

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Запорізький національний технічний університет

Спектральний аналіз сигналів і кіл

Методичні вказівки
до лабораторних робіт з дисципліни
«Основи теорії кіл, сигналів та процесів»
для студентів спеціальностей 7.160103 – «Системи захисту від
несанкціонованого доступу», 7.160105 – «Захист інформації у
комп'ютерних системах та мережах»
усіх форм навчання

Спектральний аналіз сигналів і кіл. Методичні вказівки до лабораторних робіт з дисципліни «Основи теорії кіл, сигналів та процесів» для студентів спеціальностей 7.160103 – «Системи захисту від несанкціонованого доступу», 7.160105 – «Захист інформації у комп'ютерних системах та мережах» усіх форм навчання /Укл: Л.М. Карпуков, - Запоріжжя: ЗНТУ, 2007. - с. 62.

Укладач: Л.М. Карпуков, професор, д.т.н.

Рецензент: С.М. Романенко, доцент, к.ф.-м.н.

Відповідальний за випуск: Л.М. Карпуков

Затверджено
На засіданні кафедри
захисту інформації

Протокол № 7 від 18.04. 2007р.

ЗМІСТ

Вступ. Загальна характеристика циклу лабораторних робіт	4
1. Лабораторна робота № 1 Спектральний аналіз і синтез періодичного сигналу	4
2. Лабораторна робота № 2 Спектральний метод аналізу лінійних кіл при періодичних вхідних діях	14
3. Лабораторна робота № 3 Дослідження сигналів з використанням швидкого перетворення Фур'є	24
4. Лабораторна робота № 4 Операторний метод аналізу сигналів на основі швидкого перетворення Фур'є	31
5. Лабораторна робота № 5 Операторний метод аналізу лінійних кіл на основі швидкого перетворення Фур'є	36
6. Лабораторна робота № 6 Моделювання і аналіз лінійних цифрових фільтрів	44
Список літературних джерел	55
Додаток А Інтерфейс системи MATHCAD	55

Загальна характеристика циклу лабораторних робіт

Цикл лабораторних робіт присвячено вивченню математичних методів, використовуваних для вирішення основних завдань спектрального аналізу аналогових і дискретних сигналів та аналізу лінійних аналогових і дискретних ланцюгів.

Завдання, сформульовані в лабораторних роботах, містять:

- спектральний аналіз і синтез періодичних аналогових сигналів на основі тригонометричних рядів Фур'є;
- спектральний аналіз лінійних аналогових ланцюгів;
- операторний аналіз і синтез аналогових сигналів на основі прямого і зворотного інтегральних перетворень Лапласа;
- операторний аналіз лінійних аналогових кіл на основі інтегральних перетворень Лапласа;
- аналіз сигналів і кіл на основі дискретного перетворення Фур'є;
- аналіз сигналів і кіл на основі швидкого перетворення Фур'є;
- складання різнісного рівняння і передавальної функції лінійного цифрового фільтру (ЛЦФ) на основі аналогового прототипу;
- аналіз ЛЦФ шляхом рішення різнісного рівняння;
- аналіз ЛЦФ за допомогою z-перетворення;
- моделювання перехідної і імпульсної характеристик лінійних аналогових і дискретних кіл;
- аналіз лінійних аналогових і дискретних кіл методом інтеграла згортки.

Лабораторні роботи виконуються з використанням системи математичного моделювання MATHCAD, опис основних функцій якої приведений у Додатку.

Лабораторна робота №1

Спектральний аналіз і синтез періодичного сигналу

Мета роботи – вивчення методів спектрального аналізу і синтезу періодичних сигналів з використанням тригонометричних рядів Фур'є.

Теоретичні відомості

Сигнал $u(t)$, що задовольняє умові

$$u(t) = u(t - kT), \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

називається періодичним, а інтервал часу T – періодом сигналу. Приклад періодичного сигналу у вигляді послідовності прямокутних імпульсів тривалістю τ і висотою h приведений на рис. 1.

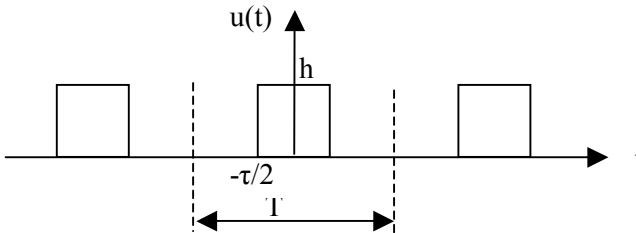


Рисунок 1.1

Важливою характеристикою сигналу є його енергія. Для періодичного сигналу енергія визначається по співвідношенню:

$$E = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t)^2 dt. \quad (1.2)$$

Періодичний сигнал, який має кінцеве значення енергії, може бути розкладений у ряд Фур'є. Формули розкладання сигналу в ряд Фур'є для тригонометричного базису мають наступний вигляд:

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t) + s_n \sin(n\omega_0 t), \quad (1.3)$$

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n), \quad (1.4)$$

де $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ - кутова частота періодичної послідовності імпульсів.

Коефіцієнти рядів обчислюються за співвідношеннями:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) dt, \quad (1.5)$$

$$c_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) \cos(n\omega_0 t) dt, \quad (1.6)$$

$$s_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) \sin(n\omega_0 t) dt, \quad (1.7)$$

$$\text{де } a_n = c_n / \cos(\varphi_n), \quad \varphi_n = -\arg \operatorname{tg}(s_n / c_n). \quad (1.8)$$

Коефіцієнти ряду (1.4) називаються гармоніками спектру сигналу. Коефіцієнт a_n - це амплітуда, а коефіцієнт φ_n - фаза n -й гармоніки спектру. Набір гармонік утворює спектр сигналу. Розрізняють амплітудно-частотний спектр, представлений діаграмою, складеною з амплітуд гармонік набору, а також фазочастотний спектр у вигляді діаграми, складеної з фаз гармонік.

Аналіз спектру сигналу виконується за співвідношеннями (1.5) – (1.8). Синтез сигналу за його спектром здійснюється за співвідношеннями (1.3), (1.4). При синтезі ряди Фур'є складаються з кінцевого числа членів. Число членів N ряду визначається по ефективній ширині спектру сигналу. Ефективна ширина спектру – це інтервал частот, у якому зосереджене 90% енергії сигналу. По відомому спектру сигналу його потужність можна обчислити по співвідношенню Парсеваля:

$$P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t)^2 dt = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n, \quad (1.9)$$

де P - потужність сигналу,

$P_0 = a_0^2$ - потужність постійної складової спектру,

$P_n = \frac{a_n^2}{2}$ - потужність n -й гармоніки спектру.

Спектр, складений з потужностей P_0 , P_n називається енергетичним

спектром сигналу.

На підставі співвідношення (1.9) число членів ряду N , що визначає ефективну ширину спектру

$$\Delta\omega = N\omega_0, \quad (1.10)$$

обчислюється з умови:

$$0.9 \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t)^2 dt \leq P_0 + \sum_{n=1}^N P_n. \quad (1.11)$$

Лабораторне завдання

Розробити програму і виконати спектральний аналіз і синтез періодичного сигналу, складеного з імпульсів заданої форми. Варіанти завдань приведені в табл. 1.1.

Таблиця 1.1

Цифри номери	Останні 3-и цифри N-значного номера студентського квитка		
	(N-2)-а цифра	(N-1)-а цифра	N-а цифра
	Період T (мсек)	Тривалість імпульсу τ (мсек)	Форма імпульсу
0	2	1.0	Рис. 1.2
1	2.5τ	1.5	Рис. 1.3
2	3	2.0	Рис. 1.4
3	3.5τ	2.5	Рис.1.5
4	4	3.0	Рис. 1.6
5	4.5τ	3.5	Рис. 1.7
6	5	4.0	Рис. 1.8
7	5.5τ	4.5	Рис. 1.9
8	6	5.0	Рис. 1.10
9	6.5τ	5.5	Рис. 1.11

Варіанти форм імпульсів з висотою, рівною 1, представлені на

рис.1.2 - 1.11.

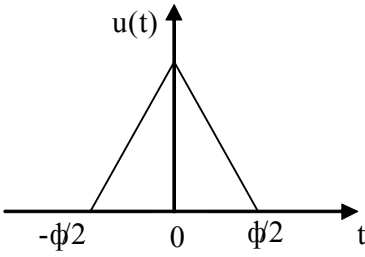


Рисунок 1.2

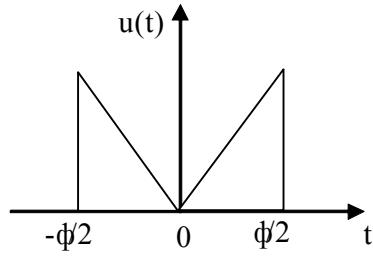


Рисунок 1.3

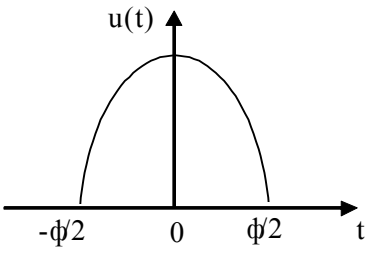


Рисунок 1.4

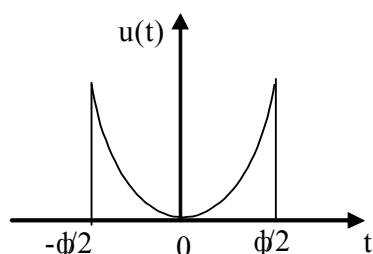


Рисунок 1.5

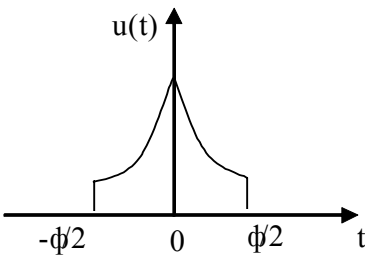


Рисунок 1.6

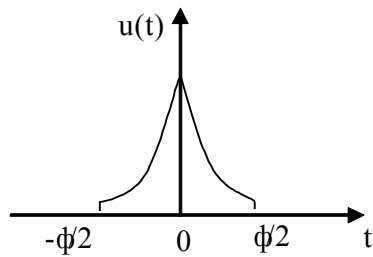


Рисунок 1.7

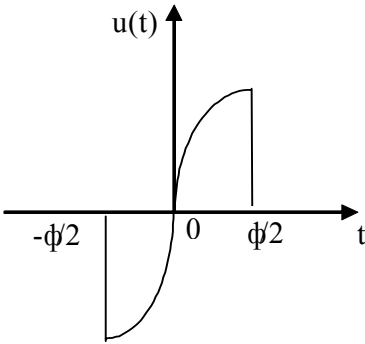


Рисунок 1.8

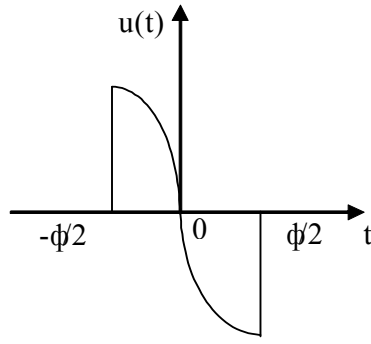


Рисунок 1.9

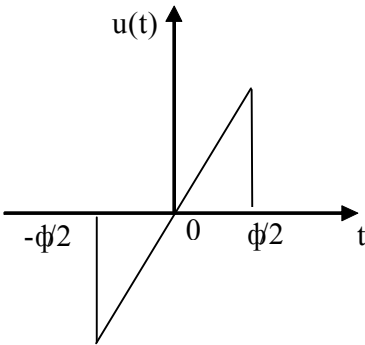


Рисунок 1.10

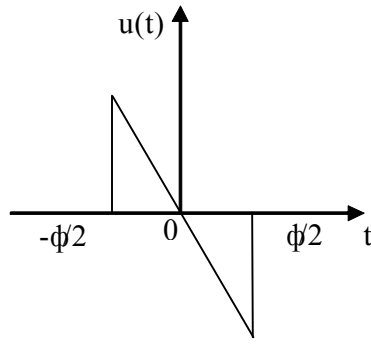


Рисунок 1.11

Математичний опис імпульсів має наступний вигляд.

Для рис. 1.2:

$$u(t) = \begin{cases} 1 - \frac{2|t|}{\tau}, & \text{якщо } |t| \leq \tau/2, \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases} \quad (1.12)$$

Для рис. 1.3:

$$u(t) = \begin{cases} \frac{2|t|}{\tau}, & \text{якщо } t \leq \tau/2, \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases} \quad (1.13)$$

Для рис. 1.4:

$$u(t) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right), & \text{якщо } |t| \leq \tau/2, \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases} \quad (1.14)$$

Для рис. 1.5:

$$u(t) = \begin{cases} 1 - \cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right), & \text{якщо } |t| \leq \tau/2, \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases} \quad (1.15)$$

Для рис. 1.6:

$$u(t) = \begin{cases} e^{-2|t|/\tau}, & \text{якщо } |t| \leq \tau/2, \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases} \quad (1.16)$$

Для рис. 1.7:

$$u(t) = \begin{cases} e^{-2t^2/\tau}, & \text{якщо } |t| \leq \tau/2, \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases} \quad (1.17)$$

Для рис. 1.8:

$$u(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi t}{\tau}\right), & \text{якщо } |t| \leq \tau/2, \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases} \quad (1.18)$$

Для рис. 1.9:

$$u(t) = \begin{cases} -\sin\left(\frac{\pi t}{\tau}\right), & \text{якщо } |t| \leq \tau/2, \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases} \quad (1.19)$$

Для рис. 1.10:

$$u(t) = \begin{cases} \frac{2t}{\tau}, & \text{якщо } |t| \leq \tau/2, \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases} \quad (1.20)$$

Для рис. 1.11:

$$u(t) = \begin{cases} -\frac{2t}{\tau}, & \text{якщо } |t| \leq \tau/2, \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases} \quad (1.21)$$

У лабораторній роботі потрібно:

1. Визначити за співвідношеннями (1.5) - (1.8) амплітуди і фази

- гармонік спектру сигналу, узявши число членів ряду Фур'є $N=20$.
2. Побудувати діаграму для амплітудно-частотного і фазо-частотного спектрів.
 3. Скласти таблицю потужностей гармонік і побудувати діаграму для енергетичного спектру.
 4. Визначити ефективну ширину спектру.
 5. Синтезувати сигнал за його спектром для різного числа членів ряду: $N=4, 10, 20$. Для кожного варіанту побудувати на одному полі графік початкового сигналу $u(t)$ і графік синтезованого сигналу $U(t)$.
 6. Повторити п.п. 1, 2 при $N=20$ при зменшеній удвічі тривалості імпульсу.
 7. Повторити п.п. 1, 2 при $N=20$ при збільшеному удвічі періоді T .

При виконанні 1-го пункту завдання необхідно описати форму імпульсу за допомогою операторів програмного блоку.

При програмуванні формул (1.5) - (1.7), (1.11) інтеграцію для підвищення точності обчислень слід брати в межах дії імпульсу.

При виконанні 6-го пункту завдання слід до потужності постійної складової P_0 послідовно додавати потужності гармонік, починаючи з першої, до тих пір, поки не виконається умова (1.11).

При побудові графіків зміну за часом узяти в межах періоду, від $-T/2$ до $T/2$.

Наприклад, фрагменти програми спектрального аналізу і синтезу прямокутного імпульсу висотою $h=1$ матимуть наступний вигляд:

Завдання форми сигналу

$$\tau := 1 \cdot 10^{-3}$$

$$j := \sqrt{-1}$$

$$T := 4 \cdot \tau$$

$$\omega_0 := \frac{2 \cdot \pi}{T}$$

$$u1(t) := \begin{cases} 1 & \text{if } |t| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Аналіз спектру сигналу

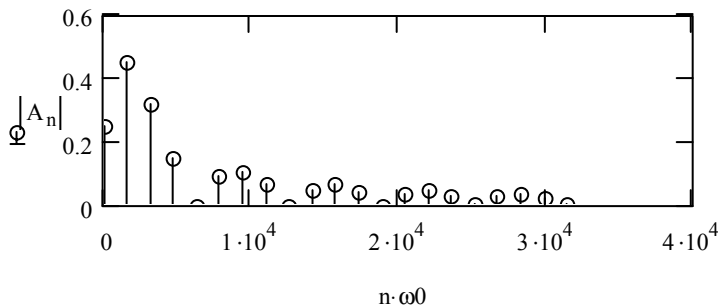
$$a_0 := \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} u_1(t) dt \quad \omega_0 := a_0 \quad n := 1..N$$

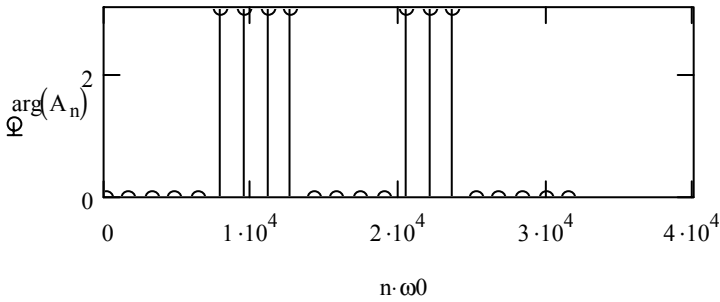
$$C_n := \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} u_1(t) \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t) dt$$

$$S_n := \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} u_1(t) \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t) dt$$

$$\phi_n := \begin{cases} -\operatorname{atan} \frac{S_n}{C_n} & \text{if } C_n \neq 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$a_n := \frac{C_n}{\cos(\phi_n)} \quad A_n := a_n \cdot e^{j \cdot \phi_n} \quad n := 0..N$$





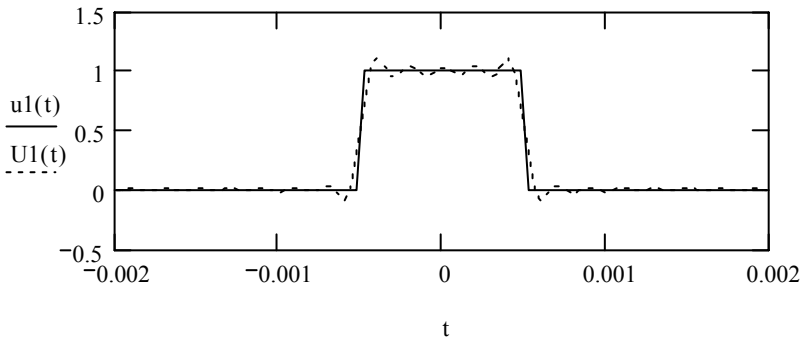
Синтез сигналу за його спектром

$$N = 20$$

$$U_1(t) := a_0 + \sum_{n=1}^N \left(a_n \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t + \phi_n) \right)$$

$$\Delta t := \frac{T}{100}$$

$$t := \frac{-T}{2}, \frac{-T}{2} + \Delta t.. \frac{T}{2}$$



Зміст звіту

1. Короткі теоретичні відомості і розрахункові співвідношення.
Рисунок і опис досліджуваного періодичного сигналу.

2. Діаграми амплітудно-частотного і фазо-частотного спектрів при числі членів ряду Фур'є $N = 20$.
3. Діаграма енергетичного спектру сигналу.
4. Графіки з результатами досліджень впливу на форму відновлюваного сигналу кількості гармонік, що враховуються в спектрі ($N=5, 10, 20$).
5. Діаграма амплітудного спектру при зменшеній удвічі тривалості імпульсу.
6. Діаграма амплітудного спектру при збільшеному удвічі періоді сигналу.
7. Висновки по виконаній роботі.

Контрольні питання

1. Умова, необхідна для розкладання періодичного сигналу в ряд Фур'є.
2. Умова періодичності сигналу.
3. Формули розкладання сигналу в ряд Фур'є по тригонометричному базису.
4. Формули для розрахунку коефіцієнтів ряду Фур'є.
5. Як спроститься розрахунок коефіцієнтів ряду Фур'є у разі аналізу парних $s(t) = s(-t)$ або непарних $s(-t) = -s(t)$ функцій?
6. Що таке спектр сигналу, гармоніки спектру?
7. Як визначається ефективна ширина спектру?
8. Як визначається потужність складових спектру?
9. Що таке енергетичний спектр?
10. Що таке огинаюча спектру?
11. Як зміниться спектр при зміні періоду проходження сигналу?
12. Як зміниться спектр при зміні тривалості імпульсу?

Лабораторна робота №2

Спектральний метод аналізу лінійних кіл при періодичних вхідних діях

Мета роботи – вивчення методу спектрального аналізу стаціонарного режиму в лінійних колах при вхідних діях у вигляді періодичних сигналів.

Теоретичні відомості

Спектральний метод аналізу лінійних кіл при входній дії, що є періодичним сигналом складної форми, включає наступні процедури:

1. Розкладання входного сигналу в ряд Фур'є з визначенням амплітуд і фаз гармонік спектру сигналу.
2. Визначення за методом комплексних амплітуд комплексного коефіцієнта передачі досліджуваному кола.
3. Знаходження по комплексному коефіцієнту передачі реакції кола на входну дію у вигляді гармоніки спектру сигналу.
4. Визначення вихідної реакції кола шляхом підсумовування реакцій від гармонік спектру сигналу.

При визначенні гармонік спектру входного періодичного сигналу $u_1(t)$ використовується ряд Фур'є у формі (1.3), члени якого виражаються через комплексні амплітуди:

$$u_1(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}(\dot{A}_n e^{jn\omega_0 t}), \quad (2.1)$$

де $\operatorname{Re}(\dot{A}_n e^{jn\omega_0 t}) = a_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$; $\dot{A}_n = a_n e^{j\varphi_n}$ - комплексна амплітуда гармоніки спектру; $j = \sqrt{-1}$ - уявна одиниця.

Аналіз кола по методу комплексних амплітуд зводиться до визначення комплексного коефіцієнта передачі на частоті ω :

$$\dot{K}(\omega) = \frac{\dot{U}_2(\omega)}{\dot{U}_1(\omega)}. \quad (2.2)$$

Тут $\dot{U}_1$ - комплексна амплітуда гармонійного коливання на вході кола,

$\dot{U}_2$ - комплексна амплітуда гармонійного коливання на виході кола.

Комплексний коефіцієнт передачі може бути представлений у вигляді:

$$\dot{K}(\omega) = K(\omega) e^{j\varphi(\omega)}, \quad (2.3)$$

де $K(\omega)$ - модуль, $\varphi(\omega)$ - аргумент (фаза) комплексного коефіцієнта передачі.

Залежність модуля комплексного коефіцієнта передачі від частоти називається амплітудно-частотною характеристикою кола (АЧХ). Залежність аргументу комплексного коефіцієнта передачі від частоти називається фазо-частотною характеристикою кола (ФЧХ).

При відомому комплексному коефіцієнті передачі кола його

реакція на вхідну дію

$$\dot{U}_{1_n} = \dot{A}_n = a_n e^{j\varphi_n} \quad (2.4)$$

відповідне n -й гармоніці спектру сигналу, обчислюється таким чином:

$$\dot{U}_{2_n} = \dot{A}_n \dot{K}(n\omega_0) = U_{2_n} e^{j\phi_{2_n}}. \quad (2.5)$$

Тут $U_{2_n} = a_n K(n\omega_0)$ - модуль, $\phi_{2_n} = \varphi_n + \phi(n\omega_0)$ - фаза вихідного гармонійного сигналу.

Відповідно до принципу накладення реакція на виході лінійного кола буде рівна сумі реакцій від вхідних дій, складаючих ряд (2.1):

$$\begin{aligned} u_2(t) &= a_0 K(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left[\dot{A}_n \dot{K}(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t} \right] = \\ &= U_{2_0} + \sum_{n=1}^{\infty} U_{2_n} \cos(n\omega_0 t + \phi_{2_n}). \end{aligned} \quad (2.6)$$

У частотній області амплітуди, U_{2_n} утворюють амплітудно-частотний спектр, фази ϕ_{2_n} - фазо-частотний спектр вихідного сигналу.

Лабораторне завдання

Розробити програму і виконати аналіз лінійного кола спектральним методом при вхідному імпульсному періодичному сигналі, заданому в лабораторній роботі №1. Імпульс визначити на інтервалі $[0, \tau]$. Варіанти схем кола і значень параметрів її елементів приведені в табл. 2.1. Схеми кіл зображені на рис. 2.1 – 2.4.

Таблиця 2.1

Цифри номери	Останні 3-и цифри N-значного номера студентського квитка		
	(N-2)-а цифра	(N-1)-а цифра	N-а цифра
	C(мкФ) L(мГн)	R(кОм)	Схема
0	1	0.1	Рис. 2.1
1	1.5	0.15	Рис. 2.2
2	2	0.2	Рис. 2.3
3	2.5	0.25	Рис. 2.4

4	3	0.3	Рис. 2.1
5	3.5	0.35	Рис. 2.2
6	4	0.4	Рис. 2.3
7	4.5	0.45	Рис. 2.4
8	5	0.5	Рис. 2.1
9	5.5	0.55	Рис. 2.2

L

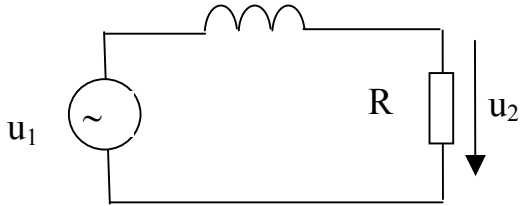


Рисунок 2.1

C

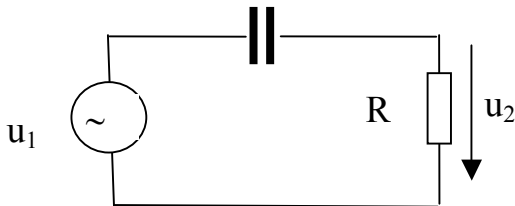


Рисунок 2.2

R

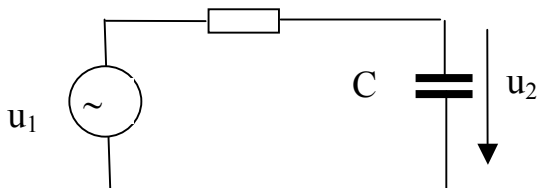


Рисунок 2.3

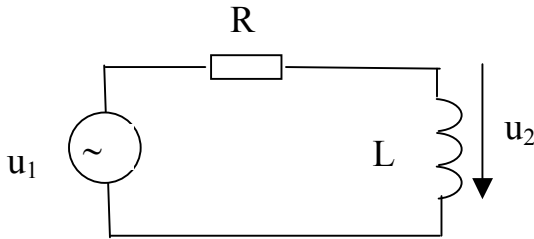


Рисунок 2.4

У лабораторній роботі потрібно:

1. За даними лабораторної роботи №1 визначити комплексні амплітуди гармонік спектру вхідного сигналу, узявши число членів ряду (2.1) рівним $N=20$.
2. Визначити постійну часу τ_0 і комплексний коефіцієнт передачі кола.
3. Визначити комплексні амплітуди гармонік і постійну складову спектру вихідного сигналу.
4. Побудувати графіки амплітудного і фазового спектрів вхідного і вихідного сигналів, а також амплітудно-частотну і фазо-частотну характеристики коефіцієнта передачі кола.
5. Побудувати графіки амплітудно-частотної і фазо-частотної характеристик коефіцієнта передачі кола.
6. По формулі (2.6) визначити тимчасову залежність $u_2(t)$ вихідного сигналу.
7. Побудувати на одному графіку залежності $u_1(t)$ і $u_2(t)$ в межах періоду T .

При виконанні 1-го пункту завдання імпульс задати в інтервалі $[0, T]$.

При програмуванні формул (1.5) - (1.7) інтеграцію для підвищення точності обчислень слід брати в межах $[0, \tau]$ дії імпульсу.

Наприклад, фрагменти програми дослідження проходження прямокутного імпульсу через лінійний коло спектральним методом матиме наступний вигляд:

Визначення спектру вхідного сигналу

$$\tau := 1 \cdot 10^{-3}$$

$$j := \sqrt{-1}$$

$$T := 5 \cdot \tau$$

$$\omega_0 := \frac{2 \cdot \pi}{T}$$

$$u_1(t) := \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$a_0 := \frac{1}{T} \cdot \int_0^{\tau} u_1(t) dt$$

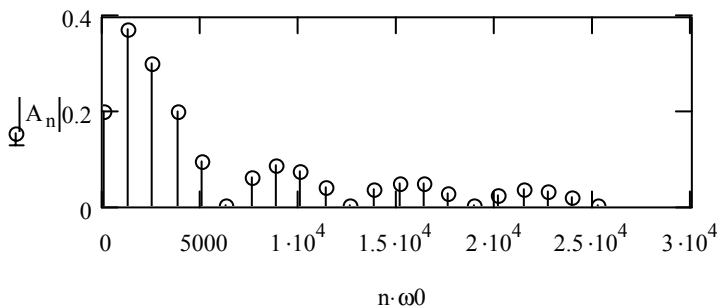
$$A_0 := a_0 \quad N := 20$$

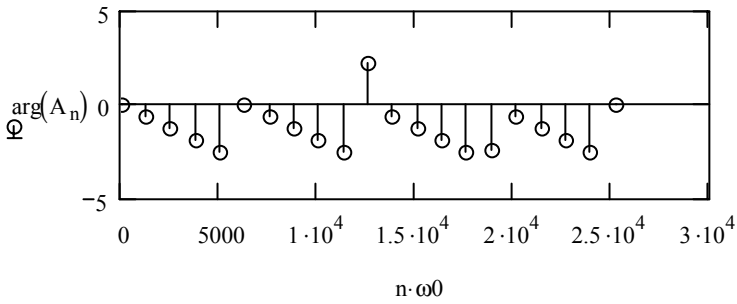
$$n := 1..N$$

$$C_n := \frac{2}{T} \cdot \int_0^{\tau} u_1(t) \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t) dt \quad S_n := \frac{2}{T} \cdot \int_0^{\tau} u_1(t) \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t) dt$$

$$\phi_n := \begin{cases} -\operatorname{atan} \frac{S_n}{C_n} & \text{if } C_n \neq 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{otherwise} \end{cases} \quad a_n := \frac{C_n}{\cos(\phi_n)} \quad A_n := a_n \cdot e^{j \cdot \phi_n}$$

$$n := 0..N$$

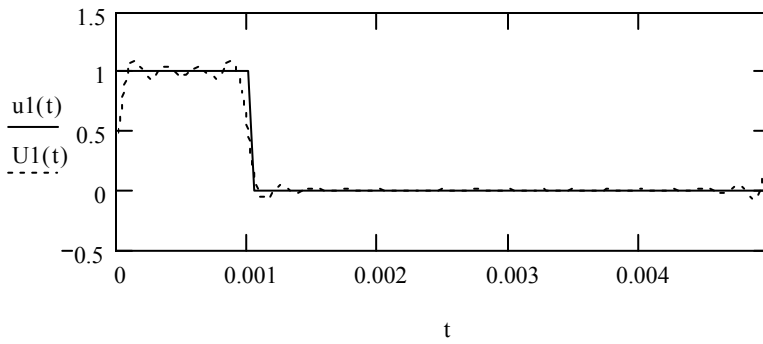




Синтез вхідного сигналу за його спектром

$$\underset{\sim}{U}l(t) := a_0 + \sum_{n=1}^N \left(a_n \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t + \phi_n) \right)$$

$$\underset{\sim}{t} := 0, \frac{T}{100} .. T$$

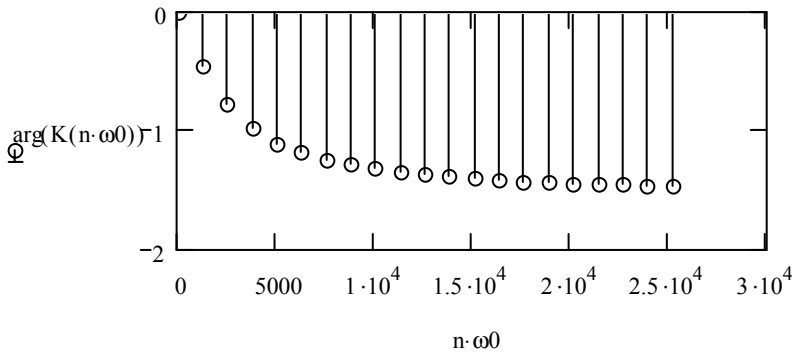
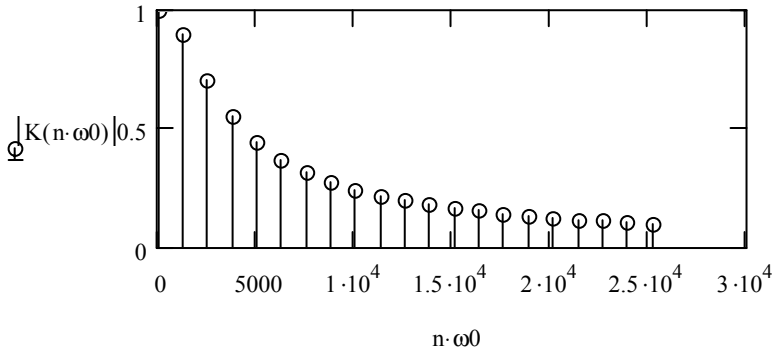


Побудова АЧХ і ФЧХ коефіцієнта передачі

$$\underset{\sim}{\tau}0 := 4 \cdot 10^{-4}$$

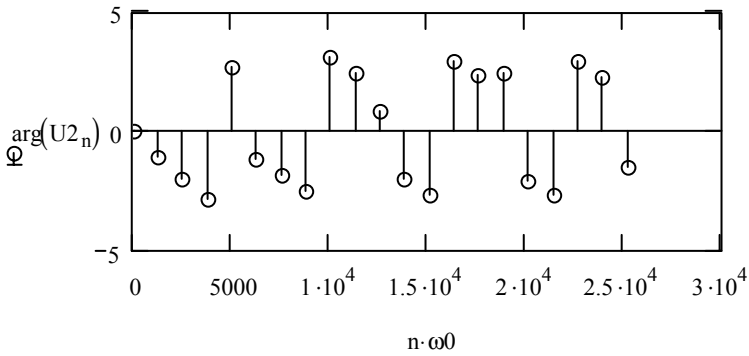
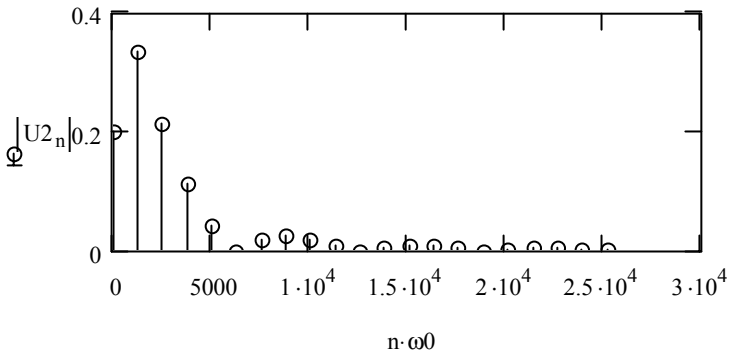
$$\underset{\sim}{K}(\omega) := \frac{1}{1 + j \cdot \omega \cdot \tau_0}$$

$$\underset{\sim}{n} := 0 .. N$$



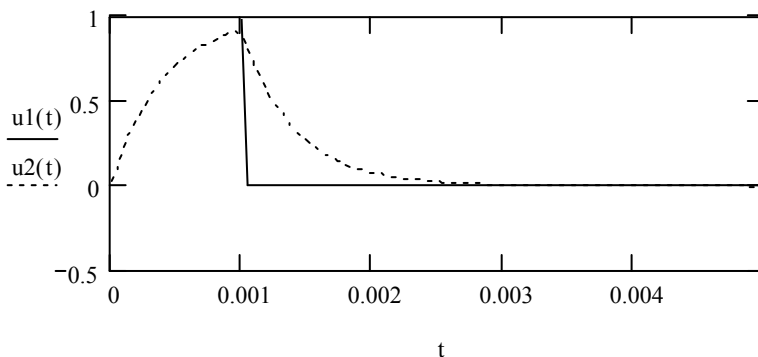
Обчислення спектру вихідного сигналу

$$U_{2n} := A_n K(n \cdot \omega_0)$$



Синтез вихідного сигналу за його спектром

$$u_2(t) := U_{2_0} + \sum_{n=1}^N \operatorname{Re} U_{2_n} \cdot e^{j \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t} \quad t := 0, \frac{T}{100} \dots T$$



Зміст звіту

1. Короткі теоретичні відомості і розрахункові співвідношення. Рисунок і опис вхідного сигналу, схема досліджуваного кола.
2. Графіки амплітудно-частотного і фазо-частотного спектру вхідного сигналу.
3. Графіки амплітудно-частотної і фазо-частотної характеристик коефіцієнта передачі кола.
4. Графіки амплітудно-частотного і фазо-частотного спектру вихідного сигналу.
5. Графік вихідного сигналу.
6. Висновки по виконаній роботі.

Контрольні питання

1. Пояснити алгоритм спектрального методу аналізу лінійних кіл.
2. Як обчислюються комплексні амплітуди спектру сигналу?
3. Складіть ряд Фур'є у формі, зручній для спектрального методу аналізу кіл.
4. Яким чином можуть бути представлені комплексні числа? Пояснити перехід з однієї форми запису в іншу.
5. Пояснити метод комплексних амплітуд аналізу кіл при гармонійній дії.
6. Дайте визначення комплексного коефіцієнта передачі кола.
7. Що таке АЧХ і ФЧХ кола?
8. Як визначаються комплексні амплітуди гармонік спектру

вихідного сигналу?

9. Як обчислюється залежність вихідного сигналу від часу за його спектром в спектральному методі аналізу кіл?
10. Виведіть формулу для комплексного коефіцієнта передачі досліджуваного кола?

Лабораторна робота №3

Дослідження сигналів з використанням швидкого перетворення Фур'є

Мета роботи – вивчення методики спектрального аналізу і синтезу сигналів за допомогою швидкого перетворення Фур'є

Теоретичні відомості

Швидке перетворення Фур'є (БПФ) засноване на дискретному перетворенні Фур'є (ДПФ). Дискретне перетворення застосовується до дискретних сигналів. Дискретний сигнал отримують з аналогового сигналу $u(t)$ шляхом квантування його в часі з кроком Δt . Для прикладу на рис.3.1,а зображений аналоговий сигнал, а на рис.3.1,б відповідний йому дискретний сигнал, T – період сигналу.

Дискретний сигнал можна представити динамічною моделлю:

$$\tilde{u}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} u_k \delta(t - k\Delta t), \quad (3.1)$$

де $N = T/\Delta t$ - число дискретних значень сигналу на періоді,

$\delta(t)$ - імпульсна функція (дельта-функція Дираку).

Розкладемо сигнал (3.1) в комплексний ряд Фур'є

$$\tilde{u}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{-jn \frac{2\pi}{T} t}. \quad (3.2)$$

Для моменту часу $t = k\Delta t$:

$$u_k = \tilde{u}(k\Delta t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{-jn \frac{2\pi}{N\Delta t} k\Delta t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{-jn \frac{2\pi}{N} k}. \quad (3.3)$$

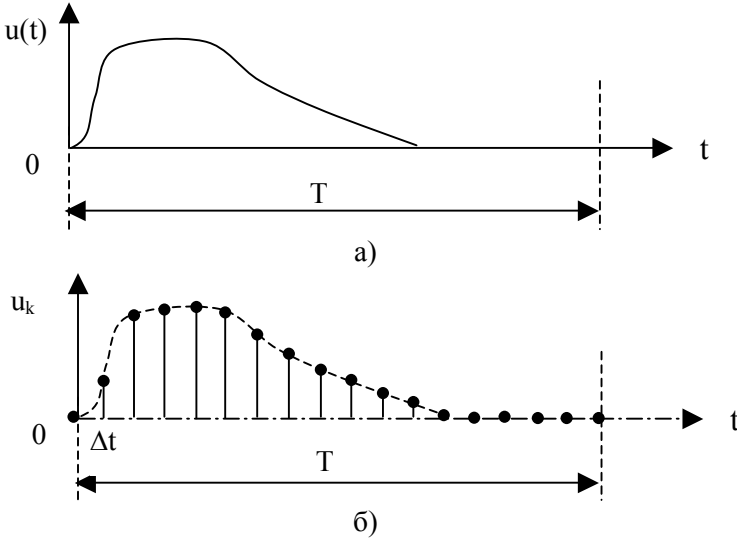


Рисунок 3.1

Коефіцієнти у формулі (3.2) обчислюються таким чином:

$$A_n = \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{u}(t) e^{jn \frac{2\pi}{T} t} dt. \quad (3.4)$$

Підставимо в дану формулу ряд (3.1) і виконаємо перетворення, помінявши місцями інтеграцію і підсумовування. Замінімо змінну інтеграції і врахуємо властивості імпульсної функції, що фільтрують. В результаті отримаємо:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{N\Delta t} \sum_{k=0}^{N-1} u_k \int_0^{N\Delta t} \delta(t - k\Delta t) e^{jn \frac{2\pi}{N\Delta t} t} dt = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u_k \int_0^N \delta(\tau - k) e^{jn \frac{2\pi}{N} \tau} d\tau = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u_k e^{jn \frac{2\pi}{N} k}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Формули (3.3), (3.5) є дискретним перетворенням Фур'є (ДПФ). Ці формули зазвичай записують в симетричній формі щодо числа N дискретних значень сигналу:

$$u_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-jn \frac{2\pi}{N} k}, \quad (3.6)$$

$$C_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} u_k e^{jn \frac{2\pi}{N} k}, \quad (3.7)$$

де $C_n = A_n / \sqrt{N}$.

Розрахунок за формулами (3.6), (3.7) вимагає N^2 операцій, що складаються з множення двох комплексних чисел з подальшим складанням. Якщо число N розкласти на множники і виконувати дії над групами елементів, то можна істотно скоротити число операцій. Найбільший ефект досягається при представленні числа N ступенем числа 2. Відповідні цьому уявленню алгоритми обчислень за формулами (3.6), (3.7) називаються швидким перетворенням Фур'є (БПФ) і вимагають всього $N \log_2 N$ операцій.

Алгоритм прямого БПФ реалізовано у функції **fft(v)** (Fast Fourier Transform – швидке перетворення Фур'є). Аргументом функції є вектор **v**, представлений дійсними числами (дискретними значеннями сигналу), кількість яких повинна бути рівною, де p – ціле число. Результат роботи функції – вектор, складений з комплексних амплітуд гармонік спектру сигналу. Довжина вектора 2^{p-1} . Таким чином, довжина вихідного вектора в два рази менше вхідного.

Алгоритм зворотного БПФ реалізовано у функції **ifft(w)**. Аргументом функції є вектор **w**, представлений комплексними гармоніками спектру сигналу, кількість яких повинна бути рівною, де p – ціле число. Результат роботи функції – вектор, складений з дійсних чисел, відповідних дискретним значенням сигналу, синтезованого за його спектром. Довжина вектора 2^{p+1} . Таким чином, довжина вихідного вектора в два рази більше вхідного.

Лабораторне завдання

Скласти програму і виконати за допомогою ДПФ і БПФ спектральний аналіз і синтез періодичного імпульсного сигналу, заданого в лабораторній роботі № 1. Імпульс визначити в інтервалі $[0, \tau]$, квантування сигналу в часі здійснити в інтервалі $[0, T]$.

У лабораторній роботі потрібно:

1. Перетворити заданий аналоговий сигнал в дискретний, узявши вибірку об'єму, $N = 2^p$, $p=6$.

2. Визначити комплексні амплітуди гармонік спектру сигналу за допомогою функції прямого БПФ. Знайти число M гармонік спектру. Побудувати графіки амплітудно- і фазо- частотного спектру сигналу.
3. Для числа гармонік M по формулі (3.6) прямого ДПФ визначити спектр сигналу і порівняти з даними п.1.
4. Виконати за допомогою функції зворотного БПФ синтез сигналу по його спектру. Побудувати на одному полі графіки початкового і синтезованого сигналів.
5. Для числа гармонік M з п.3 по формулі (3.6) зворотного ДПФ синтезувати сигнал. Побудувати на одному полі графіки початкового і синтезованого сигналів.

При складанні програми спектрального аналізу і синтезу можна скористатися фрагментами програми дослідження функцій ДПФ і БПФ на прикладі періодичної послідовності прямокутних імпульсів.

Дискретизація сигналу.

$$\tau_{\text{max}} := 1 \cdot 10^{-3}$$

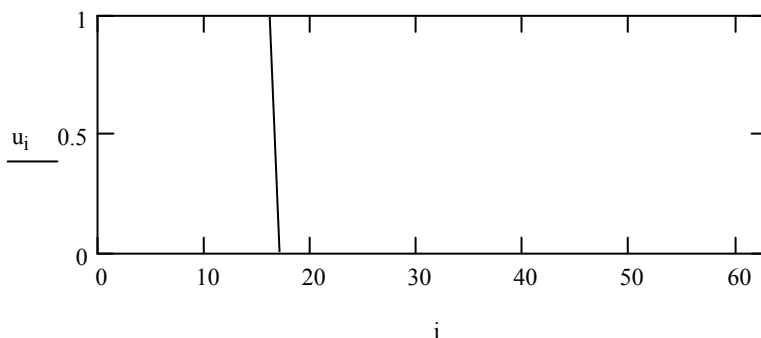
$$T_{\text{max}} := 4 \cdot \tau$$

$$N_{\text{max}} := 2^6 \quad \Delta t := \frac{T}{N}$$

$$u(t) := \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

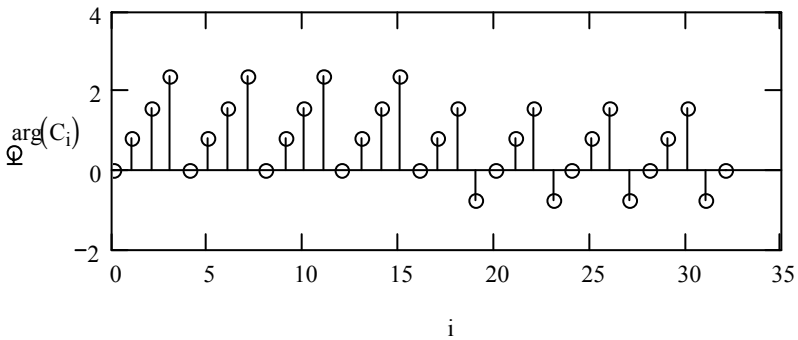
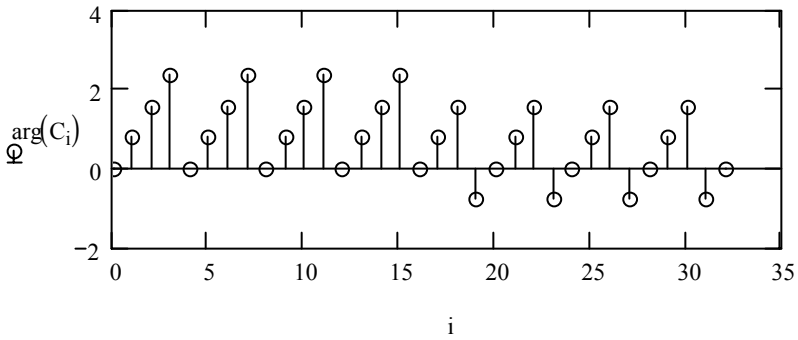
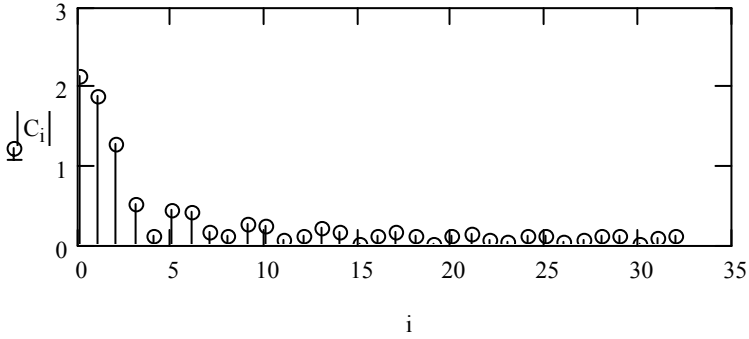
$$i := 0.. N - 1$$

$$u_{\text{max}} := u(i \cdot \Delta t) \quad K_{\text{max}} := \text{last}(u) \quad K = 63$$



Аналіз спектру сигналу за допомогою БПФ

$$\underline{\underline{C}} := \text{fft}(u)$$

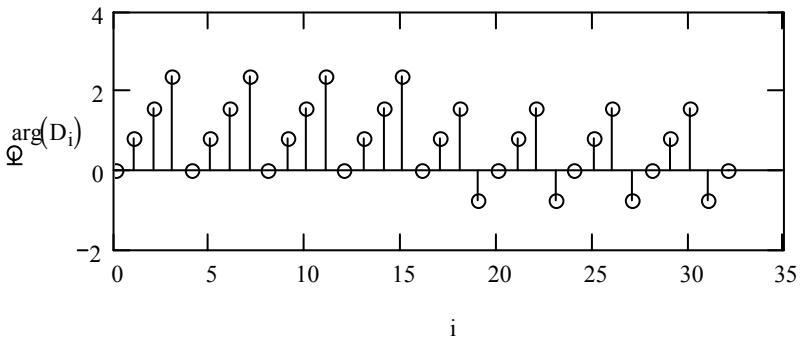
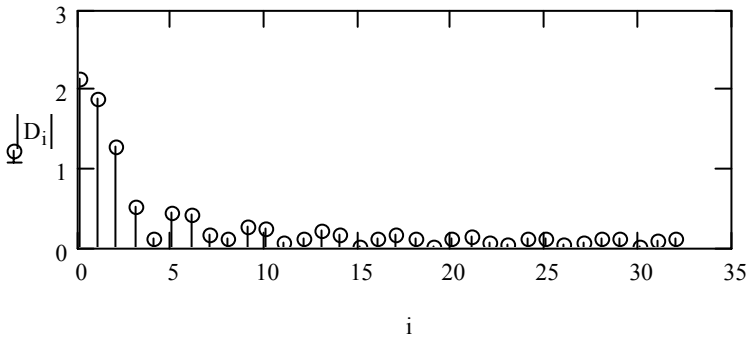
$$M := \text{last}(C) \quad M = 32$$


Аналіз спектру сигналу за допомогою ДПФ

$$j := \sqrt{-1} \quad M = 32$$

$$m := 0..M$$

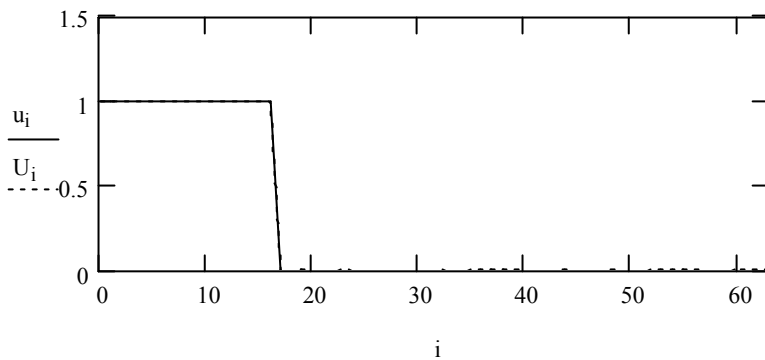
$$D_m := \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} u_k \cdot e^{j \cdot m \cdot \frac{2 \cdot \pi}{N} \cdot k}$$



Синтез сигналу за його спектром за допомогою БПФ

$$U := \text{ifft}(C) \quad K := \text{last}(U)$$

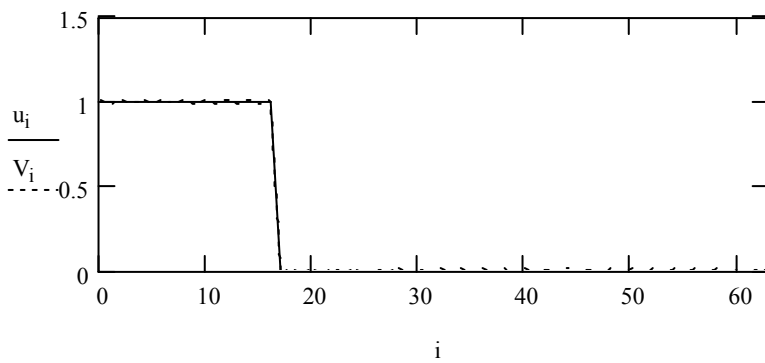
$$K = 63$$

$i := 0..K$


Синтез сигналу за його спектром за допомогою ДПФ

 $i := 0..K$

$$\underline{\underline{V}}_i := \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot D_0 + \sum_{n=1}^M D_n \cdot e^{-j \cdot n \cdot \frac{2 \cdot \pi}{N} \cdot i} + \sum_{n=1}^M \left(\operatorname{Re}(D_n) - j \cdot \operatorname{Im}(D_n) \right) \cdot e^{j \cdot n \cdot \frac{2 \cdot \pi}{N} \cdot i}$$



Зміст звіту

- 1 Короткі теоретичні відомості і розрахункові співвідношення.
- 2 Графіки з результатами розрахунку амплітуд і фаз гармонік спектру сигналу, отриманих за допомогою БПФ і ДПФ для числа відліків $N = 2^6$.
- 3 Графіки початкового і синтезованого сигналів, отриманих за допомогою БПФ і ДПФ.
- 4 Висновки по виконаній роботі.

Контрольні питання

- 1 Визначення аналогового і дискретного сигналу.
- 2 Складання динамічної моделі сигналу.
- 3 Властивості імпульсної функції (дельта-функції Дираку).
- 4 Визначення дискретних значень часу і частоти.
- 5 Формула розкладання сигналу в дискретний ряд Фур'є.
- 6 Як обчислюються комплексні амплітуди спектру сигналу при ДПФ?
- 7 Число операцій в ДПФ і БПФ.
- 8 Число відліків значень сигналу на періоді для БПФ.
- 9 Функція прямого БПФ, ім'я функції, розмірності вхідного і вихідного векторів.
- 10 Функція зворотного БПФ, ім'я функції, розмірності вхідного і вихідного векторів.

Лабораторна робота №4

Операторний метод аналізу

сигналів на основі швидкого перетворення Фур'є

Мета роботи — вивчення методики застосування швидкого перетворення Фур'є (БПФ) для операторного аналізу сигналів.

Теоретичні відомості

Операторний метод аналізу заснований на аналізі сигналів і лінійних кіл за допомогою інтегральних перетворень Лапласа.

Перетворення Лапласа є узагальненням інтегральних перетворень Фур'є і застосовуються для сигналів, визначених для моментів часу, які більше нуля:

$$u(t) l_0(t) \quad (4.1)$$

де $l_0(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0, \\ 0, t < 0, \end{cases}$ - одинична ступінчаста функція (функція Хевісайда).

Перетворення Лапласа виходять з перетворень Фур'є при введенні експоненціальної функції, затухаючої на нескінченності:

$$u(t) e^{-\sigma t} l_0(t), \quad (4.2)$$

де σ – позитивне число.

Для функції (4.2) пряме інтегральне перетворення Фур'є запишеться у вигляді:

$$S(\omega) = \int_0^{\infty} u(t) e^{-\sigma t} e^{j\omega t} dt = \int_0^{\infty} u(t) e^{pt} dt = S(p), \quad (4.3)$$

де $p = -\sigma + j\omega$ - комплексна частота.

З формули зворотного перетворення Фур'є виходить:

$$u(t) e^{-\sigma t} l_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(p) e^{-j\omega t} d\omega. \quad (4.4)$$

Звідси

$$u(t) l_0(t) = \frac{e^{\sigma t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(p) e^{-j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(p) e^{-pt} d\omega. \quad (4.5)$$

Перетворення Лапласа, представлені формулами (4.3), (4.5), можна перетворити у дискретну форму, використовуючи формули (3.6), (3.7) дискретного перетворення Фур'є. З порівняння цих формул витікають співвідношення для дискретного перетворення Лапласа:

$$u_k = \frac{e^{\sigma k \Delta t}}{\sqrt{N}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-jn \frac{2\pi}{N} k}, \quad (4.6)$$

$$C_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} u_k e^{-\sigma k \Delta t + jn \frac{2\pi}{N} k}, \quad (4.7)$$

де Δt – крок квантування.

Для розрахунків за формулами (4.6), (4.7) з використанням функцій БПФ **fft** і **ifft** слід задати інтервал $[0, T]$ дискретизації сигналу і точність розрахунку ϵ . За значеннями ϵ і T обчислити константу і

крок квантування Δt :

$$\sigma = \frac{-\ln(\varepsilon)}{T}, \quad (4.8)$$

$$\Delta t = \frac{T}{N}, \quad (4.9)$$

де $N = 2^p$, p – ціле число.

Лабораторне завдання

Скласти програму і виконати за допомогою БПФ операторний аналіз і синтез аналогового імпульсного періодичного сигналу, заданого у лабораторній роботі № 1. Імпульс визначити в інтервалі $[0, \tau]$, квантування сигналу в часі здійснити в інтервалі $[0, T]$.

У лабораторній роботі потрібно:

1. Визначити по формулі (4.8) постійну загасання σ .
2. Перетворити заданий аналоговий сигнал відповідно до формули (4.2) і представити його в дискретній формі, узявши вибірку об'єму $N = 2^6$. Побудувати графіки початкового і перетвореного сигналу.
3. Визначити комплексні амплітуди гармонік спектру перетвореного сигналу за допомогою функції прямого БПФ. Знайти число M гармонік спектру. Побудувати графіки амплитудно- і фазо - частотного спектру сигналу.
4. Виконати за допомогою функції зворотного БПФ синтез перетвореного сигналу за його спектром. Відновити по формулі (4.6) початковий сигнал за перетвореним. Побудувати на одному полі графіки початкового і синтезованого сигналів.

При складанні програми операторного аналізу і синтезу можна скористатися фрагментами програми використання функцій БПФ на прикладі прямокутного імпульсу.

Дискретизація сигналу

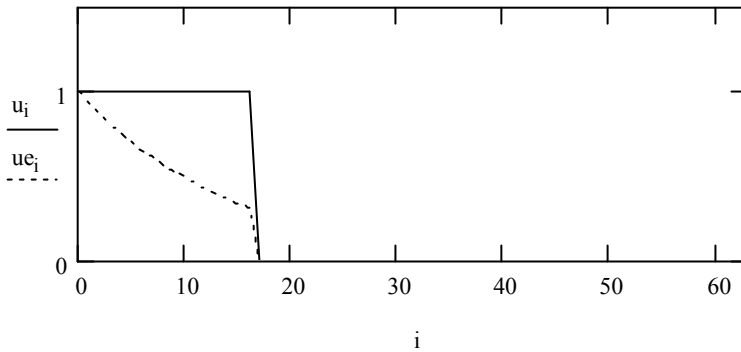
$$\tau_{\text{max}} := 2 \cdot 10^{-3} \quad T_{\text{max}} := 4 \cdot \tau \quad N_{\text{max}} := 2^6$$

$$\Delta t_{\text{max}} := \frac{T}{N} \quad \varepsilon_{\text{max}} := 0.01$$

$$\sigma := \frac{-\ln(\text{eps})}{T} \quad u(t) := \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

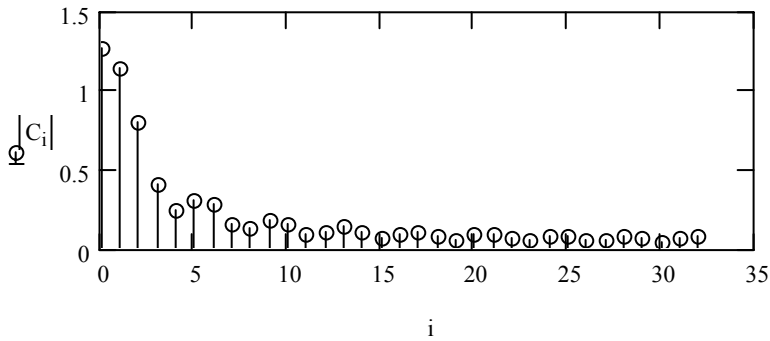
$$i := 0..N-1 \quad u_i := u(i \cdot \Delta t) \quad ue_i := u_i \cdot e^{-\sigma \cdot i \cdot \Delta t}$$

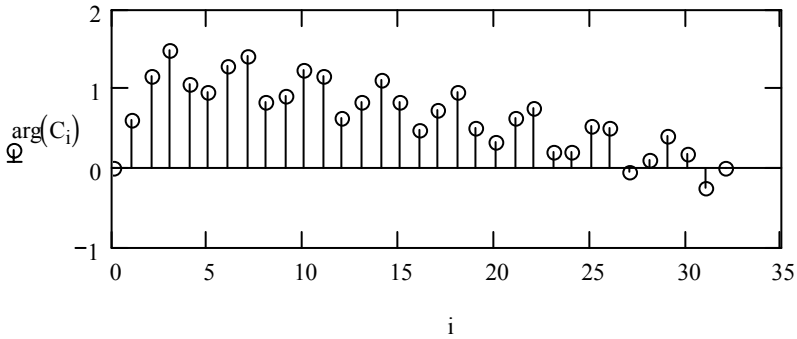
$$K := \text{last}(ue) \quad K = 63$$



Розрахунок спектру перетвореного сигналу

$$C := \text{fft}(ue) \quad M := \text{last}(C) \\ M = 32 \quad i := 0..M$$





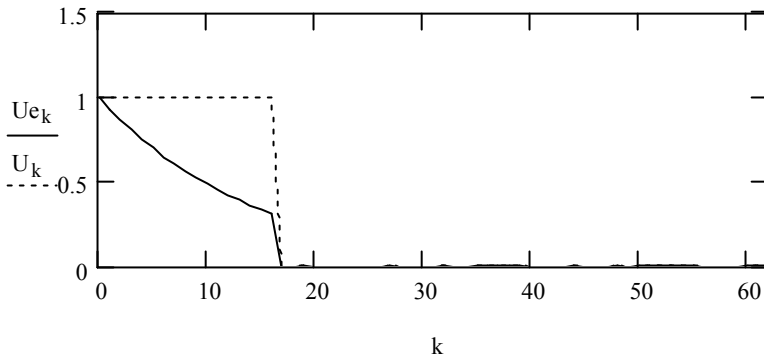
Синтез перетвореного сигналу за його спектром
і відновлення форми сигналу

$$Ue := \text{ifft}(C) \quad \underline{K} := \text{last}(Ue)$$

$$K = 63$$

$$\underline{k} := 0..K - 1$$

$$\underline{U_k} := Ue_k \cdot e^{\sigma \cdot k \cdot \Delta t}$$



Зміст звіту

1. Короткі теоретичні відомості і розрахункові співвідношення.
2. Графіки початкового і перетвореного сигналів.
3. Графіки з результатами розрахунку амплітуд і фаз гармонік спектру перетвореного сигналу.

4. Графіки початкового і синтезованого сигналів.
5. Висновки по виконаній роботі.

Контрольні питання

1. Для яких сигналів застосовується інтегральне перетворення Лапласа?
2. Визначення одиничної ступінчастої функції (функції Хевісайда).
3. Визначення комплексної частоти.
4. Яке перетворення необхідно здійснити з сигналом, щоб застосувати перетворення Лапласа?
5. Формули прямого і зворотного перетворень Лапласа.
6. Дискретна форма прямого і зворотного перетворень Лапласа на основі дискретного перетворення Фур'є.
7. Як визначити константу у комплексної частоти?
8. Як вибрати число відліків значень сигналу БПФ?
9. Функції прямого і зворотного БПФ, ім'я функцій, розмірності вхідного і вихідного векторів.
10. Як відновити початковий сигнал за наслідками зворотного перетворення Лапласа на основі зворотного БПФ?

Лабораторна робота № 5

Операторний метод аналізу

лінійних кіл на основі швидкого перетворення Фур'є

Мета роботи – вивчення методики застосування швидкого перетворення Фур'є (БПФ) для операторного аналізу лінійних кіл.

Теоретичні відомості

Операторний метод аналізу лінійних кіл при вхідній дії у вигляді включення у момент часу $t=0$ сигналу складної форми містить наступні процедури.

1. Знаходження зображення за Лапласом вхідного сигналу $u_1(t)$:

$$U_1(p) = L[u_1(t)].$$

2. Визначення передавальної функції досліджуваного кола:

$$K(p) = U_2(p)/U_1(p),$$

де $U_2(p)$ - зображення за Лапласом вихідного сигналу.

3. Знаходження зображення вихідного сигналу по передавальній функції і зображенню вхідного сигналу:

$$U_2(p) = K(p) U_1(p).$$

4. Розрахунок за зображенням вихідного сигналу його залежності від часу за допомогою зворотного перетворення Лапласа:

$$u_2(t) = L^{-1}[U_2(p)].$$

Тут L , L^{-1} – оператори прямого і зворотного перетворень Лапласа, формули (4.3), (4.5).

На практиці перетворення Лапласа здійснюють чисельно з використанням БПФ, що реалізовує формули (4.6), (4.7) ДПФ.

Передавальні функції визначаються методами теорії лінійних кіл по схемі досліджуваного кола, в якому миттєві значення струмів $i(t)$ і напруги $u(t)$ замінено їх зображеннями по Лапласу $I(p)$ і $U(p)$, а котушки індуктивності і конденсатори відповідно до закону Ома представлені їх операторними опорами:

$$U_L(p) = Z_L(p) I_L(p),$$

$$U_C(p) = Z_C(p) I_C(p).$$

Тут $Z_L(p) = pL$ - операторний опір котушки індуктивності з індуктивністю L , $Z_C(p) = 1/pC$ - операторний опір конденсатора з ємністю C .

Якщо відомо комплексний коефіцієнт передачі кола, то передавальна функція виходить з $\dot{K}(j\omega)$ шляхом простої заміни частоти $j\omega$ на комплексну частоту $p = -\sigma + j\omega$.

Важливими характеристиками кола є перехідна $g(t)$ і імпульсна $h(t)$ характеристики. Перехідна характеристика – це реакція кола на одиничну ступінчасту функцію (функцію Хевісайда):

$$l_0(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

Зображення по Лапласу цієї функції:

$$L[l_0(t)] = 1/p. \quad (5.2)$$

За відомою передавальною функцією кола $K(p)$ перехідна характеристика визначається таким чином:

$$g(t) = L^{-1} \left[\frac{1}{p} K(p) \right]. \quad (5.3)$$

Імпульсна характеристика – це реакція кола на імпульсну функцію (дельта – функцію Дираку) $\delta(t)$, що задовольняє умові

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Зображення по Лапласу цієї функції:

$$L[\delta(t)] = 1. \quad (5.4)$$

За відомою передавальною функцією кола $K(p)$ імпульсна характеристика визначається таким чином:

$$h(t) = L^{-1} [K(p)]. \quad (5.5)$$

Якщо відомо імпульсну характеристику кола, то реакція кола на сигнал довільної форми $u_1(t)$ може бути знайдена за допомогою інтеграла згортки:

$$u_2(t) = \int_0^t u_1(\tau) h(t - \tau) d\tau. \quad (5.6)$$

У дискретній формі інтеграл згортки записується у вигляді:

$$u_{2_n} = \Delta t \sum_{k=0}^n u_{1_k} h_{n-k}. \quad (5.7)$$

Тут, h_i - дискретні значення вхідного сигналу і імпульсної характеристики, узяті з кроком квантування Δt .

При виконанні операторного аналізу за допомогою функцій БПФ **fft** і **ifft** слід задати інтервал $[0, T]$ дискретизації сигналу і точність розрахунку ε . Для усунення коливального характеру зміни сигналу на кінці інтервалу дискретизації, яке пов'язане з виникаючою погрішністю розрахунків при переході від аналогових функцій до дискретних, слід інтервал дискретизації збільшити до $t_{\max} = (1.5 - 2) T$.

По значеннях ε і $t_{\max}$ обчислити константу і крок квантування Δt :

$$\sigma = \frac{-\ln(\varepsilon)}{t_{\max}} \quad (5.8)$$

$$\Delta t = \frac{t_{\max}}{N} \quad (5.9)$$

де N – об'єм вибірки. Отримані результати розрахунків розглядати на інтервалі $[0, T]$.

Лабораторне завдання

Скласти програму і виконати за допомогою БПФ операторний аналіз кола, заданого в лабораторній роботі №2, при дії одиничної ступінчастої функції (5.1) і одиночного імпульсного сигналу, заданого в лабораторній роботі №1. Імпульс визначити в інтервалі $[0, \tau]$, квантування сигналу в часі здійснити в інтервалі $[0, T]$.

У лабораторній роботі потрібно:

1. Визначити за формулами (5.8), (5.9) постійну загасання σ і крок квантування.
2. Скласти передавальну функцію $K(p)$ кола.
3. Розрахувати відповідно до формули (5.3) перехідну характеристику кола, використовуючи функцію зворотного БПФ. Побудувати графіки одиничної ступінчастої функції і перехідної характеристики для інтервалів $[0, t_{\max}]$ і $[0, T]$.
4. За допомогою БПФ розрахувати реакцію кола на сигнал, форма якого задана в лабораторній роботі №1. Побудувати графіки вхідного і вихідного сигналів в інтервалі $[0, T]$.
5. За допомогою БПФ розрахувати відповідно до формули (5.5) імпульсну характеристику кола.
6. По вхідному сигналу і імпульсній характеристиці кола, представлених в дискретній формі, за допомогою формули (5.7) дискретною згорткою визначити вихідний сигнал. Побудувати графік вихідного сигналу в інтервалі $[0, T]$.

При складанні програми операторного аналізу кола можна скористатися фрагментами програми використання функцій БПФ на прикладі аналізу реакції кола на прямокутний імпульс.

Моделювання перехідної характеристики кола

$$\tau_0 := 4 \cdot 10^{-4}$$

$$K(p) := \frac{1}{1 + p \cdot \tau_0}$$

$$\underline{\underline{U1}}(p) := \frac{1}{p} \quad \underline{\underline{U2}}(p) := \underline{\underline{U1}}(p) \cdot K(p)$$

$$\underline{\underline{\tau}} := 2 \cdot 10^{-3} \quad \underline{\underline{T}} := 4 \cdot \underline{\underline{\tau}}$$

$$\underline{\underline{N}} := 2^6 \quad \underline{\underline{tmax}} := 2 \cdot \underline{\underline{T}} \quad \underline{\underline{\Delta t}} := \frac{\underline{\underline{tmax}}}{\underline{\underline{N}}} \quad \underline{\underline{j}} := \sqrt{-1}$$

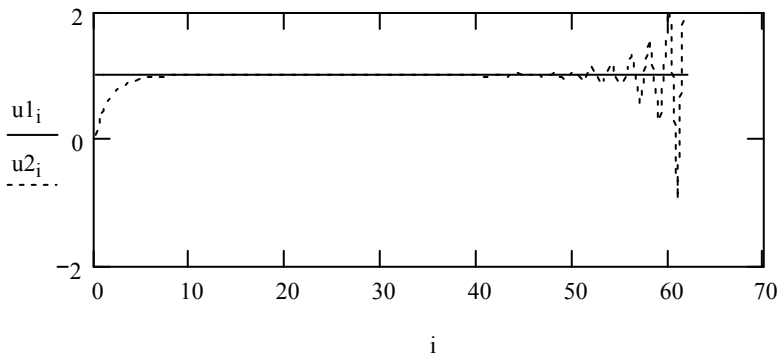
$$\underline{\underline{eps}} := 0.001 \quad \underline{\underline{\sigma}} := \frac{-\ln(\underline{\underline{eps}})}{\underline{\underline{tmax}}} \quad \underline{\underline{\omega 0}} := \frac{2 \cdot \pi}{\underline{\underline{tmax}}}$$

$$\underline{\underline{j}} := 0.. \frac{\underline{\underline{N}}}{2} \quad \underline{\underline{U2}}_j := \underline{\underline{U2}}(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{j}} \cdot \underline{\underline{\omega 0}})$$

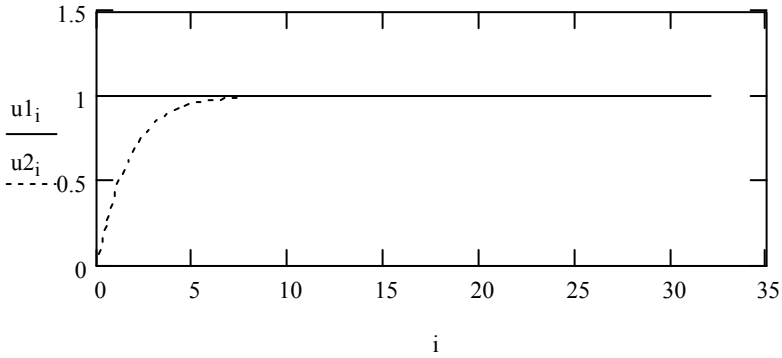
$$\underline{\underline{ue2}} := \frac{\text{ifft}(\underline{\underline{U2}})}{\underline{\underline{\Delta t}} \cdot \sqrt{\underline{\underline{N}}}} \quad \underline{\underline{K}} := \text{last}(\underline{\underline{ue2}}) \quad \underline{\underline{K}} = 63$$

$$\underline{\underline{j}} := 0.. \underline{\underline{K}} - 1 \quad \underline{\underline{u2}}_j := e^{\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{j}} \cdot \underline{\underline{\Delta t}}} \cdot \underline{\underline{ue2}}_j \quad \underline{\underline{u1}}(t) := \begin{cases} 1 & \text{if } t \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{u1}}_i := \underline{\underline{u1}}(i \cdot \underline{\underline{\Delta t}})$$

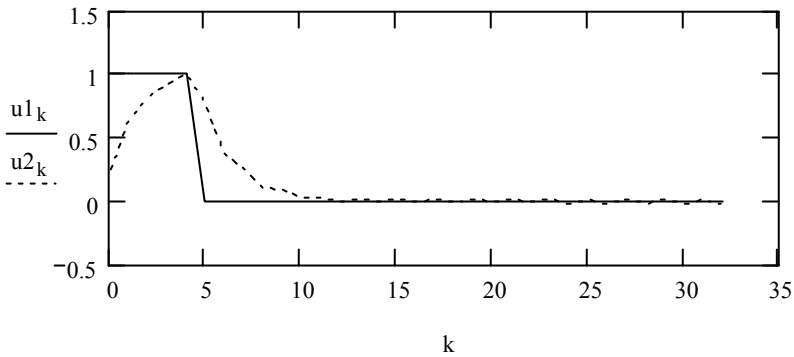


$$\underline{\underline{j}} := 0.. \frac{\underline{\underline{T}}}{\underline{\underline{\Delta t}}}$$



Операторний аналіз проходження сигналу крізь коло

$$\begin{aligned}
 \underline{u1}(t) &:= \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} & i &:= 0..N-1 \\
 \underline{u1}_i &:= u1(i \cdot \Delta t) & \underline{u1e}_i &:= u1_i \cdot e^{-\sigma \cdot i \cdot \Delta t} \\
 \underline{K} &:= \text{last}(\underline{u1e}) & K &= 127 & \underline{C1} &:= \text{fft}(\underline{u1e}) & \underline{M} &:= \text{last}(\underline{C1}) & M &= 64 \\
 \underline{K}(p) &:= \frac{1}{1 + p \cdot \tau_0} \\
 \underline{n} &:= 0..M & \underline{C2}_n &:= \underline{C1}_n \cdot K(\sigma - j \cdot n \cdot \omega_0) & \underline{ue2} &:= \text{ifft}(\underline{C2}) & \underline{K} &:= \text{last}(\underline{ue2}) \\
 \underline{k} &:= 0..K & \underline{u2}_k &:= e^{\sigma \cdot k \cdot \Delta t} \cdot \underline{ue2}_k & \underline{k} &:= 0..\frac{T}{\Delta t}
 \end{aligned}$$



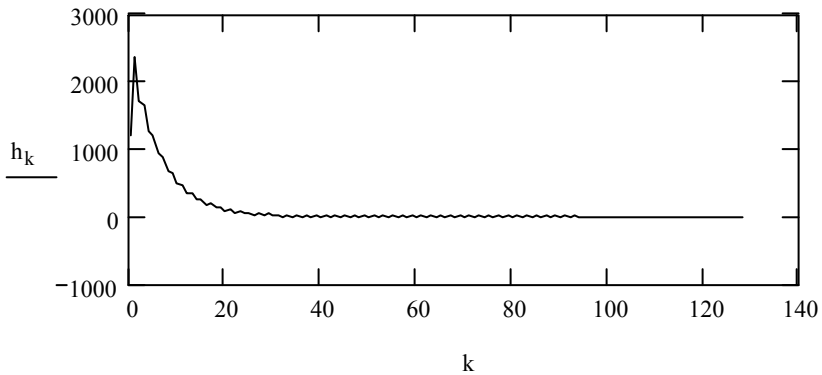
Аналіз проходження сигналу крізь коло за допомогою інтеграла згортки

1 Розрахунок імпульсної характеристики кола

$$\begin{aligned} \tau_0 &:= 4 \cdot 10^{-4} & K(p) &:= \frac{1}{1 + p \cdot \tau_0} \\ U_1(p) &:= 1 & H(p) &:= U_1(p) \cdot K(p) \\ \text{eps} &:= 0.01 & \sigma &:= \frac{-\ln(\text{eps})}{t_{\max}} & \omega_0 &:= \frac{2 \cdot \pi}{t_{\max}} \\ n &:= 0.. \frac{N}{2} & H_n &:= H(\sigma - j \cdot n \cdot \omega_0) & h_e &:= \frac{\text{ifft}(H)}{\Delta t \cdot \sqrt{N}} & \text{last}(h_e) &= 255 \end{aligned}$$

$$k := 0.. N - 1 \quad h_k := e^{\sigma \cdot k \cdot \Delta t} \cdot h_{e_k}$$

$$k := 0.. \frac{T}{\Delta t}$$

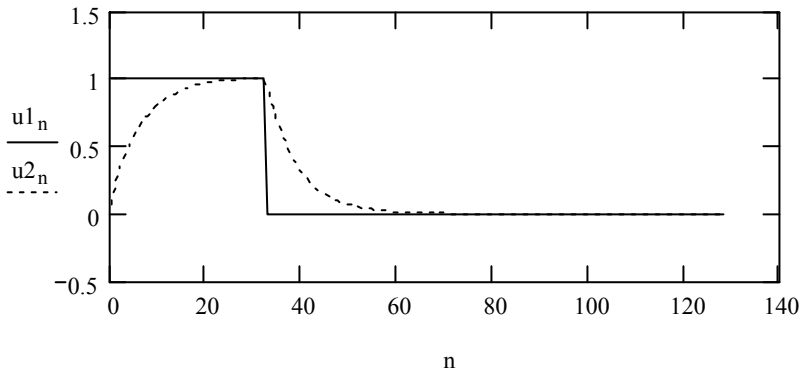


Розрахунок реакції кола на вхідний сигнал

$$u1(t) := \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \begin{aligned} i &:= 0..N-1 \\ u1_i &:= u1(i \cdot \Delta t) \end{aligned}$$

$$n := 0..N-1$$

$$u2_n := \Delta t \cdot \sum_{k=0}^n (u1_k \cdot h_{n-k}) \quad n := 0.. \frac{T}{\Delta t}$$



Зміст звіту

1. Короткі теоретичні відомості і розрахункові співвідношення.
2. Графіки з результатами розрахунку перехідної характеристики кола для інтервалів $[0, t_{\max}]$ і $[0, T]$.
3. Графік вхідного сигналу і графік з результатами розрахунку вихідного сигналу операторним методом.
4. Графік вихідного сигналу, розрахований за допомогою інтеграла згортки.
5. Висновки по виконаній роботі.

Контрольні питання

1. Пояснити алгоритм операторного методу аналізу лінійних кіл.
2. Отримайте зображення по Лапласу одиничної ступінчастої функції (функції Хевісайда).
3. Отримайте зображення по Лапласу імпульсної функції (дельта-функції Діраку).
4. Основні властивості імпульсної функції (дельта-функції Діраку).
5. Дайте визначення перехідної характеристики. Зв'язок перехідної характеристики з передавальною функцією кола.
6. Дайте визначення імпульсної характеристики. Зв'язок імпульсної характеристики з передавальною функцією кола.
7. Запишіть і поясніть формулу згортки для аналогового сигналу.
8. Запишіть і поясніть формулу згортки для дискретного сигналу.
9. Пояснити, як визначається постійна σ і інтервал дискретизації сигналу.
10. Пояснити, як розраховується крок дискретизації при використанні БПФ.

Лабораторна робота № 6 **Моделювання і аналіз лінійних цифрових фільтрів**

Мета роботи – вивчення методів складання і аналізу математичних моделей лінійних цифрових фільтрів.

Теоретичні відомості

Лінійні цифрові фільтри (ЛЦФ) - це лінійні дискретні схеми, призначені для обробки дискретних сигналів в дискретній формі. Модель ЛЦФ може бути представлена у вигляді різнистного рівняння або у графічній формі у вигляді структурної схеми. Властивості ЛЦФ можуть бути описані за допомогою передавальної функції, а також за допомогою імпульсної або перехідної характеристик.

Різністні рівняння - це аналог диференціальних рівнянь, які є математичними моделями аналогових схем, складених з LCR-елементів. Різницева рівняння зазвичай отримують шляхом алгебраїзації диференціального рівняння аналогового прототипу цифрового фільтру. Алгебраїзація - це перетворення

диференціального рівняння в рівняння алгебри (різницеве) в результаті застосування того або іншого чисельного методу рішення диференціальних рівнянь. Наприклад, для RC-кола на рис.2.3, що є простим фільтром низьких частот, диференціальне рівняння має наступний вигляд:

$$\frac{du_c}{dt} = -\frac{1}{\tau}u_c + \frac{1}{\tau}u_1, \quad (6.1)$$

де u_1 - вхідний сигнал, $\tau = RC$ - постійна часу кола.

Перетворимо це диференціальне рівняння в різнісне, наприклад, за допомогою явного методу Ейлера. Відповідно до цього методу диференціальне рівняння вигляду

$$\frac{du}{dt} = f(u, t) \quad (6.2)$$

приблизно замінюється різницеvim рівнянням

$$u_n = u_{n-1} + \Delta t f_{n-1}. \quad (6.3)$$

Тут використана проста апроксимація похідної кінцевими різницями:

$$\frac{du}{dt} \cong \frac{u_n - u_{n-1}}{\Delta t}, \quad (6.4)$$

де U_{n-1}, U_n - дискретні значення функції для моментів часу $t_{n-1} = (n-1)\Delta t$ і Δt - крок дискретизації. Права частина $f_{n-1} = f(u_{n-1}, t_{n-1})$ диференціального рівняння (6.2) береться для моменту часу t_{n-1} .

Перетворивши (6.1) на підставі (6.3), отримаємо різнісне рівняння ЛЦФ, відповідне даному RC-колу:

$$u_c(n) = u_c(n-1) + \frac{\Delta t}{\tau} [-u_c(n-1) + u_1(n-1)]. \quad (6.5)$$

Тут використано позначення: $u(k) = u_k = u(k\Delta t)$.

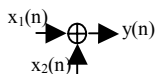
Явний метод Ейлера має обмеження на величину кроку Δt . Для даного RC-кола крок вибирається з умови $\Delta t < 2\tau$.

Різнісне рівняння повинне бути доповнене початковими умовами. Для рівняння (6.5) початкова умова при нульових початкових умов задається у вигляді $u_c(-1) = 0$.

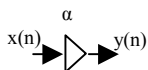
Рішення різнісних рівнянь виконується рекурсивно, крок за кроком. Наприклад, рішення рівняння (6.5) за нульових початкових умов представляється у вигляді послідовності наступних кроків:

$$\left. \begin{aligned} u_c(0) &= 0 + \frac{\Delta t}{\tau} [0 + u_1(-1)] \\ u_c(1) &= u_c(0) + \frac{\Delta t}{\tau} [-u_c(0) + u_1(0)] \\ &\vdots \\ u_c(n) &= u_c(n-1) + \frac{\Delta t}{\tau} [-u_c(n-1) + u_1(n-1)] \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

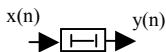
По різницевому рівнянню ЛЦФ можна скласти його структурну схему і, навпаки, по структурній схемі фільтру можна отримати різнісне рівняння. При побудові структурних схем ЛЦФ зазвичай використовуються наступні базові елементи:



- суматор $y(n) = x_1(n) + x_2(n)$;



- підсилювач ($\alpha > 1$) або ослаблювач ($\alpha < 1$) $y(n) = \alpha x(n)$;



- ланка запізнювання $y(n) = x(n-1)$.

З використанням даних базових елементів структурна схема ЛЦФ, складена по різністному рівнянню (6.5), має вигляд, показаний на рис. 6.1.

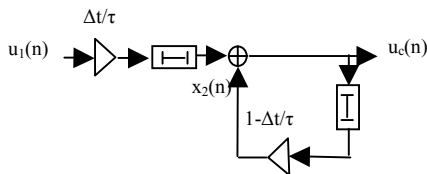


Рисунок 6.1

Для складання передавальних функцій ЛЦФ використовується z -перетворення, що є різновидом дискретного перетворення Лапласа. Передавальна функція ЛЦФ – це відношення z -зображення вихідного

сигналу фільтру до z -зображення вхідного сигналу $U_1(z)$:

$$K(z) = \frac{U_2(z)}{U_1(z)}. \quad (6.6)$$

Для отримання z -зображення до дискретного сигналу

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u(n) \delta(t - n\Delta t) \quad (6.7)$$

застосовують перетворення Лапласа:

$$U(p) = \sum_{n=0}^{\infty} u(n) \int_0^{\infty} \delta(t - n\Delta t) e^{-pt} dt = \sum_{n=0}^{\infty} u(n) e^{-pn\Delta t}. \quad (6.8)$$

Тут $\delta(t - n\Delta t)$ - дельта - функція Дирака.

Потім оператора $e^{p\Delta t}$ замінюють оператором z і отримують формулу прямого z -перетворення:

$$U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u(n) z^{-n}. \quad (6.9)$$

Відзначимо, що заміна в перетворенні Лапласа комплексної частоти p змінної z , здійснює відображення лівої напівплощини комплексної площини за змінною p у середину круга одиничного радіуса, розташованого в центрі на комплексній площині за змінною z .

Ряд (6.7) є ряд Лорана, тому по теоремі Коші формула зворотного z -перетворення набуває наступного вигляду:

$$u(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\xi} U(z) z^{n-1} dz = \sum_p \operatorname{res} [U(z) z^{n-1}]. \quad (6.10)$$

Інтеграція тут проводиться по контуру ξ , що охоплює все p полюсів функції $U(z)$.

Алгоритм аналізу ЛЦФ за допомогою z -перетворення включає наступні етапи.

1. Знаходження z -зображення $U_1(z)$ вхідного дискретного сигналу $u_1(n)$:

$$U_1(z) = Z[u_1(n)]. \quad (6.11)$$

2. Складання передавальної функції $K(z)$ ЛЦФ.

3. Знаходження z -зображення $U_2(z)$ вихідного дискретного сигналу:

$$U_2(z) = K(z) U_1(z). \quad (6.12)$$

4. Знаходження вихідного дискретного сигналу $u_2(n)$ по його z -зображенню $U_2(z)$:

$$u_2(n) = Z^{-1}[U_2(z)]. \quad (6.13)$$

Тут Z, Z^{-1} – оператори прямого і зворотного z -перетворення.

При складанні передавальної функції $K(z)$ ЛЦФ по передавальній функції $K(p)$ аналогового прототипу використовуються різні апроксимації оператора p оператором $e^{-p\Delta t} = z^{-1}$. При лінійному перетворенні має місце наступна апроксимація:

$$p = \frac{1 - e^{-p\Delta t}}{\Delta t} = \frac{1 - z^{-1}}{\Delta t}. \quad (6.14)$$

При білінійному перетворенні:

$$p = \frac{2}{\Delta t} \frac{1 - e^{-p\Delta t}}{1 + e^{-p\Delta t}} = \frac{2}{\Delta t} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}. \quad (6.15)$$

Ці співвідношення отримані в результаті розкладання експоненти у степінний ряд, представлений першими двома членами:

$$e^{-p\Delta t} \cong 1 - p\Delta t. \quad (6.16)$$

Наприклад, RC-коло на рис. 2.3 з передавальною функцією

$$K(p) = \frac{1}{1 + p\tau} \quad (6.17)$$

у разі лінійного перетворення (6.14) відповідатиме ЛЦФ з передавальною функцією

$$K(z) = \frac{a_0}{1 + b_1 z^{-1}}, \quad (6.18)$$

$$\text{де } a_0 = \frac{1}{1 + \Delta t/\tau}, \quad b_1 = \frac{\Delta t/\tau}{1 + \Delta t/\tau}.$$

По передавальній функції $K(z)$ і зображенню вхідного сигналу $U_1(z)$ можна скласти z -зображення різнісного рівняння. Наприклад, для передавальної функції (6.18) в результаті множення лівої і правої частин виразу (6.12) на знаменник $K(z)$ можна отримати:

$$U_2(z) = a_0 U_1(z) - b_1 U_2(z) z^{-1}. \quad (6.19)$$

Цьому рівнянню алгебри з урахуванням теореми запізнювання:

$$Z^{-1}[U_2(z) z^{-1}] = u_2(n-1) \quad (6.20)$$

відповідатиме різністне рівняння даного ЛЦФ:

$$u_2(n) = a_0 u_1(n) - b_1 u_2(n-1) . \quad (6.21)$$

Імпульсна характеристика ЛЦФ визначається по співвідношенню:

$$h(n) = Z^{-1}[K(z)] . \quad (6.22)$$

Наприклад, імпульсна характеристика ЛЦФ з передавальної функції (6.18) може бути отримана з рішення наступного різністного рівняння:

$$h(n) = a_0 \delta(n) - b_1 h(n-1) , \quad (6.23)$$

$$\text{де } \delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

По відомій імпульсній характеристиці за допомогою інтеграла згортки обчислюється реакція ЛЦФ на вхідний сигнал $u_1(n)$:

$$u_2(n) = \sum_{k=0}^n h(k) u_1(n-k) . \quad (6.24)$$

Перехідна характеристика ЛЦФ визначається по співвідношенню:

$$g(n) = Z^{-1}[g(z)K(z)] = Z^{-1}\left[\frac{1}{1-z^{-1}} K(z)\right] . \quad (6.25)$$

Тут $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 1 z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}}$ - зображення дискретної одиничної ступінчастої функції.

Лабораторне завдання

1. Скласти різністне рівняння ЛЦФ по диференціальному рівнянню кола, заданого в лабораторній роботі №2, застосувавши для процедури алгебраїзації явний метод Ейлера, формула (6.3). Скласти по різністному рівнянню структурну схему ЛЦФ.

2. Скласти програму і виконати за допомогою різністного рівняння розрахунок реакції ЛЦФ на вхідну дію, задану в лабораторній роботі №1. При рішенні різністного рівняння використовувати нульові початкові умови. Вхідну дію визначити на інтервалі $[0, \tau]$.

3. Скласти передавальну функцію ЛЦФ за передавальною функцією аналогового прототипу фільтру, скориставшись лінійним перетворенням (6.14).

4. Скласти програму і виконати аналіз ЛЦФ методом z -

перетворення, формули (6.11) – (6.13) і (6.19) – (6.21).

5. Скласти програму для розрахунку імпульсної характеристики ЛЦФ по співвідношенню (6.22), а також реакції фільтру на вхідну дію методом інтеграла згортки, формула (6.24).

При складанні програм аналізу ЛЦФ можна скористатися фрагментами програми моделювання і дослідження реакції цифрового прототипу аналогового RC-фільтру низьких частот (см. рис. 2.3) на вхідну дію у вигляді дискретного сигналу прямокутної форми.

Дискретизація аналогового сигналу

$$\tau := 2 \times 10^{-3}$$

$$t := 5 \cdot \tau$$

$$R := 2000$$

$$C := 2 \cdot 10^{-6}$$

$$\tau_0 := R \cdot C$$

$$N_d := 5 \quad \Delta t := \frac{\tau_0}{N_d}$$

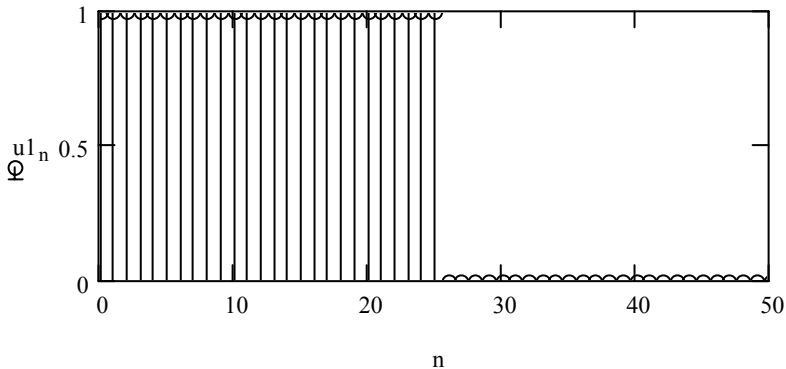
$$u_1(t) := \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$N := \frac{t}{\Delta t}$$

$$n := 0..N$$

$$u_{1n} := u_1(n \cdot \Delta t)$$

$$n := 0..2 \cdot \frac{\tau}{\Delta t}$$



Рішення різнісного рівняння, складеного за диференціальним
рівнянням аналогового прототипу фільтру

$$\text{ORIGIN} := -1$$

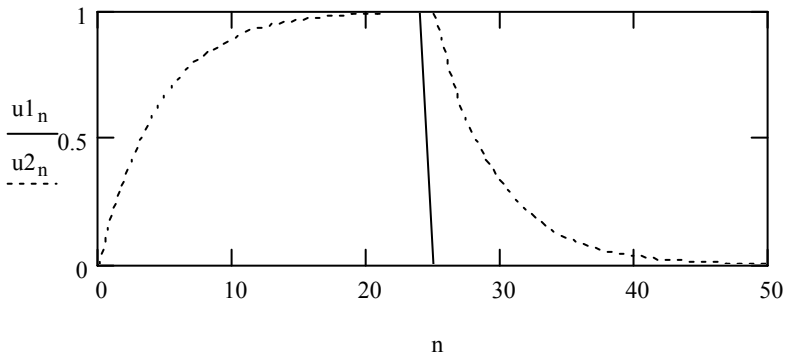
$$u1_{-1} := 0$$

$$u2_{-1} := 0$$

$$n := 0..N - 1$$

$$u2_n := u2_{n-1} + \frac{\Delta t}{\tau_0} \cdot (-u2_{n-1} + u1_{n-1})$$

$$n := 0..2 \cdot \frac{\tau}{\Delta t}$$



Рішення різнісного рівняння, складеного по передавальній
функції аналогового прототипу фільтру

$$a0 := \frac{1}{1 + \frac{\tau_0}{\Delta t}}$$

$$b1 := \frac{-\tau_0}{1 + \frac{\tau_0}{\Delta t}}$$

$$K(z) := \frac{a0}{1 + b1 \cdot z^{-1}}$$

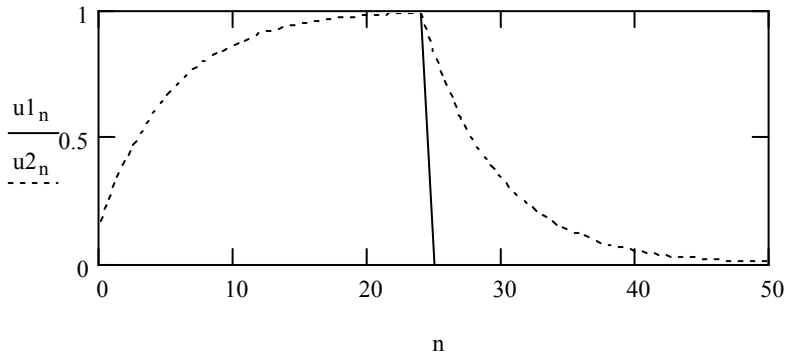
$$\text{ORIGIN} := -1$$

$$u1_{-1} := 0$$

$$u2_{-1} := 0$$

$$\underset{\sim}{u}2 := \begin{cases} \text{for } n \in 0..N-1 \\ u2_n \leftarrow a0 \cdot u1_n - b1 \cdot u2_{n-1} \\ u2 \end{cases}$$

$$\underset{\sim}{n} := 0..2 \cdot \frac{\tau}{\Delta t}$$



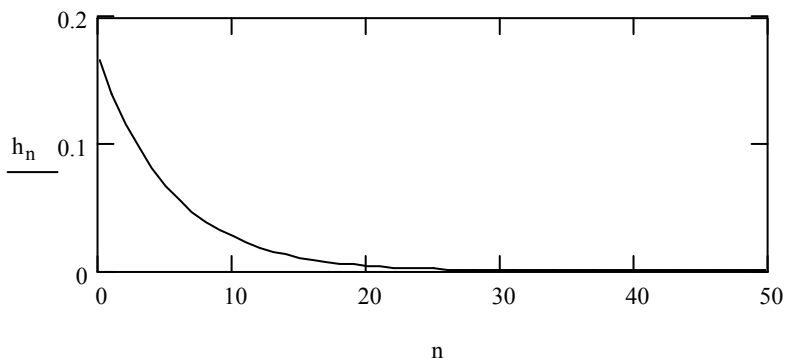
Складання імпульсної характеристики і аналіз ЛЦФ методом інтеграла згортки

$$\underset{\sim}{K}(z) := \frac{a0}{1 + b1 \cdot z^{-1}} \quad \underset{\sim}{\delta}(n) := \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\underset{\sim}{\text{ORIGIN}} := -1 \quad \underset{\sim}{h}_{-1} := 0$$

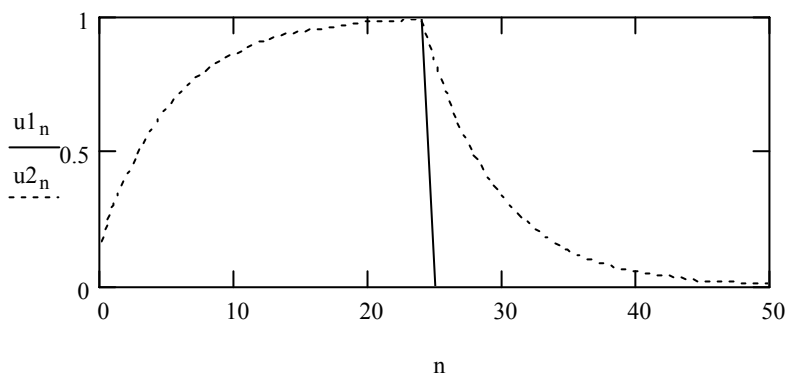
$$\underset{\sim}{h} := \begin{cases} \text{for } n \in 0..N-1 \\ h_n \leftarrow a0 \cdot \underset{\sim}{\delta}(n) - b1 \cdot h_{n-1} \\ h \end{cases}$$

$$\underset{\sim}{n} := 0..2 \cdot \frac{\tau}{\Delta t}$$



$$\begin{aligned} n &:= 0..N-1 \\ u2_n &:= \sum_{k=0}^n (u1_k \cdot h_{n-k}) \end{aligned}$$

$$n := 0..2 \cdot \frac{\tau}{\Delta t}$$



Зміст звіту

1. Короткі теоретичні відомості, схема ЛЦФ, розрахункові співвідношення, різнісні рівняння, передавальні функції.

2. Графіки за результатами розрахунку реакції ЛЦФ на вхідний сигнал по різністному рівнянню, складеному за диференціальним рівнянням аналогового прототипу.

3. Графіки з реакцією ЛЦФ на вхідний сигнал, розрахованої за допомогою різністного рівняння, що складено по передавальній функції аналогового прототипу.

4. Графіки імпульсної характеристики і результати розрахунку реакції ЛЦФ на вхідний сигнал, розрахованої за допомогою інтеграла згортки.

5. Висновки по виконаній роботі.

Контрольні питання

1. Лінійні цифрові фільтри (ЛЦФ). Визначення, способи моделювання і опису їх властивостей.

2. Різницеві рівняння, визначення, способи складання.

3. Приклад складання різницевого рівняння по диференціальному рівнянню.

4. Явний метод Ейлера рішення диференціального рівняння.

5. Вибір кроку рішення по явному методу Ейлера, якщо відома постійна часу RC - або RL – кола.

6. Приклад рішення різницевого рівняння.

7. Елементна база для складання схем ЛЦФ.

8. Приклад складання схеми ЛЦФ.

9. Передавальна функція ЛЦФ, визначення.

10. Методика отримання z -зображення дискретного сигналу. Формула прямого z -перетворення.

11. Методика отримання дискретного сигналу по z -зображенню. Формула зворотного z -перетворення.

12. Алгоритм аналізу ЛЦФ методом z -перетворення.

13. Отримання передавальної функції $K(z)$ ЛЦФ по передавальній функції $K(p)$ аналогового прототипу за допомогою лінійного перетворення.

14. Отримання передавальної функції $K(z)$ ЛЦФ по передавальній функції $K(p)$ аналогового прототипу за допомогою білінійного перетворення.

15. Приклад складання $K(z)$ по $K(p)$.

16. Теорема запізнювання для z -перетворення.

17. Імпульсна і одинична ступінчаста функції, їх z -зображення.
18. Зв'язок імпульсної і одиничної ступінчастої функцій з передавальною функцією $K(z)$ ЛЦФ.

Список літературних джерел

1. Корсаков В.В., Крылов С.Я. Основы теории цепей для системотехников.- М.: Высшая школа, 1990. - 224 с.
2. Басаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. - М.: Высшая школа, 2000. - 486 с.
3. Зиновьев А.Л., Филиппов Л.И. Введение в теорию сигналов и цепей. - М.: Высшая школа, 1988. - 198 с.
4. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. - М.: Высшая школа, 1988. - 394 с.
5. Бобало Ю.А. та інш. Основи радіоелектроніки.: Навчальний посібник. /За ред. Б.А. Мандзія – Львів, В-во НУ «Львівська політехніка», 2002.-.456 с.

Додаток А. Інтерфейс системи MATHCAD

Призначений для користувача інтерфейс системи MATHCAD - це набір графічних методів, що дозволяють легко управляти системою, використовуючи мишку або клавіатуру.

Інтерфейс системи представлено на рис. А.1. Він складається із стандартних елементів ОС Windows, що включають:

- поточне вікно;
- головне меню;
- панель інструментів;
- вбудований текстовий редактор;
- рядок стану.

Перший рядок на рис. А.1 – заголовок вікна, що містить ім'я відкритого або створеного документа у вікні редактора. Після знаку двокрапки в заголовку указується номер документа відкритого в системі MATHCAD.

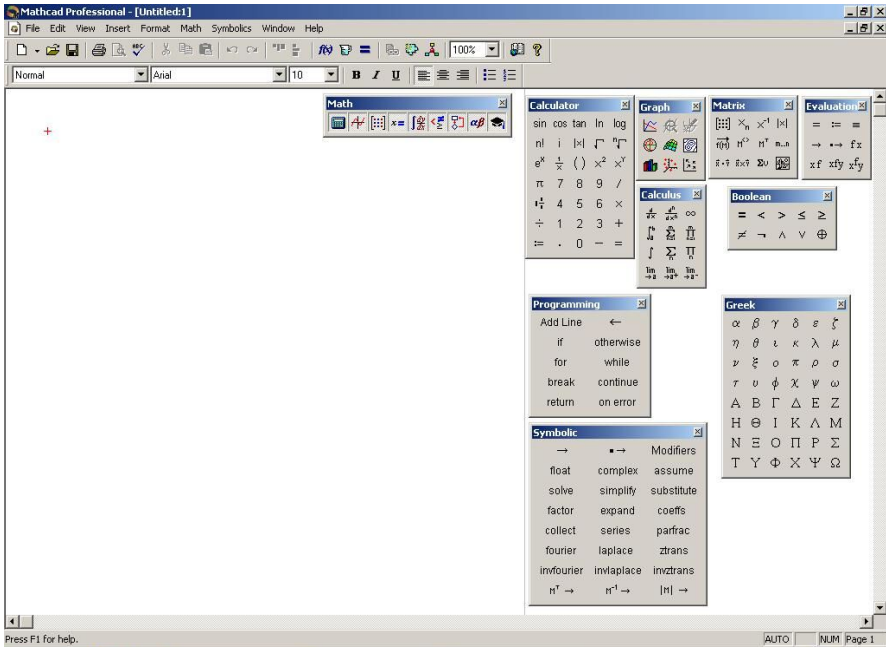


Рисунок А.1 – Робоче вікно системи MATHCAD

Другий рядок містить головне меню.

Третій і четвертий рядки – панелі інструментів Standard і Formatting, що забезпечують швидкий доступ до основних операцій при роботі з файлами, робочими листами і документами.

Четвертий рядок – панель інструментів Math (Математика). Містить набір піктограм (ікон), що забезпечують відкриття панелей для введення в робочий лист шаблонів математичних операторів і символів математичних операцій.

П'ятий рядок – рядок стану, він знаходиться в нижній частині вікна, в ньому указується поточний стан системи і виводяться різні підказки.

А.1 Основні правила створення текстових і обчислювальних блоків

Система MATHCAD містить текстовий, формульний і графічний редактори. Кожен з цих редакторів призначений для програмування блоків відповідного типу.

Звернення до блоків в процесі обчислень проводиться строго у певному порядку – построково зверху вниз.

Перед складанням блоку необхідно встановити курсор у вигляді червоного хрестика у вільне місце екрану.

Види курсорів:

- маленький червоний хрестик – цей тип курсору показує місце, з якого можна почати побудову блоку, він активізується тільки поза блоком, тобто на вільній області екрану;
- лінія (маркер), показує місце введення;
- кутовий курсор, використовується для позначення окремих частин в блоці обчислення.

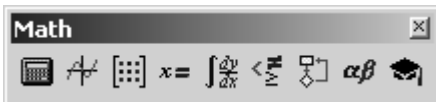
Текстовий блок. Текстовий блок використовується для складання коментарів до обчислень. Для створення текстового блоку слід натиснути кнопку “ на клавіатурі або скористатися командою меню **Insert/Test Region**. Установка параметрів шрифтів проводиться за допомогою меню **Format**.

Меню **Insert/Math Region** дозволяє вставляти формули в текстову область.

Обчислювальний блок. Для введення формул досить встановити курсор у вигляді червоного хрестика у вільне місце екрану. Кожна формула – окремий обчислювальний блок. Одна формула може бути розташована в декількох рядках. Перехід на наступний рядок забезпечується натисненням клавіш **CTRL+ENTER**.

Для побудови графіків слід встановити курсор у вигляді червоного хрестика у вільне місце екрану і скористатися панеллю інструментів Graph (Графіки).

А.2 Панель інструментів Math (Математика)



 – Calculator (Арифметика).

 – Evaluation (Рівність).

 – Graph (Графіки).



– Matrix (Матриці).



– Calculus (Математичний аналіз).



– Boolean (Логіка).



– Programming (Програмування).

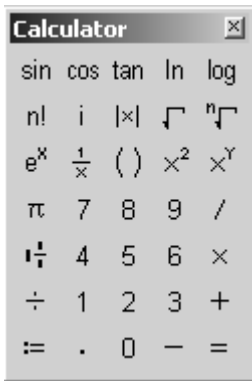


– Greek (Грецький алфавіт).



– Symbolic (Символьні обчислення).

A.2.1 Calculator (Арифметика)

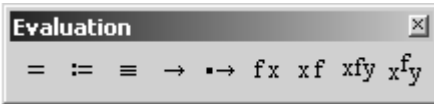


- ✓ $\sin(x), \cos(x), \tan(x)$ - тригонометричні функції;
- ✓ $\ln(x), \log(x)$ – натуральний і десятковий логарифми;
- ✓ $n!$ - факторіал цілого числа
- ✓ i - уявна одиниця;
- ✓ $|x|$ - абсолютне значення числа;
- ✓ $\sqrt{\quad}$ - квадратний корінь з числа;
- ✓ $\sqrt[n]{\quad}$ - корінь n-ого ступеня з числа;

- ✓ e^x - експонента;
- ✓ $\frac{1}{x}$ - зворотне значення числа;
- ✓ $()$ - відкриваюча і закриваюча дужки;
- ✓ x^2 - квадрат числа;
- ✓ x^y - ступінь числа;

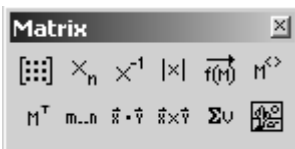
- ✓ $\bullet \div$ - шаблон для операції множення на дріб;
- ✓ $:=$ - знак локального привласнення змінній значення;
- ✓ $=$ - знак виведення результату.

A.2.2 Evaluation (Рівність)



- ✓ $=$ - знак виведення результату;
- ✓ $:=$ - знак локального привласнення змінній значення;
- ✓ $\equiv$ - знак глобального привласнення змінній значення;
- ✓ $\rightarrow$ - знак рівності при символічних обчисленнях;
- ✓ $\rightarrow$ - знак рівності при символічних обчисленнях з використанням ключового слова;
- ✓ fx, xf, xfy, xfy — кнопки завдання власних операторів.

A. 2.3 Matrix (Матриці)

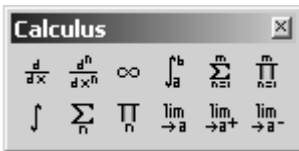


- ✓ $\begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$ - вставка матриці або вектора (номер індексу першого елементу вектора або матриці задається за допомогою службової змінної ORIGIN, за умовчанням її значення рівне 0, тобто нумерація елементів починається з нуля);
- ✓ X_n - вказівка значення індексу елементу вектора (для вказівки індексів рядка і стовпця елементу матриці їх значення записуються через кому);
- ✓ X^{-1} - обчислення зворотної матриці;
- ✓ $|X|$ - обчислення визначника матриці;
- ✓ $\vec{f}(M)$ - векторизація матриці M , тобто виконання заданої

скалярної операції над всіма елементами матриці;

- ✓ $M^{<>}$ - виділення стовпця матриці;
- ✓ M^T - транспонування матриці;
- ✓ $n..m$ - інтервал зміни значень змінних і індексів.

A.2.4 Calculus (Математичний аналіз)



- ✓ $\frac{d}{dx}$ - обчислення похідної функції першого і n-го порядків, функція вказується у верхній позначці, аргумент - у нижній, порядок - у середній позначці;

- ✓ $\infty = 1 \times 10^{307}$ — символ нескінченності;

- ✓ $\int$ - невизначений і визначений інтеграли;

- ✓ $\sum$ - обчислення суми математичного виразу за змінною, ім'я якої вказується в нижній позначці, межі підсумовування задаються в робочому листі або в нижній і верхній позначках;

- ✓ $\prod$ - обчислення помноження математичного виразу за змінною, ім'я якої вказується у нижній позначці, межі помноження задаються в робочому листі або в нижній і верхній позначках;

- ✓ $\lim_{x \rightarrow a}$ - обчислення межі функції в точці, а також правосторонньої і лівобічної меж.

A.2.5 Boolean (Логіка).



- ✓ $\wedge$ - логічне і;
- ✓ $\vee$ - логічне або;
- ✓ $\oplus$ - що виключає або.

- ✓ $=$ - логічне рівне;
- ✓ $>$ - більше, менше;
- ✓ $\geq$ - більше або рівно, менше або рівно;
- ✓ $\neq$ - не рівно;
- ✓ $\neg$ - логічне заперечення;

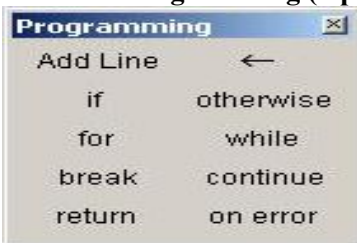
A.2.6 Graph (Графіки).



Панель інструментів для побудови двовимірних і тривимірних графіків і діаграм. У першому рядку панелі розміщені:

- ✓ піктограма побудови двовимірного графіка в декартовій системі координат;
- ✓ піктограма перегляду ділянок двовимірного графіка;
- ✓ піктограма трасування двовимірного графіка з виведенням значень функції і аргументу в точках графіка.

A.2.7 Programming (Програмування)

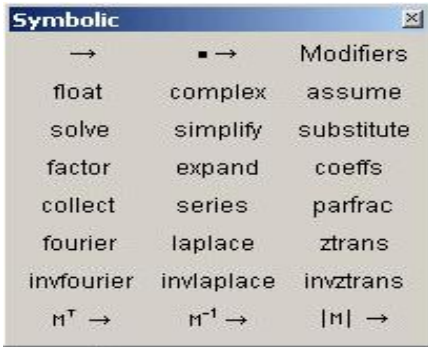


Панель інструментів для створення програмних блоків з використанням загальноприйнятих операторів програмування:

- ✓ for – оператор циклу з фіксованим числом циклів;
- ✓ while – оператор циклу із заданою умовою припинення циклів;
- ✓ if – оператор умовного переходу;
- ✓ otherwise – оператор альтернативного вибору;
- ✓ break – оператор переривання циклу;
- ✓ continue – оператор продовження циклу;

- ✓ return – оператор повернення;
- ✓ on error – оператор обробки помилок;
- ✓ ← - символ локального привласнення;
- ✓ Add Line – оператор вставки в робочий лист шаблону для програмного блоку.

A.2.8 Symbolic (Символьні обчислення)



Панель для введення команд символічних обчислень, в процесі яких здійснюються аналітичні перетворення математичних виразів і знаходження рішень в аналітичній формі. Команди символічних обчислень дозволяють отримувати в аналітичній формі вирази похідних, інтегралів, виконувати розкладання функцій в ряд Тейлора, здійснювати пряме і зворотне перетворення Фур'є, Лапласа, а також проводити ряд інших математичних операцій.

A.3 Вбудовані функції і оператори

У MathCADe визначена велика кількість функцій і операторів. Введення функцій можна здійснити за допомогою команди Function (комбінація клавіш **Ctrl+E**) з меню **Insert**. Вікно вставки вбудованих функцій можна також активізувати за допомогою піктограми ***f(x)*** на панелі інструментів (третій рядок на рис. A.1).