

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет «Запорізька політехніка»

**КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ
І ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ
ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ
З ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ І АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ**

для студентів усіх спеціальностей
денної та заочної форм навчання

2024

Короткі теоретичні відомості і індивідуальні завдання для самостійної роботи з лінійної алгебри і аналітичної геометрії для студентів усіх спеціальностей денної та заочної форм навчання / Укл. : Д. І. Анпілогов. – Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2024. – 65 с.

Укладач: Д. І. Анпілогов, доцент, к.т.н.

Експерт спеціальності: Н.І. Фурманова, доцент, к.т.н.

Рецензент: Г.А. Шишканова, доцент, к.ф.-м.н.

Комп'ютерна верстка: Д. І. Анпілогов, доцент, к.т.н.

Відповідальний
за випуск: Д. І. Анпілогов, доцент, к.т.н.

Рекомендовано до видання НМК
машинобудівного факультету
НУ «Запорізька політехніка»
Протокол № 2 від 24 . 10 .2024

Затверджено на засіданні
кафедри математики
НУ «Запорізька політехніка»
Протокол № 2 від 04.10.2024

З М І С Т

Вступ	4
1 Теоретичні відомості	5
1.1 Основи лінійної алгебри	5
1.1.1 Матриці	5
1.1.2 Визначники	6
1.1.3 Обернена матриця	9
1.1.4 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь	9
1.2 Основи векторної алгебри	12
1.2.1 Операції з векторами	12
1.2.2 Операції з векторами в координатах	15
1.3 Елементи аналітичної геометрії	18
1.3.1 Пряма на площині	18
1.3.2 Площина в просторі	20
1.3.3 Пряма в просторі	21
1.3.4 Криві другого порядку	23
1.3.5 Поверхні другого порядку	25
2 Приклади розв'язування задач	29
3 Задачі для індивідуальної роботи	49
Література	65

Вступ

Пропоновані індивідуальні завдання дібрано у відповідності до програми з курсу «Вища математика» багатоступеневої підготовки фахівців.

Завданням передусе стисле викладення теоретичних відомостей та приклади розв'язків типових задач.

Метою виконання завдань є закріплення техніки роботи з матрицями, а також з векторами і їх координатами. Тому індивідуальні завдання дібрано в такий спосіб, щоб проміжні результати розрахунків і остаточні відповіді були якомога простішими: на думку авторів, увагу треба приділяти формулам і межах їх застосовності, не маскуючи це арифметичною громіздкістю.

Збірник містить 15 рівноцінних варіантів. Номер варіанту студента відповідає порядковому номеру в журналі академічної групи.

1 ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1.1 Основи лінійної алгебри

1.1.1 Матриці

Матриця – це прямокутна таблиця чисел. В загальному випадку вона містить m рядків і n стовпців. Числа m, n називають *порядками* матриці. Матриці позначають великими літерами. На перетині i -го рядка ($i = \overline{1, m}$) і k -го стовпця ($k = \overline{1, n}$) розташовано *матричний елемент*, який позначають відповідною малою літерою і супроводжують двома індексами: номером рядка і номером стовпця: $A_{m \times n} = \{a_{ik}\}$. В розширеному вигляді

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Сукупність матричних елементів a_{ii} утворює *головну діагональ* матриці. При $n = m$ матрицю називають *квадратною* порядку m . При $m = 1$ отримують неквадратну матрицю-рядок, а при $n = 1$ – неквадратну матрицю-стовпець.

Якщо всі матричні елементи квадратної матриці дорівнюють нулю, її називають *нульовою* і позначають O . Якщо всі матричні елементи головної діагоналі квадратної матриці дорівнюють одиниці, а решта матричних елементів – нулю, то матрицю називають *одичинною* матрицею відповідного порядку і позначають E .

На множині матриць визначено наступні операції: додавання матриць, множення матриці на число, множення матриці на матрицю, транспонування матриці, знаходження оберненої матриці.

Додавати можна довільні матриці однакових порядків; це роблять поелементно:

$$A_{m \times n} + B_{m \times n} = C_{m \times n},$$

причому $c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$, $i = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, n}$.

Множити на число можна довільну матрицю; це роблять поелементно:

$$\lambda A_{m \times n} = B_{m \times n},$$

причому $b_{ik} = \lambda a_{ik}$, $i = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, n}$.

Множити одна на одну можна лише матриці, узгоджені за порядками: $A_{m \times s} \cdot B_{s \times n} = C_{m \times n}$. Матричні елементи результату знаходять за формулою:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^s a_{ij} b_{jk}. \quad (1.1)$$

Ця формула є означенням і тому доведення не потребує. Ця формула є доволі громіздкою, але її вигляд забезпечує наступні властивості множення матриць. 1) *асоціативність* множення: $(AB)C = A(BC)$; 2) *гистрибутивність* множення відносно додавання: $A(B + C) = AB + AC$. *Комутативність* множення не забезпечується, тобто в загальному випадку $AB \neq BA$. Втім, існують окремі випадки, коли $AB = BA$. В цьому разі кажуть, що матриці A і B *комутують* одна з одною. Наприклад, одинична матриця комутує з будь-якою квадратною матрицею відповідного порядку.

Транспонування матриці полягає в заміні рядків на стовпці, а стовпців на рядки. Результатом транспонування довільної матриці $A_{m \times n} = \{a_{ik}\}$ є матриця $B = A^T$, причому $B_{n \times m} = \{b_{ik}\}$, де $b_{ik} = a_{ki}$. Геометрично транспонування виглядає як здійснення осьової симетрії відносно прямої, яка проходить через елементи головної діагоналі. З використанням (1.1) неважко довести цікаву формулу

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

Ця формула є справедливою для будь-яких матриць довільних порядків (якщо добуток AB є визначеним).

Останню операцію (знаходження оберненої матриці) розглянуто нижче.

1.1.2 Визначники

Для кожної квадратної матриці можна обчислити *визначник* (детермінант), який є числовою характеристикою матриці. Для

матриць другого порядку за означенням

$$\Delta \equiv |A| \equiv \det A \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Для матриць третього порядку за означенням

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Тут розподіл знаків легко запам'ятати за допомогою мнемонічного правила Саррюса (правила трикутників).

Подальше узагальнення таке: визначник квадратної матриці дорівнює сумі добутків матричних елементів першого рядка на їх алгебраїчні доповнення:

$$\det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^n a_{1k} A_{1k}. \quad (1.2)$$

Тут алгебраїчне доповнення A_{ik} для кожного матричного елемента a_{ik} знаходять за формулою $A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot M_{ik}$. Число M_{ik} називають *мінором*, який відповідає матричному елементу a_{ik} . Мінор M_{ik} є визначником нової матриці, яка виникає з вихідної матриці при видаленні з неї i -го рядка і k -го стовпця. Отже, обчислення визначника квадратної матриці порядку n зводиться до обчислення n визначників порядку $(n-1)$ кожний.

Кажуть, що формула (1.2) є розкладанням визначника за елементами першого рядка. В аналогічний спосіб можна розкласти визначник за елементами будь-якого рядка, а також будь-якого стовпця:

$$\det A = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik} = \sum_{i=1}^n a_{ik} A_{ik}. \quad (1.3)$$

Матрицю A називають *виродженою*, якщо $|A| = 0$, або *невиродженою*, якщо $|A| \neq 0$.

Можна довести наступну теорему: якщо матриця вироджена, то її рядки (стовпці) лінійно залежні, і навпаки, якщо рядки (стовпці) матриці лінійно залежні, то вона вироджена.

Основні властивості визначників:

- $\det A = \det (A^T)$, тобто при обчисленні визначника рядки і стовпці є рівноправними;
- якщо обміняти місцями два будь-яких рядки (стовпці), то визначник змінить знак на протилежний;
- якщо до j -го рядка поелементно додати i -й рядок, попередньо домножений на довільне число α , то визначник не зміниться:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} + \alpha a_{i1} & a_{j2} + \alpha a_{i2} & \cdots & a_{jn} + \alpha a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Якщо $a_{ik} \neq 0$, то остання властивість дозволяє, в певний спосіб підбираючи число α для кожної пари рядків (i і j' , i і j'' і т.д.), зробити рівними нулю всі матричні елементи k -го стовпця (крім a_{ik}). Тоді при розкладанні визначника за елементами k -го стовпця сума (1.3) буде містити лише один доданок $a_{ik}A_{ik}$, що значно спрощує подальші обчислення.

Властивість 3 дозволяє також привести матрицю до трикутного вигляду (нулі розташовані на кожному місці під головною діагоналлю). В цьому разі послідовно здійснюючи розкладання визначника за елементами першого стовпця, легко довести наступне: визначник матриці, зведеної до діагонального вигляду, дорівнює добутку матричних елементів головної діагоналі.

Інші властивості визначників (наприклад, якщо матриця містить два однакових рядки, то вона вироджена) є наслідками вже перелічених властивостей.

1.1.3 Обернена матриця

Кажуть, що матриця A^{-1} є *оберненою* до матриці A , якщо $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Якщо матриця A є невивірженою, то обернена до неї існує і є єдиною. Алгоритм пошуку матриці, оберненої до матриці A , такий:

- обчислюють $\Delta = \det A$ і переконуються, що $\Delta \neq 0$;
- для кожного матричного елемента a_{ik} знаходять його мінор M_{ik} , і далі – відповідне алгебраїчне доповнення A_{ik} ;
- розміщують знайдені алгебраїчні доповнення на відповідних місцях, і ділять кожне значення на Δ ;
- транспонують отриману матрицю.

Отже:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a_{11}}{\Delta} & \frac{a_{12}}{\Delta} & \cdots & \frac{a_{1n}}{\Delta} \\ \frac{a_{21}}{\Delta} & \frac{a_{22}}{\Delta} & \cdots & \frac{a_{2n}}{\Delta} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{a_{n1}}{\Delta} & \frac{a_{n2}}{\Delta} & \cdots & \frac{a_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Неважко довести цікаву формулу: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

1.1.4 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Система лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Позначимо $A_{m \times n} = \{a_{ik}\}$, $i = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, n}$, а також

$$X_{n \times 1} = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)^T, \quad B_{m \times 1} = (b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_m)^T.$$

Тоді СЛАР набуває *матричного вигляду*

$$AX = B. \quad (1.4)$$

Матрицю A називають *матрицею СЛАР*, а матрицю B – *стовпцем вільних членів*. Розв'язком СЛАР називають стовпець X , при якому (1.4) виконано при даних матрицях A, B .

Якщо СЛАР має хоча б один розв'язок, її називають *сумісною*. Якщо СЛАР не має жодного розв'язку взагалі, її називають *несумісною*.

Інтерес становлять три методи розв'язування СЛАР: матричний метод, правила Крамера, метод Гаусса.

1°. Припустимо, що A – квадратна невинроджена ($\det A \neq 0$) матриця. Саму СЛАР в цьому разі також називають *невинродженою* (при $\det A = 0$ матриця A винроджена; в цьому разі відповідну СЛАР також називають *винродженою*). Тоді A^{-1} існує і є єдиною. Помножимо (1.4) на A^{-1} матрично зліва:

$$X = A^{-1}B.$$

Це і є розв'язок СЛАР, отримуваний матричним методом. Отже, невинроджені СЛАР завжди сумісні. Їх розв'язок є єдиним.

2°. Розв'язок невинродженої СЛАР також можна отримати за правилами Крамера:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}.$$

Тут $\Delta = \det A$, а Δ_i – визначник матриці, яка виникає при заміні в матриці СЛАР i -го стовпця стовпцем вільних членів.

3°. Метод Гаусса полягає в послідовному виключенні невідомих. При його застосуванні виписують *розширену* матрицю СЛАР, доповнюючи матрицю СЛАР стовпцем вільних членів, і приводять її до трикутного вигляду шляхом лінійної комбінації рядків (прямий хід). Потім послідовно знаходять невідомі, починаючи з останнього (зворотний хід).

Перевага методу Гаусса полягає в тому, що його можна застосувати до будь-яких СЛАР (навіть у випадку $m \neq n$).

Рангом матриці називають найбільшу кількість лінійно незалежних рядків.

Якщо матриця СЛАР порядку n невинроджена, то лінійно залежних рядків вона не містить; в цьому разі ранг матриці дорівнює її порядку: $\text{rang}(A) = n$. Звичайно, в цьому разі ранг

розширеної матриці також $\text{rang}(A|B) = n$. Тоді після приведення до трикутного вигляду отримаємо $a_{nn} \neq 0$. Отже, з останнього рівняння величина x_n може бути знайденою. Подальший зворотний хід призведе до отримання однозначного розв'язку системи.

Нехай тепер матриця СЛАР є виродженою і містить r лінійно незалежних рядків, $r < n$. В цьому разі $\text{rang}(A) = r$. Кількість лінійно залежних рядків складає $d = n - r$. Тоді після приведення до трикутного вигляду матриця СЛАР буде містити d рядків, які складаються лише з нулів (зауважимо, це не обов'язково d останніх рядків). Якщо при цьому у відповідних правих частинах також виникають нулі, то $\text{rang}(A|B) = \text{rang}(A)$. Відповідні рівняння набувають вигляду $0 = 0$. Вони не містять протиріччя, і тому можуть бути відкинутими. З тих r рівнянь, що залишилися, можна знайти r невідомих. Решту d невідомих x_i можна перенести в праві частини рівнянь і вважати довільними незалежними параметрами (зауважимо, це не обов'язково d останніх невідомих). Виникає безліч розв'язків.

Якщо ж хоча б у одній відповідній правій частині виникне число $C \neq 0$, то $\text{rang}(A) < \text{rang}(A|B)$. Відповідне рівняння набуває вигляду $0 = C$, де $C \neq 0$. Воно містить протиріччя, яке не може бути усуненим ні при якому виборі значень x_i . Отже, ніяких розв'язків немає взагалі, тобто СЛАР є несумісно.

На наведених міркуваннях базується доведення наступної теореми, відомої як *теорема Кронекера-Капеллі*. Її формулювання таке: якщо ранг матриці СЛАР дорівнює рангу розширеної матриці, $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B)$, то СЛАР є сумісною. І навпаки, якщо СЛАР є сумісною, то ранг матриці СЛАР дорівнює рангу розширеної матриці, $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B)$.

Теорема Кронекера-Капеллі не здатна визначити кількість розв'язків СЛАР. Якщо $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = n$, то розв'язок існує і є єдиним, а якщо $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) < n$, то розв'язків безліч. Для усунення можливих непорозумінь наведемо наступну таблицю 1.1, яка визначає кількість розв'язків СЛАР. Звичайно, клітинка «невироджена-несумісна» залишається незаповненою, оскільки невироджена СЛАР завжди є сумісною.

4°. Окремий інтерес становлять *однорідні* СЛАР. Так називають СЛАР, у яких $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$. Очевидно, однорідні СЛАР завжди сумісні: вони мають принаймні *тривіальний* розв'язок: $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

Таблиця 1.1 – Кількість розв'язків СЛАР

	невироджена	вироджена
несумісна		0
сумісна	1	∞

Якщо однорідна СЛАР є невинродженою, то цей тривіальний розв'язок є єдиним. Отже, якщо потрібно, щоб однорідна система мала принаймні один нетривіальний розв'язок, то з необхідністю вона має бути винродженою. Тому з існування хоча б одного нетривіального розв'язку однорідної системи буде впливати існування безлічі нетривіальних розв'язків.

1.2 Основи векторної алгебри

1.2.1 Операції з векторами

Вектор – це спрямований відрізок. Якщо він сполучає початок (точка A) з кінцем (точка B), то його позначають $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$.

Вектор є носієм двох властивостей: модуля $|\vec{a}| = a$ і напрямку. Напрямок даного вектора характеризують кутами, утворюваними даним вектором з іншими векторами або певними координатними осями.

На множині векторів визначено наступні операції: додавання векторів, множення вектора на число, скалярний добуток векторів, векторний добуток векторів. При комбінуванні цих операцій можна утворити мішаний і подвійний векторний добуток.

Додавання векторів визначається правилом трикутника:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB};$$

початки і кінці цих векторів утворюють трикутник OAB . Будь-який вектор $\overrightarrow{AB}$ зручно описувати відносно певної системи координат з початком в точці O , використовуючи мнемонічне правило «кінець мінус початок»:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}.$$

Тут положення точок A, B визначено за допомогою їх *радіус-векторів* $\vec{r}_A = \vec{OA}$, $\vec{r}_B = \vec{OB}$.

Існує нульовий вектор $\vec{0} = \vec{AA}$ – єдиний вектор, який не має напрямку.

Множення числа на вектор відбувається за таким правилом: якщо $\vec{b} = \lambda \vec{a}$, то 1) $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$; 2) $\vec{b}$ і $\vec{a}$ мають однаковий напрямок при $\lambda > 0$, і $\vec{b}$ спрямований протилежно $\vec{a}$ при $\lambda < 0$; якщо $\lambda = 0$, то $\vec{b} = \vec{0}$ і напрямком не характеризується.

Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, які утворюють кут φ між собою, називається скаляр (число)

$$c = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi.$$

Це число виявляється додатним, якщо φ – гострий кут, або від'ємним, якщо φ – тупий кут. Якщо $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Отже, рівність нулю скалярного добутку двох ненульових векторів є ознакою їх *ортогональності* (перпендикулярності).

Властивості скалярного добутку:

$$- \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a};$$

$$- (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c};$$

$$- (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b});$$

$$- \vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0, \text{ причому } \vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}.$$

Остання властивість дозволяє знаходити довжину довільного вектора за формулою:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}.$$

Механічний зміст скалярного добутку $\vec{F} \cdot \vec{s}$ – робота сили $\vec{F}$ на переміщенні $\vec{s}$.

Орт вектора $\vec{a}$ – вектор $\vec{a}_0$, одиничний за довжиною і спрямований вздовж вектора $\vec{a}$. Очевидно, $\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$.

Проекція вектора $\vec{a}$ на напрямок вектора $\vec{b}$ – це скалярний добуток вектора $\vec{a}$ на орт вектора $\vec{b}$:

$$\text{Пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{b}_0 = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{ab \cos \varphi}{b} = a \cos \varphi,$$

де φ – кут, на який відхилено вектор $\vec{a}$ від напрямку його проєктування. Звідси випливає *геометричний* зміст скалярного добутку: скалярний добуток вектора $\vec{a}$ на одиничний вектор дорівнює проєкції вектора $\vec{a}$ на напрямок одиничного вектора.

Векторним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, які утворюють кут φ між собою, називається вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, довжина якого дорівнює

$$|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi.$$

Напрямок $\vec{c}$ визначається трьома вимогами: 1) $\vec{c} \perp \vec{a}$; 2) $\vec{c} \perp \vec{b}$; 3) вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, взяті саме в цій послідовності, утворюють правоїгнгову систему (трійку) векторів. Очевидно, якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ паралельні, то кут між ними $\varphi = 0$ або $\varphi = \pi$, і тоді $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. Отже, рівність нулю векторного добутку двох ненульових векторів є ознакою їх *колінеарності* (паралельності). Інша форма умови колінеарності: $\exists \lambda: \vec{b} = \lambda \vec{a}, \vec{a} \neq \vec{0}$.

Властивості векторного добутку:

$$\begin{aligned} - \vec{a} \times \vec{b} &= -\vec{b} \times \vec{a}; \\ - (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} &= \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}; \\ - (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} &= \lambda (\vec{a} \times \vec{b}). \end{aligned}$$

Механічний зміст векторного добутку: якщо $\vec{r}$ – радіус-вектор точки прикладання сили $\vec{F}$, то $\vec{r} \times \vec{F}$ – момент сили $\vec{F}$ відносно початку координат.

Геометричний зміст векторного добутку очевидний: модуль векторного добутку двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах як на суміжних сторонах, $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$.

Мішаний добуток трьох векторів – скаляр $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$. Геометричний зміст: модуль мішаного добутку трьох векторів дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах як на суміжних ребрах, $V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$. Відповідно, об'єм тетраедра, побудованого на цих векторах як на суміжних ребрах, дорівнює $V_{\text{тетр.}} = \frac{1}{6} |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$.

Рівність нулю мішаного добутку трьох ненульових векторів, $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$, є ознакою їх *компланарності* (три вектори паралельні одній площині).

1.2.2 Операції з векторами в координатах

Простір має розмірність n , якщо в ньому існує n лінійно незалежних векторів, а будь-які $(n + 1)$ вектори є лінійно залежними.

Площина є простором розмірності $n = 2$: будь які два неколінеарні ненульові вектори $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$ є лінійно незалежними, і будь-який третій вектор $\vec{a}$ може бути виражений лінійно через них у вигляді $\vec{a} = \alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2$, притому в єдиний спосіб. Кажуть, що сукупність $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ утворює *базис* на площині, а впорядкована пара чисел (α, β) є *координатами вектора* $\vec{a}$ в цьому базисі.

Звичайний простір має розмірність $n = 3$: будь які три некопланарні ненульові вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ і $\vec{e}_3$ є лінійно незалежними, і будь-який четвертий вектор $\vec{a}$ може бути виражений лінійно через них у вигляді $\vec{a} = \alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2 + \gamma \vec{e}_3$, притому в єдиний спосіб. Кажуть, що сукупність $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ утворює *базис* у просторі, а впорядкована трійка чисел (α, β, γ) є *координатами вектора* $\vec{a}$ в цьому базисі.

В будь-якому просторі існує необмежена кількість теоретично рівноправних базисів. Але з практичної точки зору зручно обрати ортонормований базис – базис, вектори якого мають одиничну довжину і є попарно ортогональними. В цьому разі замість позначень $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ використовують позначення $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, причому $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$, $\vec{i} \perp \vec{j}$, $\vec{j} \perp \vec{k}$, $\vec{k} \perp \vec{i}$. Відповідно замість позначень α , β , γ користуються позначеннями x , y , z . Нехай початки векторів $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ перенесені в точку O , і вздовж цих векторів обрано вісі Ox , Oy , Oz . Тоді x , y , z ста-

ють звичайними декартовими координатами кінця довільного вектора з початком в точці O , і отже – координатами цього вектора в базисі $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Інакше, якщо точка A має координати $A(x, y, z)$, то розкладання вектора $\overrightarrow{OA}$ за ортонормованим базисом $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ є

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} = \{x; y; z\}. \quad (1.5)$$

Тут і надалі в разі площини обмежуються першими двома доданками¹. Доданки в формулі (1.5) називають *компонентами* (або *складовими*) вектора $\vec{a}$.

Завдяки формулі (1.5) подальші дії з векторами можна звести до дій з їх координатами. В цьому і полягає перевага координатного методу. Розглянемо основні операції з векторами в координатах.

Додавання векторів. Нехай $\vec{a} = \{x_1; y_1; z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$. Тоді

$$\vec{a} + \vec{b} = \{x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2\}.$$

Добуток числа на вектор. Нехай $\vec{a} = \{x; y; z\}$. Тоді

$$\lambda \vec{a} = \{\lambda x; \lambda y; \lambda z\}.$$

Скалярний добуток. Нехай $\vec{a} = \{x_1; y_1; z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$. Тоді

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Векторний добуток. Нехай $\vec{a} = \{x_1; y_1; z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$. Тоді

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Мішаний добуток. Нехай $\vec{a} = \{x_1; y_1; z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$, $\vec{c} = \{x_3; y_3; z_3\}$. Тоді

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

¹Звичайно, векторний і мішаний добутки при цьому не визначаються.

За наведеними формулами розв'язують наступні задачі.

1°. Знаходження координат вектора. Домножимо скалярно розкладання (1.5) послідовно на вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{i} = x, \quad \vec{a} \cdot \vec{j} = y, \quad \vec{a} \cdot \vec{k} = z.$$

З урахуванням означення проекції встановлюємо: якщо базис ортонормований, то координата вектора дорівнює його проєкції на відповідну вісь. Це твердження дозволяє переходити від покоординатного порівняння векторів до порівняння проєкцій цих векторів. Саме на цьому і засновано розв'язування задач фізики і механіки, в яких переходять від векторного рівняння (наприклад, рівняння другого закону Ньютона $m\vec{a} = \Sigma \vec{F}_i$) до системи скалярних рівнянь «в проєкціях».

2°. Модуль вектора $\vec{a} = \{x; y; z\}$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

3°. Кут між векторами $\vec{a} = \{x_1; y_1; z_1\}$ і $\vec{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Зокрема, якщо в якості вектора $\vec{b}$ виступає черговий базисний вектор, то φ стає кутом між вектором і відповідною віссю. Нехай вектор $\vec{a} = \{x; y; z\}$ утворює кути α , β , γ з додатними напрямками осей Ox , Oy , Oz відповідно. Тоді

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{i}|} = \frac{x}{|\vec{a}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\cos \beta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{j}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{j}|} = \frac{y}{|\vec{a}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{k}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{k}|} = \frac{z}{|\vec{a}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

З іншого боку, орт $\vec{a}_0$ вектора $\vec{a}$:

$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}}{|\vec{a}|} =$$

$$= \frac{x}{|\vec{a}|} \cdot \vec{i} + \frac{y}{|\vec{a}|} \cdot \vec{j} + \frac{z}{|\vec{a}|} \cdot \vec{k} = \left\{ \frac{x}{|\vec{a}|}; \frac{y}{|\vec{a}|}; \frac{z}{|\vec{a}|} \right\}.$$

Порівнюючи з попередніми трьома формулами, отримуємо:

$$\vec{a}_0 = \{\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma\}.$$

З цієї причини координати орта $\vec{a}_0$ вектора $\vec{a}$ називають *напрямними косинусами* вектора $\vec{a}$ (а також і вектора $\vec{a}_0$).

Цікаво зауважити наступне. Оскільки $|\vec{a}_0| = 1$, то

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

4°. Поділ відрізка в заданому відношенні. Нехай відрізок AB задано координатами своїх кінців. Знайдемо точку $K \in AB$ таку, що $AK : KB = \lambda : 1$. Маємо:

$$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{KB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OK}.$$

За умовою $\overrightarrow{AK} = \lambda \overrightarrow{KB}$. Підставляючи сюди праві частини попередніх формул і розв'язуючи утворене рівняння, знаходимо:

$$\overrightarrow{OK} = \frac{\overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB}}{1 + \lambda}.$$

Для знаходження кожної координати точки K окремо достатньо це рівняння спроектувати на вісі Ox , Oy , Oz .

1.3 Елементи аналітичної геометрії

1.3.1 Пряма на площині

Побудуємо рівняння прямої на площині, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно ненульовому вектору *нормалі* $\vec{n} \notin \{A; B\}$. Нехай $M(x, y)$ – довільна точка прямої. Тоді у векторній формі

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0.$$

В скалярній формі маємо: $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$. Позначимо $C = -Ax_0 - By_0$. *Загальне* рівняння прямої:

$$Ax + By + C = 0.$$

Якщо $B \neq 0$, то

$$y = y_0 + k(x - x_0).$$

Тут $k = -\frac{A}{B}$ – кутовий коефіцієнт (дорівнює тангенсу кута, який пряма утворює з додатним напрямком осі Ox). Останнє рівняння – рівняння прямої, яка проходить *через задану точку під заданим кутом*. При розкритті дужок отримуємо:

$$y = kx + b.$$

Тут b – вільний член. Умови паралельності і перпендикулярності двох прямих з кутовими коефіцієнтами k_1 і k_2 :

$$k_2 = k_1, \quad 1 + k_1 k_2 = 0.$$

Побудуємо рівняння прямої на площині, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ паралельно ненульовому вектору $\vec{\ell} \{u; v\}$ (його називають *напрямним вектором*). Нехай $M(x, y)$ – довільна точка прямої. Тоді у векторній формі

$$\overrightarrow{M_0 M} = t \vec{\ell}.$$

В скалярній формі маємо:

$$\begin{cases} x - x_0 = tu \\ y - y_0 = tv \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + tu \\ y = y_0 + tv \end{cases}$$

Остання система – *параметричне* рівняння прямої на площині. Її механічний зміст – рівняння рівномірного прямолінійного руху з начального положення $M_0(x_0, y_0)$ зі швидкістю, проекції якої на осі Ox , Oy дорівнюють u , v відповідно; параметр t відіграє роль часу.

Виключаючи з останньої системи параметр t , отримуємо *канонічне* рівняння прямої:

$$\frac{x - x_0}{u} = \frac{y - y_0}{v}.$$

Одна з координат прямого вектора може дорівнювати нулю. Наприклад, нехай $u = 0$. Запис $\frac{x - x_0}{0} = \dots$ вважають припустимим. Але його розуміють в такий спосіб: якщо $u = 0$, то $x - x_0 = t \cdot 0$, тобто $x = x_0$. Це випадок прямої, яка паралельна осі Oy .

В якості напрямного можна обрати вектор, який сполучає дві точки на прямій: $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$. Тоді

$$\vec{\ell} = \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\},$$

і канонічне рівняння набуває вигляду *рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки*:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Зокрема, можна обрати точки $M_1(0, b)$ і $M_2(a, 0)$ перетину прямої з координатними осями. Отримаємо рівняння прямої «у відрізках»:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

1.3.2 Площина в просторі

Побудуємо рівняння площини в просторі, яка проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно ненульовому вектору нормалі $\vec{n} \{A; B; C\}$. Нехай $M(x, y, z)$ – довільна точка площини. Тоді у векторній формі

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0.$$

Умова перпендикулярності двох площин з нормальми $\vec{n}_1, \vec{n}_2$:

$$\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2, \quad \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0.$$

Умова паралельності двох площин з нормальми $\vec{n}_1, \vec{n}_2$:

$$\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2, \quad \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{0} \quad \text{або} \quad \vec{n}_2 = \lambda \vec{n}_1.$$

Перетворюючи векторну форму рівняння площини на скалярну, отримуємо:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Це і є *рівняння площини, яка проходить через задану точку перпендикулярно заданій нормалі*. З використанням позначення $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$ отримуємо загальне рівняння площини:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Це рівняння передбачає такі окремі випадки.

1°. Якщо $D = 0$, отримуємо *в'язку площин*, які проходять через початок системи координат.

2°. Якщо $B = C = 0$, отримуємо *стос площин*, перпендикулярних осі Ox . Для випадків $A = C = 0$, $A = B = 0$ отримуємо стоси площин, перпендикулярних вісям Oy , Oz відповідно.

3°. Якщо $A = 0$, отримуємо площини, паралельні осі Ox . Для випадків $B = 0$, $C = 0$ отримуємо площини, паралельні вісям Oy , Oz відповідно.

Побудуємо рівняння площини, яка проходить через три точки, що не лежать на одній прямій. Нехай координати цих точок $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M'(x', y', z')$, $M'' = (x'', y'', z'')$. Маємо:

$$\overrightarrow{M_0M'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM_0} = \{x' - x_0; y' - y_0; z' - z_0\},$$

$$\overrightarrow{M_0M''} = \overrightarrow{OM''} - \overrightarrow{OM_0} = \{x'' - x_0; y'' - y_0; z'' - z_0\}.$$

Нехай $\vec{n} = \overrightarrow{M_0M'} \times \overrightarrow{M_0M''}$. Якщо $\vec{n} = \vec{0}$, то точки M_0 , M' , M'' лежать на одній прямій, і задача однозначного розв'язку не має. Якщо $\vec{n} \neq \vec{0}$, то за означенням векторного добутку $\vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M'}$ і $\vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M''}$. Тоді $\vec{n}$ – вектор нормалі. Залишається з цією нормаллю провести площину через точку M_0 .

Відстань від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини, яка має рівняння $Ax + By + Cz + D = 0$, обчислюють за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

1.3.3 Пряма в просторі

Побудуємо рівняння прямої в просторі, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ паралельно ненульовому напрямному вектору $\vec{\ell} \{p; q; r\}$. Нехай $M(x, y, z)$ – довільна точка прямої. Тоді у векторній формі

$$\overrightarrow{M_0M} = t \vec{\ell}.$$

В скалярній формі маємо:

$$\begin{cases} x - x_0 = tp \\ y - y_0 = tq \\ z - z_0 = tr \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + tp \\ y = y_0 + tq \\ z = z_0 + tr \end{cases}$$

Остання система – *параметричне* рівняння прямої у просторі. Її механічний зміст – рівняння рівномірного прямолінійного руху з начального положення $M_0(x_0, y_0, z_0)$ зі швидкістю, проекції якої на осі Ox , Oy , Oz дорівнюють p , q , r відповідно; параметр t відіграє роль часу.

Виключаючи з останньої системи параметр t , отримуємо *канонічне* рівняння прямої у просторі:

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}.$$

Одне або два з трьох чисел p , q , r можуть² дорівнювати нулю. Записи типу $\frac{x - x_0}{0} = \dots$ вважають припустимим аналогічно до розглянутого вище.

В якості напрямного можна обрати вектор, який сполучає дві точки на прямій: $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Тоді

$$\vec{\ell} = \overrightarrow{M_1 M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\},$$

і канонічне рівняння набуває вигляду *рівняння прямої у просторі, яка проходить через дві задані точки*:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Пряму також можна задати перетином двох непаралельних площин у вигляді

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Нормалі $\vec{n}_1 \{A_1; B_1; C_1\}$ і $\vec{n}_2 \{A_2; B_2; C_2\}$ неколінеарні, оскільки площини не паралельні. Тоді вектор $\vec{\ell} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \neq \vec{0}$ може бути прийнятим в якості напрямного, оскільки $\vec{\ell} \perp \vec{n}_1$ і $\vec{\ell} \perp \vec{n}_2$. Отже, пряму можна задати канонічним рівнянням, використовуючи довільний розв'язок системи $M_0(x_0, y_0, z_0)$ (очевидно, він існує, оскільки непаралельні площини перетинаються).

²Не можуть дорівнювати нулю усі три числа одночасно, оскільки в цьому разі $\vec{\ell} = \vec{0}$, і напрямок прямої є невизначеним.

1.3.4 Криві другого порядку

Розглянемо рівняння другого степеню відносно змінних x , y . Найбільш загальний вигляд:

$$a_{11}x^2 + (a_{12} + a_{21})xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0.$$

При введенні лінійних заміन

$$\begin{cases} x = \alpha_{11}\xi + \alpha_{12}\eta \\ y = \alpha_{21}\xi + \alpha_{22}\eta \end{cases}$$

вигляд рівняння залишиться таким самим; іншими стануть лише його коефіцієнти. Прийнемо без доведення, що завжди можна обрати таку заміну, при якій після зведення подібних вдається позбавитись доданку $(a_{12} + a_{21})xy$. Тому надалі без обмеження загальності розглядатимемо рівняння

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0. \quad (1.6)$$

Виділимо повні квадрати. Припускаючи, що $a_{11} \neq 0$, маємо:

$$\begin{aligned} a_{11}x^2 + b_1x &= a_{11} \left(x^2 + \frac{b_1x}{a_{11}} \right) = \\ &= a_{11} \left(x^2 + 2 \cdot \frac{b_1}{2a_{11}} \cdot x + \left(\frac{b_1}{2a_{11}} \right)^2 - \left(\frac{b_1}{2a_{11}} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Позначаючи $x_0 = -\frac{b_1}{2a_{11}}$, $\xi = x - x_0$, отримуємо:

$$a_{11}x^2 + b_1x = a_{11}(x - x_0)^2 - \frac{b_1^2}{4a_{11}} = a_{11}\xi^2 + \text{const.}$$

Отже, при $a_{11} \neq 0$ зміщення початку координат на відстань x_0 вздовж осі Ox дозволяє позбавитись першого степеню змінної x . Заміна змінної y аналогічна. Тому після виділення повних квадратів отримуємо:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + c = 0.$$

При $c = 0$ отримуємо т.зв. *вироджені* випадки, що впливають з рівняння $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 = 0$. Якщо числа a_{11} і a_{22} мають однакові знаки, то впорядкована пара $(0; 0)$ є єдиним розв'язком. Якщо числа a_{11} і a_{22} мають різні знаки, отримуємо пару

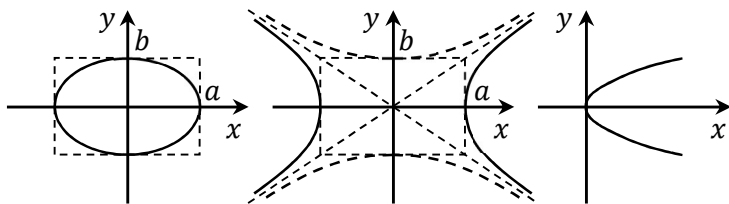


Рисунок 1.1 – Криві другого порядку

прямих $y = \pm x \sqrt{-\frac{a_{11}}{a_{22}}}$. Якщо $a_{11} = 0$, $a_{22} \neq 0$, то отримуємо рівняння $y = 0$, яке є рівнянням осі Ox . Якщо $a_{11} \neq 0$, $a_{22} = 0$, то отримуємо рівняння $x = 0$, яке є рівнянням осі Oy .

Серед не вироджених розрізняють три випадки: еліптичний, гіперболічний і параболічний.

Еліптичний випадок виникає, якщо обидва коефіцієнти a_{11} , a_{22} відмінні від нуля і мають однаковий знак. В цьому разі рівняння (1.6) зводиться до вигляду

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Це рівняння називається *канонічним рівнянням еліпсу*. Параметри a , b – півосі еліпса, точка $M(x_0, y_0)$ – його центр. Графік еліпса при $x_0 = y_0 = 0$ зображений на рис. 1.1 ліворуч.

Гіперболічний випадок виникає, якщо обидва коефіцієнти a_{11} , a_{22} відмінні від нуля і мають різні знаки. В цьому разі рівняння (1.6) зводиться до вигляду

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = \pm 1.$$

Це рівняння називається *канонічним рівнянням гіперболи*. Параметри a , b – півосі гіперболи, точка $M(x_0, y_0)$ – її центр. Гіпербола (на відміну від еліпса) має *асимптоти* – прямі $y = \pm \frac{b}{a} \cdot x$, до яких графік необмежено наближається у нескінченності. Графік гіперболи при $x_0 = y_0 = 0$ зображений на рис. 1.1 в центрі (суцільна лінія у випадку знаку «плюс» і штрихова лінія у випадку знаку «мінус»).

Параболічний випадок виникає, якщо один з коефіцієнтів a_{11} , a_{22} дорівнює нулю. Наприклад, при $a_{11} = 0$ з рівняння (1.6)

отримуємо канонічне рівняння параболі з параметром p :

$$y^2 = 2px.$$

Графік параболі зображений на рис. 1.1 праворуч.

1.3.5 Поверхні другого порядку

Рівняння

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0$$

другого степеню відносно трьох змінних x, y, z задає в просторі поверхню *другого порядку*. Можна довести, що існує така нова система координат (тобто існує така відповідна лінійна заміна змінних), що в цьому рівнянні вдається позбавитись добутоків xy, yz, zx :

$$a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0. \quad (1.7)$$

Якщо деякий коефіцієнт при другому степені відмінний від нуля, то належним зсувом початку координат (при виділенні повного квадрату) вдається позбавитись також відповідного лінійного доданку.

Для рівняння, яке залишається, також можливі вироджені випадки (розв'язком є пуста множина, або поодинокa точка, або сукупність пари лінійних рівнянь тощо). Надалі обмежимося лише невивродженими випадками: еліптичними, гіперболічними, параболічними і циліндричними.

Еліптичний випадок виникає, коли усі коефіцієнти при других степенях додатні. Єдиний представник цього випадку – *еліпсоїд* (рис. 1.2). Його рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Зокрема, при $a = b = c = R$ маємо сферу радіусу R з центром в початку системи координат.

Уяву про форму просторової поверхні можна отримати *методом перерізів*. В еліптичному випадку переріз поверхні площинами $x = \text{const}$, $y = \text{const}$, $z = \text{const}$ має форму еліпсу. Це

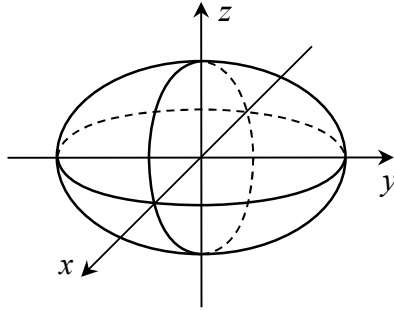


Рисунок 1.2 – Еліпсоїд

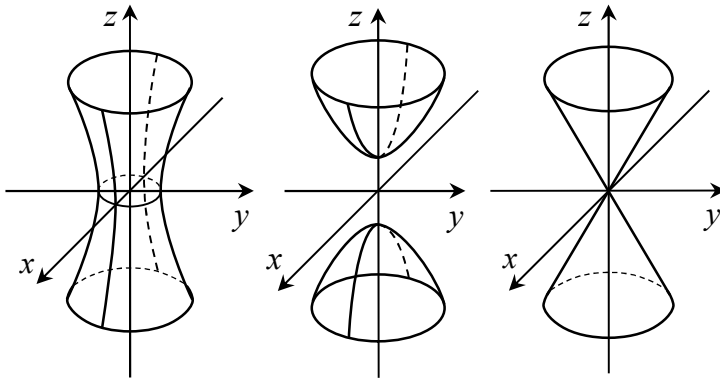


Рисунок 1.3 – Гіперболічні випадки

випливає з того, що рівняння еліпсоїду при фіксації будь-якої координати зводиться до канонічного рівняння еліпсу.

Гіперболічний випадок виникає, коли коефіцієнти при x^2 і y^2 – додатні, а при z^2 – від'ємний. Залежно від знаку вільного члена маємо три ситуації.

1°. Якщо в (1.7) $c < 0$, то це рівняння зводиться до вигляду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Маємо *однопорожнинний гіперболоїд* (рис. 1.3, ліворуч). Перерізи площиною $z = \text{const}$ є еліпсами, а перерізи площинами

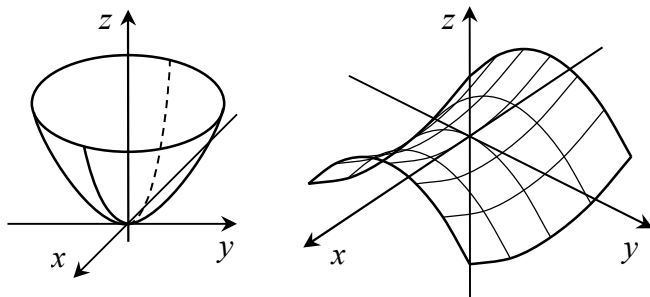


Рисунок 1.4 – Параболічні випадки

$x = \text{const}$, $y = \text{const}$ – гіперболи.

2°. Якщо в (1.7) $c > 0$, то це рівняння зводиться до вигляду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

Це випадок *двопорожнинного гіперboloїда* (рис. 1.3, в центрі). Знову перерізи горизонтальними площинами – еліпси, а вертикальними – гіперболи.

3°. Якщо в (1.7) $c = 0$, то це рівняння зводиться до вигляду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}.$$

Це випадок *конуса* (рис. 1.3, праворуч), який є проміжним між одно- і двопорожнинним гіперboloїдами.

В еліптичному випадку коефіцієнт при z^2 був додатним, в гіперболічних – від'ємним. *Параболічні* випадки виникають, коли він дорівнює нулю (але перший степінь z в рівнянні (1.7) ще міститься). Представниками параболічних випадків є *еліптичний параболоїд* (рис. 1.4, ліворуч) та *гіперболічний параболоїд* (рис. 1.4, праворуч). Їх рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$$

відповідно.

Нарешті, може виявитись, що в рівнянні (1.7) нулю дорівнює одночасно і коефіцієнт при z^2 , і коефіцієнт при z , тобто

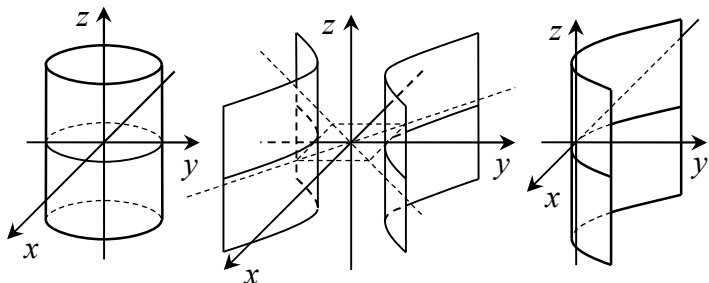


Рисунок 1.5 – Циліндричні випадки

змінна z в рівнянні взагалі відсутня. В цьому разі переріз поверхні довільною площиною $z = \text{const}$ буде однаковим незалежно від z . Тоді достатньо зобразити потрібну криву другого порядку в площині Oxy і здійснити неперервний рух цієї кривої вздовж осі Oz . Поверхню, утворювану при цьому (як і сам такий випадок) називають *циліндричною*.

Означення циліндра можна надати також в наступний спосіб. На площині Oxy зображаємо довільну криву і обираємо пряму, паралельну осі Oz , яка проходить через довільну точку кривої. Потім здійснюємо неперервний рух цієї прямої вздовж кривої так, щоб пряма залишалась перпендикулярною площині Oxy . Ця пряма в процесі руху утворить бічну поверхню відповідно до форми плоскої кривої. Таку поверхню і називають *циліндричною*. Пряму, яка рухалась, в цьому разі називають *твірною*.

При побудові класифікації циліндрів беруть до уваги форму кривої, вздовж якої рухається твірна. Тому розрізняють еліптичний, гіперболічний та параболічний циліндри (рис. 1.5, ліворуч, в центрі, праворуч відповідно). Рівняння цих циліндрів відповідно є:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \quad x^2 = 2py.$$

2 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Знайти x з рівняння

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 2 & e^x \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} x^2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Розв'язок. Перший визначник розкладемо за елементами першого рядка:

$$\begin{aligned} & 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \\ & + e^x \cdot (-1)^{1+3} \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} x^2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 0, \\ & = 2 \cdot (4 \cdot 2 - 3 \cdot 2) - 2 \cdot (2 \cdot 2 - 3 \cdot 1) + \\ & + e^x \cdot (2 \cdot 2 - 4 \cdot 1) + (x^2 \cdot 1 - 1 \cdot 2) = 0, \\ & e^x \cdot 0 + x^2 = 0, \quad x^2 = 0, \quad x = 0. \end{aligned}$$

Віповідь: $x = 0$.

Задача 2. На прикладі заданих матриць A , B перевірити виконання співвідношення $(AB)^T = B^T A^T$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок. Маємо:

$$\begin{aligned} (AB)^T &= \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right]^T = \\ &= \left[\begin{pmatrix} 1 \cdot 7 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 9 \\ 4 \cdot 7 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 9 \end{pmatrix} \right]^T = \begin{pmatrix} 50 \\ 122 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 50 & 122 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

З іншого боку, маємо:

$$\begin{aligned} B^T A^T &= \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = (7 \quad 8 \quad 9) \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \\ &= (7 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 9 \cdot 3 \quad 7 \cdot 4 + 8 \cdot 5 + 9 \cdot 6) = (50 \quad 122). \end{aligned}$$

Як бачимо, результати збігаються.

Задача 3. Для заданої матриці A знайти обернену матрицю, виконати перевірку:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок. 1°. Знаходимо визначник матриці A :

$$\begin{aligned} \Delta = \det A &= \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 1 - (2 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 1) = \\ &= 2 + 12 + 4 - (6 + 8 + 2) = 2 \neq 0. \end{aligned}$$

Отже, обернена матриця існує і є єдиною.

2°. Для кожного матричного елемента знаходимо його алгебраїчне доповнення.

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1, \\ A_{21} &= - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5, \\ A_{31} &= \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3. \end{aligned}$$

3°. Розміщуємо знайдені алгебраїчні доповнення на відповідні місця й кожне з них ділимо на визначник матриці:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 5 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -2 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

4°. Транспонуємо отриману матрицю:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Зробимо перевірку:

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0+2-1 & -1-4+5 & 1+2-3 \\ 0+1-1 & -2-2+5 & 2+1-3 \\ 0+1-1 & -3-2+5 & 3+1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E. \end{aligned}$$

Віповідь: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$

Задача 4. За правилами Крамера розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь, подану розширеною матрицею:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 21 \\ 0 & 5 & 2 & 25 \\ 3 & 1 & 4 & 29 \end{array} \right).$$

Розв'язок. Маємо:

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 6,$$

$$\Delta_1 = \det \begin{pmatrix} 21 & 3 & 2 \\ 25 & 5 & 2 \\ 29 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 12, \quad x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{12}{6} = 2,$$

$$\Delta_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & 21 & 2 \\ 0 & 25 & 2 \\ 3 & 29 & 4 \end{pmatrix} = 18, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{18}{6} = 3,$$

$$\Delta_3 = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 21 \\ 0 & 5 & 25 \\ 3 & 1 & 29 \end{pmatrix} = 30, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{30}{6} = 5.$$

Віповідь: $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 5.$

Задача 5. Систему лінійних алгебраїчних рівнянь подано розширеною матрицею. Дослідити систему на сумісність за допомогою теореми Кронекера-Капеллі. В разі сумісності розв'язати систему методом Гаусса:

$$\text{а) } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 31 \\ 3 & 10 & 14 & 106 \\ 7 & 23 & 32 & 243 \end{array} \right), \text{ б) } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 31 \\ 3 & 10 & 14 & 106 \\ 7 & 23 & 32 & 245 \end{array} \right).$$

Розв'язок. а) Випишемо розширену матрицю системи і зведемо її до трикутного вигляду шляхом лінійної комбінації рядків:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 31 \\ 3 & 10 & 14 & 106 \\ 7 & 23 & 32 & 243 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ +I \cdot (-3) \\ +I \cdot (-7) \end{array} \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 31 \\ 0 & 1 & 2 & 13 \\ 0 & 2 & 4 & 26 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ +II \cdot (-2) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 31 \\ 0 & 1 & 2 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Як бачимо, $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B)$ (обидва ранги дорівнюють двійці). Отже за теоремою Кронекера-Капеллі СЛАР є сумісною.

Третій рядок не містить протиріччя, і тому може бути відкинутий. З другого рядка маємо:

$$x_2 + 2x_3 = 13, \quad x_2 = 13 - 2x_3.$$

З першого рядка маємо:

$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 31,$$

$$x_1 = 31 - 3x_2 - 4x_3 = 31 - 3(13 - 2x_3) - 4x_3 = 2x_3 - 8.$$

Позначаючи $x_3 = C$ – довільне число, отримуємо:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2C - 8 \\ 13 - 2C \\ C \end{pmatrix}.$$

б) Випишемо розширену матрицю системи і зведемо її до трикутного вигляду шляхом лінійної комбінації рядків:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 31 \\ 3 & 10 & 14 & 106 \\ 7 & 23 & 32 & 245 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ +I \cdot (-3) \\ +I \cdot (-7) \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 31 \\ 0 & 1 & 2 & 13 \\ 0 & 2 & 4 & 28 \end{array} \right) + \text{II} \cdot (-2) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 31 \\ 0 & 1 & 2 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right).$$

Як бачимо, $\text{rang}(A) = 2$, а $\text{rang}(A|B) = 3$. Отже, за теоремою Кронекера-Капеллі СЛАР є несумісною. Зауважимо, в цьому разі третій рядок відкидати не можна, оскільки він містить протиріччя ($0 = 2$), яке не може бути усуненим ні при якому виборі значень шуканих змінних x_1, x_2, x_3 .

Віповідь: а) $X = \begin{pmatrix} 2C - 8 \\ 13 - 2C \\ C \end{pmatrix}$; б) система є несумісною.

Задача 6. Здійснюючи еквівалентні перетворення, звести задану матрицю A до нижньотрикутного вигляду й знайти її ранг:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 4 & 13 & 3 & 2 \\ 5 & 16 & 5 & 8 \\ 9 & 29 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок. Маємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 4 & 13 & 3 & 2 \\ 5 & 16 & 5 & 8 \\ 9 & 29 & 8 & 10 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ +\text{I} \cdot (-4) \\ +\text{I} \cdot (-5) \\ +\text{I} \cdot (-9) \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -5 & -22 \\ 0 & 1 & -5 & -22 \\ 0 & 2 & -10 & -44 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ +\text{II} \cdot (-1) \\ +\text{II} \cdot (-2) \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -5 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, $\text{rang}(A) = 2$.

Віповідь: $\text{rang}(A) = 2$.

Задача 7. Методом Гаусса знайти загальний розв'язок однорідної системи чотирьох лінійних алгебраїчних рівнянь з чотирьма невідомими. Матриця системи збігається з поданою в попередній задачі.

Розв'язок. Розширена матриця однорідної СЛАР після приведення до трикутного вигляду є:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -22 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Два останніх рівняння не містять протиріччя і можуть бути відкинуті. З другого рівняння маємо:

$$x_2 = 5x_3 + 22x_4.$$

Тоді з першого рівняння знаходимо:

$$x_1 = -3x_2 - 2x_3 - 6x_4 = -3(5x_3 + 22x_4) - 2x_3 - 6x_4 = -17x_3 - 72x_4.$$

Позначаючи $x_3 = C_1$, $x_4 = C_2$ – довільні числа, отримуємо:

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -17C_1 - 72C_2 \\ 5C_1 + 22C_2 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17C_1 \\ 5C_1 \\ C_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -72C_2 \\ 22C_2 \\ 0 \\ C_2 \end{pmatrix} = \\ &= C_1 \begin{pmatrix} -17 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -72 \\ 22 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = C_1 X_1 + C_2 X_2. \end{aligned}$$

Тут стовпці

$$X_1 = \begin{pmatrix} -17 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} -72 \\ 22 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

утворюють фундаментальну систему розв'язків.

Віповідь: $X = C_1 X_1 + C_2 X_2$, де

$$X_1 = (-17 \quad 5 \quad 1 \quad 0)^T, \quad X_2 = (-72 \quad 22 \quad 0 \quad 1)^T$$

– фундаментальна система розв'язків, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Задача 8. Задано три вектори

$$\vec{a} = \{2; 3; 5\}, \quad \vec{b} = \{1; 2; 2\}, \quad \vec{c} = \{7; 12; 16\}.$$

Довести, що ці вектори є компланарними і виразити вектор $\vec{c}$ через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Розв'язок. Припустимо, існують числа α, β такі, що

$$\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}.$$

Покоординатне порівняння призводить до системи рівнянь:

$$\begin{cases} 7 = 2\alpha + \beta \\ 12 = 3\alpha + 2\beta \\ 16 = 5\alpha + 2\beta \end{cases}$$

Випишемо і перетворимо розширену матрицю цієї системи:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 12 \\ 5 & 2 & 16 \end{array} \right) \xrightarrow{+I \cdot (-2)} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{+II} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

За теоремою Кронекера-Капеллі система є сумісною. Її єдиний розв'язок $\alpha = 2, \beta = 3$, отже $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$. Наявність цієї лінійної залежності доводить компланарність векторів.

Віповідь: $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$.

Задача 9. Піраміду $ABCD$ задано координатами своїх вершин: $A(1, 2, 2), B(1, 9, -2), C(0, 3, 2), D(-10, 11, -20)$. Знайти:

- 1) координати векторів $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$;
- 2) векторний добуток $\vec{AB} \times \vec{AC}$;
- 3) площу S_{ABC} основи $\triangle ABC$ піраміди;
- 4) мішаний добуток $(\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AD}$;
- 5) об'єм піраміди;
- 6) висоту DD_1 піраміди, де D_1 – ортогональна проекція точки D на площину ABC ;
- 7) координати вектора $\vec{AD}_1$;
- 8) координати точки D_1 .
- 9) Переконатись, що $D_1 \in ABC$. Для цього переконатись, що вектори $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}_1$ є компланарними, і знайти коефіцієнти α, β лінійної залежності $\vec{AD}_1 = \alpha \vec{AB} + \beta \vec{AC}$.

Розв'язок. 1) Знайдемо координати векторів $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$:

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \{1; 9; -2\} - \{1; 2; 2\} = \{0; 7; -4\},$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \{0; 3; 2\} - \{1; 2; 2\} = \{-1; 1; 0\},$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \{-10; 11; -20\} - \{1; 2; 2\} = \{-11; 9; -22\}.$$

2) Знайдемо векторний добуток $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 7 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 4\vec{j} + 7\vec{k} = \{4; 4; 7\}.$$

3) Знайдемо площу S_{ABC} основи піраміди:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{4^2 + 4^2 + 7^2} = \frac{9}{2}.$$

4) Знайдемо мішаний добуток $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}$:

$$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 0 & 7 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \\ -11 & 9 & -22 \end{vmatrix} = -162.$$

Мішаний добуток в нашому разі також можна знайти як скалярний добуток з використанням результатів пункту 2):

$$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = 4 \cdot (-11) + 4 \cdot 9 + 7 \cdot (-22) = -162.$$

5) Знайдемо об'єм піраміди:

$$V = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}| = \frac{|-162|}{6} = 27.$$

6) За формулою об'єму піраміди $V = \frac{1}{3}SH$, звідки

$$DD_1 = H = \frac{3V}{S_{ABC}} = \frac{3 \cdot 27}{\frac{9}{2}} = 18.$$

7) Очевидно, $\overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD_1}$. Позначимо $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. За означенням векторного добутку вектор $\vec{n}$ перпендикулярний площині ABC . Але вектор $\overrightarrow{DD_1}$ також перпендикулярний цій площині. Тому вектори $\overrightarrow{DD_1}$ і $\vec{n}$ колінеарні. Отже, існує число λ таке, що $\overrightarrow{DD_1} = \lambda \vec{n}$. Тоді $\overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{AD} + \lambda \vec{n}$. Вектор $\vec{n}$ перпендикулярний до кожного вектора, що лежить у площині ABC , в тому числі і до вектора $\overrightarrow{AD_1}$. Тоді $\overrightarrow{AD_1} \cdot \vec{n} = 0$. Маємо:

$$(\overrightarrow{AD} + \lambda \vec{n}) \cdot \vec{n} = 0,$$

звідки

$$\lambda = -\frac{\overrightarrow{AD} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} = -\frac{-11 \cdot 4 + 9 \cdot 4 - 22 \cdot 7}{4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 7 \cdot 7} = 2.$$

Тоді

$$\overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{AD} + 2\vec{n} = \{-11; 9; -22\} + \{8; 8; 14\} = \{-3; 17; -8\}.$$

8) Тоді положення точки D_1 :

$$\overrightarrow{OD_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD_1} = \{1; 2; 2\} + \{-3; 17; -8\} = \{-2; 19; -6\},$$

тобто $D_1(-2, 19, -6)$.

9) Припустимо, існують числа α, β такі, що

$$\overrightarrow{AD_1} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}.$$

Маємо:

$$\{-3; 17; -8\} = \alpha \{0; 7; -4\} + \beta \{-1; 1; 0\}.$$

Покоординатне порівняння призводить до системи рівнянь:

$$\begin{cases} -3 = 0 \cdot \alpha - \beta \\ 17 = 7\alpha + \beta \\ -8 = -4\alpha + 0 \cdot \beta \end{cases}$$

З першого і останнього рівнянь знаходимо $\beta = 3, \alpha = 2$. Підставляючи ці значення в друге рівняння, встановлюємо, що воно теж задовільнене. Отже, система рівнянь є сумісною; її розв'язок $\alpha = 2, \beta = 3$. Тоді $\overrightarrow{AD_1} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$. Наявність цієї лінійної залежності доводить компланарність векторів $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD_1}$, тобто факт належності точки D_1 до площини ABC .

Вignovigь: 1) $\overrightarrow{AB} = \{0; 7; -4\}, \overrightarrow{AC} = \{-1; 1; 0\}, \overrightarrow{AD} = \{-11; 9; -22\};$

2) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \{4; 4; 7\};$ 3) $S_{ABC} = \frac{9}{2};$ 4) $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = -162;$

5) $V = 27;$ 6) $DD_1 = 18;$ 7) $\overrightarrow{AD_1} = \{-3; 17; -8\};$ 8) $D_1(-2, 19, -6);$

9) $\overrightarrow{AD_1} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} \Rightarrow D_1 \in ABC.$

Задача 10. Трикутник ABC задано координатами своїх вершин: $A(1, 2, 3), B(2, 4, 1), C(9, 1, 7)$. Знайти довжини сторін AB і AC , а також величину кута при вершині A .

Розв'язок. Маємо:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \{2; 4; 1\} - \{1; 2; 3\} = \{1; 2; -2\},$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \{9; 1; 7\} - \{1; 2; 3\} = \{8; -1; 4\}.$$

Далі:

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}} = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3,$$

$$AC = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC}} = \sqrt{8^2 + (-1)^2 + 4^2} = 9.$$

Тоді:

$$\cos \angle A = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{1 \cdot 8 + 2 \cdot (-1) + (-2) \cdot 4}{3 \cdot 9} = -\frac{2}{27}, \quad \angle A \approx 94^\circ.$$

Віповідь: $AB = 3$, $AC = 9$, $\angle A \approx 94^\circ$.

Задача 11. Дано точки $A(4, 8, 9)$, $B(1, 2, 0)$ і число $\lambda = 2$. Знайти точку $K \in AB$, яка ділить відрізок AB у відношенні $AK : KB = \lambda : 1$.

Розв'язок. Маємо:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OK} &= \frac{\overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB}}{1 + \lambda} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}) = \\ &= \frac{1}{3} (\{4; 8; 9\} + \{2 \cdot 1; 2 \cdot 2; 2 \cdot 0\}) = \frac{1}{3} \{6; 12; 9\} = \{2; 4; 3\}. \end{aligned}$$

Отже, $K(2, 4, 3)$.

Віповідь: $K(2, 4, 3)$.

Задача 12. Трикутник ABC задано координатами своїх вершин: $A(-2, 1, 10)$, $B(4, 1, 1)$, $C(11, 3, 10)$. Знайти висоту CD .

Розв'язок. Нехай $D \in AB$ – основа висоти CD . Тоді $\exists \lambda : \overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{AB}$. Очевидно,

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}.$$

За умовою $\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{AB}$, тому $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$,

$$(\lambda \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \quad \lambda = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}}.$$

У нас:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \{4; 1; 1\} - \{-2; 1; 10\} = \{6; 0; -9\},$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \{11; 3; 10\} - \{-2; 1; 10\} = \{13; 2; 0\},$$

$$\lambda = \frac{6 \cdot 13 + 0 \cdot 2 + (-9) \cdot 0}{6^2 + 0^2 + (-9)^2} = \frac{2}{3},$$

$$\overrightarrow{CD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \{4; 0; -6\} - \{13; 2; 0\} = \{-9; -2; -6\},$$

$$CD = |\overrightarrow{CD}| = \sqrt{\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CD}} = \sqrt{(-9)^2 + (-2)^2 + (-6)^2} = 11.$$

Віповідь: $CD = 11$.

Задача 13. Трикутник ABC задано координатами своїх вершин: $A(-1, 4, 2)$, $B(1, 6, 3)$, $C(5, -2, -1)$. Знайти бісектрису AD .

Розв'язок. Маємо:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \{1; 6; 3\} - \{-1; 4; 2\} = \{2; 2; 1\},$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3,$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \{5; -2; -1\} - \{-1; 4; 2\} = \{6; -6; -3\},$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{6^2 + (-6)^2 + (-3)^2} = 9.$$

Нехай $D \in BC$ – основа бісектриси. За властивістю бісектриси $BD : DC = AB : AC$, $BD : DC = \frac{1}{3} : 1$. Тоді

$$\overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{1}{4} (3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \{3; 0; 0\},$$

$$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 0^2} = 3.$$

Віповідь: $AD = 3$.

Задача 14. Побудувати рівняння площини, яка проходить перпендикулярно до даного вектора $\vec{N} \{3; 2; -1\}$ через дану точку $M_0(1, 4, 2)$. З'ясувати, належать дані точки $M_1(3, 1, 2)$, $M_2(4, 1, 2)$ побудований площині чи не належать.

Розв'язок. Скористаємось рівнянням площини, яка проходить через задану точку перпендикулярно заданій нормалі:

$$3(x - 1) + 2(y - 4) - (z - 2) = 0, \quad 3x + 2y - z - 9 = 0.$$

Підставляючи сюди координати точки M_1 , переконуємося, що це рівняння задовільнюється. Отже точка M_1 належить даній

площині. Підставляючи координати точки M_2 , переконуємося, що це рівняння не задовільнюється. Отже точка M_2 не належить даній площині.

Віповідь: $\sigma : 3x + 2y - z - 9 = 0$, $M_1 \in \sigma$, $M_2 \notin \sigma$.

Задача 15. Задано точки $A(1, 2, 2)$, $B(3, 1, 4)$, $C(2, 3, 1)$. Переконатись, що вони не лежать на одній прямій, і побудувати рівняння площини, яка проходить через ці точки.

Розв'язок. Маємо

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \{3; 1; 4\} - \{1; 2; 2\} = \{2; -1; 2\},$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \{2; 3; 1\} - \{1; 2; 2\} = \{1; 1; -1\}.$$

Маємо далі:

$$\vec{N} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k} = \{-1; 4; 3\} \neq \vec{0}.$$

Отже, вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ неколінеарні, і тому точки A , B , C не лежать на одній прямій.

За означенням векторного добутку $\vec{N} \perp \overrightarrow{AB}$ і $\vec{N} \perp \overrightarrow{AC}$, тому вектор $\vec{N}$ може бути прийнятий в якості нормалі. Скористаємось рівнянням площини, яка проходить через задану точку A перпендикулярно заданій нормалі:

$$-(x - 1) + 4(y - 2) + 3(z - 2) = 0, \quad x - 4y - 3z + 13 = 0.$$

Віповідь: $x - 4y - 3z + 13 = 0$.

Задача 16. Знайти відстань між точкою $M_0(6, 6, 5)$ і площиною, заданою рівнянням $4x + 7y + 4z - 5 = 0$.

Розв'язок. За умовою маємо: $x_0 = 6$, $y_0 = 6$, $z_0 = 5$, $A = 4$, $B = 7$, $C = 4$, $D = -5$. Тоді:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|4 \cdot 6 + 7 \cdot 6 + 4 \cdot 5 - 5|}{\sqrt{4^2 + 7^2 + 4^2}} = 9.$$

Віповідь: 9.

Задача 17. Дві площини σ_1 і σ_2 задано рівняннями

$$2x - 2y + z - 1 = 0, \quad 2x - 2y + z - 10 = 0.$$

Визначити відстань між площинами.

Розв'язок. Нормальний вектор $\vec{N} \{2; -2; 1\}$ площин один і той самий, отже вони паралельні. Тоді достатньо на другій площині обрати довільну точку, наприклад $M_0(0, 0, 10)$, і обчислити відстань від неї до першої площини:

$$d = \frac{|2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 1 \cdot 10 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = 3.$$

Віповідь: 3.

Задача 18. Знайти точку Q , симетричну точці $P(12, -5, 7)$ відносно площини $6x - 2y + 3z - 5 = 0$.

Розв'язок. Оберемо на заданій площині довільну точку, наприклад $A(1, 2, 1)$. Тоді

$$\vec{AP} = \vec{OP} - \vec{OA} = \{12; -5; 7\} - \{1; 2; 1\} = \{11; -7; 6\}.$$

Нехай R – проекція точки P на задану площину. Тоді вектор $\vec{AR} = \vec{AP} + \vec{PR}$ лежить в цій площині, і тому перпендикулярний до нормалі $\vec{N} \{6; -2; 3\}$ (ці координати взято з рівняння площини), тобто $(\vec{AP} + \vec{PR}) \cdot \vec{N} = 0$. Але вектор $\vec{PR}$ перпендикулярний до площини, і тому колінеарний до нормалі, тобто існує таке λ , що $\vec{PR} = \lambda \vec{N}$. Маємо:

$$(\vec{AP} + \lambda \vec{N}) \cdot \vec{N} = 0,$$

$$\lambda = -\frac{\vec{AP} \cdot \vec{N}}{\vec{N} \cdot \vec{N}} = -\frac{11 \cdot 6 + (-7) \cdot (-2) + 6 \cdot 3}{6^2 + (-2)^2 + 3^2} = -2.$$

Тоді $\vec{PR} = -2\vec{N} = \{-12; 4; -6\}$. З міркувань симетрії $\vec{PR} = \vec{RQ}$. Тоді

$$\begin{aligned} \vec{OQ} &= \vec{OA} + \vec{AP} + \vec{PR} + \vec{RQ} = \vec{OA} + \vec{AP} + 2\vec{PR} = \\ &= \{1; 2; 1\} + \{11; -7; 6\} + 2\{-12; 4; -6\} = \{-12; 3; -5\}. \end{aligned}$$

Віповідь: $Q(-12, 3, -5)$.

Задача 19. Напрямний вектор прямої m , яка проходить через точку $M_0(0, 2, 2)$, дорівнює $\vec{\ell} \{2; 2; 1\}$. Обчислити відстань між точкою $B(2, 7, 6)$ і цією прямою.

Розв'язок. Нехай точка A – проекція точки B на пряму m . Оскільки $A \in m$, то вектор $\vec{M_0A}$ колінеарний напрямному вектору. Отже, існує число λ таке, що $\vec{M_0A} = \lambda \vec{\ell}$. Маємо:

$$\vec{AB} = \vec{M_0B} - \vec{M_0A} = \vec{M_0B} - \lambda \vec{\ell}.$$

Тут

$$\overrightarrow{M_0B} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM_0} = \{2; 7; 6\} - \{0; 2; 2\} = \{2; 5; 4\}.$$

Очевидно, $\overrightarrow{AB} \perp \vec{\ell}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{\ell} = 0$, $(\overrightarrow{M_0B} - \lambda \vec{\ell}) \cdot \vec{\ell} = 0$,

$$\lambda = \frac{\overrightarrow{M_0B} \cdot \vec{\ell}}{\vec{\ell} \cdot \vec{\ell}} = \frac{2 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 4 \cdot 1}{2^2 + 2^2 + 1^2} = 2.$$

Тоді

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{M_0B} - 2\vec{\ell} = \{2; 5; 4\} - 2\{2; 2; 1\} = \{-2; 1; 2\},$$

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}} = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} = 3.$$

Віповідь: $AB = 3$.

Задача 20. Знайти точку Q , симетричну даній точці $P(9, -1, 1)$ відносно прямої m , яка проходить через точку $A(1, 4, 4)$ в напрямку вектора $\vec{\ell} \{0; 1; 4\}$.

Розв'язок. Нехай R – проекція точки P на пряму m . Оскільки $R \in m$, то вектори $\overrightarrow{AR}$ і $\vec{\ell}$ колінеарні, тобто існує число λ таке, що $\overrightarrow{AR} = \lambda \vec{\ell}$. Маємо:

$$\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AP} - \lambda \vec{\ell}.$$

Тут

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \{9; -1; 1\} - \{1; 4; 4\} = \{8; -5; -3\}.$$

Очевидно, $\overrightarrow{RP} \perp \vec{\ell}$, $\overrightarrow{RP} \cdot \vec{\ell} = 0$, $(\overrightarrow{AP} - \lambda \vec{\ell}) \cdot \vec{\ell} = 0$,

$$\lambda = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{\ell}}{\vec{\ell} \cdot \vec{\ell}} = \frac{8 \cdot 0 + (-5) \cdot 1 + (-3) \cdot 4}{0^2 + 1^2 + 4^2} = -1.$$

Тоді $\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{AP} + \vec{\ell} = \{8; -5; -3\} + \{0; 1; 4\} = \{8; -4; 1\}$.

За міркуваннями симетрії $\overrightarrow{RQ} = -\overrightarrow{RP}$. Тоді

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RQ} - \overrightarrow{RP} = -2\overrightarrow{RP} = \{-16; 8; -2\}.$$

Остаточо отримуємо:

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \{9; -1; 1\} + \{-16; 8; -2\} = \{-7; 7; -1\}.$$

Віповідь: $Q(-7, 7, -1)$.

Задача 21. Пряма m_1 проходить через задані точки A_1 і B_1 , а пряма m_2 – через задані точки A_2 і B_2 . Встановити, яким є взаємне розташування цих прямих.

а) $A_1(2, 3, 1)$, $B_1(5, 7, 3)$, $A_2(4, 0, 4)$, $B_2(10, 8, 8)$.

б) $A_1(2, 3, 1)$, $B_1(5, 7, 3)$, $A_2(17, 23, 11)$, $B_2(14, 19, 9)$.

в) $A_1(2, 3, 1)$, $B_1(5, 7, 3)$, $A_2(4, 3, 1)$, $B_2(6, 7, 3)$.

г) $A_1(2, 3, 1)$, $B_1(5, 7, 3)$, $A_2(4, 3, 1)$, $B_2(6, 7, 4)$.

Розв'язок. а) Напрямні вектори прямих:

$$\vec{\ell}_1 = \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OA_1} = \{5; 7; 3\} - \{2; 3; 1\} = \{3; 4; 2\},$$

$$\vec{\ell}_2 = \overrightarrow{A_2B_2} = \overrightarrow{OB_2} - \overrightarrow{OA_2} = \{10; 8; 8\} - \{4; 0; 4\} = \{6; 8; 4\}.$$

Маємо:

$$\vec{\ell}_1 \times \vec{\ell}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & 2 \\ 6 & 8 & 4 \end{vmatrix} = \vec{0}.$$

Отже, вектори $\vec{\ell}_1$ і $\vec{\ell}_2$ колінеарні. Тому прямі або паралельні, або збігаються.

Маємо далі

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1} = \{4; 0; 4\} - \{2; 3; 1\} = \{2; -3; 3\},$$

$$\vec{\ell}_1 \times \overrightarrow{A_1A_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = \{18; -5; -17\} \neq \vec{0}.$$

Отже, вектори $\vec{\ell}_1$ і $\overrightarrow{A_1A_2}$ неколінеарні. Тому $A_2 \notin m_1$, і прямі не можуть збігатись, тобто вони паралельні.

б) Напрямні вектори прямих:

$$\vec{\ell}_1 = \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OA_1} = \{5; 7; 3\} - \{2; 3; 1\} = \{3; 4; 2\},$$

$$\vec{\ell}_2 = \overrightarrow{A_2B_2} = \overrightarrow{OB_2} - \overrightarrow{OA_2} = \{14; 19; 9\} - \{17; 23; 11\} = \{-3; -4; -2\}.$$

Маємо:

$$\vec{\ell}_1 \times \vec{\ell}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & 2 \\ -3 & -4 & -2 \end{vmatrix} = \vec{0}.$$

Отже, вектори $\vec{\ell}_1$ і $\vec{\ell}_2$ колінеарні. Тому прямі або паралельні, або збігаються.

Маємо далі

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1} = \{17; 23; 11\} - \{2; 3; 1\} = \{15; 20; 10\},$$

$$\vec{\ell}_1 \times \overrightarrow{A_1A_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & 2 \\ 15 & 20 & 10 \end{vmatrix} = \vec{0}.$$

Отже, вектори $\vec{\ell}_1$ і $\overrightarrow{A_1A_2}$ колінеарні. Тому $A_2 \in m_1$. Отже, прямі m_1 і m_2 мають принаймні одну спільну точку – точку A_2 . Але прямі напрямлені однаково, і тому вони збігаються.

в) Напрямні вектори прямих:

$$\vec{\ell}_1 = \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OA_1} = \{5; 7; 3\} - \{2; 3; 1\} = \{3; 4; 2\},$$

$$\vec{\ell}_2 = \overrightarrow{A_2B_2} = \overrightarrow{OB_2} - \overrightarrow{OA_2} = \{6; 7; 3\} - \{4; 3; 1\} = \{2; 4; 2\}.$$

Маємо:

$$\vec{\ell}_1 \times \vec{\ell}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \{0; -2; 4\} \neq \vec{0}.$$

Отже, вектори $\vec{\ell}_1$ і $\vec{\ell}_2$ неколінеарні. Тому прямі або перетинаються, або є мимобіжними.

Позначимо $\vec{N} = \vec{\ell}_1 \times \vec{\ell}_2$, маємо $\vec{N} = \{0; -2; 4\}$. В разі мимобіжних прямих існує пара паралельних площин σ_1, σ_2 з нормаллю $\vec{N}$, таких що $m_1 \in \sigma_1, m_2 \in \sigma_2, \sigma_2 \neq \sigma_1$. В разі перетину прямих ці площини збігаються.

Маємо далі

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1} = \{4; 3; 1\} - \{2; 3; 1\} = \{2; 0; 0\},$$

$$\vec{N} \cdot \overrightarrow{A_1A_2} = 0 \cdot 2 + (-2) \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 0.$$

Отже, вектори $\vec{N}$ і $\overrightarrow{A_1A_2}$ перпендикулярні. Але $A_1 \in \sigma_1$, тому $A_2 \in \sigma_1$, тобто $\sigma_2 = \sigma_1$. Це і значить, що прямі перетинаються.

Можна довести факт перетину прямих і в явний спосіб. Достатньо знайти точку перетину.

Канонічні рівняння прямих m_1, m_2 , проведених через точки A_1, A_2 вздовж векторів $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2$ відповідно:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-1}{2} = t, \quad \frac{x-4}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-1}{2} = \lambda.$$

Тоді параметричні рівняння набувають вигляду:

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 + 4t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4 + 2\lambda \\ y = 3 + 4\lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \quad (*)$$

Точка перетину виникає при сумісному розв'язанні цих шістьох рівнянь. Прирівнюємо абсциси, ординати і аплікати:

$$\begin{cases} 2 + 3t = 4 + 2\lambda \\ 3 + 4t = 3 + 4\lambda \\ 1 + 2t = 1 + 2\lambda \end{cases}$$

Легко переконатись, що ця система сумісна. Її єдиний розв'язок $t = \lambda = 2$. Тоді координати точки перетину можуть бути знайдені з будь-якої з систем (*) і становлять $M(8, 11, 5)$.

г) Напрямні вектори прямих:

$$\vec{\ell}_1 = \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OA_1} = \{5; 7; 3\} - \{2; 3; 1\} = \{3; 4; 2\},$$

$$\vec{\ell}_2 = \overrightarrow{A_2B_2} = \overrightarrow{OB_2} - \overrightarrow{OA_2} = \{6; 7; 4\} - \{4; 3; 1\} = \{2; 4; 3\}.$$

Маємо:

$$\vec{\ell}_1 \times \vec{\ell}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \{4; -5; 4\} \neq \vec{0}.$$

Отже, вектори $\vec{\ell}_1$ і $\vec{\ell}_2$ неколінеарні. Тому прямі або перетинаються, або є мимобіжними.

Позначимо $\vec{N} = \vec{\ell}_1 \times \vec{\ell}_2$, маємо $\vec{N} = \{4; -5; 4\}$. В разі мимобіжних прямих існує пара паралельних площин σ_1, σ_2 з нормаллю $\vec{N}$, таких що $m_1 \in \sigma_1, m_2 \in \sigma_2, \sigma_2 \neq \sigma_1$. В разі перетину прямих ці площини збігаються.

Маємо далі

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1} = \{4; 3; 1\} - \{2; 3; 1\} = \{2; 0; 0\},$$

$$\vec{N} \cdot \overrightarrow{A_1 A_2} = 4 \cdot 2 + (-5) \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 8 \neq 0.$$

Отже, вектори $\vec{N}$ і $\overrightarrow{A_1 A_2}$ не перпендикулярні. Тому оскільки $A_1 \in \sigma_1$, то $A_2 \notin \sigma_1$, тобто $\sigma_2 \neq \sigma_1$. Це і значить, що прямі є мимобіжними.

Цей факт можна довести і в явний спосіб. Спробуємо знайти точку перетину. Канонічні рівняння прямих m_1 , m_2 , проведених через точки A_1 , A_2 вздовж векторів $\vec{\ell}_1$, $\vec{\ell}_2$ відповідно:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-1}{2} = t, \quad \frac{x-4}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-1}{3} = \lambda.$$

Тоді параметричні рівняння набувають вигляду:

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 + 4t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4 + 2\lambda \\ y = 3 + 4\lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases}$$

Точка перетину могла б виникнути при сумісному розв'язанні цих шістьох рівнянь. Прирівнюємо координати x , y , z :

$$\begin{cases} 2 + 3t = 4 + 2\lambda \\ 3 + 4t = 3 + 4\lambda \\ 1 + 2t = 1 + 3\lambda \end{cases}$$

Легко переконатись, що ця система є несумісною, тобто прямі m_1 і m_2 не мають жодної спільної точки. Отже, ці прямі не перетинаються, і тому є мимобіжними.

Віповідь: а) паралельні; б) збігаються; в) перетинаються в єдиній точці: $m_1 \cap m_2 = M(8, 11, 5)$; г) мимобіжні: $m_1 \cap m_2 = \emptyset$.

Задача 22. Прямі m_1 і m_2 проведено через точки $A_1(2, 3, 5)$, $B_1(3, 3, 4)$ і $A_2(0, 18, 1)$, $B_2(3, 14, 5)$ відповідно. Довести, що прямі m_1 , m_2 є мимобіжними і знайти відстань між ними

Розв'язок. Напрявні вектори прямих

$$\vec{\ell}_1 = \overrightarrow{A_1 B_1} = \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OA_1} = \{3; 3; 4\} - \{2; 3; 5\} = \{1; 0; -1\},$$

$$\vec{\ell}_2 = \overrightarrow{A_2 B_2} = \overrightarrow{OB_2} - \overrightarrow{OA_2} = \{3; 14; 5\} - \{0; 18; 1\} = \{3; -4; 4\}.$$

Маємо:

$$\vec{N} = \vec{\ell}_1 \times \vec{\ell}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -4 & 4 \end{vmatrix} = \{-4; -7; -4\} \neq \vec{0}.$$

Вектори $\vec{\ell}_1$ і $\vec{\ell}_2$ неколінеарні, отже, прямі не паралельні і не збігаються.

Побудуємо рівняння площини з нормаллю $\vec{N}$, яка проходить через точку A_1 :

$$-4(x-2) - 7(y-3) - 4(z-5) = 0, \quad 4x + 7y + 4z - 49 = 0.$$

Знайдемо відстань від точки A_2 до цієї площини:

$$d = \frac{|4 \cdot 0 + 7 \cdot 18 + 4 \cdot 1 - 49|}{\sqrt{4^2 + 7^2 + 4^2}} = 9.$$

Оскільки $d \neq 0$, то точка A_2 не належить тій площині, яка проходить через першу пряму паралельно другій прямій. Це означає, що друга пряма вся цілком не лежить у цій площині, і отже, прямі не перетинаються. Тому вони є мимобіжними.

Для перевірки можемо також обчислити відстань від точки B_2 до цієї ж площини:

$$d = \frac{|4 \cdot 3 + 7 \cdot 14 + 4 \cdot 5 - 49|}{\sqrt{4^2 + 7^2 + 4^2}} = 9.$$

Віповідь: 9.

Задача 23. Встановити тип кривої другого порядку і побудувати її графік: $16x^2 + 9y^2 - 96x - 36y + 36 = 0$.

Розв'язок. Маємо:

$$16(x^2 - 6x) + 9(y^2 - 4y) + 36 = 0,$$

$$16(x^2 - 6x + 9 - 9) + 9(y^2 - 4y + 4 - 4) + 36 = 0,$$

$$16(x-3)^2 - 16 \cdot 9 + 9(y-2)^2 - 9 \cdot 4 + 36 = 0,$$

$$16(x-3)^2 + 9(y-2)^2 = 144, \quad 16 \cdot \frac{(x-3)^2}{144} + 9 \cdot \frac{(y-2)^2}{144} = 1,$$

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1, \quad \frac{(x-3)^2}{3^2} + \frac{(y-2)^2}{4^2} = 1.$$

Отримали канонічне рівняння еліпса з параметрами

$$x_0 = 3, \quad y_0 = 2, \quad a = 3, \quad b = 4.$$

Віповідь: еліпс, див. рис. 2.1.

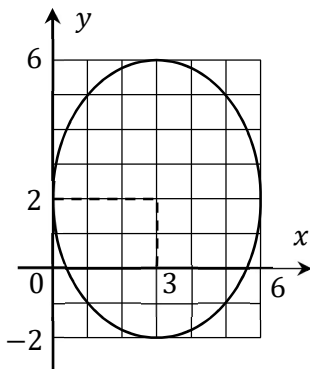


Рисунок 2.1 – До задачі 23

Задача 24. Встановити тип поверхні другого порядку:

$$x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4x + 8y + 4 = 0.$$

Розв'язок. Маємо:

$$(x^2 - 4x + 4) + 4(y^2 + 2y + 1 - 1) + 4z^2 = 0,$$

$$(x - 2)^2 + 4(y + 1)^2 + 4z^2 = 4,$$

$$\frac{(x - 2)^2}{2^2} + \frac{(y + 1)^2}{1^2} + \frac{(z - 0)^2}{1^2} = 1,$$

що збігається з канонічним рівнянням еліпсоїда з параметрами

$$x_0 = 2, \quad y_0 = -1, \quad z_0 = 0, \quad a = 2, \quad b = 1, \quad c = 1.$$

Віповідь: еліпсоїд з центром в точці $M_0(2, -1, 0)$; півосі еліпсоїда дорівнюють $a = 2$, $b = 1$, $c = 1$.

3 ЗАДАЧІ ДЛЯ ІНДИВІДУАЛЬНОЇ РОБОТИ

Задача 1. Знайти x з рівняння.

B-1. $\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \\ \sin x & 1 & 1 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & 6 \end{pmatrix} = 2.$

B-2. $\det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 2 & 1 & \ln x \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 4x \end{pmatrix} = 4.$

B-3. $\det \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2^x \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & x \\ 3 & 15 \end{pmatrix} = 3.$

B-4. $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & x^4 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} x & x \\ x & 1 \end{pmatrix} = 2.$

B-5. $\det \begin{pmatrix} \sqrt[3]{x} & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 2 & x \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = 3.$

B-6. $\det \begin{pmatrix} 2 & x^5 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ x & 6 \end{pmatrix} = 2.$

B-7. $\det \begin{pmatrix} 2 & 7 & x^{53} \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 9 & 2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} x^2 & x \\ x & 2 \end{pmatrix} = 1.$

B-8. $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ \cos x & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 10 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 2 & x \\ x & 8 \end{pmatrix} = 3.$

B-9. $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \\ 1 & \sin x & 3 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 2 & x \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = 1.$

B-10. $\det \begin{pmatrix} \ln x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix} = 3.$

B-11. $\det \begin{pmatrix} 0 & 3^x & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 8 & 3 & 6 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} x & x+4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = 4.$

$$\text{B-12. } \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cos x \\ 3 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 2x & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 3.$$

$$\text{B-13. } \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ \cos x & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} x^3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

$$\text{B-14. } \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & \sin x & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 2x & x+3 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = 2.$$

$$\text{B-15. } \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5^x \\ 6 & 9 & 7 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 2 & 3x \\ 3 & 2x \end{pmatrix} = 2.$$

Задача 2. На прикладі заданих матриць A , B перевірити виконання співвідношення $(AB)^T = B^T A^T$.

$$\text{B-1. } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{B-2. } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{B-3. } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{B-4. } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{B-5. } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{B-6. } A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{B-7. } A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{B-8. } A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{В-9. } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{В-10. } A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{В-11. } A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{В-12. } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{В-13. } A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{В-14. } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{В-15. } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Для заданої матриці A знайти обернену матрицю. Виконати перевірку.

$$\text{В-1. } A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}. \quad \text{В-2. } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{В-3. } A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad \text{В-4. } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{В-5. } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}. \quad \text{В-6. } A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 8 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{В-7. } A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{В-8. } A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{В-9. } A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 8 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \quad \text{В-10. } A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{В-11. } A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 8 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{В-12. } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 3 \\ 8 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{В-13. } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{В-14. } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{В-15. } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задача 4. За правилами Крамера розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь, подану розширеною матрицею.

$$\text{В-1. } \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 1 & 15 \\ 5 & 4 & 1 & 13 \\ 1 & 7 & 2 & 7 \end{array} \right).$$

$$\text{В-2. } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{array} \right).$$

$$\text{В-3. } \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 9 \\ 3 & 2 & 3 & 13 \\ 2 & 1 & 2 & 8 \end{array} \right).$$

$$\text{В-4. } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{array} \right).$$

$$\text{В-5. } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 7 & 7 \end{array} \right).$$

$$\text{В-6. } \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{array} \right).$$

$$\text{В-7. } \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & 1 & 8 \end{array} \right).$$

$$\text{В-8. } \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right).$$

$$\text{В-9. } \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 9 \end{array} \right).$$

$$\text{В-10. } \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & 7 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 0 \end{array} \right).$$

$$\text{В-11. } \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & 3 & 9 \end{array} \right).$$

$$\text{В-12. } \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 5 \\ 8 & 5 & 5 & 8 \end{array} \right).$$

$$\text{В-13. } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 5 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \end{array} \right).$$

$$\text{В-14. } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \end{array} \right).$$

$$\text{В-15. } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 8 \\ 2 & 5 & 3 & 12 \end{array} \right).$$

Задача 5. Систему лінійних алгебраїчних рівнянь подано розширеною матрицею. Дослідити систему на сумісність за допомогою теореми Кронекера-Капеллі. В разі сумісності розв'язати систему методом Гаусса.

$$\text{B-1. a) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 3 \\ 2 & 3 & 1 & | & 5 \\ 5 & 8 & 4 & | & 13 \end{pmatrix},$$

$$\text{B-2. a) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 5 \\ 2 & 0 & 1 & | & 4 \\ 0 & 4 & 1 & | & 6 \end{pmatrix},$$

$$\text{B-3. a) } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 1 \\ 5 & 1 & 1 & | & 4 \\ 13 & 11 & 8 & | & 11 \end{pmatrix},$$

$$\text{B-4. a) } \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 & | & 0 \\ 1 & 1 & 6 & | & 1 \\ 5 & 9 & 20 & | & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{B-5. a) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 2 \\ 2 & 2 & 1 & | & 9 \\ 5 & 8 & 7 & | & 15 \end{pmatrix},$$

$$\text{B-6. a) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & | & 1 \\ 3 & 1 & 1 & | & 3 \\ 12 & 5 & 8 & | & 9 \end{pmatrix},$$

$$\text{B-7. a) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 1 \\ 4 & 4 & 1 & | & 1 \\ 14 & 16 & 7 & | & 5 \end{pmatrix},$$

$$\text{B-8. a) } \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & | & -2 \\ 4 & 2 & 1 & | & 7 \\ 7 & 17 & 7 & | & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{B-9. a) } \begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 & | & 9 \\ 1 & 2 & 2 & | & 4 \\ 3 & 11 & 12 & | & 17 \end{pmatrix},$$

$$\text{B-10. a) } \begin{pmatrix} 2 & 9 & 1 & | & 3 \\ 3 & 3 & 2 & | & 5 \\ 11 & 18 & 7 & | & 18 \end{pmatrix},$$

$$\text{B-11. a) } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & | & 3 \\ 3 & 2 & 1 & | & 4 \\ 7 & 14 & 5 & | & 16 \end{pmatrix},$$

$$\text{B-12. a) } \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & | & 0 \\ 1 & 4 & 2 & | & 1 \\ 7 & 16 & 9 & | & 4 \end{pmatrix},$$

$$\text{B-13. a) } \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & | & -1 \\ 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 11 & 8 & 15 & | & 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 3 \\ 2 & 3 & 1 & | & 5 \\ 5 & 8 & 4 & | & 14 \end{pmatrix}.$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 5 \\ 2 & 0 & 1 & | & 4 \\ 0 & 4 & 1 & | & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 1 \\ 5 & 1 & 1 & | & 4 \\ 13 & 11 & 8 & | & 12 \end{pmatrix}.$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 & | & 0 \\ 1 & 1 & 6 & | & 1 \\ 5 & 9 & 20 & | & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 2 \\ 2 & 2 & 1 & | & 9 \\ 5 & 8 & 7 & | & 16 \end{pmatrix}.$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & | & 1 \\ 3 & 1 & 1 & | & 3 \\ 12 & 5 & 8 & | & 10 \end{pmatrix}.$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 1 \\ 4 & 4 & 1 & | & 1 \\ 14 & 16 & 7 & | & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & | & -2 \\ 4 & 2 & 1 & | & 7 \\ 7 & 17 & 7 & | & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 & | & 9 \\ 1 & 2 & 2 & | & 4 \\ 3 & 11 & 12 & | & 18 \end{pmatrix}.$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} 2 & 9 & 1 & | & 3 \\ 3 & 3 & 2 & | & 5 \\ 11 & 18 & 7 & | & 19 \end{pmatrix}.$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & | & 3 \\ 3 & 2 & 1 & | & 4 \\ 7 & 14 & 5 & | & 17 \end{pmatrix}.$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & | & 0 \\ 1 & 4 & 2 & | & 1 \\ 7 & 16 & 9 & | & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & | & -1 \\ 1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 11 & 8 & 15 & | & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{B-14. а) } \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 5 & 1 & 1 & 9 \\ 5 & 1 & 3 & 5 \end{array} \right), \quad \text{б) } \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 5 & 1 & 1 & 9 \\ 5 & 1 & 3 & 6 \end{array} \right).$$

$$\text{B-15. а) } \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 11 & 9 & 16 & 4 \end{array} \right), \quad \text{б) } \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 11 & 9 & 16 & 5 \end{array} \right).$$

Задача 6. Здійснюючи еквівалентні перетворення, звести задану матрицю A до нижньотрикутного вигляду й знайти її ранг.

$$\text{B-1. } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 5 & 8 & 10 & 7 \\ 6 & 10 & 12 & 10 \end{pmatrix}, \quad \text{B-2. } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 6 & 6 & 10 & 6 \\ 8 & 10 & 12 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$\text{B-3. } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 4 \\ 9 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \text{B-4. } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$\text{B-5. } A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 5 & 7 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{B-6. } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 10 & 4 & 5 \\ 5 & 16 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\text{B-7. } A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 6 & 12 & 8 & 6 \\ 8 & 22 & 14 & 8 \end{pmatrix}, \quad \text{B-8. } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 6 & 6 \\ 8 & 8 & 10 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\text{B-9. } A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 9 & 6 & 7 \\ 12 & 26 & 16 & 18 \end{pmatrix}, \quad \text{B-10. } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{B-11. } A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 & 4 \\ 2 & 6 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{B-12. } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 6 & 4 \\ 8 & 6 & 8 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\text{B-13. } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 & 5 \\ 3 & 8 & 6 & 8 \\ 4 & 10 & 8 & 11 \end{pmatrix}, \quad \text{B-14. } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{В-15. } A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 7 & 3 \\ 6 & 10 & 10 & 6 \end{pmatrix}.$$

Задача 7. Методом Гаусса побудувати загальний розв'язок однорідної системи чотирьох лінійних алгебраїчних рівнянь з чотирьма невідомими. Матриця системи збігається з поданою в попередній задачі.

Задача 8. Три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ задано в деякому базисі своїми координатами. Довести, що ці вектори є компланарними і виразити вектор $\vec{c}$ через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

- В-1. $\vec{a} = \{1; 2; 1\}$, $\vec{b} = \{2; 0; 1\}$, $\vec{c} = \{0; 4; 1\}$.
- В-2. $\vec{a} = \{1; 3; 2\}$, $\vec{b} = \{5; 1; 1\}$, $\vec{c} = \{13; 11; 8\}$.
- В-3. $\vec{a} = \{2; 4; 7\}$, $\vec{b} = \{1; 1; 6\}$, $\vec{c} = \{5; 9; 20\}$.
- В-4. $\vec{a} = \{1; 2; 2\}$, $\vec{b} = \{2; 2; 1\}$, $\vec{c} = \{5; 8; 7\}$.
- В-5. $\vec{a} = \{2; 1; 2\}$, $\vec{b} = \{3; 1; 1\}$, $\vec{c} = \{12; 5; 8\}$.
- В-6. $\vec{a} = \{1; 2; 2\}$, $\vec{b} = \{4; 4; 1\}$, $\vec{c} = \{14; 16; 7\}$.
- В-7. $\vec{a} = \{1; 5; 2\}$, $\vec{b} = \{4; 2; 1\}$, $\vec{c} = \{7; 17; 7\}$.
- В-8. $\vec{a} = \{1; 7; 8\}$, $\vec{b} = \{1; 2; 2\}$, $\vec{c} = \{3; 11; 12\}$.
- В-9. $\vec{a} = \{2; 9; 1\}$, $\vec{b} = \{3; 3; 2\}$, $\vec{c} = \{11; 18; 7\}$.
- В-10. $\vec{a} = \{1; 3; 1\}$, $\vec{b} = \{3; 2; 1\}$, $\vec{c} = \{7; 14; 5\}$.
- В-11. $\vec{a} = \{3; 0; 1\}$, $\vec{b} = \{1; 4; 2\}$, $\vec{c} = \{7; 16; 9\}$.
- В-12. $\vec{a} = \{2; 2; 3\}$, $\vec{b} = \{1; 0; 1\}$, $\vec{c} = \{11; 8; 15\}$.
- В-13. $\vec{a} = \{5; 1; 2\}$, $\vec{b} = \{5; 1; 1\}$, $\vec{c} = \{5; 1; 3\}$.
- В-14. $\vec{a} = \{3; 3; 4\}$, $\vec{b} = \{1; 0; 2\}$, $\vec{c} = \{11; 9; 16\}$.
- В-15. $\vec{a} = \{1; 2; 2\}$, $\vec{b} = \{2; 3; 1\}$, $\vec{c} = \{5; 8; 4\}$.

Задача 9. Піраміду $ABCD$ задано координатами своїх вершин. Знайти:

- 1) координати векторів $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$;
- 2) векторний добуток $\vec{AB} \times \vec{AC}$;
- 3) площу S_{ABC} основи $\triangle ABC$ піраміди;
- 4) мішаний добуток $(\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AD}$;
- 5) об'єм піраміди;
- 6) висоту DD_1 піраміди, де D_1 – ортогональна проекція точки D на площину ABC ;
- 7) координати вектора $\vec{AD}_1$;
- 8) координати точки D_1 .

9) Переконатись, що $D_1 \in ABC$. Для цього переконатись, що вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD_1}$ є компланарними, і знайти коефіцієнти α , β лінійної залежності $\overrightarrow{AD_1} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}$.

- В-1. $A(3, 4, 1)$, $B(5, 6, 1)$, $C(5, 7, 3)$, $D(5, 11, 2)$.
 В-2. $A(5, 2, 2)$, $B(7, 4, 10)$, $C(7, 5, 6)$, $D(-3, 5, 7)$.
 В-3. $A(0, 2, 1)$, $B(8, 6, 11)$, $C(8, 10, 7)$, $D(-7, 10, 1)$.
 В-4. $A(3, 3, 9)$, $B(7, 1, 0)$, $C(1, 5, 12)$, $D(15, 11, 10)$.
 В-5. $A(6, 2, 1)$, $B(18, -4, 9)$, $C(0, 8, 0)$, $D(7, 8, -12)$.
 В-6. $A(6, 2, 4)$, $B(10, -4, 4)$, $C(0, 12, 1)$, $D(11, 16, 0)$.
 В-7. $A(5, 8, -2)$, $B(-1, 0, 8)$, $C(1, 2, 5)$, $D(7, 6, 6)$.
 В-8. $A(5, 3, 1)$, $B(2, 1, 5)$, $C(3, 1, 9)$, $D(4, -9, 12)$.
 В-9. $A(0, 3, 10)$, $B(8, 7, 0)$, $C(12, 11, -3)$, $D(18, -1, 15)$.
 В-10. $A(0, 3, 2)$, $B(4, 7, 8)$, $C(4, 9, 14)$, $D(3, -5, -2)$.
 В-11. $A(7, 8, 9)$, $B(1, 2, 8)$, $C(1, -4, 1)$, $D(7, 9, -10)$.
 В-12. $A(1, 3, 12)$, $B(5, 5, -12)$, $C(3, 5, -3)$, $D(12, 9, 5)$.
 В-13. $A(1, 3, 6)$, $B(5, 5, 2)$, $C(3, 5, 3)$, $D(5, 1, -3)$.
 В-14. $A(4, 4, 0)$, $B(12, 8, -15)$, $C(8, 8, -7)$, $D(8, 3, 12)$.
 В-15. $A(0, -3, 7)$, $B(16, 1, -2)$, $C(28, 5, -7)$, $D(8, -10, 7)$.

Задача 10. Трикутник ABC задано координатами своїх вершин. Знайти довжини сторін AB і AC , а також величину кута при вершині A .

- В-1. $A(1, 2, 2)$, $B(2, 1, 0)$, $C(1, -2, 1)$.
 В-2. $A(2, 3, 7)$, $B(1, 4, 2)$, $C(0, 2, 5)$.
 В-3. $A(3, 4, 6)$, $B(-3, 2, 9)$, $C(1, 6, 5)$.
 В-4. $A(1, 7, 4)$, $B(3, 5, 8)$, $C(2, 5, 9)$.
 В-5. $A(4, 2, 6)$, $B(2, 6, 4)$, $C(-6, -5, 8)$.
 В-6. $A(4, 5, 7)$, $B(2, 5, 4)$, $C(2, 8, 6)$.
 В-7. $A(7, 4, 5)$, $B(2, 7, 9)$, $C(1, 3, 2)$.
 В-8. $A(3, 5, 7)$, $B(2, 8, 5)$, $C(4, 0, 5)$.
 В-9. $A(2, 3, 2)$, $B(3, 5, 4)$, $C(1, 1, 8)$.
 В-10. $A(2, 6, 7)$, $B(4, 9, 0)$, $C(2, 2, 2)$.
 В-11. $A(1, 2, 3)$, $B(4, 5, 6)$, $C(7, 8, 3)$.
 В-12. $A(2, 5, 3)$, $B(2, 7, 5)$, $C(2, 5, 6)$.
 В-13. $A(2, 6, 7)$, $B(3, 3, 2)$, $C(5, 7, 3)$.
 В-14. $A(2, 7, 8)$, $B(2, 2, 5)$, $C(3, 7, 5)$.
 В-15. $A(2, 3, 7)$, $B(4, 4, 9)$, $C(1, 2, 5)$.

Задача 11. Дано точки A , B і число λ . Знайти точку $K \in AB$, яка ділить відрізок AB у відношенні $AK : KB = \lambda : 1$.

- В-1. $A(-1, 0, 7)$, $B(3, 4, 5)$, $\lambda = 1$.
 В-2. $A(-3, -2, 5)$, $B(3, 4, 2)$, $\lambda = 2$.

B-3.	$A(-3, -2, 4),$	$B(5, 6, 0),$	$\lambda = 3.$
B-4.	$A(9, -4, -1),$	$B(1, 4, 3),$	$\lambda = 3.$
B-5.	$A(7, 9, -3),$	$B(-1, 1, 1),$	$\lambda = 3.$
B-6.	$A(-1, -4, -2),$	$B(2, 2, 4),$	$\lambda = 2.$
B-7.	$A(-1, 1, 8),$	$B(5, 4, 2),$	$\lambda = \frac{1}{2}.$
B-8.	$A(-3, 6, 4),$	$B(3, 3, -2),$	$\lambda = 2.$
B-9.	$A(-4, 7, 4),$	$B(4, -1, 0),$	$\lambda = 3.$
B-10.	$A(-1, -6, -2),$	$B(7, 2, 2),$	$\lambda = 3.$
B-11.	$A(-1, 5, -3),$	$B(5, 2, 3),$	$\lambda = 2.$
B-12.	$A(7, 6, 6),$	$B(-5, -6, 0),$	$\lambda = 1.$
B-13.	$A(-3, 5, -1),$	$B(3, -1, 2),$	$\lambda = 2.$
B-14.	$A(1, 4, 2),$	$B(4, -2, -4),$	$\lambda = \frac{1}{2}.$
B-15.	$A(-7, 8, -2),$	$B(5, -4, 4),$	$\lambda = 2.$

Задача 12. Трикутник ABC задано координатами своїх вершин. Знайти висоту AD .

B-1.	$A(-4, -6, 5),$	$B(6, -2, 6),$	$C(8, -3, 8).$
B-2.	$A(6, 4, 0),$	$B(0, 1, 0),$	$C(-2, 2, -2).$
B-3.	$A(4, 2, 1),$	$B(-2, 2, -2),$	$C(0, 1, 0).$
B-4.	$A(5, -3, 0),$	$B(5, 3, 6),$	$C(3, 2, 4).$
B-5.	$A(-2, 4, 2),$	$B(-4, 0, -3),$	$C(-6, -1, -5).$
B-6.	$A(9, -2, -1),$	$B(-3, 1, -4),$	$C(-1, 2, -2).$
B-7.	$A(-5, 7, 0),$	$B(-1, 0, 5),$	$C(-3, -1, 7).$
B-8.	$A(8, -2, 3),$	$B(0, 0, 5),$	$C(2, 1, 3).$
B-9.	$A(7, -4, 3),$	$B(7, 5, -6),$	$C(5, 4, -4).$
B-10.	$A(-3, 0, 4),$	$B(5, 2, 6),$	$C(3, 3, 4).$
B-11.	$A(5, 4, 3),$	$B(7, 0, 8),$	$C(9, -1, 10).$
B-12.	$A(-7, -5, 3),$	$B(5, -2, 6),$	$C(3, -1, 4).$
B-13.	$A(4, -1, 9),$	$B(4, 5, 6),$	$C(6, 7, 7).$
B-14.	$A(6, 0, 7),$	$B(0, 0, 1),$	$C(2, 2, 2).$
B-15.	$A(4, -9, 6),$	$B(9, 5, 4),$	$C(7, 3, 3).$

Задача 13. Трикутник ABC задано координатами своїх вершин. Знайти бісектрису CD .

B-1.	$A(32, 28, 8),$	$B(-7, -14, 14),$	$C(-26, -16, -20).$
B-2.	$A(-8, 20, 16),$	$B(10, -7, -2),$	$C(-4, -2, -4).$
B-3.	$A(0, 27, 27),$	$B(8, -5, -1),$	$C(-6, -3, -6).$
B-4.	$A(-4, 13, 11),$	$B(8, 1, 5),$	$C(-6, 3, 0).$
B-5.	$A(-10, 13, 8),$	$B(6, -3, 0),$	$C(-8, 2, -2).$
B-6.	$A(-16, 40, -4),$	$B(-7, -14, 14),$	$C(22, -28, -8).$
B-7.	$A(-12, 24, 0),$	$B(9, -6, -6),$	$C(-2, -4, 4).$
B-8.	$A(-9, 36, -9),$	$B(7, -4, -5),$	$C(-3, -6, 6).$

- В-9. $A(-7, 16, -1), \quad B(5, 4, -7), \quad C(-5, 2, 4).$
 В-10. $A(-11, 14, 4), \quad B(5, -2, -4), \quad C(-6, 0, 6).$
 В-11. $A(28, 32, -8), \quad B(-14, -7, -14), \quad C(-16, -26, 20).$
 В-12. $A(8, 16, 20), \quad B(-10, -2, -7), \quad C(4, -4, -2).$
 В-13. $A(0, 27, 27), \quad B(-8, -1, -5), \quad C(6, -6, -3).$
 В-14. $A(4, 11, 13), \quad B(-8, 5, 1), \quad C(6, 0, 3).$
 В-15. $A(10, 8, 13), \quad B(-6, 0, -3), \quad C(8, -2, 2).$

Задача 14. Побудувати рівняння площини, яка проходить перпендикулярно до даного вектора $\vec{N} \{A; B; C\}$ через дану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$. З'ясувати, належать дані точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ побудованій площині чи не належать.

- В-1. $\vec{N} \{2; 3; 1\}, \quad M_0(1, 5, 2), \quad M_1(3, 5, -2), \quad M_2(4, 2, 8).$
 В-2. $\vec{N} \{4; -2; 2\}, \quad M_0(1, 5, 2), \quad M_1(3, 5, -2), \quad M_2(4, 2, -5).$
 В-3. $\vec{N} \{4; -2; -1\}, \quad M_0(1, 3, 2), \quad M_1(3, 5, 6), \quad M_2(4, 2, 14).$
 В-4. $\vec{N} \{4; -6; 1\}, \quad M_0(2, 6, 4), \quad M_1(3, 5, -6), \quad M_2(4, 2, -21).$
 В-5. $\vec{N} \{6; -2; 2\}, \quad M_0(2, 6, 9), \quad M_1(3, 5, 5), \quad M_2(4, 2, 8).$
 В-6. $\vec{N} \{-2; -2; 2\}, \quad M_0(1, 2, 7), \quad M_1(3, 5, 12), \quad M_2(4, 2, 15).$
 В-7. $\vec{N} \{1; 1; 1\}, \quad M_0(3, 6, 4), \quad M_1(3, 5, 5), \quad M_2(4, 2, 9).$
 В-8. $\vec{N} \{14; -6; 1\}, \quad M_0(2, 3, 1), \quad M_1(3, 5, -1), \quad M_2(4, 2, -40).$
 В-9. $\vec{N} \{2; 0; -1\}, \quad M_0(3, 6, 6), \quad M_1(3, 5, 2), \quad M_2(4, 2, 8).$
 В-10. $\vec{N} \{1; 2; 1\}, \quad M_0(7, 5, 3), \quad M_1(3, 5, 7), \quad M_2(4, 2, 13).$
 В-11. $\vec{N} \{8; 8; -1\}, \quad M_0(5, 2, 3), \quad M_1(3, 5, 11), \quad M_2(4, 2, -1).$
 В-12. $\vec{N} \{4; -2; 1\}, \quad M_0(4, 5, 7), \quad M_1(3, 5, 11), \quad M_2(4, 2, 6).$
 В-13. $\vec{N} \{2; -2; -1\}, \quad M_0(7, 4, 5), \quad M_1(3, 5, -5), \quad M_2(4, 2, -3).$
 В-14. $\vec{N} \{4; 6; -2\}, \quad M_0(1, 7, 0), \quad M_1(3, 5, -2), \quad M_2(4, 2, 2).$
 В-15. $\vec{N} \{-5; -2; -1\}, \quad M_0(3, 4, -6), \quad M_1(3, 5, -8), \quad M_2(4, 2, 5).$

Задача 15. Три точки A, B, C задано в просторі своїми координатами. Переконатись, що вони не лежать на одній прямій, і побудувати рівняння площини, яка проходить через ці точки.

- В-1. $A(1, 4, 3), \quad B(2, 6, 4), \quad C(3, 7, 6).$
 В-2. $A(1, 4, 3), \quad B(4, 5, 6), \quad C(7, 8, 9).$
 В-3. $A(3, 6, 5), \quad B(6, 7, 4), \quad C(3, 5, 4).$
 В-4. $A(3, 6, 5), \quad B(6, 3, 6), \quad C(3, 2, 6).$
 В-5. $A(2, 6, 5), \quad B(6, 7, 3), \quad C(4, 8, 4).$
 В-6. $A(1, 4, 5), \quad B(5, 3, 6), \quad C(5, 3, 5).$
 В-7. $A(4, 4, 3), \quad B(0, 9, 7), \quad C(8, 4, 7).$
 В-8. $A(6, 8, 4), \quad B(9, 3, 6), \quad C(2, 2, 4).$

- В-9. $A(1, 1, 4), \quad B(4, 3, 5), \quad C(4, 2, 4).$
 В-10. $A(8, 4, 9), \quad B(3, 4, 5), \quad C(1, 6, 4).$
 В-11. $A(3, 5, 6), \quad B(9, 3, 7), \quad C(6, 5, 2).$
 В-12. $A(5, 4, 8), \quad B(3, 1, 7), \quad C(5, 6, 8).$
 В-13. $A(2, 6, 5), \quad B(6, 8, 5), \quad C(6, 4, 3).$
 В-14. $A(6, 7, 0), \quad B(3, 8, 6), \quad C(6, 4, 5).$
 В-15. $A(3, 6, 5), \quad B(5, 3, 6), \quad C(6, 3, 2).$

Задача 16. Знайти відстань від точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до площини $\sigma: Ax + By + Cz + D = 0$.

- В-1. $M_0(5, -3, 4), \quad \sigma: 2x - 2y + z - 2 = 0.$
 В-2. $M_0(-8, -2, -5), \quad \sigma: 9x + 2y + 6z - 15 = 0.$
 В-3. $M_0(6, 6, 4), \quad \sigma: 4x + 4y + 7z + 5 = 0.$
 В-4. $M_0(-3, -7, 1), \quad \sigma: 4x + 8y + z - 14 = 0.$
 В-5. $M_0(9, 8, -2), \quad \sigma: 6x + 6y - 7z + 5 = 0.$
 В-6. $M_0(6, 8, -2), \quad \sigma: x + 2y - 2z + 1 = 0.$
 В-7. $M_0(2, -6, -12), \quad \sigma: 2x + 9y + 6z + 1 = 0.$
 В-8. $M_0(8, 6, 0), \quad \sigma: 7x + 4y + 4z + 1 = 0.$
 В-9. $M_0(-10, 5, -2), \quad \sigma: 8x + y + 4z + 2 = 0.$
 В-10. $M_0(10, 8, 1), \quad \sigma: 7x + 6y + 6z - 3 = 0.$
 В-11. $M_0(8, 2, 1), \quad \sigma: 2x - y + 2z + 2 = 0.$
 В-12. $M_0(9, 1, 7), \quad \sigma: 6x - 2y + 9z + 6 = 0.$
 В-13. $M_0(-4, 5, -8), \quad \sigma: 4x - 4y + 7z + 11 = 0.$
 В-14. $M_0(4, -7, 7), \quad \sigma: x - 8y + 4z - 7 = 0.$
 В-15. $M_0(-3, 12, -5), \quad \sigma: 6x - 6y + 7z + 4 = 0.$

Задача 17. Дві паралельні площини σ_1 і σ_2 задано рівняннями $Ax + By + Cz + D_1 = 0$, $Ax + By + Cz + D_2 = 0$. Визначити відстань між площинами.

- В-1. $2x - y + 2z - 9 = 0, \quad 2x - y + 2z - 18 = 0.$
 В-2. $2x + y + 2z - 9 = 0, \quad 2x + y + 2z + 18 = 0.$
 В-3. $x + 2y + 2z - 27 = 0, \quad x + 2y + 2z - 18 = 0.$
 В-4. $x - 2y + 2z - 27 = 0, \quad x - 2y + 2z + 9 = 0.$
 В-5. $2x + 2y + z - 27 = 0, \quad 2x + 2y + z - 45 = 0.$
 В-6. $2x - 2y + z - 36 = 0, \quad 2x - 2y + z - 45 = 0.$
 В-7. $2x - y + 2z - 27 = 0, \quad 2x - y + 2z - 54 = 0.$
 В-8. $6x + 3y + 2z - 196 = 0, \quad 6x + 3y + 2z - 343 = 0.$
 В-9. $6x + 2y + 3z - 98 = 0, \quad 6x + 2y + 3z + 49 = 0.$
 В-10. $6x - 3y + 2z - 49 = 0, \quad 6x - 3y + 2z - 98 = 0.$
 В-11. $6x + 3y - 2z - 147 = 0, \quad 6x + 3y - 2z - 196 = 0.$
 В-12. $2x + 3y + 6z - 147 = 0, \quad 2x + 3y + 6z - 294 = 0.$
 В-13. $2x + 6y + 3z - 343 = 0, \quad 2x + 6y + 3z - 441 = 0.$

$$\text{В-14. } 3x + 2y - 6z + 49 = 0, \quad 3x + 2y - 6z - 98 = 0.$$

$$\text{В-15. } 3x + 6y - 2z + 294 = 0, \quad 3x + 6y - 2z + 196 = 0.$$

Задача 18. Знайти точку Q , симетричну заданій точці P відносно площини σ , яку задано загальним рівнянням.

$$\text{В-1. } P(0, -3, -1), \quad \sigma : x + 2y + 2z - 10 = 0.$$

$$\text{В-2. } P(9, 10, 7), \quad \sigma : x + 3y + z - 24 = 0.$$

$$\text{В-3. } P(-1, 0, -2), \quad \sigma : 4x + 3y + 3z - 24 = 0.$$

$$\text{В-4. } P(5, 11, 6), \quad \sigma : 2x + 2y - z - 17 = 0.$$

$$\text{В-5. } P(-1, -3, 2), \quad \sigma : x + 2y + z - 13 = 0.$$

$$\text{В-6. } P(6, 5, -15), \quad \sigma : x - 3z - 21 = 0.$$

$$\text{В-7. } P(-5, -3, 3), \quad \sigma : 3x + 2y + 2z - 19 = 0.$$

$$\text{В-8. } P(7, 12, 3), \quad \sigma : 4x + 5y - 6 = 0.$$

$$\text{В-9. } P(0, -1, 3), \quad \sigma : x + 2y - 3 = 0.$$

$$\text{В-10. } P(1, 8, 6), \quad \sigma : 2y + z - 17 = 0.$$

$$\text{В-11. } P(-4, -4, -2), \quad \sigma : 2x + 2y + 3z - 29 = 0.$$

$$\text{В-12. } P(18, 11, 9), \quad \sigma : 5x + y + z - 29 = 0.$$

$$\text{В-13. } P(-1, -5, -15), \quad \sigma : 2x + 4y + 5z + 7 = 0.$$

$$\text{В-14. } P(5, 8, 9), \quad \sigma : 2x + 2y + 7z + 25 = 0.$$

$$\text{В-15. } P(7, 2, 13), \quad \sigma : x + 3z - 6 = 0.$$

Задача 19. Напрямний вектор прямої m , яка проходить через точку M_0 , дорівнює $\vec{\ell}$. Обчислити відстань між заданою точкою A і цією прямою.

$$\text{В-1. } M_0(1, 2, 2), \quad \vec{\ell} \{2; 1; -2\}, \quad A(1, 5, -1).$$

$$\text{В-2. } M_0(5, 2, 3), \quad \vec{\ell} \{6; -5; 2\}, \quad A(19, -6, 6).$$

$$\text{В-3. } M_0(5, 4, 3), \quad \vec{\ell} \{-6; 8; -11\}, \quad A(-17, 25, -30).$$

$$\text{В-4. } M_0(6, 2, 5), \quad \vec{\ell} \{-2; 3; -2\}, \quad A(7, -3, 5).$$

$$\text{В-5. } M_0(2, 6, 3), \quad \vec{\ell} \{8; -2; -2\}, \quad A(-16, 6, 3).$$

$$\text{В-6. } M_0(1, 5, 4), \quad \vec{\ell} \{-12; 10; 4\}, \quad A(11, -9, 4).$$

$$\text{В-7. } M_0(3, 5, 8), \quad \vec{\ell} \{4; 3; 5\}, \quad A(14, 7, 18).$$

$$\text{В-8. } M_0(3, 3, 2), \quad \vec{\ell} \{-6; 6; 0\}, \quad A(-13, 11, 4).$$

$$\text{В-9. } M_0(2, 6, 7), \quad \vec{\ell} \{-2; 0; 4\}, \quad A(0, 2, 1).$$

$$\text{В-10. } M_0(1, 6, 7), \quad \vec{\ell} \{14; -4; 3\}, \quad A(-12, 12, 2).$$

$$\text{В-11. } M_0(2, 5, 1), \quad \vec{\ell} \{8; 4; -6\}, \quad A(-18, -1, 9).$$

$$\text{В-12. } M_0(2, 6, 5), \quad \vec{\ell} \{-2; 6; 8\}, \quad A(6, -10, -8).$$

$$\text{В-13. } M_0(2, 6, 9), \quad \vec{\ell} \{6; 8; -4\}, \quad A(-18, -4, 17).$$

$$\text{В-14. } M_0(3, 6, 1), \quad \vec{\ell} \{-2; -6; -8\}, \quad A(-7, -8, -25).$$

$$\text{В-15. } M_0(3, 9, 1), \quad \vec{\ell} \{6; -5; -2\}, \quad A(34, -14, -11).$$

Задача 20. Знайти точку Q , симетричну даній точці P відносно прямої m , яка проходить через дану точку A в напрямку даного вектора $\vec{\ell}$.

- В-1. $P(4, 7, 9)$, $A(1, 2, 2)$, $\vec{\ell} \{1; 2; 2\}$.
 В-2. $P(6, 6, 6)$, $A(2, -1, 1)$, $\vec{\ell} \{1; 4; 2\}$.
 В-3. $P(10, 3, 9)$, $A(6, 3, 4)$, $\vec{\ell} \{3; 3; 2\}$.
 В-4. $P(3, -4, 9)$, $A(2, 2, 8)$, $\vec{\ell} \{2; 4; 1\}$.
 В-5. $P(1, -8, 1)$, $A(4, 2, 5)$, $\vec{\ell} \{2; 4; 3\}$.
 В-6. $P(-2, -3, -2)$, $A(1, 4, 3)$, $\vec{\ell} \{1; 2; 2\}$.
 В-7. $P(-9, -8, -1)$, $A(2, 2, 7)$, $\vec{\ell} \{4; 3; 6\}$.
 В-8. $P(1, 1, 5)$, $A(2, 8, 4)$, $\vec{\ell} \{3; 3; 2\}$.
 В-9. $P(-3, 12, 13)$, $A(2, 7, 5)$, $\vec{\ell} \{1; -1; 2\}$.
 В-10. $P(7, -1, 3)$, $A(3, 3, 1)$, $\vec{\ell} \{1; -1; -1\}$.
 В-11. $P(2, 4, 10)$, $A(2, 2, 3)$, $\vec{\ell} \{1; 1; 1\}$.
 В-12. $P(3, -3, 6)$, $A(1, 1, 3)$, $\vec{\ell} \{1; -3; 4\}$.
 В-13. $P(0, 9, 4)$, $A(2, 3, 2)$, $\vec{\ell} \{1; 2; 1\}$.
 В-14. $P(0, -3, 17)$, $A(1, -2, 4)$, $\vec{\ell} \{2; 5; 4\}$.
 В-15. $P(-1, 1, 4)$, $A(2, 8, 6)$, $\vec{\ell} \{1; 3; 2\}$.

Задача 21. Прямая m_1 проходить через задані точки A_1 і B_1 , а пряма m_2 – через задані точки A_2 і B_2 . Встановити, яким є взаємне розташування цих прямих.

В-1.

- а) $A_1(2, 5, 4)$, $B_1(3, 7, 5)$, $A_2(1, 3, 3)$, $B_2(4, 9, 6)$.
 б) $A_1(2, -1, 4)$, $B_1(4, 3, 2)$, $A_2(6, 1, 3)$, $B_2(2, -7, 7)$.
 в) $A_1(4, 2, 3)$, $B_1(5, 2, 3)$, $A_2(2, 1, 3)$, $B_2(2, 5, 3)$.
 г) $A_1(4, 2, 3)$, $B_1(5, 2, 3)$, $A_2(4, 4, 8)$, $B_2(4, 8, 8)$.

В-2.

- а) $A_1(1, 1, 2)$, $B_1(3, 2, 1)$, $A_2(9, 5, -2)$, $B_2(5, 3, 0)$.
 б) $A_1(2, 1, 1)$, $B_1(4, 2, 0)$, $A_2(7, 5, -3)$, $B_2(3, 3, -1)$.
 в) $A_1(4, 2, 5)$, $B_1(5, 2, 6)$, $A_2(0, 1, 1)$, $B_2(8, 5, 9)$.
 г) $A_1(4, 2, 5)$, $B_1(5, 2, 6)$, $A_2(2, 4, 6)$, $B_2(10, 8, 14)$.

В-3.

- а) $A_1(5, 3, 4)$, $B_1(6, 5, 6)$, $A_2(7, 7, 8)$, $B_2(4, 1, 2)$.
 б) $A_1(1, 0, 0)$, $B_1(2, 2, 2)$, $A_2(-1, 1, -1)$, $B_2(-4, -5, -7)$.
 в) $A_1(6, 2, 1)$, $B_1(8, 2, 0)$, $A_2(1, 1, 2)$, $B_2(5, 5, 6)$.
 г) $A_1(6, 2, 1)$, $B_1(8, 2, 0)$, $A_2(3, 4, 7)$, $B_2(7, 8, 11)$.

В-4.

- a) $A_1(8, 4, 1)$, $B_1(9, 2, -1)$, $A_2(7, 6, 3)$, $B_2(6, 8, 5)$.
 б) $A_1(3, 1, 2)$, $B_1(4, -1, 0)$, $A_2(4, -3, 1)$, $B_2(3, -1, 3)$.
 в) $A_1(0, 6, 3)$, $B_1(-1, 8, 3)$, $A_2(1, -1, 2)$, $B_2(5, 11, 6)$.
 г) $A_1(0, 6, 3)$, $B_1(-1, 8, 3)$, $A_2(3, 2, 7)$, $B_2(7, 14, 11)$.

B-5.

- a) $A_1(-1, 1, 0)$, $B_1(1, 9, 6)$, $A_2(2, 13, 9)$, $B_2(-2, -3, -3)$.
 б) $A_1(1, -2, 1)$, $B_1(3, 6, 7)$, $A_2(6, 9, 3)$, $B_2(2, -7, -9)$.
 в) $A_1(6, 2, 5)$, $B_1(8, 2, 6)$, $A_2(2, 1, 2)$, $B_2(2, 5, 6)$.
 г) $A_1(6, 2, 5)$, $B_1(8, 2, 6)$, $A_2(4, 4, 7)$, $B_2(4, 8, 11)$.

B-6.

- a) $A_1(3, 5, 1)$, $B_1(-5, -1, -1)$, $A_2(7, 8, 2)$, $B_2(-1, 2, 0)$.
 б) $A_1(1, 1, 2)$, $B_1(-7, -5, 0)$, $A_2(7, 1, 6)$, $B_2(-1, -5, 4)$.
 в) $A_1(4, 6, 3)$, $B_1(5, 8, 3)$, $A_2(0, 1, 2)$, $B_2(8, 5, 6)$.
 г) $A_1(4, 6, 3)$, $B_1(5, 8, 3)$, $A_2(2, 4, 7)$, $B_2(10, 8, 11)$.

B-7.

- a) $A_1(4, 3, 2)$, $B_1(6, -1, 0)$, $A_2(6, -1, 0)$, $B_2(3, 5, 3)$.
 б) $A_1(3, 2, 2)$, $B_1(5, -2, 0)$, $A_2(5, 0, 3)$, $B_2(2, 6, 6)$.
 в) $A_1(6, 4, 3)$, $B_1(8, 5, 3)$, $A_2(0, 2, 2)$, $B_2(8, 2, 6)$.
 г) $A_1(6, 4, 3)$, $B_1(8, 5, 3)$, $A_2(2, 5, 7)$, $B_2(10, 5, 11)$.

B-8.

- a) $A_1(2, 2, 7)$, $B_1(6, 4, 1)$, $A_2(8, 5, -2)$, $B_2(4, 3, 4)$.
 б) $A_1(0, 0, 2)$, $B_1(4, 2, -4)$, $A_2(3, -1, -4)$, $B_2(-1, -3, 2)$.
 в) $A_1(0, 4, 5)$, $B_1(-1, 5, 6)$, $A_2(1, 4, 1)$, $B_2(5, -4, 9)$.
 г) $A_1(0, 4, 5)$, $B_1(-1, 5, 6)$, $A_2(3, 7, 6)$, $B_2(7, -1, 14)$.

B-9.

- a) $A_1(3, 2, 9)$, $B_1(5, 6, 15)$, $A_2(4, 4, 12)$, $B_2(2, 0, 6)$.
 б) $A_1(7, 2, 3)$, $B_1(9, 6, 9)$, $A_2(1, 2, 1)$, $B_2(-1, -2, -5)$.
 в) $A_1(4, 6, -1)$, $B_1(5, 8, -3)$, $A_2(1, 3, 2)$, $B_2(5, -1, 6)$.
 г) $A_1(4, 6, -1)$, $B_1(5, 8, -3)$, $A_2(3, 6, 7)$, $B_2(7, 2, 11)$.

B-10.

- a) $A_1(4, 3, 1)$, $B_1(6, 5, -1)$, $A_2(5, 4, 0)$, $B_2(3, 2, 2)$.
 б) $A_1(4, 5, 2)$, $B_1(6, 7, 0)$, $A_2(7, 5, 1)$, $B_2(5, 3, 3)$.
 в) $A_1(4, 4, 7)$, $B_1(5, 5, 9)$, $A_2(-1, 0, 2)$, $B_2(11, 8, 6)$.
 г) $A_1(4, 4, 7)$, $B_1(5, 5, 9)$, $A_2(1, 3, 7)$, $B_2(13, 11, 11)$.

B-11.

- a) $A_1(1, 1, 4)$, $B_1(3, 7, 2)$, $A_2(-1, -5, 6)$, $B_2(0, -2, 5)$.
 б) $A_1(2, -2, 4)$, $B_1(4, 4, 2)$, $A_2(2, -6, 6)$, $B_2(3, -3, 5)$.
 в) $A_1(-2, 6, 3)$, $B_1(-4, 8, 3)$, $A_2(1, 1, 4)$, $B_2(5, 5, 0)$.
 г) $A_1(-2, 6, 3)$, $B_1(-4, 8, 3)$, $A_2(3, 4, 9)$, $B_2(7, 8, 5)$.

B-12.

- а) $A_1(2, 4, 1)$, $B_1(6, 8, -1)$, $A_2(4, 6, 0)$, $B_2(0, 2, 2)$.
 б) $A_1(2, 1, 4)$, $B_1(6, 5, 2)$, $A_2(6, 3, 6)$, $B_2(2, -1, 8)$.
 в) $A_1(2, 6, 5)$, $B_1(2, 8, 6)$, $A_2(0, 1, 1)$, $B_2(8, 5, 9)$.
 г) $A_1(2, 6, 5)$, $B_1(2, 8, 6)$, $A_2(2, 4, 6)$, $B_2(10, 8, 14)$.

В-13.

- а) $A_1(2, 5, 4)$, $B_1(0, 9, 2)$, $A_2(5, -1, 7)$, $B_2(3, 3, 5)$.
 б) $A_1(2, 0, 4)$, $B_1(0, 4, 2)$, $A_2(7, -4, 3)$, $B_2(5, 0, 1)$.
 в) $A_1(4, 6, 3)$, $B_1(5, 8, 3)$, $A_2(0, 3, 2)$, $B_2(8, -1, 6)$.
 г) $A_1(4, 6, 3)$, $B_1(5, 8, 3)$, $A_2(2, 6, 7)$, $B_2(10, 2, 11)$.

В-14.

- а) $A_1(5, 6, 3)$, $B_1(7, 12, 1)$, $A_2(3, 0, 5)$, $B_2(4, 3, 4)$.
 б) $A_1(2, -2, 4)$, $B_1(4, 4, 2)$, $A_2(2, -6, 9)$, $B_2(3, -3, 8)$.
 в) $A_1(4, 2, 7)$, $B_1(5, 2, 9)$, $A_2(4, 3, 2)$, $B_2(-4, -1, 6)$.
 г) $A_1(4, 2, 7)$, $B_1(5, 2, 9)$, $A_2(6, 6, 7)$, $B_2(-2, 2, 11)$.

В-15.

- а) $A_1(2, 2, 1)$, $B_1(4, 6, -3)$, $A_2(5, 8, -5)$, $B_2(3, 4, -1)$.
 б) $A_1(2, 2, 4)$, $B_1(4, 6, 0)$, $A_2(7, 2, 1)$, $B_2(5, -2, 5)$.
 в) $A_1(4, -4, 5)$, $B_1(5, -7, 6)$, $A_2(0, 1, 0)$, $B_2(8, 5, 12)$.
 г) $A_1(4, -4, 5)$, $B_1(5, -7, 6)$, $A_2(2, 4, 5)$, $B_2(10, 8, 17)$.

Задача 22. Прямі m_1 і m_2 проведено через пари (A_1, B_1) , (A_2, B_2) точок, заданих в просторі своїми координатами. Довести, що прямі m_1 , m_2 є мимобіжними і знайти відстань між ними.

- В-1. $A_1(-2, -1, 6)$, $B_1(4, -4, 6)$, $A_2(5, 8, -2)$, $B_2(1, -10, 18)$.
 В-2. $A_1(2, -1, -4)$, $B_1(2, -4, 2)$, $A_2(-5, -4, -3)$, $B_2(5, 2, 5)$.
 В-3. $A_1(0, -3, -4)$, $B_1(3, -3, 2)$, $A_2(-1, 4, -1)$, $B_2(9, -6, -1)$.
 В-4. $A_1(2, 2, 4)$, $B_1(3, 0, 4)$, $A_2(9, 5, 3)$, $B_2(7, 5, 9)$.
 В-5. $A_1(3, -1, -2)$, $B_1(1, -1, 4)$, $A_2(18, 16, 3)$, $B_2(-2, -24, 3)$.
 В-6. $A_1(1, -1, 3)$, $B_1(1, 2, 0)$, $A_2(16, -3, -1)$, $B_2(0, 13, 11)$.
 В-7. $A_1(3, 0, -2)$, $B_1(0, 0, 1)$, $A_2(-1, 15, -4)$, $B_2(11, -1, 12)$.
 В-8. $A_1(-1, 2, 3)$, $B_1(2, 2, 0)$, $A_2(-3, -13, -1)$, $B_2(13, 3, 11)$.
 В-9. $A_1(2, 1, 2)$, $B_1(2, -5, 5)$, $A_2(-1, 2, 9)$, $B_2(9, -6, 3)$.
 В-10. $A_1(-2, -3, 2)$, $B_1(4, -3, -1)$, $A_2(3, -6, 7)$, $B_2(3, 4, -3)$.
 В-11. $A_1(4, 3, 1)$, $B_1(0, 3, 3)$, $A_2(5, 2, 9)$, $B_2(5, 8, 7)$.
 В-12. $A_1(3, 4, 0)$, $B_1(1, -2, 0)$, $A_2(0, 5, 23)$, $B_2(16, -7, -17)$.
 В-13. $A_1(-2, 2, 0)$, $B_1(4, -1, 0)$, $A_2(1, 3, -7)$, $B_2(1, -7, 3)$.
 В-14. $A_1(-2, 3, 0)$, $B_1(4, 0, 0)$, $A_2(-3, -4, -3)$, $B_2(5, 2, 7)$.
 В-15. $A_1(-3, 4, -3)$, $B_1(3, 4, 0)$, $A_2(0, -3, -4)$, $B_2(0, 7, 6)$.

Задача 23. Встановити тип кривої другого порядку і побудувати її графік.

- В-1. $16x^2 - 9y^2 - 96x + 36y - 36 = 0$.
- В-2. $4x^2 - 9y^2 - 16x + 18y + 43 = 0$.
- В-3. $x^2 + 4y^2 + 2x - 16y + 13 = 0$.
- В-4. $x^2 - 16y^2 - 6x - 64y - 71 = 0$.
- В-5. $x^2 - 4y^2 - 4x - 8y + 4 = 0$.
- В-6. $x^2 + 4y^2 - 6x + 5 = 0$.
- В-7. $x^2 - 4y^2 - 4x - 24y - 36 = 0$.
- В-8. $4x^2 - y^2 - 32x - 4y + 64 = 0$.
- В-9. $25x^2 + 9y^2 - 100x + 54y - 44 = 0$.
- В-10. $x^2 - 9y^2 - 36y - 45 = 0$.
- В-11. $x^2 - y^2 - 4x - 10y - 20 = 0$.
- В-12. $x^2 + 25y^2 - 4x + 200y + 379 = 0$.
- В-13. $25x^2 - y^2 + 100x + 6y + 66 = 0$.
- В-14. $x^2 - 4y^2 + 8x - 24y - 16 = 0$.
- В-15. $9x^2 + 4y^2 + 54x - 16y + 61 = 0$.

Задача 24. Встановити тип поверхні другого порядку.

- В-1. $9x^2 + 4y^2 + 36z^2 - 8y - 32 = 0$.
- В-2. $x^2 + y^2 - 2x - 4y - z = 0$.
- В-3. $x^2 + 4y^2 - 4z^2 + 2x + 5 = 0$.
- В-4. $x^2 + y^2 - z^2 + 6z - 10 = 0$.
- В-5. $4x^2 + 9y^2 + 24x - 36z + 36 = 0$.
- В-6. $x^2 - y^2 + z^2 + 10x - 21 = 0$.
- В-7. $x^2 - y^2 - z^2 - 2x + 2 = 0$.
- В-8. $x^2 - y^2 + 2y - z - 1 = 0$.
- В-9. $9x^2 - 9y^2 - z^2 - 4z - 13 = 0$.
- В-10. $9x^2 + y^2 - 9z^2 - 4y - 5 = 0$.
- В-11. $x^2 - y^2 - 4x - 2y + z + 3 = 0$.
- В-12. $x^2 + y^2 - z^2 - 2y + 2z = 0$.
- В-13. $x^2 + 9y^2 - 9z^2 + 4x + 4 = 0$.
- В-14. $x^2 + 4y^2 - 4z^2 - 2x + 24z - 35 = 0$.
- В-15. $x^2 + y^2 - z^2 - 4x + 6z - 5 = 0$.

Література

- [1] Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.: Наука, 1980.
- [2] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра: Учеб. для вузов – 4-е изд. – М.: Наука, 1999. – 296 с.
- [3] Шкіль М.І., Колесник Т.В., Котлова В.М. Вища математика. Кн. 1. Аналітична геометрія з елементами алгебри. Вступ до математичного аналізу. – К.: «Либідь», 1994.
- [4] Мастиновський Ю.В., Левада В.С., Анпілогов Д.І. Основи лінійної алгебри та аналітичної геометрії : навч. посібник / Ю.В. Мастиновський, В.С. Левада, Д.І. Анпілогов. – Запоріжжя : СТАТУС, 2017. – 268 с. – (Наукова книга).