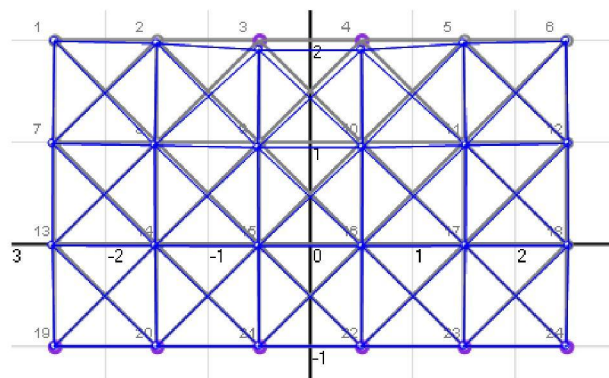


Рис. 2. Стержневая модель сплошной среды

Рассматривается стержневая система, в которой некоторые узлы в граничной зоне имеют начальные перемещения и считаются закрепленными. А также закреплены узлы нижней границы тела. Все остальные узлы считаются подвижными, их перемещения необходимо найти для нахождения равновесия системы в целом и усилий, приложенных к телу.

И здесь важно отметить, что для решения данной задачи на первом шаге координаты смещенных узлов берем те, которые были в модели до приложения нагрузки, т. е. до смещения. Потому так решается задача, обратная тем, решения которых предложены в работах предшествующих данной [2–4].

Начальные координаты узлов будут:

$$(x_i, y_i), \quad (i = 1 \dots n) \tag{1}$$

Имея указанные координаты, можно предварительно вычислить для всех стержней их начальные длины. На начальные узлы действуют силы с проекциями на оси координат P_{xk}, P_{yk} . Вдоль стержней действуют их реакции R_{ik} , направленные от узла k , что отвечает растянутым стержням. Если в системе имеются сжатые стержни, то соответствующие реакции отрицательны.

Введем обозначения:

$$S_{kx} = P_{xk} - \sum_{i=1}^n R_{ik} \cos \alpha_{ik}, \quad S_{ky} = P_{yk} - \sum_{i=1}^n R_{ik} \sin \alpha_{ik} \tag{2}$$

В положении равновесия системы величины S_{kx} и S_{ky} должны быть равны нулю; однако на первом шаге,

они заведомо не равны нулю, а в дальнейшем, при правильно построенной процедуре, к нулю приближаются.

Таким образом, получаем формулу для расчета силы:

$$P_{xk} = \sum_{i=1}^n R_{ik} \cos \alpha_{ik}, \quad P_{yk} = \sum_{i=1}^n R_{ik} \sin \alpha_{ik}, \quad (3)$$

где $\cos \alpha_{ik} = \frac{x_i - x_k}{L_{ik}}$; $\sin \alpha_{ik} = \frac{y_i - y_k}{L_{ik}}$. (4)

Обозначим малые перемещения узла k под действием сил P_{kx} , P_{ky} через u_k , v_k . Тогда для деформаций стержней, сходящихся в узле k , имеем:

$$\Delta_{ik} = -u_k \cos \alpha_{ik} - v_k \sin \alpha_{ik}. \quad (5)$$

Все стержни считаются упругими; связь между реакциями стержней и их деформациями (удлинениями Δ_{ik}) имеет вид:

$$R_{ik} = D_{ik} \Delta_{ik} \quad (i = 1 \dots n). \quad (6)$$

Жесткости стержней D_{ik} вычисляются по формулам:

$$D_{ik} = \frac{E_{ik} S_{ik}}{L_{ik}} \quad (i = 1 \dots n). \quad (7)$$

Здесь E_{ik} – модуль упругости; S_{ik} – площадь поперечного сечения; L_{ik} – длина i -го стержня.

На произвольном шаге строим линейные уравнения:

$$a_{11}u_k + a_{12}v_k = S_{kx}, \quad a_{21}u_k + a_{22}v_k = S_{ky}, \quad (8)$$

где

$$a_{11} = \sum_{i=1}^n D_{ik} \cos^2 \alpha_{ik}; \quad a_{12} = a_{21} = \sum_{i=1}^n D_{ik} \sin \alpha_{ik} \cos \alpha_{ik};$$

$$a_{22} = \sum_{i=1}^n D_{ik} \sin^2 \alpha_{ik} \quad (9)$$

и решаем их:

$$u_k = \frac{\Delta_u}{\Delta}, \quad v_k = \frac{\Delta_v}{\Delta}. \quad (10)$$

При найденных на определенном шаге процедуры перемещениях узла k имеем рекуррентную формулу для вычисления новых координат узла:

$$x_k \rightarrow x_k + u_k, \quad y_k \rightarrow y_k + v_k. \quad (11)$$

А также накапливаем значение силы,

$$P_{xk} \rightarrow P_{xk}, \quad P_{yk} \rightarrow P_{yk}. \quad (12)$$

Далее переходим к следующему узлу и повторяем

процедуру. Условием ее прекращения будет:

$$\sqrt{S_{kx}^2 + S_{ky}^2} \leq \varepsilon \sqrt{P_{xk}^2 + P_{yk}^2}, \quad (13)$$

где ε – заданная относительная погрешность.

Анализ полученных результатов

Применение данного метода позволяет находить силы, вызвавшие заданные перемещения, а также перемещения всех узлов системы, удовлетворяющие равновесию системы в целом.

Для исследования поведения системы будем постепенно увеличивать заданное начальное смещение от 0,1 до 0,5 при неизменных параметрах самой системы, что демонстрируется на рисунках 3–11.

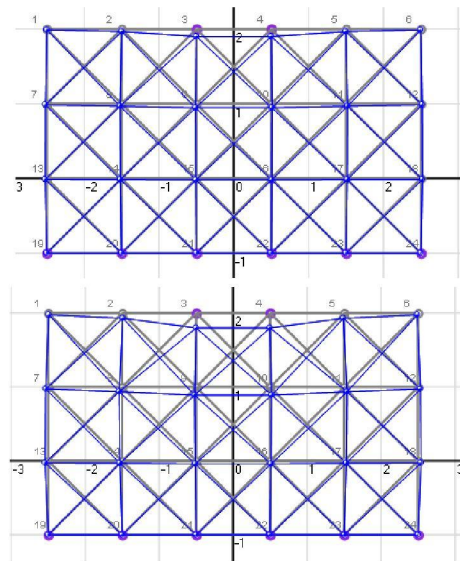


Рис. 3, 4. Дискретная модель 5x3 элемента для перемещений 0,1 и 0,2

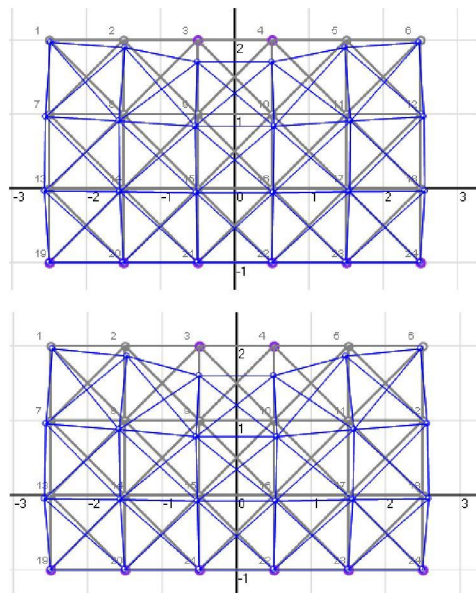


Рис. 5, 6. Дискретная модель 5x3 элемента для перемещений 0,3 и 0,4

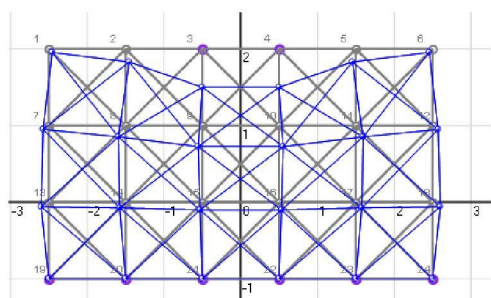


Рис. 7. Дискретная модель 5x3 элемента для перемещения 0,5

Проводим дальнейшее разбиение, делаем размер дискретного элемента 0,5 и сравниваем полученные результаты.

Снова уменьшаем размер дискретного элемента вдвое, новый размер дискретного элемента 0,25.

Как видно из рисунков, дальнейшее разбиение не имеет смысла, так как результаты, полученные с помощью данных моделей существенных отличий не имеют.

Все полученные значения сил, а также суммарные значения, заносим в таблицу 1.

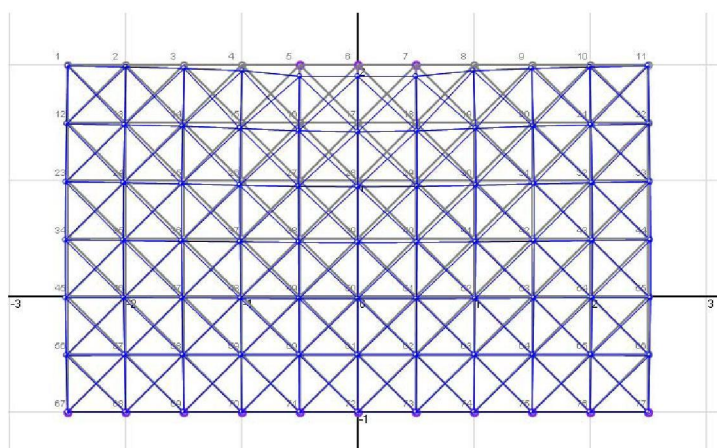


Рис. 8. Дискретная модель 10x6 элементов размера 0,5 для перемещения 0,1

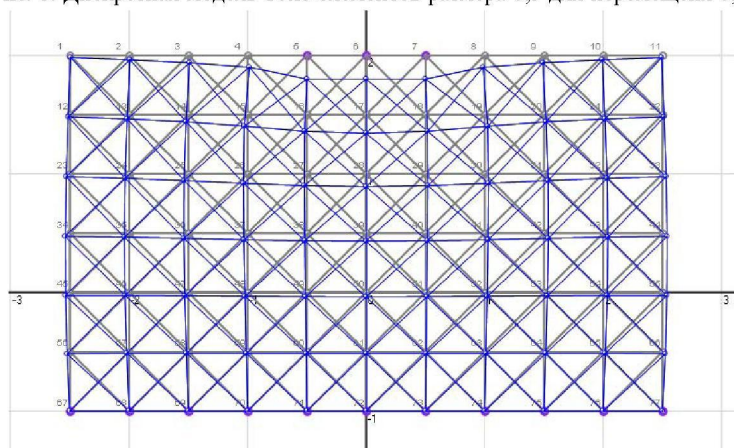


Рис. 9. Дискретная модель 10x6 элементов размера 0,5 для перемещения 0,2

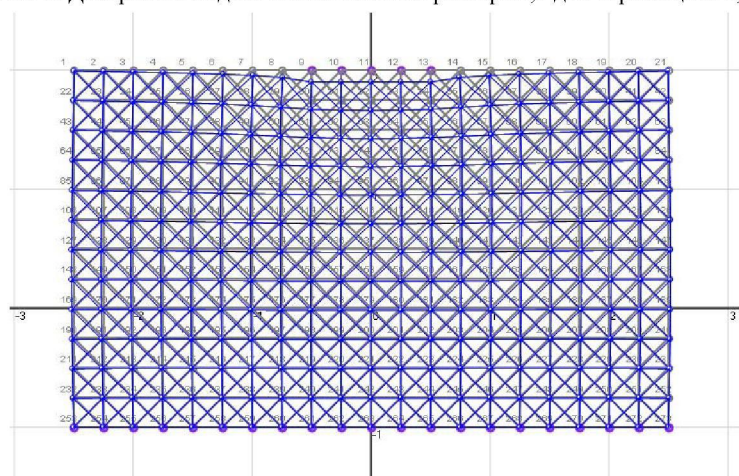


Рис. 10. Дискретная модель 20x12 элементов размера 0,25 для перемещения 0,1

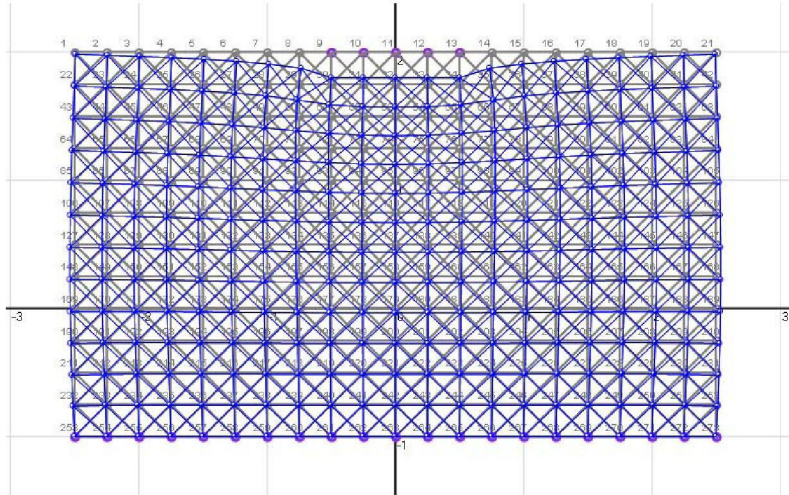


Рис. 11. Дискретная модель 20x12 элементов размера 0,25 для перемещения 0,2

Таблица 1 – Сила для вызываемого ею перемещения для моделей 5x3, 10x6 и 20x12

0,05			0,1			0,15			0,2		
5x3	10x6	20x12	5x3	10x6	20x12	5x3	10x6	20x12	5x3	10x6	20x12
0,036	0,024	0,017	0,072	0,047	0,032	0,106	0,070	0,047	0,140	0,091	0,061
0,036	0,017	0,011	0,072	0,034	0,02	0,106	0,050	0,029	0,140	0,066	0,039
0,073	0,024	0,010	0,143	0,047	0,018	0,212	0,069	0,027	0,279	0,091	0,035
	0,066	0,011		0,129	0,02		0,189	0,029		0,248	0,039
		0,017			0,032			0,047			0,06
		0,065			0,123			0,179			0,233

Используя численные значения силы, строим графики зависимости силы от перемещения для предложенных моделей (рис. 12).

Как видим, численно значения силы для данных моделей отличаются не значительно. А следовательно и нет потребности в дальнейшей дискретизации.

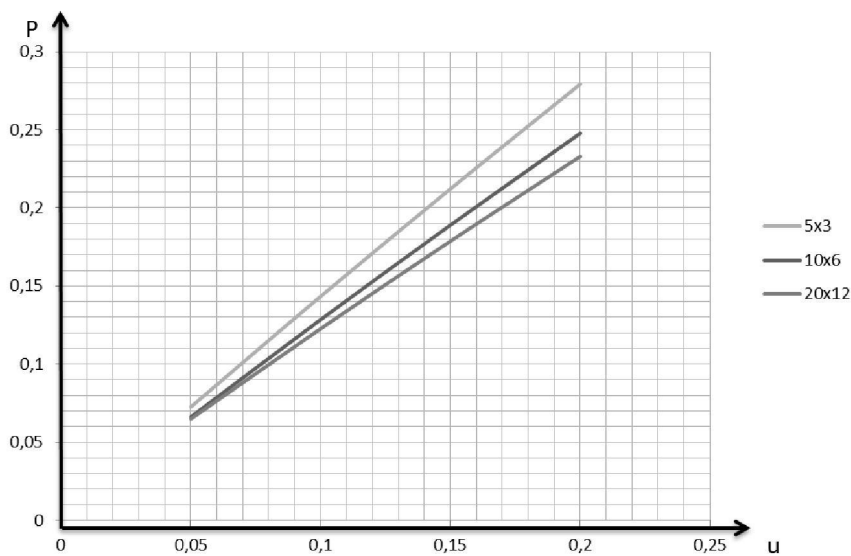


Рис. 12. Зависимость между силой и вызываемым ею перемещением для моделей 5x3, 10x6 и 20x12

Выводы

Разработана стержневая модель сплошной среды для решения контактных задач теории упругости. Предложенная дискретная модель для решения задачи о штампе с прямолинейным основанием. Для проведения расчетов по дискретной модели предлагается использовать метод последовательных перемещений, хорошо зарекомендовавший себя при расчете стержневых конструкций.

Список литературы

1. Дискретные модели для плоских статических задач теории упругости / А. Д. Шамровский, Ю. А. Лымаренко, Д. Н. Колесник и др.] // Восточно-Европейский журнал

- передовых технологий // научный журнал. – Харьков : Технологический центр, 2011. – № 3/7 (51). – С. 11–18.
2. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – М. : Наука, 1966. – 709 с.
 3. Развитие теории контактных задач в СССР : учеб. / под ред. Галина Л. А. – М. : Наука, 1976. – 493 с.
 4. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела : учебное пособие для вузов / Ю. Н. Работнов. – [2-е изд., испр.]. – М. : Наука, 1988. – 712 с.
 5. Шамровский О. Д. Метод последовательных приближений для расчета стержневых систем / О. Д. Шамровский, А. И. Безверхий, В. В. Кривуляк // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – 2008. – № 2. – С. 110–118.

Одержано 17.05.2013

Шамровський О.Д., Богданова Е.М. Розв'язання контактних задач теорії пружності за допомогою дискретних моделей

Вивчено можливості застосування методу послідовних переміщень для розв'язання контактних задач теорії пружності, зокрема задачі про штамп.

Ключові слова: стержнева модель, суцільне середовище, метод послідовних переміщень.

Shamrovskiy A., Bogdanova E. Solution of contact problems of elasticity using the discrete models

The application opportunity of successive movements method for solution of elasticity theory contact problems, in particular problem of stamp was reassessed.

Key words: beam model, solid medium, method of successive movements.
