

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет «Запорізька політехніка»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять з дисципліни

"Науковий практикум за темою магістерської роботи"

для магістрів спеціальностей

174 "Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та
робототехніка", освітня програма "Автоматизація, мехатроніка та
робототехніка",

172 "Електронні комунікації та радіотехніка", освітні програми
"Радіоелектронні апарати та засоби", "Інтелектуальні технології
мікросистемної радіоелектронної техніки"
усіх форм навчання

Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни "Науковий практикум за темою магістерської роботи" для магістрів спеціальностей 174 "Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка", освітня програма "Автоматизація, мехатроніка та робототехніка", 172 "Електронні комунікації та радіотехніка", освітні програми "Радіоелектронні апарати та засоби", "Інтелектуальні технології мікросистемної радіоелектронної техніки" усіх форм навчання / Уклад. : Ірина ПОСПЕСВА, Олександр МАЛИЙ, Сергій ГАРАЧУК – Запоріжжя : НУЗП, 2024. – 164 с.

Укладачі: Ірина ПОСПЕСВА, ст. викладач
Олександр МАЛИЙ, к.т.н., зав. каф. ІТЕЗ
Сергій ГАРАЧУК, ст. викл. каф. ІТЕЗ

Рецензент: Наталія ФУРМАНОВА, к.т.н., доц. каф. ІТЕЗ

Відповідальний за випуск: Олександр МАЛИЙ, к.т.н., зав. каф. ІТЕЗ

Затверджено
на засіданні кафедри ІТЕЗ
протокол № 1 від 10.09.24 р.

Рекомендовано до видання
НМК ФІБЕК
протокол № 2 від 19.09.24 р.

ЗМІСТ

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ	5
1 ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 1. ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ ПРЯМИХ ВИМІРЮВАНЬ.....	6
1.1 Теоретичні відомості.....	6
1.2 Завдання до роботи.....	9
1.3 Зміст звіту.....	12
1.4 Приклад обробки результатів прямих вимірювань	12
2 ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 2. ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ ОПОСЕРЕДКОВАНИХ ВИМІРЮВАНЬ.....	14
2.1 Теоретичні відомості.....	14
2.2 Завдання до роботи.....	17
2.3 Зміст звіту.....	17
2.4 Приклади обробки результатів опосередкованих вимірювань.....	17
3 ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 3. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЛП ГРАФІЧНИМ МЕТОДОМ.....	23
3.1 Геометрична інтерпретація задач ЛП	23
3.2 Завдання до роботи.....	26
3.3 Зміст звіту.....	29
3.4 Приклади розв'язання задач ЛП графічним методом	30
4 ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 4. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЛП СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ.....	34
4.1 Теоретичні відомості.....	34
4.2 Завдання до роботи.....	39
4.3 Зміст звіту.....	40
4.4 Приклад розв'язання задач ЛП симплекс-методом.....	41
5 ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 5. РОЗВ'ЯЗАННЯ ТРАНСПОРТНИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ ПОТЕНЦІАЛІВ	47
5.1 Теоретичні відомості.....	47
5.2 Завдання до роботи.....	54
5.3 Зміст звіту.....	61
5.4 Приклад розв'язання транспортної задачі методом потенціалів.....	61
6 ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 6. КОРЕЛЯЦІЙНО-РЕГРЕСІЙНИЙ АНАЛІЗ	72

6.1 Теоретичні відомості.....	72
6.2 Завдання до роботи.....	80
6.3 Зміст звіту.....	88
6.4 Приклади кореляційно-регресійного аналізу.....	89
7 ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ 7. ВИКОРИСТАННЯ MS EXCEL В АНАЛІТИЧНИХ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ.....	103
7.1 Практичне заняття 7.1. Застосування MS Excel для розв'язання систем лінійних рівнянь.....	103
7.2 Практичне заняття 7.2. Розв'язання трансцендентних рівнянь за допомогою MS Excel.....	111
7.3 Практичне заняття 7.3. Розв'язання задач ЛПІ за допомогою надбудови Пошук рішення.....	118
7.4 Практичне заняття 7.4. Застосування MS Excel для регресійного аналізу.....	124
8 ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 8. ВИКОРИСТАННЯ MS EXCEL ДЛЯ ГРАФІЧНОЇ ОБРОБКИ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕНЬ.....	134
8.1 Теоретична частина.....	134
8.2 Завдання до роботи.....	157
8.3 Зміст звіту.....	161
ЛІТЕРАТУРА.....	162
Додаток А Критичні точки розподілу Стьюдента.....	163
Додаток Б Критичні точки розподілу Фішера-Снедекора.....	164

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Мета практичних занять: засвоїти математичні методи обробки результатів експериментальних досліджень, методи оптимізації та кореляційно-регресійного аналізу; отримати навички їх застосування для вирішення практичних задач при наукових дослідженнях.

При виконанні завдань до практичних занять студенти повинні ознайомитися з теоретичним матеріалом, наведеним у даних методичних вказівках, конспекті лекцій [1] і рекомендованій літературі, та розв'язати поставлену задачу вказаним методом.

Кожен студент виконує індивідуальне завдання згідно з варіантом.

1 ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 1. ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ ПРЯМИХ ВИМІРЮВАНЬ

Мета роботи: ознайомитися з методами обробки результатів прямих вимірювань з метою визначення середнього значення та повної похибки вимірюваної величини.

1.1 Теоретичні відомості

Прямим називається вимірювання, при якому значення вимірювальної величини визначається безпосередньо за допомогою засобів вимірювання.

Нижче наведений алгоритм обробки результатів прямих вимірювань.

Крок 1. Усунути з вибірки очевидні промахи (описки) та відомі систематичні похибки.

Крок 2. Упорядкувати вибірку у порядку зростання її елементів та розрахувати її розмах за формулою:

$$R = x_{max} - x_{min} \quad (1.1)$$

Крок 3. Провести перевірку вибірки на наявність грубих похибок.

Для виявлення результатів, що містять грубі похибки, існують різні статистичні методи (критерії), в основі яких лежить припущення, що результати спостережень належать генеральної сукупності, елементи якої розподілені за нормальним законом.

Розглянемо **критерій u_i** , який дозволяє визначити, містить крайній елемент вибірки грубу похибку, або ні, **за величиною відносної відстані між крайнім та найближчим до нього сусіднім елементом** упорядкованої вибірки ($x_1 = x_{min} \leq x_2 \leq \dots \leq x_n = x_{max}$).

Критерій ґрунтується на аналізі відношення:

$$u_i = \frac{|x_{i+1} - x_i|}{R}, \quad (1.2)$$

Якщо $u_i > u_{P,n}$ при $i = 1$ або $i = n - 1$, де $u_{P,n}$ – коефіцієнт, який залежить від довірчої ймовірності P та числа спостережень n у вибірці (див. табл. 1.1), то x_{min} або x_{max} є елементом вибірки, який містить грубу похибку і повинен бути видалений з таблиці результатів спостережень.

Таблиця 1.1 – Коефіцієнти $u_{P,n}$ для довірчої ймовірності $P = 95\%$

n	3	4	5	7	10	15	20	30	100
$u_{P,n}$	0,94	0,76	0,64	0,51	0,41	0,34	0,30	0,26	0,20

Якщо $x_n = x_{max}$ або $x_1 = x_{min}$ не містить грубої похибки, то перевірку на наявність у вибірці елементів, що містять грубу похибку, припиняють. В іншому випадку перевірку повторюють, зіставляючи елемент x_{n-1} з x_{n-2} і, якщо потрібно, x_2 з x_3 , і т. ін.

Крок 4. Обчислити вибіркове середнє \bar{x} за формулою:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \quad (1.3)$$

Крок 5. Обчислити вибіркове середнє квадратичне відхилення середнього за формулою:

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n \cdot (n - 1)}}. \quad (1.4)$$

Крок 6. Задатися довірчою ймовірністю P у діапазоні від 0,9 до 0,99. Зазвичай у інженерних розрахунках прийнято вибирати $P = 0,95$.

Крок 7. Визначити випадкову похибку за формулою:

$$\Delta x = t_{P,n} \cdot S_{\bar{x}}, \quad (1.5)$$

де $t_{P,n}$ – коефіцієнт Стьюдента.

Значення коефіцієнта Стьюдента $t_{P,n}$ в залежності від кількості спостережень n при заданій довірчій ймовірності наведені у додатку А. При цьому слід враховувати, що ці значення надані для рівня значущості α , який являє собою ймовірність відкинути вірну гіпотезу та дорівнює:

$$\alpha = 1 - P. \quad (1.6)$$

P – довірча ймовірність, або рівень довіри, являє собою ймовірність прийняти вірну гіпотезу. Так, для довірчої ймовірності $P = 95\% = 0,95$ $\alpha = 0,05$.

Крок 8. Визначити верхню межу похибки приладу θ_x .

Вона визначається в залежності від класу точності засобу вимірювання.

Якщо межа похибки виражена у вигляді наведеної похибки (тобто у відсотках від верхньої межі вимірювань, діапазону вимірювань або довжини шкали приладу), а також у вигляді відносної похибки (тобто у відсотках від дійсного значення величини), то клас точності позначають числом, що відповідає значенню похибки. Наприклад, класу точності 0,1 відповідає похибка 0,1%.

Точність багатьох показуючих приладів (амперметри, вольтметри, манометри та ін.) формується за наведеною похибкою, вираженою у відсотках від верхньої межі вимірів.

Крок 9. Розрахувати повну похибку результату виміру за формулою:

$$\Delta \bar{x} = \sqrt{\Delta x^2 + \theta_x^2}. \quad (1.7)$$

Крок 10. Обчислити відносну похибку $\delta_x = \frac{\Delta \bar{x}}{\bar{x}} \cdot 100\%$.

Крок 11. Округлити числові значення повної похибки та результату вимірювання.

При округленні використовують наступні правила.

Правило 1. Попередньо результат та похибку записують у нормальному вигляді: загальний показник ступеня виносять за дужку або замінюють відповідною приставкою: мікро, мілі, кіло, мега та ін.

Наприклад:

$$x = 0,18 \text{ м} \pm 0,01 \text{ м} = (18 \pm 1) \cdot 10^{-2} \text{ м} = 18 \text{ см} \pm 1 \text{ см}.$$

Заборонено записувати у вигляді:

$$x = 18 \cdot 10^{-2} \text{ м} \pm 10 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \text{ або } x = 0,18 \text{ м} \pm 1 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Показник 10^1 не виноситься.

Правило 2. Якщо результат у подальшому буде використаний в обчисленнях, то, щоб уникнути накопичення похибок з допомогою округлень, похибку округлюють до двох значущих цифр за будь-якої першої.

При проміжних обчисленнях величин $S_{\bar{x}}^2$ (з яких згодом витягуватиметься квадратний корінь для знаходження $S_{\bar{x}}$) слід зберігати не менш 4 значущих цифр.

Правило 3. Якщо результат вимірювання є остаточним і не буде використаний для обчислення інших величин, то довірчу похибку

Δ_x округляють до першої цифри, якщо вона дорівнює або більше 2, або до двох значущих цифр, якщо перша дорівнює 0 та 1.

Правило 4. Середнє значення \bar{x} округлюють до розряду, яким закінчується округлена похибка Δ_x (див. табл. 1.2).

Таблиця 1.2 – Результати округлення середнього значення

Неокруглений результат	Округлений результат
2257,81 \pm 62	(22,6 \pm 0,6) $\cdot 10^2$
(8,254 \pm 0,0345) $\cdot 10^{-3}$	(8,25 \pm 0,03) $\cdot 10^{-3}$
94,1612 \pm 0,0167	94,161 \pm 0,017
5,39 \pm 0,794	5,39 \pm 0,79
5,39 \pm 0,79	5,4 \pm 0,8

Якщо похибка округлюється до двох значущих цифр, але друга з них дорівнює нулю, то цей нуль зберігається, а у відповідному йому розряді результату записується значуща цифра, наприклад:

$$x = 3,48 \pm 0,10.$$

Крок 12. Записати остаточний результат у вигляді:

$$x = \bar{x}' \pm \Delta \bar{x}, P = P_0, \delta_x = \frac{\Delta \bar{x}}{\bar{x}} \cdot 100\% \quad (1.8)$$

Більш детально теоретичні відомості з даної теми наведені у [1], стор. 151 – 169.

1.2 Завдання до роботи

У табл. 1.3 наведені результати вимірювань власної резонансної частоти f_p (Гц) друкованої плати, маса якої m (кг) визначена в результаті серії зважувань.

Для визначення резонансної частоти застосований генератор сигналів низької частоти ГЗ-137 з основною похибкою установки частоти $\theta_f = 5 \cdot 10^{-5}$ Гц. Маса плати визначена зважуванням на вагах 2 класу точності з основною похибкою вимірювань $\theta_m = 2 \cdot 10^{-5}$ кг.

Визначити остаточний результат прямих вимірювань кожної з незалежних величин f_p та m для довірчої ймовірності $P = 0,95$.

Таблиця 1.3 – Результати вимірювань f_p (Гц) та m (кг)

Варіант 1					
f_{p_i} , Гц	151,55	152,44	150,63	150,92	152,27
m_i , кг	0,215	0,221	0,212	0,216	0,218
Варіант 2					
f_{p_i} , Гц	151,51	152,54	150,55	150,95	152,41
m_i , кг	0,213	0,215	0,220	0,198	0,204
Варіант 3					
f_{p_i} , Гц	151,49	152,59	150,51	150,65	152,48
m_i , кг	0,212	0,214	0,224	0,199	0,197
Варіант 4					
f_{p_i} , Гц	151,47	152,64	150,47	150,98	152,55
m_i , кг	0,211	0,209	0,208	0,199	0,207
Варіант 5					
f_{p_i} , Гц	151,45	152,69	150,43	150,995	152,62
m_i , кг	0,210	0,206	0,212	0,201	0,203
Варіант 6					
f_{p_i} , Гц	151,43	152,74	150,39	151,01	152,69
m_i , кг	0,209	0,203	0,206	0,202	0,207
Варіант 7					
f_{p_i} , Гц	151,41	152,79	150,35	151,03	152,76
m_i , кг	0,208	0,200	0,210	0,213	0,209
Варіант 8					
f_{p_i} , Гц	151,39	152,84	150,31	151,04	152,83
m_i , кг	0,207	0,197	0,214	0,200	0,199
Варіант 9					
f_{p_i} , Гц	151,37	152,89	150,27	151,06	152,90
m_i , кг	0,206	0,194	0,208	0,198	0,192
Варіант 10					
f_{p_i} , Гц	151,56	152,42	150,66	150,86	152,23
m_i , кг	0,217	0,227	0,219	0,224	0,228
Варіант 11					
f_{p_i} , Гц	151,54	152,47	150,62	150,88	152,30
m_i , кг	0,216	0,224	0,221	0,222	0,225
Варіант 12					
f_{p_i} , Гц	151,52	152,52	150,58	150,89	152,37
m_i , кг	0,215	0,221	0,225	0,223	0,220

Продовження табл. 1.3

Варіант 13					
fp_i , Гц	151,50	152,57	150,54	150,91	152,44
m_i , кг	0,214	0,217	0,229	0,218	0,216
Варіант 14					
fp_i , Гц	151,48	152,62	150,50	150,92	152,51
m_i , кг	0,213	0,214	0,223	0,216	0,212
Варіант 15					
fp_i , Гц	151,46	152,67	150,46	150,94	152,58
m_i , кг	0,212	0,211	0,217	0,214	0,208
Варіант 16					
fp_i , Гц	151,44	152,72	150,42	150,95	152,65
m_i , кг	0,211	0,208	0,221	0,212	0,214
Варіант 17					
fp_i , Гц	151,42	152,77	150,38	150,97	152,72
m_i , кг	0,210	0,205	0,215	0,212	0,200
Варіант 18					
fp_i , Гц	151,40	152,82	150,34	150,98	152,79
m_i , кг	0,209	0,202	0,212	0,208	0,206
Варіант 19					
fp_i , Гц	151,38	152,87	150,30	151,00	152,86
m_i , кг	0,208	0,199	0,203	0,206	0,192
Варіант 20					
fp_i , Гц	151,57	152,40	150,69	150,80	152,19
m_i , кг	0,219	0,211	0,212	0,216	0,218
Варіант 21					
fp_i , Гц	151,55	152,45	150,65	150,82	152,26
m_i , кг	0,218	0,228	0,226	0,229	0,224
Варіант 22					
fp_i , Гц	151,53	152,50	150,61	150,83	152,33
m_i , кг	0,217	0,215	0,210	0,217	0,220
Варіант 23					
fp_i , Гц	151,51	152,55	150,57	150,85	152,40
m_i , кг	0,216	0,222	0,214	0,215	0,216
Варіант 24					
fp_i , Гц	151,49	152,60	150,53	150,86	152,47
m_i , кг	0,215	0,219	0,218	0,213	0,212
Варіант 25					
fp_i , Гц	151,47	152,65	150,49	150,88	152,54
m_i , кг	0,214	0,216	0,212	0,211	0,218

1.3 Зміст звіту

1.3.1 Тема та мета завдання.

1.3.2 Короткі теоретичні відомості.

1.3.3 Розрахунки результатів прямих вимірювань власної резонансної частоти f_p та маси m друкованої плати.

1.3.4 Остаточні результати прямих вимірювань власної резонансної частоти f_p та маси m друкованої плати.

1.3.5 Висновки.

1.4 Приклад обробки результатів прямих вимірювань

У табл. 1.4 наведені результати прямих вимірювань струму через p - n перехід напівпровідникового діода $I_{пр}$ (мА) при значенні напруги $U_{пр} = 0,3$ В.

Таблиця 1.4 – Результати прямих вимірювань випадкової величини $I_{пр}$

$I_{пр i}$	12,8	12,7	13,1	13,0	12,9
------------	------	------	------	------	------

Кількість вимірів $n = 5$.

Вимірювання проводилися міліамперметром Е535 класу точності 0,5 з кінцевим значенням діапазону вимірювань 50 мА.

Визначити остаточний результат прямих вимірювань для довірчої ймовірності $P = 0,95$.

Розв'язання

Для проведення розрахунків складемо табл. 1.5, з якої визначимо:

$$\bar{I}_{пр} = 12,9;$$

$$R = 12,9 - 12,3 = 0,6$$

Для $n = 5$ з табл. 1.1 визначимо $u_{р,n} = 0,64$.

$$u_{р,n} \cdot R = 0,64 \cdot 0,6 = 0,384$$

Умова $u_i < u_{р,n} \cdot R$ виконується для усіх i .

Таблиця 1.5 – Результати обробки прямих вимірювань

i	1	2	3	4	5	Σ	Сер
$I_{\text{пр } i}, \text{ mA}$	12,5	12,6	12,3	12,7	12,9	63,0	12,6
$I_{\text{пр}} \uparrow i$	12,3	12,5	12,6	12,7	12,9		
$u_i = I_{\text{пр}i+1} - I_{\text{пр}i}$	0,2	0,1	0,1	0,2			
$\Delta I_{\text{пр}i} = I_{\text{пр}i} - \bar{I}_{\text{пр}}$	-0,3	-0,1	0	0,1	0,3	0	
$(\Delta I_{\text{пр}i})^2$	0,09	0,01	0	0,01	0,09	0,20	

З додатку А для рівня значущості $\alpha = 1 - 0,95 = 0,05$ та обсягу вибірки $n = 5$ визначимо коефіцієнт Стьюдента $t_{P,n} = 2,01$.

$$S_{\bar{I}_{\text{пр}}} = \sqrt{\frac{0,2000}{5 \cdot 4}} = 0,1000$$

$$\Delta I_{\text{пр}} = 2,01 \cdot 0,1000 = 0,2010$$

Визначимо приладову похибку.

$$\theta_I = 0,005 \cdot 50 = 0,2500$$

$$\Delta \bar{I}_{\text{пр}} = \sqrt{0,2010^2 + 0,2500^2} = 0,3211;$$

$$I_{\text{пр}} = 12,6 \pm 0,3211$$

$$\delta_{I_{\text{пр}}} = \frac{0,3211}{12,6} \cdot 100\% = 2,5\%$$

Остаточний результат з урахуванням округлення:

$$I_{\text{пр}} = 12,6 \text{ mA} \pm 0,3 \text{ mA}; P = 95\%; \delta_x = 2,5\%$$

2 ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 2. ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ ОПОСЕРЕДКОВАНИХ ВИМІРЮВАНЬ

Мета роботи: ознайомитися з методами обробки результатів опосередкованих вимірювань з метою визначення середнього значення та повної похибки вимірюваної величини.

2.1 Теоретичні відомості

Нехай деяка величина f залежить від величин x, y, z, \dots , визначених прямими вимірюваннями, причому вид цієї залежності $f = f(x, y, z, \dots)$ відомий. Враховуючи, що величини x, y, z, \dots вимірюються з певними похибками, величина f також має похибку, яку необхідно визначити.

Існує два методи визначення похибки опосередкованої величини f : метод *перенесення похибок*, який ще називається методом *середніх*, і *вибірковий* метод.

2.1.1 Обробка результатів опосередкованих вимірювань методом перенесення похибок

Даний метод використовується у випадку, коли кожна з величин x, y, z , що являють собою аргументи функції, вимірюється незалежно від інших у своїй серії дослідів, і ці величини утворюють вибірки, близькі одна до одної.

Кількість дослідів у серіях не обов'язково повинна бути однаковою, необхідна лише незмінність умов для прямо вимірюваної величини у своїй серії, незмінність умов для f у всіх серіях та взаємна незалежність усіх дослідів.

Алгоритм метода наведений нижче.

Крок 1. За формулами прямих вимірювань визначити величини $\bar{x}, \Delta\bar{x}; \bar{y}, \Delta\bar{y}; \bar{z}, \Delta\bar{z}$ з урахуванням приладових похибок.

Крок 2. Розрахувати значення функції $\bar{f} = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

Крок 3. Обчислити часткові похідні від функції в точці $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$:

$$a_x = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}}, a_y = \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}}, a_z = \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}} \quad (2.1)$$

Якщо функція f легко логарифмується, обчислити часткові похідні в точці $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ від її логарифма:

$$b_x = \left. \frac{\partial(\ln f)}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}}, b_y = \left. \frac{\partial(\ln f)}{\partial y} \right|_{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}}, b_z = \left. \frac{\partial(\ln f)}{\partial z} \right|_{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}} \quad (2.2)$$

Крок 4. За формулою перенесення похибок обчислити повну похибку функції:

$$\Delta f = \sqrt{(a_x \Delta \bar{x})^2 + (a_y \Delta \bar{y})^2 + (a_z \Delta \bar{z})^2}. \quad (2.3)$$

Якщо функція f легко логарифмується, обчислити повну похибку за еквівалентною формулою:

$$\Delta \bar{f} = \bar{f} \sqrt{(b_x \Delta \bar{x})^2 + (b_y \Delta \bar{y})^2 + (b_z \Delta \bar{z})^2}. \quad (2.4)$$

Крок 5. Записати результат вимірювання та округлити його.

2.1.2 Обробка результатів опосередкованих вимірювань вибірковою методом

Даний метод застосовується у тому випадку, якщо спільно виміряні значення аргументів функції x_i, y_i, z_i не утворюють вибірок, але можна створити вибірку значень функції $\{f_i\}$.

Алгоритм метода наведений нижче.

Крок 1. За кожним набором спільно виміряних значень аргументів розрахувати значення функції $f_i = f(x_i, y_i, z_i)$.

Крок 2. Обробити отриману вибірку $\{f_i\}$ згідно з алгоритмом обробки даних прямих вимірювань, знаходячи середнє значення \bar{f} та випадкову похибку функції Δf .

Крок 3. Вивести вирази для часткових похідних від функції:

$$a_x(x, y, z) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}; a_y(x, y, z) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}; \quad (2.5)$$

$$a_z(x, y, z) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z}.$$

Якщо функція легко логарифмується, вивести вирази від її логарифму:

$$b_x(x, y, z) = \frac{\partial(\ln f(x, y, z))}{\partial x}; b_y(x, y, z) = \frac{\partial(\ln f(x, y, z))}{\partial y}; \quad (2.6)$$

$$b_z(x, y, z) = \frac{\partial(\ln f(x, y, z))}{\partial z}.$$

Крок 4. Якщо передбачається, що приладові похибки вимірюваних величин можуть бути різними у різних дослідах то за

кожним набором спільно виміряних значень аргументів та їх приладових похибок розрахувати приладову похибку функції за формулою:

$$\theta_{fi} = |a_x(x_i, y_i, z_i)|\theta_{xi} + |a_y(x_i, y_i, z_i)|\theta_{yi} + |a_z(x_i, y_i, z_i)|\theta_{zi}. \quad (2.7)$$

Якщо функція легко логарифмується, скористатися формулою:

$$\theta_{fi} = |b_x(x_i, y_i, z_i)|\theta_{xi} + |b_y(x_i, y_i, z_i)|\theta_{yi} + |b_z(x_i, y_i, z_i)|\theta_{zi} \quad (2.8)$$

де f_i – значення функції, яке відповідає даному набору аргументів (його не слід плутати з рядком значень f_i , які впорядковані за зростанням).

Крок 5. Якщо приладові похибки аргументів однакові у всіх дослідах, або при знаходженні максимальних за всією серією дослідів значень приладових похибок $\theta_x = \max \theta_{xi}$, $\theta_y = \max \theta_{yi}$, $\theta_z = \max \theta_{zi}$, то для визначення приладової похибки величини f можна використовувати вирази (4.17), (4.18):

$$\theta_f = \bar{a}_x \theta_x + \bar{a}_y \theta_y + \bar{a}_z \theta_z, \quad (2.9)$$

де $\theta_x = \max \theta_{xi}$, $\theta_y = \max \theta_{yi}$, $\theta_z = \max \theta_{zi}$ – найбільші значення верхніх меж приладових похибок аргументів у серії дослідів;

$$\bar{a}_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |a_{xi}|; \bar{a}_y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |a_{yi}|; \bar{a}_z = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |a_{zi}|; \quad (2.10)$$

Крок 6. Обчислити середню приладову похибку функції:

$$\theta_f = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\theta_{fi}| \quad (2.11)$$

Крок 7. Визначити повну похибку функції:

$$\Delta \bar{f} = \theta_f + \Delta f$$

Крок 8. Записати результат вимірювань та округлити його.

Більш детально теоретичні відомості з даної теми наведені у [1], стор. 170 – 184.

2.2 Завдання до роботи

Для вихідних даних з практичного завдання 1 (табл. 1.3) за результатами прямих вимірювань визначити остаточний результат опосередкованих вимірювань жорсткості плати k (Н/м) для довірчої ймовірності $P = 0,95$. По завершенні розрахунків остаточний результат представити у несистемних одиницях кН/м.

Залежність між параметрами вимірювань задана формулою (2.12):

$$f_p = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.12)$$

З (2.12) отримаємо вираз для визначення жорсткості k :

$$k = 4\pi^2 \cdot f_p^2 \cdot m \quad (2.13)$$

Опосередковану похибку вимірювань визначити:

- для **непарних** варіантів, вважаючи вимірювання незалежними, **методом перенесення похибок**;
- для **парних** варіантів, вважаючи вимірювання залежними, **вибірковим методом**.

2.3 Зміст звіту

2.3.1 Тема та мета роботи.

2.3.2 Розрахунки параметрів опосередкованих вимірювань жорсткості друкованої плати k (Н/м).

2.3.3 Остаточні результати опосередкованих вимірювань жорсткості друкованої плати k (кН/м).

2.3.4 Висновки.

2.4 Приклади обробки результатів опосередкованих вимірювань

2.4.1 Приклад обробки результатів опосередкованих вимірювань вибірковим методом

Був проведений експеримент з визначення теплової потужності Φ (Дж/с), тобто кількості теплоти Q , що виділяється у одиницю часу t (с), при проходженні електричного струму I (А) через резистор опором R (Ом).

Вимірювання струму проводилися цифровим амперметром класу точності 0,1 з кінцевим значенням діапазону вимірювань 5 А.

Вимірювання опору проводилися цифровим омметром класу точності 0,1 з кінцевим значенням діапазону вимірювань 10 Ом.

Визначити остаточний результат опосередкованих вимірювань теплової потужності Φ (Дж/с) для довірчої ймовірності $P = 0,95$. Опосередковану похибку вимірювань визначити вибіркоким методом.

Результати спільних вимірювань струму I та опору резистора R наведені у табл. 2.1.

Таблиця 2.1 – Результати спільних вимірювань струму I та опору резистора R

I_i, A	4,42	4,41	4,43	4,45	4,44
$R_i, \text{Ом}$	6,55	6,57	6,54	6,51	6,49

Розв'язання

Максимальні значення приладових похибок:

$$\theta_I = \max \theta_{Ii} = 0,001 \cdot 5 = 0,005 \text{ А};$$

$$\theta_R = \max \theta_{Ri} = 0,001 \cdot 10 = 0,01 \text{ Ом}.$$

Теплову потужність визначимо з закону Джоуля-Ленца:

$$Q = I^2 \cdot R \cdot t, \text{ звідки}$$

$$\Phi = \frac{Q}{t} = I^2 \cdot R \quad (2.14)$$

Розрахунки наведені у табл. 2.2.

З табл. 2.2 визначимо $\bar{\Phi} = 128,148$.

Для вилучення грубих помилок проранжуємо значення Φ_i та визначимо критерій u_i . Розрахунки наведені у табл. 2.3.

Таблиця 2.2 – Результати опосередкованих вимірювань теплової потужності Φ вибіркоким методом

i	1	2	3	4	5	Середнє або Σ
$I_i, \text{А}$	4,42	4,41	4,43	4,45	4,44	
$R_i, \text{Ом}$	6,55	6,57	6,54	6,51	6,49	
$\Phi_i, \text{Дж/с}$	127,963	127,774	128,347	128,914	127,941	128,188
$\Delta \Phi_i = \Phi_i - \bar{\Phi}$	-0,2245	-0,4140	0,1589	0,7263	-0,2467	0
$(\Delta \Phi_i)^2$	0,05042	0,1714	0,02524	0,52754	0,0609	0,8354
θ_{Φ_i}	0,4849	0,4842	0,4860	0,4877	0,4853	0,4856

Таблиця 2.3 – Розрахунки для вилучення грубих помилок

i	1	2	3	4	5
$\Phi \uparrow_i$	127,774	127,941	127,963	128,347	128,914
$\Phi_{i+1} - \Phi_i$	0,167	0,022	0,383	0,576	

З табл. 2.3 визначимо

$$R = 128,914 - 127,774 = 1,140$$

Для $n = 5$ з табл. 1.1 визначимо $u_{p,n} = 0,64$.

$$u_{p,n} \cdot R = 0,64 \cdot 1,140 = 0,729$$

Умова $u_i < u_{p,n} \cdot R$ виконується для усіх i .

З додатку А для рівня значущості $\alpha = 1 - 0,95 = 0,05$ та обсягу вибірки $n = 5$ визначимо коефіцієнт Стьюдента $t_{p,n} = 2,01$.

$$S_{\bar{\Phi}} = \sqrt{\frac{0,8354}{4 \cdot 5}} = 0,2044$$

$$\Delta \Phi = 2,01 \cdot 0,2044 = 0,4119$$

Для визначення приладової похибки використовуємо метод логарифмування функції: $\ln(\Phi(I, R)) = 2 \cdot \ln I + \ln R$

$$b_I = \frac{\partial(\ln \Phi)}{\partial I} = \frac{2}{I}; \quad b_R = \frac{\partial(\ln \Phi)}{\partial R} = \frac{1}{R};$$

$$\theta_{\Phi_i} = \Phi_i \cdot \left(\left| \frac{2 \cdot \theta_I}{I_i} \right| + \left| \frac{\theta_R}{R_i} \right| \right).$$

Розрахунки наведені у табл. 2.2.

З табл. 2.2: $\theta_{\Phi} = 0,4856$

Повна похибка: $\Delta\bar{\Phi} = 0,4119 + 0,4856 = 0,8974$
 Остаточний результат з урахуванням округлення:

$$g = 128,2 \text{ Дж/с} \pm 0,9 \text{ Дж/с}; P = 95\%; n = 5$$

2.4.2 Приклад обробки результатів опосередкованих вимірювань методом перенесення похибок

Був проведений експеримент з визначення прискорення вільного падіння g (м/с²) за результатами 5 незалежних вимірювань періоду коливання математичного маятника T (с) та його довжини l (м). Результати прямих вимірювань вказаних величин наведені у табл. 2.4.

Вимірювання періоду коливань проводилося секундоміром другого класу точності з основною похибкою $\theta_T = 0,06$ с.

Вимірювання довжини маятника проводилося за допомогою механічного лічильника довжини ИДРМ-Э-У з основною похибкою $\theta_l = 0,01$ м.

Визначити остаточний результат опосередкованих вимірювань прискорення вільного падіння g (м/с²) для довірчої ймовірності $P=0,95$. Опосередковану похибку вимірювань визначити методом перенесення похибок.

Таблиця 2.4 – Результати незалежних вимірювань періоду коливання математичного маятника T та його довжини l

T_i , с	1,766	1,788	1,779	1,787	1,770
l_i , м	0,780	0,812	0,790	0,803	0,785

Розв'язання

Формула, що пов'язує вказані величини:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (2.15)$$

Виражаючи g через період коливань T та довжину l , отримуємо формулу для обчислення прискорення вільного падіння g :

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} \quad (2.16)$$

Спочатку розрахуємо остаточні результати прямих вимірювань періоду коливань та довжини маятника.

Для проведення розрахунків періоду коливань складемо табл. 2.5, для проведення розрахунків довжини маятника – табл. 2.6.

Таблиця 2.5 – Результати обробки вимірювань періоду коливань

i	1	2	3	4	5	Середнє
$T \uparrow_i$	1,766	1,770	1,779	1,787	1,788	1,778
$T_{i+1} - T_i$	0,004	0,009	0,008	0,001		Σ
$\Delta T_i = T_i - \bar{T}$	-0,012	-0,008	0,001	0,009	0,010	0
$(\Delta T_i)^2$	$14,4 \cdot 10^{-5}$	$6,4 \cdot 10^{-5}$	$10 \cdot 10^{-5}$	$8,1 \cdot 10^{-5}$	$0,1 \cdot 10^{-5}$	$39 \cdot 10^{-5}$

З табл. 2.5 визначимо:

$$\bar{T} = 1,778; R = 1,788 - 1,766 = 0,022$$

Для $n = 5$ з табл. 1.1 визначимо $u_{p,n} = 0,64$.

$$u_{p,n} \cdot R = 0,64 \cdot 0,022 = 0,014$$

Умова $u_i < u_{p,n} \cdot R$ виконується для усіх i .

З додатку А для рівня значущості $\alpha = 1 - 0,95 = 0,05$ та обсягу вибірки $n = 5$ визначимо коефіцієнт Стьюдента $t_{p,n} = 2,01$.

$$S_{\bar{T}} = \sqrt{\frac{39 \cdot 10^{-5}}{5 \cdot 4}} = 0,0044$$

$$\Delta T = 2,01 \cdot 0,0044 = 0,0089$$

Приладова похибка: $\theta_T = 0,06$ с

$$\Delta \bar{T} = \sqrt{0,0089^2 + 0,06^2} = 0,0607;$$

Остаточний результат з урахуванням округлення:

$$T = 1,78 \text{ с} \pm 0,06 \text{ с}$$

Таблиця 2.6 – Результати обробки вимірювань довжини маятника

i	1	2	3	4	5	Середнє
$l \uparrow_i$	0,780	0,785	0,790	0,803	0,812	0,794
$l_{i+1} - l_i$	0,005	0,005	0,013	0,009		Σ
$\Delta l_i = l_i - \bar{l}$	-0,014	-0,009	-0,004	0,009	0,018	0
$(\Delta l_i)^2$	$19,6 \cdot 10^{-5}$	$8,1 \cdot 10^{-5}$	$1,6 \cdot 10^{-5}$	$8,1 \cdot 10^{-5}$	$32,4 \cdot 10^{-5}$	$69,8 \cdot 10^{-5}$

З табл. 2.6 визначимо:

$$\bar{l} = 0,794;$$

$$R = 0,812 - 0,780 = 0,032$$

Для $n = 5$ з табл. 1.1 визначимо $u_{P,n} = 0,64$.

$$u_{P,n} \cdot R = 0,64 \cdot 0,032 = 0,021$$

Умова $u_i < u_{P,n} \cdot R$ виконується для усіх i .

З додатку А для рівня значущості $\alpha = 1 - 0,95 = 0,05$ та обсягу вибірки $n = 5$ визначимо коефіцієнт Стьюдента $t_{P,n} = 2,01$.

$$S_{\bar{l}} = \sqrt{\frac{69,8 \cdot 10^{-5}}{5 \cdot 4}} = 0,0059$$

$$\Delta l = 2,01 \cdot 0,0059 = 0,0119$$

Приладова похибка: $\theta_l = 0,01$ м

$$\Delta \bar{l} = \sqrt{0,0119^2 + 0,0100^2} = 0,0155;$$

Остаточний результат з урахуванням округлення:

$$l = 0,79 \text{ м} \pm 0,02 \text{ м}$$

За результатами розрахунків результатів прямих вимірювань визначимо:

$$\bar{g} = g(\bar{l}, \bar{T}) = \frac{4\pi^2 \bar{l}}{\bar{T}^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 0,79}{1,78^2} = 9,8434$$

Для визначення похибки використовуємо метод повного диференціалу:

$$a_l = \frac{\partial g}{\partial l} = \frac{4\pi^2}{\bar{T}^2}; \quad a_T = \frac{\partial g}{\partial T} = \frac{-8\pi^2 \bar{l}}{\bar{T}^3}$$

$$\Delta g = \sqrt{(a_l \Delta \bar{l})^2 + (a_T \Delta \bar{T})^2} = \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{\bar{T}^2} \Delta \bar{l}\right)^2 + \left(\frac{-8\pi^2 \bar{l}}{\bar{T}^3} \Delta \bar{T}\right)^2} =$$

$$= \frac{4\pi^2 \bar{l}}{\bar{T}^2} \sqrt{\left(\frac{\Delta \bar{l}}{\bar{l}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \bar{T}}{\bar{T}}\right)^2} =$$

$$= \frac{4\pi^2 \cdot 0,79}{1,78^2} \sqrt{\left(\frac{0,02}{0,79}\right)^2 + \left(\frac{0,06}{1,78}\right)^2} = 0,4150$$

Остаточний результат з урахуванням округлення:

$$g = 9,8 \text{ М/с}^2 \pm 0,4 \text{ М/с}^2; P = 95\%; n = 5$$

3 ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 3. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЛП ГРАФІЧНИМ МЕТОДОМ

Мета роботи: ознайомитися з графічним методом розв'язання задач лінійного програмування (ЛП) та отримати практичні навички його використання.

3.1 Геометрична інтерпретація задач ЛП

Графічний метод розв'язання задач ЛП заснований на геометричній інтерпретації задачі лінійного програмування.

Нехай симетрична задача ЛП задана у двовимірному просторі, тобто обмеження містять дві змінні.

Знайти максимальне значення функції

$$f(x) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 \rightarrow \max, \quad (3.1)$$

при обмеженнях виду:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 \leq b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 \leq b_2 \\ \dots \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 \leq b_n, \end{cases} \quad (3.2)$$

за умови невід'ємності змінних: $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$

Система (3.2) може бути несумісна. У цьому випадку задача ЛП не має розв'язків.

Припустимо, що система (3.2) сумісна.

Кожна з нерівностей (3.2) являє визначає напівплощину, обмежену відповідною прямою:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 = b_2 \\ \dots \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 = b_n \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Поведінка цільової функції (3.1) в рамках двовимірної ілюстрації може бути охарактеризована за допомогою ліній рівня (множини точок з її області визначення, в яких функція приймає одне і те ж фіксоване значення $c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 = \text{const}$).

Градієнтом функції $f(x)$ називається вектор, що вказує напрямком найбільш швидкого зростання функції і, відповідно, орієнтований перпендикулярно лініям рівня.

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \quad (3.3)$$

Для лінійної функції двох змінних лінія рівня являє собою пряму, перпендикулярну вектору \mathbf{c} , що є градієнтом цієї функції. Отже, якщо лінія рівня визначається рівнянням $f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 = \text{const}$, то цей вектор має вигляд $\mathbf{c} = \nabla(c_1 x_1 + c_2 x_2) = (c_1, c_2)$ і вказує напрямком зростання функції.

Якщо побудувати багатокутник системи обмежень (3.2) і графік функції $f(x) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 = \text{const}$, то задачі лінійного програмування можна дати наступну інтерпретацію:

«Знайти точку багатокутника розв'язків, в якій пряма $c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 = \text{const}$ є опорною та функція $f(x)$ при цьому досягає максимуму».

Таким чином, з геометричної точки зору задача максимізації зводиться до визначення такої точки області багатокутника обмежень, через яку проходить лінія рівня, що відповідає найбільшому з можливих значень.

Останнє означає, що для знаходження точки екстремуму в задачі ЛП слід спочатку побудувати лінію рівня для деякого довільного значення цільової функції. Потім необхідно здійснювати її паралельне пересування (так, щоб вона залишалася перпендикулярною вектору \mathbf{c}) доти, поки не буде досягнена така точка області допустимих розв'язків, з якої зміщення в напрямку вектору \mathbf{c} було б неможливе.

Такий метод розв'язання отримав назву графічного.

Розв'язання задачі пошуку мінімуму лінійної функції здійснюється аналогічно, з тією лише різницею, що зміщення за лініями рівня повинно проводитися в напрямку, протилежному градієнту цільової функції, тобто по вектору $(-\mathbf{c})$.

Слід відмітити, що, якщо багатокутник розв'язків обмежений, то пряма $c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 = \text{const}$ по відношенню до нього стає опорною двічі, набуваючи у двох протилежних точках максимального та мінімального значення.

Координати точки кожної опорної точки можна визначити, розв'язуючи систему рівнянь прямих, що обмежують область, та перетином яких є ця точка.

Якщо ж багатокутник розв'язків являє собою необмежену багатокутну область, то можливі два випадки.

Випадок 1. Пряма $c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 = const$, пересуваючись у напрямку вектору c чи протилежно йому, постійно перетинає багатокутник розв'язків і у жодній точці не є опорною відносно нього. У цьому випадку лінійна функція не обмежена на багатокутнику розв'язків як згори, так і знизу, та система не має рішень.

Випадок 2. Пряма $c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 = const$, пересуваючись, все ж таки стає опорною відносно багатокутника розв'язків. Тоді в залежності від виду області лінійна функція може бути обмеженою згори та необмеженою знизу, обмеженою знизу та необмеженою згори, або обмеженою як згори, так і знизу. У такому випадку задача може або мати розв'язок, або не мати його.

Розглянемо ще випадок, коли область розв'язків існує, а пряма $c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 = const$ паралельна одній з прямих, що її обмежують, і є опорною для точок, які лежать на ній.

Випадок 3. В цьому випадку задача має безліч розв'язків, які відповідають одному й тому ж екстремальному значенню цільової функції. У цьому випадку у якості розв'язку обирають довільну точку на відрізьку прямої, що обмежує область розв'язків, та розраховують значення цільової функції для цієї точки.

Наприкінці слід відмітити, що графічний метод має певні обмеження та застосовується тільки при розв'язанні симетричних задач двовимірного простору і лише деяких задач тривимірного простору, тому що досить важко побудувати багатогранник розв'язків, що утворюється в результаті перетину напівпросторів. Задачу для простору розмірності більше трьох зобразити графічно неможливо.

Більш детально теоретичні відомості з даної теми наведені у [1], стор. 85 – 97.

3.2 Завдання до роботи

Знайти максимальне та мінімальне значення цільової функції графічним методом.

Варіант 1 $f(x) = 50 x_1 + 40 x_2 + 20$

$$2 x_1 + 5 x_2 \leq 20$$

$$5 x_1 + 5 x_2 \leq 40$$

$$5 x_1 + 6 x_2 \leq 30$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

Варіант 2 $f(x) = x_1 + x_2 + 50$

$$x_1 + 2 x_2 \leq 14$$

$$-5 x_1 + 3 x_2 \leq 15$$

$$4 x_1 + 6 x_2 \geq 24$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

Варіант 3 $f(x) = 4 x_1 + 6 x_2 + 30$

$$3 x_1 + x_2 \geq 9$$

$$x_1 + 2 x_2 \geq 8$$

$$x_1 + 6 x_2 \geq 12$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

Варіант 4 $f(x) = 3 x_1 + 4 x_2 + 8$

$$2 x_1 + x_2 \leq 16$$

$$x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_1 \leq 7$$

$$x_2 \leq 6$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

Варіант 5 $f(x) = 3 x_1 - 2 x_2 + 30$

$$7 x_1 + 2 x_2 \geq 14$$

$$7 x_1 + 6 x_2 \leq 42$$

$$-x_1 + 2 x_2 \geq 2$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

Варіант 6 $f(x) = x_1 + x_2 + 25$

$$0 \leq x_1 \leq 1$$

$$0 \leq x_2 \leq 2$$

$$0 \leq x_1 + x_2 \leq 3$$

$$-1 \leq x_1 - x_2 \leq 0$$

Варіант 7 $f(x) = 3 x_1 + 4 x_2 - 15$

$$3 x_1 + 4 x_2 \leq 12$$

$$0 \leq x_1 \leq 3$$

$$0 \leq x_2 \leq 5$$

Варіант 8 $f(x) = 2 x_1 + 3 x_2 + 20$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$3 x_1 + x_2 \geq 4$$

$$x_1 + 5 x_2 \geq 4$$

$$0 \leq x_1 \leq 3$$

$$0 \leq x_2 \leq 3$$

Варіант 9 $f(x) = x_1 + x_2 + 16$

$$2 x_1 + x_2 \geq 3$$

$$x_1 + 3 x_2 \geq 4$$

$$x_1 + 2 x_2 \leq 8$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

Варіант 10 $f(x) = x_1 + 2 x_2 + 12$

$$8 x_1 + 3 x_2 \geq 12$$

$$-x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1 + x_2 \leq 7$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 1$$

Варіант 11 $f(x) = x_1 + x_2 + 25$

$$x_1 + 2 x_2 \leq 14$$

$$-5 x_1 + 3 x_2 \leq 15$$

$$4 x_1 + 6 x_2 \leq 24$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

Варіант 12 $f(x) = 2 x_1 + 3 x_2 + 5$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$6 x_1 - 2 x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 5 x_2 \geq 4$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

Варіант 13 $f(x) = x_1 + x_2 + 8$

$$x_1 + 2 x_2 \leq 10$$

$$x_1 + 2 x_2 \geq 2$$

$$2 x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

Варіант 14 $f(x) = 5x_1 + 2x_2 + 16$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 20$$

$$0 \leq x_1 \leq 7$$

$$0 \leq x_2 \leq 5$$

Варіант 15 $f(x) = x_1 + x_2 + 10$

$$x_1 + 3x_2 \geq 9$$

$$2x_1 + 1x_2 \leq 16$$

$$-4x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

Варіант 16 $f(x) = 5x_1 - 10x_2 - 20$

$$-2x_1 + x_2 \leq 1$$

$$-x_1 + x_2 \leq 2$$

$$3x_1 + x_2 \leq 8$$

$$-2x_1 + 3x_2 \geq -9$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

Варіант 17 $f(x) = 3x_1 + 4x_2 + 35$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$-x_1 + x_2 \geq -1$$

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$0 \leq x_1 \leq 1,5$$

$$x_2 \geq 0$$

Варіант 18 $f(x) = x_1 + 2x_2 + 5$

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

Варіант 19 $f(x) = 2x_1 - 3x_2 + 2,5$

$$-4x_1 + 5x_2 \leq 20$$

$$-2x_1 + x_2 \geq 6$$

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$5x_1 + x_2 \leq 9$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

Варіант 20 $f(x) = 2x_1 + 3x_2 + 6$

$$-4x_1 + 5x_2 \leq 20$$

$$5x_1 + 5x_2 \leq 40$$

$$5x_1 + 6x_2 \leq 30$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

Варіант 21 $f(x) = 8x_1 + 6x_2 + 15$

$$-8x_1 + 14x_2 \geq 14$$

$$x_1 + 5x_2 \leq 10$$

$$5x_1 - 9x_2 \geq 5$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

Варіант 22 $f(x) = 5x_1 + x_2 + 6$

$$2x_1 - 9x_2 \geq 18$$

$$2x_1 + 4x_2 \geq 3$$

$$5x_1 + 3x_2 \geq 30$$

Варіант 23 $f(x) = 3x_1 + 2x_2 + 11$

$$-4x_1 + 5x_2 \leq 29$$

$$3x_1 + x_2 \leq 14$$

$$5x_1 + 2x_2 \geq 30$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

Варіант 24 $f(x) = 10x_1 - 8x_2 + 15$

$$x_1 + 11x_2 \geq 11$$

$$3x_1 - x_2 \leq 12$$

$$5x_1 - x_2 \leq 11$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

Варіант 25 $f(x) = x_1 + x_2 + 20$

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$2x_1 + x_2 \geq 2$$

$$-1 \leq x_1 - x_2 \leq 2$$

$$0 \leq x_1 \leq 1$$

$$0 \leq x_2 \leq 2$$

3.3 Зміст звіту

3.3.1 Тема та мета роботи.

3.3.2 Розв'язання задачі ЛП графічним методом згідно з варіантом.

3.3.3 Висновки.

3.4 Приклади розв'язання задачі ЛП графічним методом

3.4.1 Приклад 1

Знайти максимальне значення цільової функції $f(x)$ при заданій системі обмежень:

$$f(x) = -2x_1 + 5x_2 \rightarrow \max \quad (3.4)$$

на множині $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid$

$$7x_1 + 2x_2 \geq 14$$

$$5x_1 + 6x_2 \leq 30 \quad (3.5)$$

$$3x_1 + 8x_2 \geq 24$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Рішення

На площині $x_1 \theta x_2$ побудуємо область розв'язків, обмежену прямими:

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 = 14 \\ 5x_1 + 6x_2 = 30 \\ 3x_1 + 8x_2 = 24 \end{cases} \quad (3.6)$$

та осями координат:

$$x_1 = 0,$$

$$x_2 = 0$$

Прямі (3.6) зручно будувати за відрізками, які вони відсікають на осях координат. Для цього представимо рівняння прямих (3.6) у нормованому вигляді:

$$\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{7} = 1$$

$$\frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{5} = 1 \quad (3.7)$$

$$\frac{x_1}{8} + \frac{x_2}{3} = 1$$

Кожна з прямих розділяє площину на дві $x_1 \theta x_2$ напівплощини, при цьому умові (3.5) відповідає область, яка знаходиться у першій напівчверті координатної площини.

Як видно з рис. 3.1, умові (3.5) відповідає область, обмежена трикутником ABC.

Для знаходження екстремального значення цільової функції $f(x)$ (3.4) у області розв'язків ABC побудуємо вектор $\overline{\text{grad}} f(x) = \bar{c}(-2; 5)$ та пряму $-2x_1 + 5x_2 = 0$.

Переміщуємо пряму $-2x_1 + 5x_2 = 0$ за напрямком вектору $\overline{\text{grad}} f(x)$ до граничної точки області розв'язків (трикутник ABC). Як видно з рис. 3.1, цією точкою є точка **B**.

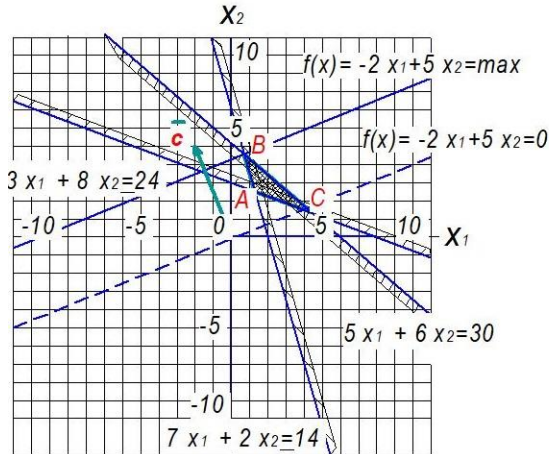


Рисунок 3.1 – Розв'язання ЗЛП графічним методом (приклад 1)

Знаходимо координати точки B як точки перетину прямих:

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 = 14 \\ 5x_1 + 6x_2 = 30 \end{cases} \quad (3.8)$$

$$\begin{cases} -21x_1 - 6x_2 = -42 \\ 5x_1 + 6x_2 = 30 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -16x_1 &= -12; \quad x_1 = 0,75; \\ x_2 &= \frac{14 - 7 \cdot 0,75}{2} = 4,375 \end{aligned}$$

Таким чином, координати опорної точки, що відповідає максимальному значенню цільової функції: $B(0,75; 4,375)$.

Значення цільової функції у цій точці:

$$f(x)_{\max} = -2 \cdot 0,75 + 5 \cdot 4,375 = 20,375$$

Результат розв'язання задачі.

У області розв'язків, заданій системою обмежень (3.5) цільова функція (3.4) досягає максимального значення у точці $B(0,75; 4,375)$.

$$f(x)_{max} = 20,375$$

3.4.2 Приклад 2

Завдання

Знайти мінімальне значення цільової функції $f(x)$ при заданій системі обмежень:

$$f(x) = x_1 + x_2 \rightarrow \min \quad (3.9)$$

$$\text{на множині } D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid$$

$$2x_1 + 4x_2 \leq 16$$

$$-4x_1 + x_2 \leq 8 \quad (3.10)$$

$$x_1 + 3x_2 \geq 9$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Рішення

На площині $x_1 \theta x_2$ побудуємо область розв'язків, обмежену прямими:

$$2x_1 + 4x_2 = 16$$

$$-4x_1 + x_2 = 8 \quad (3.11)$$

$$x_1 - 3x_2 = 9$$

та осями координат:

$$x_1 = 0,$$

$$x_2 = 0$$

Прямі (3.11) будуюмо за відрізками, які вони відсікають на осях координат. Для цього представимо рівняння прямих (3.11) у нормованому вигляді:

$$\frac{x_1}{8} + \frac{x_2}{4} = 1$$

$$\frac{x_1}{-2} + \frac{x_2}{8} = 1 \quad (3.12)$$

$$\frac{x_1}{9} + \frac{x_2}{-3} = 1$$

Кожна з прямих розділяє площину на дві $x_1 \theta x_2$ напівплощини, при цьому умові (3.10) відповідає область, яка знаходиться у першій напівчверті координатної площини.

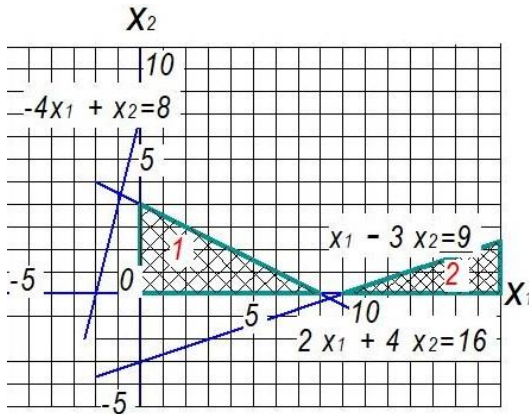


Рисунок 3.2 – Розв'язання ЗЛП графічним методом (приклад 2)

Як видно з рис. 3.2, умові (3.10) не відповідає жодна область, тобто система (3.10) не сумісна.

Задача не має розв'язків.

4 ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 4. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЛП СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ

Мета роботи: ознайомитися з симплекс-методом розв'язання задач ЛП та отримати практичні навички його використання.

4.1 Теоретичні відомості

4.1.1 Суть симплекс-методу. Допустимі та базисні розв'язки

Симплекс-метод - це метод послідовного переходу від одного базисного розв'язку (вершини багатогранника розв'язків) системи обмежень задачі лінійного програмування до іншого базисного розв'язку доти, доки функція мети не прийме оптимального значення (максимуму або мінімуму).

Симплекс-метод є універсальним методом, яким можна розв'язати будь-яку задачу лінійного програмування, тоді як графічний метод придатний лише системи обмежень із двома змінними.

Симплекс у n -вимірному просторі являє собою найпростіший багатогранник: $R^n \rightarrow (n + 1)$ -гранник (рис. 4.1)

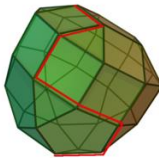


Рисунок 4.1 – Багатогранник обмежень симплекс-методу

При цьому кожній кутовій точці багатогранника розв'язків відповідає **опорний план** задачі ЛП.

Перед тим, як перейти до алгоритму симплекс-методу, введемо декілька визначень.

Нехай є система m обмежень із n змінними ($m < n$).

Допустимим розв'язком є розв'язок, який містить m **основних (базисних)** змінних і $n - m$ **неосновних (небазисних, або вільних)** змінних. При цьому основні (базисні) змінні, як правило, відмінні від нуля, тобто є додатними числами. Неосновні змінні в базисному розв'язку дорівнюють нулю.

Базисний розв'язок - розв'язок системи рівнянь $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$, якщо вектори умов при його **ненульових** компонентах лінійно-незалежні.

Оскільки оптимальний розв'язок досягається в кутовій точці області допустимих розв'язків, то шукати **оптимальний розв'язок** слід серед **опорних розв'язків**.

Спочатку слід знайти довільний опорний розв'язок, який є однією з вершин багатогранника розв'язків (рис. 4.1). Разом з сусідніми з нею вершинами вона утворює симплекс в просторі вільних змінних.

Далі слід переходити до сусідньої вершини симплекса з кращим значенням критерію, рухаючись за одним з ребер симплекса (краще по ребру, ближчому до вектору градієнта функції).

4.1.2 Алгоритм симплекс методу

Крок 1. Привести задачу лінійного програмування до **канонічної форми**.

Для цього слід:

- перенести вільні члени у праву частину;
- якщо серед вільних членів у правій частині виявляться від'ємні, то відповідне рівняння чи нерівність слід помножити на -1 ;
- в кожне обмеження у вигляді нерівності ввести додаткові змінні: зі знаком "плюс", якщо у вихідній нерівності знак "менше або дорівнює", та зі знаком "мінус", якщо у вихідній нерівності знак "більше або дорівнює".

Канонічна форма ЗЛП:

$$F(\bar{x}) = c_1 \cdot x_1 + \dots + c_m \cdot x_m + c_{m+1} \cdot x_{m+1} \dots + c_n \cdot x_n \rightarrow \max (\min)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} \cdot x_1 + \dots + a_{1m} \cdot x_m + a_{1m+1} \cdot x_{m+1} \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + \dots + a_{2m} \cdot x_m + a_{2m+1} \cdot x_{m+1} \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + \dots + a_{mm} \cdot x_m + a_{mm+1} \cdot x_{m+1} \dots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, n} \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Крок 2. Якщо в отриманій системі m рівнянь, то m змінних прийняти за основні, виразити основні змінні через неосновні та

знайти відповідний базисний розв'язок. Якщо знайдений базисний розв'язок виявиться допустимим, перейти до допустимого базисного розв'язку.

Крок 3. Виразити лінійну форму через неосновні змінні допустимого базисного розв'язку.

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_m + a'_{1m+1} \cdot x_{m+1} \dots + a'_{1n} \cdot x_n = b'_1 \\ 0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_m + a'_{2m+1} \cdot x_{m+1} \dots + a'_{2n} \cdot x_n = b'_2 \\ \dots \\ 0 \cdot x_1 + \dots + 1 \cdot x_m + a'_{mm+1} \cdot x_{m+1} \dots + a'_{mn} \cdot x_n = b'_m \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, n} \end{array} \right. \quad (4.2)$$

Якщо знаходиться максимум (мінімум) лінійної форми й у її вираженні немає неосновних змінних з від'ємними (додатними) коефіцієнтами, то критерій оптимальності виконаний і отримане базисний розв'язок є оптимальним – розв'язання закінчене.

Якщо при знаходженні максимуму (мінімуму) лінійної форми в її вираженні є одна або кілька неосновних змінних з від'ємними (додатними) коефіцієнтами, перейти до нового базисного розв'язку.

Крок 4. З неосновних змінних, що входять у лінійну форму з від'ємними (додатними) коефіцієнтами, вибирають ту, якій відповідає найбільший (за модулем) коефіцієнт, переводять її в основні та повертаються до кроку 2.

При розв'язанні задачі ЛП симплекс-методом слід враховувати наступні умови.

Якщо допустимий базисний розв'язок дає оптимум цільової функції (критерій оптимальності виконаний), а у її вираженні через неосновні змінні відсутня хоча б одна з них, то отриманий оптимальний розв'язок не єдиний.

Якщо у виразі цільової функції у разі її максимізації є неосновна змінна з від'ємним коефіцієнтом (у разі мінімізації - з додатним), а в усі рівняння системи обмежень цього кроку зазначена змінна входить також з від'ємними коефіцієнтами або відсутня, то лінійна форма за даної системи обмежень не обмежена і її максимальне (мінімальне) значення записують як $F_{max} = \infty$ ($F_{min} = -\infty$).

4.1.3 Розв'язання задачі ЛП симплекс-методом за допомогою таблиць

Розглянемо розв'язок задачі ЛП симплекс-методом за допомогою таблиць. У симплекс-таблиці можна виділити наступні блоки (див. табл. 4.1).

Таблиця 4.1 – Основні блоки симплекс-таблиці

		Коефіцієнти c_j цільової функції)	
C_6	БЗ	Шапка матриці (найменування невідомих)	b
Коефіцієнти цільової функції при базисних невідомих	Найменування базисних змінних	Поточна матриця технологічних змінних	Підсумковий стовпець (значення базисних змінних b_i)
		Оціночний рядок (оцінки Δ_j)	Значення цільової функції

Симплекс-таблиця будується для будь-якого опорного розв'язку.

Нехай опорний розв'язок $\bar{x}^{(l)} = (x_1^l, x_2^l, \dots, x_m^l, \dots, 0, \dots, 0)$.

Симплекс-таблиця для цього розв'язку має вигляд табл. 4.2.

Таблиця 4.2 – Симплекс-таблиця для заданого опорного розв'язку

	F	c_1	c_2	...	c_m	c_{m+1}	...	c_s	...	c_j	...	c_n	
C_6	БЗ	x_1	x_2	...	x_m	x_{m+1}	...	x_s	...	x_j	...	x_n	b
c_1	x_1	1	0	...	0	a_{1m+1}	...	a_{1s}	...	a_{1j}	...	a_{1n}	b'_1
c_2	x_2	0	1	...	0	a_{2m+1}	...	a_{2s}	...	a_{2j}	...	a_{2n}	b'_2
...
c_k	x_k	0	0	...	0	a_{km+1}	...	a_{ks}	...	a_{kj}	...	a_{kn}	b'_k
...
c_i	x_i	0	0	...	0	a_{im+1}	...	a_{is}	...	a_{ij}	...	a_{in}	b'_i
...
c_m	x_m	0	0	...	1	a_{mm+1}	...	a_{ms}	...	a_{mj}	...	a_{mn}	b'_m
	F	0	0	...	0	Δ_{m+1}	...	Δ_s	...	Δ_j	...	Δ_n	$F(x)$

Розглянемо послідовність знаходження оптимального розв'язку за допомогою симплекс-таблиці.

4.1.3.1 **Перевірка умови оптимальності.** Умова оптимальності (визначається для небазисних змінних):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{для задачі на максимум:} \\ \Delta_j = \left(\sum c_{bi} \cdot a_{ij} \right) - c_j \geq 0 \\ \text{для задачі на мінімум:} \\ \Delta_j = \left(\sum c_{bi} \cdot a_{ij} \right) - c_j \leq 0 \end{array} \right. \quad (4.3)$$

4.1.3.2 Якщо є стовпці, для яких умова (4.3) не виконується, то розв'язок не оптимальний. Вибираємо серед них стовпець s , для якого $|\Delta_j| = \max$. Назвемо його **стовпцем дозволу**.

Небазисна змінна з цього стовпця додається до базисних змінних.

4.1.3.3 **Рядок дозволу** вибирається за допомогою оцінки θ , яка дорівнює відношенню вільних членів до додатних коефіцієнтів стовпця дозволу:

$$\vartheta = \frac{b_k}{a_{ks}}; a_{ks} > 0 \quad (4.4)$$

Рядок дозволу відповідає умові θ_{\min} .

Базисна змінна, що знаходиться у цьому рядку, виводиться зі списку базисних змінних.

Елемент, що знаходиться на перетині стовпця дозволу та рядка дозволу, називається **елементом дозволу**.

4.1.3.4 **Поточна симплекс-таблиця перетворюється** за наступними правилами:

- елементи рядку дозволу діляться на елемент дозволу:

$$a_{kj}^{l+1} = \frac{a_{kj}^l}{a_{ks}^l}; b_k^{l+1} = \frac{b_k^l}{a_{ks}^l}, \quad (4.5)$$

- стовпець дозволу замінюється одиничним;

- всі інші елементи симплекс-таблиці можуть бути перераховані за правилом чотирикутника.

На діагоналі, що з'єднує шуканий елемент з елементом дозволу, подумки будується чотирикутник. Нове значення будь-якого елемента дорівнює попередньому значенню мінус добуток елементів на протилежній діагоналі, поділений на елемент дозволу:

$$a_{ij}^{l+1} = a_{ij}^l - \frac{a_{kj}^l \cdot a_{is}^l}{a_{ks}^l}, \quad (4.6)$$

$$b_i^{l+1} = b_i^l - \frac{b_k^l \cdot a_{is}^l}{a_{ks}^l}$$

4.1.3.5 У новому опорному плані **базисні змінні** ($x_1^{l+1} \dots x_m^{l+1}$) прирівнюються до перерахованих вільних членів

($b_1^{l+1} \dots b_m^{l+1}$), а **небазисні** приймаються рівними нулю.

4.1.3.6 **Нова симплекс-таблиця** перевіряється на умову оптимальності. Якщо умова виконується, її опорний план приймається за оптимальний. Якщо ні – процедура повторюється з пункту 4.1.3.2.

Більш детально теоретичні відомості з даної теми наведені у [1], стор. 102 – 113.

4.2 Завдання до роботи

4.2.1 Розв'язати задачу ЛП симплекс-методом.

На виготовлення двох видів продукції (П1 і П2) використовується три види ресурсів А1, А2, А3. Запаси ресурсів, норми їх витрат і прибуток від реалізації 1 кг продукції задані в таблиці 4.3 з урахуванням варіантів.

За допомогою симплекс-методу знайти такий план виробництва, який забезпечить максимальний прибуток.

4.2.2 Дати економічне обґрунтування отриманим результатам.

Таблиця 4.3 – Варіанти завдань

Вар.	Витрати ресурсів на од. продукції						Наявність ресурсів			Прибуток	
	А ₁		А ₂		А ₃		А ₁	А ₂	А ₃	П ₁	П ₂
	П ₁	П ₂	П ₁	П ₂	П ₁	П ₂					
1	13	7	17	16	4	9	361	520	248	11	8
2	1	1	4	7	1	4	18	93	48	24	36
3	3	2	2	3	1	1	101	99	37	27	24
4	4	13	5	6	11	5	379	197	335	25	12
5	3	1	9	4	3	4	45	144	96	9	8
6	8	6	2	4	5	7	250	180	120	18	7
7	3	7	12	10	9	16	120	215	140	12	11
8	7	4	6	18	4	12	234	326	250	16	21
9	2	9	8	7	3	18	150	424	328	9	13
10	4	10	16	9	7	6	300	212	116	4	7
11	10	12	15	4	8	9	220	168	358	15	8
12	5	5	10	8	6	3	145	136	214	21	18
13	8	10	7	3	2	5	360	228	182	8	9
14	4	6	4	6	5	8	215	154	310	10	14
15	6	8	9	5	9	4	118	99	200	14	12
16	5	3	2	11	1	5	324	162	140	22	8
17	2	9	6	12	12	10	280	327	100	7	9
18	8	12	11	20	16	20	160	118	194	9	6
19	12	16	4	10	7	12	146	240	205	18	16
20	15	20	12	6	8	14	78	360	175	6	8
21	6	18	5	4	4	6	118	180	108	16	9
22	11	3	7	5	9	5	230	154	258	8	4
23	16	7	18	8	3	4	164	312	186	14	13
24	8	8	20	12	6	8	256	276	252	5	6
25	9	6	4	16	14	3	148	268	176	7	5

4.3 Зміст звіту

4.3.1 Тема та мета роботи.

4.3.2 Короткі теоретичні відомості.

4.3.3 Розв'язання задачі ЛП симплекс-методом згідно з варіантом.

4.3.4 Економічне обґрунтування отриманих результатів.

4.3.5 Висновки.

4.4 Приклад розв'язання задачі ЛП симплекс-методом

4.4.1 Вихідні дані

На виготовлення 1 м² склотканини типу А, В і С потрібно три види сировини (I, II і III) та деякий час обробки на спеціальному обладнанні. Дані про норми витрат сировини та час обробки у місяць наведені в табл. 4.4.

Ринок збуту склотканини вважається необмеженим. Скласти план випуску склотканини, при якому дохід від її реалізації буде максимальним.

Таблиця 4.4 - Вихідні дані задачі ЛП

	А	В	С	Ліміт
Сировина I	5	2	3	300
Сировина II	4	6	5	316
Сировина III	3	8	6	360
Час обробки	5	6	6	392
Ціна 1 м ²	9	6	8	

4.4.2 Математична модель задачі

Складемо математичну модель даної задачі і приведемо її до канонічного вигляду.

Нехай:

x_1 - місячний обсяг випуску склотканини типу А;

x_2 - місячний обсяг випуску склотканини типу В;

x_3 - місячний обсяг випуску склотканини типу С,

причому x_1, x_2, x_3 - невід'ємні: $x_j \geq 0, j = \overline{1,3}$.

Знайти такий план випуску, при якому дохід від її реалізації:

$$F = 9 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 8 \cdot x_3 \rightarrow \max,$$

за умови, що витрати сировини і часу обробки на виробництво склотканини А, В і С не перевищують відповідних лімітів:

$$5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \leq 300$$

$$4 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 \leq 316$$

$$3 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 \leq 360$$

$$5 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 \leq 392$$

Приведемо задачу до канонічного вигляду. Для цього введемо чотири невід'ємні змінні x_4, x_5, x_6, x_7 (за кількістю нерівностей у системі обмежень) і додамо кожному з них до лівої частини відповідної нерівності, в результаті чого отримаємо систему рівнянь:

$$5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + x_4 = 300$$

$$4 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 + x_5 = 316$$

$$3 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 + x_6 = 360$$

$$5 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 + x_7 = 392$$

Економічний сенс додаткових змінних - кількість невикористаного сировини і часу по кожному виду склотканини.

Додамо ці змінні в цільову функцію з нульовими коефіцієнтами.

Задача у канонічній формі має вигляд:

$$F = 9 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 8 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 \rightarrow \max$$

$$5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + x_4 = 300$$

$$4 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 + x_5 = 316$$

$$3 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 + x_6 = 360$$

$$5 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 + x_7 = 392$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,7}$$

4.4.3 Визначення базису та початкового опорного плану

Запишемо систему обмежень у векторній формі:

$$\overline{P}_1 \cdot \overline{X}_1 + \overline{P}_2 \cdot \overline{X}_2 + \overline{P}_3 \cdot \overline{X}_3 + \overline{P}_4 \cdot \overline{X}_4 + \overline{P}_5 \cdot \overline{X}_5 + \overline{P}_6 \cdot \overline{X}_6 + \overline{P}_7 \cdot \overline{X}_7 = \overline{P}_0$$

де
$$\overline{P}_0 = \begin{bmatrix} 300 \\ 316 \\ 360 \\ 392 \end{bmatrix};$$

$$\overline{P}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}; \overline{P}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix}; \overline{P}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}; \overline{P}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \overline{P}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \overline{P}_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \overline{P}_7 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Базисні вектори: $\overline{P}_4; \overline{P}_5; \overline{P}_6; \overline{P}_7$.

Вихідний опорний план: $\overline{X} = (0; 0; 0; 300; 316; 360; 392)$

Цільова функція для опорного плану:

$$F = 9 \cdot 0 + 6 \cdot 0 + 8 \cdot 0 + 0 \cdot 300 + 0 \cdot 316 + 0 \cdot 360 + 0 \cdot 392 = 0$$

4.4.4 Перша симплекс-таблиця. Перевірка умови оптимальності

Складемо першу симплекс-таблицю (табл. 4.5) та перевіримо вихідний опорний план на оптимальність.

Таблиця 4.5 – Перша симплекс-таблиця

C ₆	БЗ	9	6	8	0	0	0	0	P ₀	θ
		P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	P ₇		
0	P ₄	5	2	3	1	0	0	0	300	60
0	P ₅	4	6	5	0	1	0	0	316	79
0	P ₆	3	8	6	0	0	1	0	360	120
0	P ₇	5	6	6	0	0	0	1	392	78,4
		-9	-6	-8	0	0	0	0	0	

$$\Delta_1 = 0 \cdot 5 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 5 - 9 = -9$$

$$\Delta_2 = 0 \cdot 2 + 0 \cdot 6 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 6 - 6 = -6$$

$$\Delta_3 = 0 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 6 + 0 \cdot 6 - 8 = -8$$

Розв'язок не є оптимальним, оскільки умова оптимальності для задачі на максимум (4.3) не виконана.

Вибираємо значення $|\Delta_j| = \max$.

В даному випадку це значення $|\Delta_1| = 9$.

Стовпець P₁ є стовпцем дозволу, тому змінну x₁ введемо в розряд базисних.

Визначимо змінну, яку будемо виводити з базисних.

Знайдемо оцінки θ для додатних значень стовпця P₁.

$$\theta_{\min} = \theta_1 = 60.$$

Рядок 1 є рядком дозволу.

Виводимо з базису змінну x₄.

Елемент дозволу: a₁₁ = 5.

Складаємо другу симплекс-таблицю, перерахувавши її значення за формулами (4.4), (4.5).

4.4.5 Друга симплекс-таблиця. Перевірка умови оптимальності

Друга симплекс-таблиця наведена у табл. 4.6.

Таблиця 4.6 – Друга симплекс-таблиця

C ₆	B3	9	6	8	0	0	0	0	P ₀	θ
		P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	P ₇		
9	P ₁	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0	0	60	100
0	P ₅	0	$\frac{22}{5}$	$\frac{13}{5}$	$-\frac{4}{5}$	1	0	0	76	$29\frac{3}{13}$
0	P ₆	0	$\frac{34}{5}$	$\frac{21}{5}$	$-\frac{3}{5}$	0	1	0	180	$42\frac{6}{7}$
0	P ₇	0	4	3	-1	0	0	1	92	$30\frac{2}{3}$
		0	$-\frac{12}{5}$	$-\frac{13}{5}$	$\frac{9}{5}$	0	0	0	540	

З табл. 4.6 другий опорний план:

$$\bar{X} = (60; 0; 0; 0; 76; 180; 92)$$

Цільова функція для опорного плану:

$$F = 9 \cdot 60 + 6 \cdot 0 + 8 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 76 + 0 \cdot 180 + 0 \cdot 92 = 540$$

Перевіримо опорний план на оптимальність.

$$\Delta_2 = 9 \cdot \frac{2}{5} + 0 \cdot \frac{22}{5} + 0 \cdot \frac{34}{5} + 0 \cdot 4 - 6 = -\frac{12}{5}$$

$$\Delta_3 = 9 \cdot \frac{3}{5} + 0 \cdot \frac{13}{5} + 0 \cdot \frac{21}{5} + 0 \cdot 3 - 8 = -\frac{13}{5}$$

$$\Delta_4 = 9 \cdot \frac{1}{5} - 0 \cdot \frac{4}{5} - 0 \cdot \frac{3}{5} - 0 \cdot 1 - 0 = \frac{9}{5}$$

Розв'язок не є оптимальним, оскільки умова оптимальності для задачі на максимум (4.3) не виконана.

Вибираємо значення $|\Delta_j| = \max$.

В даному випадку це значення $|\Delta_3| = \frac{13}{5}$.

Стовпець P₃ є стовпцем дозволу, тому змінну x₃ введемо в розряд базисних.

Визначимо змінну, яку будемо виводити з базисних.

Знайдемо оцінки θ для додатних значень стовпця P₃.

$$\theta_{\min} = \theta_2 = 29\frac{3}{13}.$$

Рядок 2 є рядком дозволу. Виводимо з базису змінну x₅.

Елемент дозволу: $a_{32} = \frac{13}{5}$.

У останньому рядку є від'ємні оцінки, тому розв'язок не є оптимальним. Складаємо третю симплекс-таблицю, перерахувавши її значення за формулами (4.5), (4.6).

4.4.6 Третя симплекс-таблиця. Перевірка умови оптимальності

Третя симплекс-таблиця наведена у табл. 4.7.

Таблиця 4.7 – Третя симплекс-таблиця

C ₆	БЗ	9	6	8	0	0	0	0	P ₀
		P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	P ₇	
9	P ₁	1	$-\frac{8}{13}$	0	$\frac{5}{13}$	$-\frac{3}{13}$	0	0	$\frac{552}{13}$
8	P ₃	0	$\frac{22}{13}$	1	$-\frac{4}{13}$	$\frac{5}{13}$	0	0	$\frac{380}{13}$
0	P ₆	0	$-\frac{4}{13}$	0	$\frac{9}{13}$	$-\frac{21}{13}$	1	0	$\frac{744}{13}$
0	P ₇	0	$-\frac{14}{13}$	0	$-\frac{1}{13}$	$-\frac{15}{13}$	0	1	$\frac{56}{13}$
		0	2	0	1	1	0	0	616

З табл. 4.7 третій опорний план:

$$\bar{X} = \left(\frac{552}{13}; 0; \frac{380}{13}; 0; 0; \frac{744}{13}; \frac{56}{13} \right)$$

Цільова функція для опорного плану:

$$F = 9 \cdot \frac{552}{13} + 6 \cdot 0 + 8 \cdot \frac{380}{13} + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 76 + 0 \cdot \frac{744}{13} + 0 \cdot \frac{56}{13} = 616$$

Перевіримо опорний план на оптимальність.

$$\Delta_2 = -9 \cdot \frac{8}{13} + 8 \cdot \frac{22}{13} - 0 \cdot \frac{4}{13} - 0 \cdot \frac{14}{13} - 6 = 2$$

$$\Delta_4 = 9 \cdot \frac{5}{13} + 8 \cdot \frac{4}{13} - 0 \cdot \frac{9}{13} + 0 \cdot \frac{1}{13} - 0 = 1$$

$$\Delta_5 = -9 \cdot \frac{3}{13} + 8 \cdot \frac{5}{13} - 0 \cdot \frac{21}{13} - 0 \cdot \frac{15}{13} - 0 = 1$$

Оскільки умова оптимальності для задачі на максимум (4.3) виконана, розв'язок є оптимальним.

Таким чином, для забезпечення максимального прибутку слід виготовляти в місяць:

$$\frac{552}{13} \approx 42,46 \text{ м}^2 \text{ склотканини типу А;}$$

$$\frac{380}{13} \approx 29,23 \text{ м}^2 \text{ склотканини типу С.}$$

Склотканину типу В не виготовляти.

При цьому сировина типу І та ІІ буде використана повністю.

$\frac{744}{13}$ одиниці сировини ІІІ та $\frac{56}{13}$ годин часу обробки залишаться невикористаними.

Прибуток від реалізації становить: $F = 616$ грн.

5 ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 5. РОЗВ'ЯЗАННЯ ТРАНСПОРТНИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ ПОТЕНЦІАЛІВ

Мета роботи: ознайомитися з розв'язанням транспортних задач методом потенціалів та отримати практичні навички його використання.

5.1 Теоретичні відомості

5.1.1 Суть транспортної задачі

Транспортна задача (задача Монжа - Канторовича) являє собою задачу ЛП спеціального виду, суть якої полягає у знаходженні оптимального плану перевезень однорідного продукту з однорідних пунктів постачання в однорідні пункти споживання на однорідних транспортних засобах з мінімальними витратами перевезення.

Для класичної транспортної задачі існує декілька типів критеріїв оптимальності:

- критерій вартості (досягнення мінімуму сумарних витрат на перевезення);
- критерій відстані (досягнення мінімуму сумарної довжини перевезення);
- критерій часу (досягнення мінімуму сумарного часу перевезення).

5.1.2 Математична модель транспортної задачі

Математична модель класичної транспортної задачі може бути представлена у наступному вигляді.

Нехай у m пунктах постачання A_i ($i = 1 \dots m$) знаходиться деякий вантаж у об'ємах відповідно a_1, a_2, \dots, a_m .

Цей вантаж слід доставити n споживачам B_j ($j = 1 \dots n$) у об'ємах відповідно b_1, b_2, \dots, b_n .

Вартість перевезення одиниці вантажу з пункту A_i до пункту B_j задана матрицею C_{ij} :

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2j} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

де c_{ij} – вартість перевезення вантажа з пункту A_i до пункту B_j .

Кількість об'єму вантажу, який перевозиться з пункту A_i до пункту B_j , задана матрицею X_{ij} :

$$X_{ij} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1j} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2j} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{i1} & x_{i2} & \dots & x_{ij} & \dots & x_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mj} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

$x_{ij} \geq 0;$

Необхідно скласти такий план перевезення вантажу з пунктів A_i ($i = 1 \dots m$) до пунктів B_j ($j = 1 \dots n$), щоб цільова функція $f(x_{ij})$ була мінімальною:

$$f(x_{ij}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} \rightarrow \min \quad (5.3)$$

Необхідною умовою розв'язання транспортної задачі є умова балансу, згідно з якою сумарний об'єм пропозицій (вантажів, наявних у пунктах постачання) повинен дорівнювати сумарному об'єму попиту на вантажі у пунктах споживання:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad (5.4)$$

Якщо умова (5.4) не виконується, транспортна задача є незбалансованою (відкритою), і її треба приводити до збалансованого вигляду за наступними правилами:

– якщо $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$, то вводиться фіктивний пункт споживання B_{n+1} ;

– якщо $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$, то вводиться фіктивний пункт постачання A_{m+1} .

Наявність **фіктивного пункту споживання** означає, що весь призначений для нього вантаж залишається у відповідних пунктах постачання, тобто, вантаж не перевозиться й $c_{i,n+1} = 0$, ($i = 1 \dots m$).

Наявність **фіктивного пункту постачання** означає, що у пунктах споживання, вантаж до яких повинен бути перевезений саме з нього, буде відповідна нестача, тобто, вантаж не перевозиться й $c_{m+1, j} = 0$, ($j = 1 \dots n$).

5.1.3 Транспортна таблиця

У загальному вигляді під назвою «транспортна задача» розуміють широке коло задач з єдиною математичною моделлю, які відносяться до задачі ЛП і можуть бути вирішені методами оптимізації.

Однак, існують спеціальні методи розв'язання транспортної задачі, які дозволяють суттєво спростити її розв'язання.

Одним з таких методів є **метод потенціалів**, який можна трактувати як різновид симплексних процедур. Він являє собою ітеративний процес, на кожному кроці якого розглядається деякий поточний базисний план, перевіряється його оптимальність та, при необхідності, визначається перехід до «кращого» базисного плану.

Процес розв'язання транспортної задачі зручно оформляти у вигляді послідовності таблиць.

Якщо привести умови транспортної задачі до канонічної форми задачі ЛП, то отримаємо матрицю розмірністю $(m + n) \times mn$, з якої формується **транспортна таблиця**.

Рядки транспортної таблиці відповідають пунктам постачання A_i , а стовпці - пунктам споживання B_j .

В останній клітині кожного рядка зазначають a_i - об'єм запасу вантажу у даному пункті постачання.

В останній клітині кожного стовпця зазначають b_j - об'єм потреби вантажу у даному пункті споживання.

Усі клітини таблиці, крім тих, які розташовані в нижньому рядку і правому стовпці, містять інформацію про перевезення вантажу з i -го пункту в j -й:

– у лівому верхньому кутку: c_{ij} - вартість перевезення одиниці вантажу між цими пунктами;

– у центральній частині: x_{ij} - кількість об'єму вантажу, який перевозиться між цими пунктами;

– в правому нижньому кутку (для вільних клітин): оцінки s_{ij} , за якими перевіряється умова оптимальності.

Клітини, які містять нульові перевезення ($x_{ij} = 0$), називають *вільними*, а ненульові ($x_{ij} > 0$) – *зайнятими (базисними)*.

5.1.4 Формування первісного опорного плану

Розв'язання транспортної задачі починається з формування первісного допустимого базисного плану за допомогою одного з спеціальних методів (північно-західного кута, мінімальної вартості, подвійної переваги та ін.).

5.1.4.1 Метод північно-західного кута

Метод північно-західного кута полягає у тому, що заповнення транспортної таблиці починається з лівої верхньої (умовно званої «північно-західної») клітини (1,1), рухаючись потім від неї за рядком вправо або за стовпцем униз.

У клітину (1,1) заноситься значення $x_{11} = \min(a_1; b_1)$.

Якщо $a_1 > b_1$, то $x_{11} = b_1$ і перший споживач буде повністю задоволений. Інші елементи цього стовпця $x_{i1} = 0$ для $i = (2 \dots m)$.

Рухаючись праворуч за першим рядком таблиці, у сусідню клітину заноситься значення $x_{12} = \min(a_1 - b_1; b_2)$.

Якщо $a_1 - b_1 < b_2$, то $x_{12} = a_1 - b_1$, при цьому запаси першого постачальника вичерпані. Інші елементи цього рядку $x_{1j} = 0$ для $j = (3 \dots n)$.

Після цього процес повторюється для наступного постачальника, поки не будуть вичерпані усі ресурси.

Якщо $a_1 < b_1$, то $x_{11} = a_1$, запас першого споживача вичерпаний, інші елементи цього рядку $x_{1j} = 0$ для $j = (2 \dots n)$.

Рухаючись вниз за першим стовпцем таблиці, у сусідню клітину заноситься значення $x_{21} = \min(a_2; b_1 - a_1)$.

Якщо $b_1 - a_1 < a_2$, то $x_{21} = b_1 - a_1$, при цьому другий споживач буде повністю задоволений. Інші елементи цього стовпця $x_{i2} = 0$ для $i = (3 \dots m)$.

Після цього процес повторюється для наступного споживача, поки вантаж всіх постачальників не буде розподілений між споживачами.

5.1.4.2 Метод мінімальної вартості

Сутність *методу мінімальної вартості* полягає у тому, що попередньо проглядаються тарифи таблиці та насамперед заповнюється клітина з мінімальним значенням вартості. У цю клітину записується максимально можливе значення поставки.

Після цього із розгляду виключають рядок, що відповідає постачальнику, запаси якого повністю витрачені, або стовпець, який відповідає споживачеві, попит якого повністю задоволений.

З клітин таблиці, що залишилися, знову вибирають клітину з найменшою вартістю. Процес розподілу закінчується, коли запаси постачальників вичерпані, а попит споживачів повністю задоволений. В результаті отримуємо опорний план, який має містити завантажені клітини.

5.1.4.3 Метод подвійної переваги

Сутність методу подвійної переваги полягає у тому, що під час заповнення опорного плану у кожному рядку й у кожному стовпці вибираються комірки з найменшими тарифами.

Спочатку віддають перевагу клітинам з мінімальними тарифами як за рядком, так і за стовпцем (подвійна перевага), а потім вже тільки за рядком або за стовпцем.

У процесі заповнення транспортної таблиці можуть одночасно виключатися рядок і стовпець. Так буває, коли повністю вичерпується запас вантажу та повністю задовольняється попит (вироджена задача).

В такому випадку у одну з вільних клітин слід записати число 0 – «нуль завантаження», умовно вважаючи цю клітину зайнятою. Однак число 0 записується в ті вільні клітини, які не утворюють циклів із раніше зайнятими клітинами.

В результаті отримуємо початковий опорний план:

$$X_{ij} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1j} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2j} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{i1} & x_{i2} & \dots & x_{ij} & \dots & x_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mj} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}, \quad (5.5)$$

де $x_{ij} \geq 0$ для базисних клітин;
 $x_{ij} = 0$ для вільних клітин.

5.1.5 Перевірка умови оптимальності опорного плану за допомогою методу потенціалів

Для того, щоб опорний план (5.5) був оптимальним, необхідно і достатньо існування чисел (потенціалів) $u_i, i = (1 \dots m)$ та $v_j, j = (1 \dots n)$, таких, що:

- для кожної базисної клітки ($x_{ij} > 0$) сума потенціалів повинна дорівнювати вартості перевезення одиниці вантажу:

$$u_i + v_j = c_{ij}; \quad (5.6)$$

- для кожної вільної клітки ($x_{ij} = 0$) сума потенціалів повинна бути меншою або дорівнювати вартості перевезення одиниці вантажу:

$$u_i + v_j \leq c_{ij}. \quad (5.7)$$

Таким чином, для перевірки плану оптимальності необхідно спочатку побудувати систему потенціалів.

Систему потенціалів можна побудувати лише не виродженого опорного плану, тобто такого, який містить $m+n-1$ ненульових базисних клітин.

Для такого плану можна скласти $m+n-1$ лінійно-незалежних рівнянь типу (5.6) з $m+n$ невідомими u_i, v_j .

Оскільки рівнянь на одне менше, ніж змінних, то система є невизначеною і одному невідомому (зазвичай u_1) надають нульового значення. Після цього решта потенціалів визначається однозначно.

Після визначення потенціалів для вільних клітин розраховуються оцінки s_{ij} :

$$s_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j) \quad (5.8)$$

Оцінка s_{ij} показує, наскільки вартість перевезення для клітини ij більше вартості перевезення базисної клітини i -го рядку або j -го стовпця.

Враховуючи (5.7), умова оптимальності:

$$s_{ij} \geq 0 \quad (5.9)$$

Якщо умова (5.9) виконується для усіх вільних клітин, опорний план вважається оптимальним.

Якщо умова (5.9) не виконується хоча б для однієї вільної клітини, опорний план неоптимальний і підлягає оптимізації.

5.1.6 Оптимізація опорного плану

Якщо опорний план не оптимальний, слід його оптимізувати, тобто, вилучити одну з базисних клітин та ввести замість неї до базису одну з вільних клітин, для якої умова (5.9) не виконується.

Серед вільних клітин, для яких $s_{ij} < 0$, додавати до базису слід ту, у якої $|s_{ij}| = \max$

Перерозподіл вантажу у новому опорному плані відбувається за циклом.

Для визначення кількості одиниць вантажу, що підлягають перерозподілу, слід відзначити знаком «+» вільну клітину, яку треба додати до базису.

Це означає, що клітина приєднується до зайнятих клітин, в результаті чого зайнятих клітин стає $m + n$, тому з'являється цикл, всі вершини якого, крім клітини, позначеної знаком «+», перебувають у зайнятих клітинах, причому цей цикл єдиний.

Слід відшукати цей цикл і, починаючи рух від клітини, позначеної знаком "+", по черзі проставити знаки "-" і "+".

Після цього серед клітин, позначених знаком «-», слід знайти ту, для якої $x_{ij} = \min$. Величина $x_{ij \min}$ визначатиме, скільки одиниць вантажу можна перерозподілити за знайденим циклом.

Значення $x_{ij \min}$ записується у незайняту клітину, позначену знаком "+", та додається до об'ємів перевезень, що знаходяться в клітинах, позначених знаком «+», й віднімається з об'ємів перевезень, розташованих у клітинах, позначених знаком «-».

Якщо значенню $x_{ij \min}$ відповідає кілька базисних клітин, то при відніманні слід залишати у відповідних клітинах нульові перевезення у

такій кількості, щоб у знов отриманому опорному плані зайнятих клітин було $m + n - 1$.

Для нового опорного плану складається нова система потенціалів і він також підлягає перевірці на оптимальність. Якщо отриманий план знову виявився неоптимальним, процес повторюють доти, доки всі незайняті клітини не задовольнятимуть умові (5.9).

Більш детально теоретичні відомості з даної теми наведені у [1], стор. 113 – 120.

5.2 Завдання до роботи

Розв'язати транспортну задачу та надати економічне обґрунтування отриманих результатів.

На трьох складах крупного підприємства (пунктах постачання) знаходяться деталі для складання електронних пристроїв. Складання пристроїв відбувається у чотирьох цехах (пунктах споживання). Кількість деталей на складах, потреба у них у складальних цехах та вартість доставки наведені у табл. 5.1.

Знайти план доставки деталей зі складів до цехів, при якому забезпечується мінімальна сумарна вартість доставки.

При виконанні задачі початковий опорний план скласти двома методами:

- методом мінімальної вартості;
- методом північно-західного кута.

Для розв'язання задачі у якості початкового опорного плану взяти складений **методом північно-західного кута**.

Оптимальний опорний план порівняти з початковим опорним планом, складеним методом мінімальної вартості. Зробити висновки.

Таблиця 5.1 – Вихідні дані до задачі

Варіант 1					
Склади	Цехи				Наявність деталей
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	4	7	5	420
A_2	3	11	6	8	380
A_3	2	7	3	4	400
Потреба у деталях	150	350	420	200	
Варіант 2					
Склади	Цехи				Наявність деталей
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	1	8	6	300
A_2	4	2	3	5	120
A_3	5	5	1	2	140
Потреба у деталях	100	50	150	210	
Варіант 3					
Склади	Цехи				Наявність деталей
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	9	5	4	3	120
A_2	3	2	6	8	180
A_3	2	5	7	1	250
Потреба у деталях	240	100	180	170	
Варіант 4					
Склади	Цехи				Наявність деталей
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	10	6	8	4	150
A_2	3	1	3	6	300
A_3	5	4	9	1	120
Потреба у деталях	85	95	150	165	

Продовження табл. 5.1

Варіант 5					
Склади	Цехи				Наявність деталей
	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	
A ₁	4	4	7	2	200
A ₂	3	5	9	1	120
A ₃	8	6	11	2	180
Потреба у деталях	250	150	140	65	
Варіант 6					
Склади	Цехи				Наявність деталей
	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	
A ₁	7	6	1	8	115
A ₂	3	5	4	6	155
A ₃	1	2	3	4	125
Потреба у деталях	135	100	95	75	
Варіант 7					
Склади	Цехи				Наявність деталей
	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	
A ₁	4	3	6	4	100
A ₂	3	2	8	3	120
A ₃	8	7	4	6	200
Потреба у деталях	130	150	100	95	
Варіант 8					
Склади	Цехи				Наявність деталей
	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	
A ₁	11	12	12	10	55
A ₂	15	4	9	12	75
A ₃	10	8	9	6	105
Потреба у деталях	75	85	100	120	

Продовження табл. 5.1

Варіант 9					
Склади	Цехи				Наявність деталей
	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	
A ₁	5	8	3	9	75
A ₂	4	7	9	3	55
A ₃	7	3	10	5	60
Потреба у деталях	15	35	65	80	
Варіант 10					
Склади	Цехи				Наявність деталей
	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	
A ₁	1	6	2	1	95
A ₂	3	1	5	4	120
A ₃	7	2	1	3	200
Потреба у деталях	125	185	90	110	
Варіант 11					
Склади	Цехи				Наявність деталей
	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	
A ₁	8	9	5	6	300
A ₂	4	3	8	6	120
A ₃	7	8	6	5	250
Потреба у деталях	100	150	90	45	
Варіант 12					
Склади	Цехи				Наявність деталей
	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	
A ₁	2	4	2	5	100
A ₂	6	3	7	2	200
A ₃	8	3	9	1	300
Потреба у деталях	50	180	175	200	

Продовження табл. 5.1

Варіант 13					
Склади	Цехи				Наявність деталей
	В ₁	В ₂	В ₃	В ₄	
А ₁	5	1	7	5	220
А ₂	4	6	8	2	115
А ₃	2	3	4	10	125
Потреба у деталях	180	75	140	100	
Варіант 14					
Склади	Цехи				Наявність деталей
	В ₁	В ₂	В ₃	В ₄	
А ₁	10	4	6	7	25
А ₂	7	3	2	8	250
А ₃	5	6	7	6	120
Потреба у деталях	85	55	110	30	
Варіант 15					
Склади	Цехи				Наявність деталей
	В ₁	В ₂	В ₃	В ₄	
А ₁	3	8	2	5	135
А ₂	2	6	7	8	155
А ₃	5	3	8	2	205
Потреба у деталях	80	70	140	100	
Варіант 16					
Склади	Цехи				Наявність деталей
	В ₁	В ₂	В ₃	В ₄	
А ₁	8	6	7	4	115
А ₂	5	3	2	9	200
А ₃	7	6	7	3	180
Потреба у деталях	65	40	120	85	

Продовження табл. 5.1

Варіант 17					
Склади	Цехи				Наявність деталей
	В ₁	В ₂	В ₃	В ₄	
А ₁	10	11	9	6	35
А ₂	2	4	5	12	15
А ₃	8	3	7	10	50
Потреба у деталях	40	25	15	85	
Варіант 18					
Склади	Цехи				Наявність деталей
	В ₁	В ₂	В ₃	В ₄	
А ₁	5	6	7	4	80
А ₂	7	3	6	5	60
А ₃	8	5	8	3	45
Потреба у деталях	20	15	50	35	
Варіант 19					
Склади	Цехи				Наявність деталей
	В ₁	В ₂	В ₃	В ₄	
А ₁	5	3	6	6	125
А ₂	4	6	8	7	65
А ₃	8	7	9	3	170
Потреба у деталях	65	105	35	40	
Варіант 20					
Склади	Цехи				Наявність деталей
	В ₁	В ₂	В ₃	В ₄	
А ₁	5	3	7	4	155
А ₂	5	2	5	8	85
А ₃	3	5	7	6	115
Потреба у деталях	120	80	65	75	

Продовження табл. 5.1

Варіант 21					
Склади	Цехи				Наявність деталей
	В ₁	В ₂	В ₃	В ₄	
А ₁	6	7	5	3	210
А ₂	6	8	3	6	120
А ₃	4	7	2	9	140
Потреба у деталях	75	85	100	75	
Варіант 22					
Склади	Цехи				Наявність деталей
	В ₁	В ₂	В ₃	В ₄	
А ₁	4	10	11	7	100
А ₂	7	12	5	8	130
А ₃	6	9	4	8	80
Потреба у деталях	50	75	85	40	
Варіант 23					
Склади	Цехи				Наявність деталей
	В ₁	В ₂	В ₃	В ₄	
А ₁	8	5	9	6	220
А ₂	2	6	3	7	100
А ₃	4	6	7	5	80
Потреба у деталях	100	50	60	80	
Варіант 24					
Склади	Цехи				Наявність деталей
	В ₁	В ₂	В ₃	В ₄	
А ₁	5	4	7	2	150
А ₂	6	3	8	5	65
А ₃	7	2	6	3	185
Потреба у деталях	130	140	100	50	

Продовження табл. 5.1

Варіант 25					
Склади	Цехи				Наявність деталей
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	1	3	2	200
A_2	4	5	4	4	210
A_3	8	3	7	6	150
Потреба у деталях	180	220	150	80	

5.3 Зміст звіту

5.3.1 Тема та мета роботи.

5.3.2 Короткі теоретичні відомості.

5.3.3 Розв'язання транспортної задачі згідно з варіантом.

5.3.4 Економічне обґрунтування отриманих результатів.

5.3.5 Висновки.

5.4 Приклад розв'язання транспортної задачі методом потенціалів

5.4.1 Вихідні дані

Три метизних заводи (пункти постачання) постачають кріпильні деталі, які використовуються при складанні електронних блоків на чотирьох радіозаводах (пунктах споживання). Кількість готової продукції на складах метизних заводів, потреба у метизах на радіозаводах та вартість перевезення між ними наведені у табл. 5.2.

Знайти план перевезення, при якому забезпечується перевезення метизів з усіх метизних заводів та їх доставка усім радіозаводам при мінімальній сумарній вартості перевезення.

Таблиця 5.2 – Вихідні дані до задачі

Пункти постачання	Пункти споживання				Нааявність метизів, кг
	B1	B2	B3	B4	
A1	2	9	6	7	30
A1	3	5	4	2	10
A3	3	5	4	9	25
Потреба у метизах, кг	45	15	60	10	

5.4.2 Перевірка умови балансу та складання математичної моделі задачі

$$\sum_{i=1}^m a_i = 30 + 10 + 25 = 65$$

$$\sum_{j=1}^n b_j = 45 + 15 + 60 + 10 = 130$$

Умова балансу (5.4) не виконується, транспортна задача є незбалансованою, і її треба привести до збалансованого вигляду.

Оскільки $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$, вводимо фіктивний пункт постачання A4 з кількістю вантажу:

$$a_4 = 130 - 65 = 65$$

Остаточна математична модель задачі має наступний вигляд.

Знайти такий опорний план перевезення вантажу:

$$x_{ij} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{bmatrix},$$

$$x_{ij} \geq 0,$$

при якому цільова функція:

$$f(x_{ij}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} \rightarrow \min$$

за умови:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{i=1}^m a_i, \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n b_j, \text{ де}$$

$$a_i = (30 \quad 10 \quad 25 \quad 65),$$

$$b_j = (45 \quad 15 \quad 60 \quad 10),$$

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} 2 & 9 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

5.4.3 Початковий опорний план

Складемо початковий опорний план двома методами - методом мінімальної вартості та методом північно-західного кута – і порівняємо результати.

Оскільки $m = 4$; $n = 4$, кількість базисних елементів:

$$m + n - 1 = 7.$$

Початковий опорний план, складений *методом мінімальної вартості*, наведений у табл. 5.3.

Таблиця 5.3 - Початковий опорний план, складений методом мінімальної вартості

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	b _j
A ₁	2 30	9	6	7	30
A ₂	3 0	5	4	2 10	10
A ₃	3 15	5	4 10	9	25
A ₄	0	0 15	0 50	0	65
a _i	45	15	60	10	130

$$\text{Опорний план: } x_{ij} = \begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \\ 15 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 15 & 50 & 0 \end{bmatrix}$$

Сумарна вартість перевезення:

$$f(x_{ij}) = 2 \cdot 30 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 15 + 4 \cdot 10 + 0 \cdot 50 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 15 = 165$$

Початковий опорний план, складений *методом північно-західного кута*, наведений у табл. 5.4.

Таблиця 5.4 - Початковий опорний план, складений методом північно-західного кута

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	b _j
A ₁	2 30	9	6	7	30
A ₂	3 10	5	4	2	10
A ₃	3 5	5 15	4 5	9	25
A ₄	0	0	0 55	0 10	65
a _i	45	15	60	10	130

Опорний план:

$$x_{ij} = \begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 15 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 55 & 10 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

Сумарна вартість перевезення:

$$f(x_{ij}) = 2 \cdot 30 + 3 \cdot 10 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 15 + 4 \cdot 5 + 0 \cdot 55 + 0 \cdot 10 = 200$$

Як бачимо, варіант опорного плану, складений методом мінімальної вартості, більш наближений до оптимального.

5.4.4 Перевірка опорного плану та пошук оптимального розв'язку

Заповнимо першу транспортну таблицю на основі опорного плану, складеного за методом північно-західного кута, та перевіримо опорний план на оптимальність.

Перша транспортна таблиця наведена у табл. 5.5.

Перевіримо опорний план (5.10) на оптимальність за допомогою методу потенціалів.

Визначимо потенціали за умовою (5.6) для базисних клітин.

Нехай $u_1 = 0$

$$u_1 + v_1 = 2; v_1 = 2 - u_1 = 2 - 0 = 2$$

$$u_2 + v_1 = 3; u_2 = 3 - v_1 = 3 - 2 = 1$$

$$u_3 + v_1 = 3; u_3 = 3 - v_1 = 3 - 2 = 1$$

$$u_3 + v_2 = 5; v_2 = 5 - u_3 = 5 - 1 = 4$$

$$u_3 + v_3 = 4; v_3 = 4 - u_3 = 4 - 1 = 3$$

$$u_4 + v_3 = 0; u_4 = 0 - v_3 = 0 - 3 = -3$$

$$u_4 + v_4 = 0; v_4 = 0 - u_4 = 0 + 3 = 3$$

Таблиця 5.5 – Перша транспортна таблиця

U_i ↓	$V_j \rightarrow$	2	4	3	3	b_j
		B_1	B_2	B_3	B_4	
0	A_1	2 30	9 5	6 3	7 4	30
1	A_2	3 10	- 5 0	4 0	2 +	10
1	A_3	3 5	+ 5 15	4 5	- 9 5	25
-3	A_4	0 1	0 -1	0 55	+ 0 10	65
	a_i	45	15	60	10	130

Для вільних клітин визначимо оцінки s_{ij} за формулою (5.8) та перевіримо умову оптимальності (5.9).

$$s_{12} = c_{12} - (u_1 + v_2) = 9 - (0 + 4) = 5$$

$$s_{13} = c_{13} - (u_1 + v_3) = 6 - (0 + 3) = 3$$

$$s_{14} = c_{14} - (u_1 + v_4) = 7 - (0 + 3) = 4$$

$$s_{22} = c_{22} - (u_2 + v_2) = 5 - (1 + 4) = 0$$

$$s_{23} = c_{23} - (u_2 + v_3) = 4 - (1 + 3) = 0$$

$$s_{24} = c_{24} - (u_2 + v_4) = 2 - (1 + 3) = -2$$

$$s_{34} = c_{34} - (u_3 + v_4) = 9 - (1 + 3) = 5$$

$$s_{41} = c_{41} - (u_4 + v_1) = 0 - (-3 + 2) = 1$$

$$s_{42} = c_{42} - (u_4 + v_2) = 0 - (-3 + 4) = -1$$

Як видно з табл. 5.5, опорний план не оптимальний.

Введемо до базису клітину 2-4, для якої $|s_{ij}|_{max} = 2$.

Відмітимо цю клітину знаком "+", складемо для неї цикл, який проходить через вершини базисних клітин, та проставимо у цих клітинах по черзі позначки "-" і "+". Цикл показаний у табл. 5.4.

Як видно з табл. 5.4, базисна клітина циклу з позначкою "-", для якої $x_{ij} \min = 5$, це клітина 3-3. Видалимо її з базису та складемо новий опорний план. Новий опорний план наведений у табл. 5.6.

Таблиця 5.6 – Друга транспортна таблиця

U_i ↓	$V_j \rightarrow$	2	4	1	1	b_j
		B_1	B_2	B_3	B_4	
0	A_1	2 30	9 5	6 5	7 6	30
1	A_2	3 5	- 5	4 0	2 5	10
1	A_3	3 10	+ 5	- 15	4 9	25
-1	A_4	0 -1	0 -3	+ 0	0 60	- 5
	a_i	45	15	60	10	130

Опорний план для табл. 5.6:

$$x_{ij} = \begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 5 \\ 10 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 60 & 5 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Сумарна вартість перевезення:

$$f(x_{ij}) = 2 \cdot 30 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 10 + 5 \cdot 15 + 0 \cdot 60 + 0 \cdot 10 = 190$$

Перевіримо опорний план (5.11) на оптимальність за допомогою методу потенціалів.

Нехай $u_1 = 0$

$$u_1 + v_1 = 2; v_1 = 2 - u_1 = 2 - 0 = 2$$

$$u_2 + v_1 = 3; u_2 = 3 - v_1 = 3 - 2 = 1$$

$$u_2 + v_4 = 2; v_4 = 2 - u_2 = 2 - 1 = 1$$

$$u_3 + v_1 = 3; u_3 = 3 - v_1 = 3 - 2 = 1$$

$$u_3 + v_2 = 5; v_2 = 5 - u_3 = 5 - 1 = 4$$

$$u_4 + v_4 = 0; u_4 = 0 - v_4 = 0 - 1 = -1$$

$$u_4 + v_3 = 0; v_3 = 0 - u_4 = 0 + 1 = 1$$

Для вільних клітин визначимо оцінки s_{ij} за формулою (5.8) та перевіримо умову оптимальності (5.9).

$$s_{12} = c_{12} - (u_1 + v_2) = 9 - (0 + 4) = 5$$

$$s_{13} = c_{13} - (u_1 + v_3) = 6 - (0 + 1) = 5$$

$$s_{14} = c_{14} - (u_1 + v_4) = 7 - (0 + 1) = 6$$

$$s_{22} = c_{22} - (u_2 + v_2) = 5 - (1 + 4) = 0$$

$$s_{23} = c_{23} - (u_2 + v_3) = 4 - (1 + 1) = 2$$

$$s_{33} = c_{33} - (u_3 + v_3) = 4 - (1 + 1) = 2$$

$$s_{34} = c_{34} - (u_3 + v_4) = 9 - (1 + 1) = 7$$

$$s_{41} = c_{41} - (u_4 + v_1) = 0 - (-1 + 2) = -1$$

$$s_{42} = c_{42} - (u_4 + v_2) = 0 - (-1 + 4) = -2$$

Як видно з табл. 5.6, опорний план не оптимальний.

Введемо до базису клітину 4-2, для якої $|s_{ij}|_{max} = 2$.

Відмітимо цю клітину знаком "+", складемо для неї цикл, який проходить через вершини базисних клітин, та проставимо у цих клітинах по черзі позначки "-" і "+". Цикл показаний у табл. 5.6.

Як видно з табл. 5.6, базисних клітин циклу з позначкою "-", для яких $x_{ij} \min = 5$, дві: клітина 2-1 та клітина 4-4. Видалимо з базису клітину 2-1, для якої c_{ij} менше, та складемо новий опорний план.

Новий опорний план наведений у табл. 5.7.

Таблиця 5.7 – Третя транспортна таблиця

U_i ↓	$V_j \rightarrow$	2	4	4	4	b_j
		B_1	B_2	B_3	B_4	
0	A_1	2 30	9 5	6 2	7 3	30
-2	A_2	3 3	5 3	4 2	2 10	10
1	A_3	3 15	5 10	- 4 +	9 -1 4	25
-4	A_4	0 2	0 5	+ 0 60	- 0 0	65
	a_i	45	15	60	10	130

Опорний план для табл. 5.7:

$$x_{ij} = \begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \\ 15 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 60 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Сумарна вартість перевезення:

$$f(x_{ij}) = 2 \cdot 30 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 15 + 5 \cdot 10 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 60 + 0 \cdot 0 = 175$$

Перевіримо опорний план (5.12) на оптимальність за допомогою методу потенціалів.

Нехай $u_1 = 0$

$$u_1 + v_1 = 2; v_1 = 2 - u_1 = 2 - 0 = 2$$

$$u_3 + v_1 = 3; u_3 = 3 - v_1 = 3 - 2 = 1$$

$$u_3 + v_2 = 5; v_2 = 5 - u_3 = 5 - 1 = 4$$

$$u_4 + v_2 = 0; u_4 = 0 - v_2 = 0 - 4 = -4$$

$$u_4 + v_3 = 0; v_3 = 0 - u_4 = 0 + 4 = 4$$

$$u_4 + v_4 = 0; v_4 = 0 - u_4 = 0 + 4 = 4$$

$$u_2 + v_4 = 2; u_2 = 2 - v_4 = 2 - 4 = -2$$

Для вільних клітин визначимо оцінки s_{ij} за формулою (5.8) та перевіримо умову оптимальності (5.9).

$$s_{12} = c_{12} - (u_1 + v_2) = 9 - (0 + 4) = 5$$

$$s_{13} = c_{13} - (u_1 + v_3) = 6 - (0 + 4) = 2$$

$$s_{14} = c_{14} - (u_1 + v_4) = 7 - (0 + 4) = 3$$

$$s_{21} = c_{21} - (u_2 + v_1) = 3 - (-2 + 2) = 3$$

$$s_{22} = c_{22} - (u_2 + v_2) = 5 - (-2 + 4) = 3$$

$$s_{23} = c_{23} - (u_2 + v_3) = 4 - (-2 + 4) = 2$$

$$s_{33} = c_{33} - (u_3 + v_3) = 4 - (1 + 4) = -1$$

$$s_{34} = c_{34} - (u_3 + v_4) = 9 - (1 + 4) = 4$$

$$s_{41} = c_{41} - (u_4 + v_1) = 0 - (4 + 2) = -2$$

Як видно з табл. 5.7, опорний план не оптимальний.

Введемо до базису клітину 3-3, для якої $|s_{ij}|_{max} = 1$.

Відмітимо цю клітину знаком "+", складемо для неї цикл, який проходить через вершини базисних клітин, та проставимо у цих клітинах по черзі позначки "-" і "+". Цикл показаний у табл. 5.7.

Як видно з табл. 5.7, базисна клітина циклу з позначкою "-", - 3-2. Видалимо її з базису та складемо новий опорний план.

Новий опорний план наведений у табл. 5.8.

Опорний план для табл. 5.8:

$$x_{ij} = \begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \\ 15 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 15 & 50 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Сумарна вартість перевезення:

$$f(x_{ij}) = 2 \cdot 30 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 15 + 4 \cdot 10 + 0 \cdot 15 + 0 \cdot 50 + 0 \cdot 0 = 165$$

Перевіримо опорний план (5.13) на оптимальність за допомогою методу потенціалів.

Таблиця 5.8 – Четверта транспортна таблиця

U_i ↓	$V_j \rightarrow$	2	3	3	3	b_j
		B_1	B_2	B_3	B_4	
0	A_1	2 30	9 6	6 3	7 4	30
-1	A_2	3 2	5 3	4 2	2 10	10
1	A_3	3 15	5 1	4 10	9 5	25
-3	A_4	0 1	0 15	0 50	0 0	65
	a_i	45	15	60	10	130

Нехай $u_1 = 0$

$$u_1 + v_1 = 2; v_1 = 2 - u_1 = 2 - 0 = 2$$

$$u_3 + v_1 = 3; u_3 = 3 - v_1 = 3 - 2 = 1$$

$$u_3 + v_3 = 4; v_3 = 4 - u_3 = 4 - 1 = 3$$

$$u_4 + v_3 = 0; u_4 = 0 - v_3 = 0 - 3 = -3$$

$$u_4 + v_2 = 0; v_2 = 0 - u_4 = 0 + 3 = 3$$

$$u_4 + v_4 = 0; v_4 = 0 - u_4 = 0 + 3 = 3$$

$$u_2 + v_4 = 2; u_2 = 2 - v_4 = 2 - 3 = -1$$

Для вільних клітин визначимо оцінки s_{ij} за формулою (5.8) та перевіримо умову оптимальності (5.9).

$$s_{12} = c_{12} - (u_1 + v_2) = 9 - (0 + 3) = 6$$

$$s_{13} = c_{13} - (u_1 + v_3) = 6 - (0 + 3) = 3$$

$$s_{14} = c_{14} - (u_1 + v_4) = 7 - (0 + 3) = 4$$

$$s_{21} = c_{21} - (u_2 + v_1) = 3 - (-1 + 2) = 2$$

$$s_{22} = c_{22} - (u_2 + v_2) = 5 - (-1 + 3) = 3$$

$$s_{23} = c_{23} - (u_2 + v_3) = 4 - (-1 + 3) = 2$$

$$s_{32} = c_{32} - (u_3 + v_2) = 5 - (1 + 3) = 1$$

$$s_{34} = c_{34} - (u_3 + v_4) = 9 - (1 + 3) = 5$$

$$s_{41} = c_{41} - (u_4 + v_1) = 0 - (-3 + 2) = 1$$

Як видно з табл. 5.8, умова оптимальності (5.9) виконується для усіх вільних клітин, тому опорний план (5.13) є оптимальним.

5.4.5 Результати розв'язання задачі

В результаті оптимізації початкового опорного плану за методом потенціалів отримали оптимальний розв'язок задачі:

$$x_{ij} = \begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \\ 15 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 15 & 50 & 0 \end{bmatrix}$$

Таким чином, слід перевозити:

30 кг метизів з метизного заводу A_1 до радіозаводу B_1 ;

10 кг метизів з метизного заводу A_2 до радіозаводу B_4 ;

15 кг метизів з метизного заводу A_3 до радіозаводу B_1 ;

10 кг метизів з метизного заводу A_3 до радіозаводу B_3 .

Потреби у метизах для радіозаводів B_1 та B_4 будуть задовільнені цілком.

На радіозаводі B_3 буде нестача метизів у кількості 50 кг, а до радіозаводу B_2 метизи взагалі доставлені не будуть; їм слід почекати або пошукати інших постачальників.

6 ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 6. КОРЕЛЯЦІЙНО-РЕГРЕСІЙНИЙ АНАЛІЗ

Мета роботи: ознайомитися з основами кореляційно-регресійного аналізу, видами регресії; отримати практичні навички складання лінійних та нелінійних регресійних моделей для парної та множинної регресії та оцінки їх параметрів.

6.1 Теоретичні відомості

6.1.1 Рівняння регресії. Види регресії

Регресійну залежність можна визначити наступним чином.

Нехай задані результати спостережень між залежною змінною та m незалежними змінними, які являють собою випадкові величини зі спільним розподілом ймовірностей:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, X_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \dots \\ x_{1n} \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ \dots \\ x_{2n} \end{pmatrix}, \dots, X_m = \begin{pmatrix} x_{m1} \\ x_{m2} \\ \dots \\ x_{mn} \end{pmatrix}, \quad (6.1)$$

де Y – вектор залежної змінної;
 X_1, X_2, \dots, X_m – вектори незалежних змінних;
 n – кількість спостережень.

Якщо для кожного набору значень $X_1=x_1, X_2=x_2, \dots, X_m=x_m$ визначено умовне математичне очікування $y(x_1, x_2, \dots, x_m) = E(Y | X_1=x_1, X_2=x_2, \dots, X_m=x_m)$, то функція $y(x_1, x_2, \dots, x_m)$ називається **регресією** величини Y за величинами X_1, X_2, \dots, X_m , а її графік - **лінією регресії** Y за X_1, X_2, \dots, X_m , або рівнянням регресії.

Для з'ясування питання, наскільки точно регресійний аналіз оцінює зміну Y при зміні X_1, X_2, \dots, X_m , використовується середня величина **дисперсії** Y при різних наборах значень X_1, X_2, \dots, X_m (тобто міра розсіювання залежної змінної навколо лінії регресії).

Якщо залежна змінна залежить від однієї незалежної змінної, то така регресія називається **простою (парною)**.

Якщо залежна змінна залежить від декількох незалежних змінних, то така регресія називається **множинною (багатофакторною)**.

За формою залежності розрізняють **лінійну** і **нелінійну** регресію.

6.1.2 Метод найменших квадратів

На практиці лінія регресії найчастіше відшукується для лінійної функції:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + \dots + b_m \cdot x_m \quad (6.2)$$

де m – кількість незалежних змінних.

Для цього використовується *метод найменших квадратів* (МНК), суть якого полягає у мінімізації суми квадратів відхилень реальних значень у від їх оцінок \hat{y} :

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2, \quad (6.3)$$

де n – об'єм вибірки.

Цей підхід заснований на тому, що сума, яка фігурує в наведеному вираженні, набуває мінімального значення саме для того випадку, коли $Y = y(x_1, x_2, \dots, x_m)$.

Для розв'язання задачі регресійного аналізу за допомогою МНК вводиться поняття функції нев'язки:

$$\sigma(\bar{b}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (6.4)$$

Умова мінімуму функції нев'язки:

$$\frac{\partial \sigma(\bar{b})}{\partial b_j} = 0; j = 0 \dots m, \quad (6.5)$$

або:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n y_i &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m b_j \cdot x_{ij} + b_0 \cdot m, \\ \sum_{i=1}^n y_i \cdot x_{ik} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m b_j \cdot x_{ij} \cdot x_{ik} + b_0 \cdot \sum_{i=1}^n x_{ik}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

$k = 1, \dots, m$

Отримана система є системою $N+1$ лінійних рівнянь з $N+1$ невідомими b_0, b_1, \dots, b_m .

Якщо представити вільні члени лівої частини рівнянь (6.6) матрицею (6.7), а коефіцієнти при невідомих у правій частині –

матрицею (6.8), то отримуємо матричне рівняння $A \cdot B = C$, яке вирішується методом Гауса.

$$C = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i \cdot x_{i1} \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n y_i \cdot x_{in} \end{pmatrix}, \quad (6.7)$$

$$A = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_{i1} & \sum_{i=1}^n x_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^n x_{im} \\ \sum_{i=1}^n x_{i1} & \sum_{i=1}^n (x_{i1} \cdot x_{i1}) & \sum_{i=1}^n (x_{i2} \cdot x_{i1}) & \dots & \sum_{i=1}^n (x_{im} \cdot x_{i1}) \\ \sum_{i=1}^n x_{i2} & \sum_{i=1}^n (x_{i1} \cdot x_{i2}) & \sum_{i=1}^n (x_{i2} \cdot x_{i2}) & \dots & \sum_{i=1}^n (x_{im} \cdot x_{i2}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^n x_{im} & \sum_{i=1}^n (x_{i1} \cdot x_{im}) & \sum_{i=1}^n (x_{i2} \cdot x_{im}) & \dots & \sum_{i=1}^n (x_{im} \cdot x_{im}) \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

Матриця рішень (6.9) є матрицею, яка містить коефіцієнти рівняння лінії регресії:

$$B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

6.1.3 Оцінка параметрів регресійної моделі

6.1.3.1 Оцінка тісноти зв'язку регресійної моделі

Оцінити тісноту зв'язку регресійної моделі можна за допомогою коефіцієнта кореляції R .

Коефіцієнт кореляції визначається за формулою:

$$R = \sqrt{1 - \frac{\sigma_u^2}{\sigma_y^2}}, \quad (6.10)$$

де σ_u^2 – дисперсія залишків;
 σ_y^2 – дисперсія залежної змінної.

Дисперсія залежної змінної визначається за формулою:

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \left[Y^T \cdot Y - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 \right] \quad (6.11)$$

Дисперсія залишків визначається за формулою:

$$\sigma_v^2 = \frac{U^T \cdot U}{n - m - 1}, \quad (6.12)$$

де V – вектор залишків;

$$V = Y - \hat{Y} = Y - X \cdot B \quad (6.13)$$

6.1.3.2 Оцінка частки впливу заданого факторного показника на результативний показник

Для оцінки частки впливу заданого факторного показника на результативний показник використовується коефіцієнт детермінації R^2 .

Для простої регресії він показує, наскільки варіація залежної змінної визначається варіацією фактору.

Для множинної регресії він показує, яку частку займає вплив на результативний показник заданого факторного показника у загальному впливі усіх факторних показників.

6.1.3.3 Оцінка значущості параметрів регресійної моделі

Значущість коефіцієнта кореляції можна визначити за t -критерієм Стьюдента, який розраховується за формулою:

$$t_R = \frac{R}{\sigma_R}, \quad (6.14)$$

де σ_R – довірчі границі коефіцієнта кореляції; розраховується за формулою:

$$\sigma_R = \frac{1 - R^2}{\sqrt{n - m - 1}} \quad (6.15)$$

Розрахункове значення t_R слід порівняти з табличним значенням критерія Стюдента $t_{(\alpha, k)}$, де α - рівень значущості; k - число ступенів вільності, яке являє собою різницю між об'ємом вибірки, за якою обчислюється вибіркова чисельна характеристика, та кількістю зв'язків, накладених на вибіркові значення:

$$k = n - m - 1$$

Табличні значення критерію Стюдента наведені у додатку Б.

Якщо $t_R > t_{(\alpha, k)}$, то з ймовірністю $p=1-\alpha$ можна стверджувати, що *коефіцієнт кореляції значущий*.

Значущість коефіцієнтів регресійної моделі можна визначити за t -критерієм Стюдента, який для кожного коефіцієнта розраховується за формулою:

$$t_{b_j} = \frac{|b_j|}{\sigma_{b_j}}; j = 0 \dots m, \quad (6.16)$$

де σ_{b_j} визначається за формулою:

$$\sigma_{b_j} = \sqrt{\sigma_v^2 \cdot b_{jj}}, \quad (6.17)$$

де b_{jj} - j -й елемент головної діагоналі матриці $(X^T \cdot X)^{-1}$.

Розрахункове значення t_{b_j} слід порівняти з табличним значенням критерія Стюдента $t_{(\alpha, k)}$.

Якщо $t_{b_j} > t_{(\alpha, k)}$, то з ймовірністю $p=1-\alpha$ можна стверджувати, що *коефіцієнт регресійної моделі значущий*.

6.1.3.4 Оцінка адекватності регресійної моделі

Адекватність регресійної моделі оцінюється за F -критерієм Фішера, який визначається за формулою:

$$F_p = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{n - m}{m - 1} \quad (6.18)$$

Розрахункове значення F_p слід порівняти з табличним значенням критерія Фішера $F(\alpha; k_1; k_2)$, де α - рівень значущості; k_1, k_2 - числа ступенів вільності.

$$k_1 = m; k_2 = n - m - 1$$

Якщо $F_p > F(\alpha; k_1; k_2)$, то з ймовірністю $p=1-\alpha$ можна стверджувати, що регресійна модель **адекватно** описує задане явище. Табличні значення критерію Фішера наведені у додатку Б.

Слід зауважити, що для однофакторної моделі $m = 1$, і тоді формула (6.18) приймає спрощений вигляд:

$$F_p = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot (n - 2) \quad (6.19)$$

6.1.4 Проста лінійна регресія

Нехай y_i - емпірична результативна ознака для заданого фактору x_i .

Для простої лінійної регресії рівняння (6.2) можна записати у вигляді:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 \cdot x \quad (6.20)$$

Коефіцієнти b_0 і b_1 є оцінками відповідних параметрів регресії \hat{b}_0 і \hat{b}_1 у лінійній моделі:

$$y = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 \cdot x + v, \quad (6.21)$$

де v - стохастична складова; $v_i = y_i - \hat{y}_i$.

Для простої лінійної регресії при застосуванні МНК коефіцієнти регресії можна знайти з системи рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_0 \cdot n + b_1 \cdot \sum_{i=1}^n (x_i) = \sum_{i=1}^n (y_i) , \\ b_0 \cdot \sum_{i=1}^n (x_i) + b_1 \cdot \sum_{i=1}^n (x_i^2) = \sum_{i=1}^n (x_i \cdot y_i), \end{array} \right. \quad (6.22)$$

де $i = \overline{1 \dots n}$ - кількість спостережень.

Дисперсію залежної змінної можна визначити за спрощеною формулою:

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n - 1}, \quad (6.23)$$

де y_i – поточне значення залежної змінної;

$$\bar{y} - \text{середня залежної змінної}; \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i)}{n}$$

Дисперсію залишків можна визначити за спрощеною формулою:

$$\sigma_v^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (v_i)^2}{n - 2} \quad (6.24)$$

6.1.5 Множинна лінійна регресія

Для розрахунків коефіцієнтів багатофакторної (множинної) лінійної регресії використовується метод найменших квадратів, але самі розрахунки зручніше проводити матричним методом.

На основі вихідних даних сформуємо матриця незалежних змінних X , залежної змінної Y та транспоновані до них X^T і Y^T .

Вектор коефіцієнтів регресії визначається за формулою:

$$B = (X^T \cdot X)^{-1} \cdot (X^T \cdot Y) \quad (6.25)$$

6.1.6 Нелінійна регресія

Нелінійна регресія – це вид регресійного аналізу, в якому експериментальні дані моделюються функцією, що є нелінійною комбінацією параметрів моделі та залежить від однієї і більш незалежних змінних.

Наприклад, поліноміальна регресія має вигляд:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2 + \dots + b_m \cdot x^m \quad (6.26)$$

Підбір функції регресії здійснюється з урахуванням теоретичних міркувань щодо досліджуваних явищ.

Нелінійну регресію можна привести до лінійної форми шляхом замін. У якості прикладу розглянемо поліноміальну регресію за формулою (6.26). Введемо наступні заміни:

$$x = x_1; x^2 = x_2; \dots x^m = x_m \quad (6.27)$$

Підставивши заміни (6.27) у просту поліноміальну регресію (6.26), отримаємо множинну лінійну регресію:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + \dots + b_m \cdot x_m \quad (6.28)$$

Заміни для перетворення деяких нелінійних залежностей у просту лінійну форму наведені у табл. 6.1, у множинну лінійну форму – у табл. 6.2.

Таблиця 6.1 - Приведення нелінійних залежностей у просту лінійну форму

Початкова функція	До якого вигляду зводиться	Заміна змінних
$y = A \cdot e^{kx}$	$z = b_0 + b_1 \cdot x$	$z = \ln y; b_0 = \ln A; b_1 = k$
$y = A \cdot x^{b_1}$	$z = b_0 + b_1 \cdot u$	$z = \ln y; b_0 = \ln A; u = \ln x$
$y = b_0 + A \cdot x^n$	$y = b_0 + b_1 \cdot z$	$z = x^n; b_1 = A$
$y = b_0 + \frac{b_1}{x}$	$y = b_0 + b_1 \cdot x$	$u = \frac{1}{x}$
$y = b_0 + \frac{b_1}{x^b}$	$y = b_0 + b_1 \cdot x$	$u = \frac{1}{x^b}$
$y = b_0 + b_1 \cdot \sqrt[n]{x}$	$y = b_0 + b_1 \cdot x$	$u = \sqrt[n]{x}$
$y = \frac{1}{b_0 + b_1 \cdot x^n}$	$z = b_0 + b_1 \cdot u$	$z = \frac{1}{y}; u = x^n$
$y = \frac{x}{b_0 x + b_1}$	$z = b_0 + b_1 \cdot u$	$z = \frac{1}{y}; u = \frac{1}{x}$
$y = b_0 x^{-m} + b_1 x^n$	$z = b_0 + b_1 \cdot u$	$z = y x^m; u = x^{m+n}$
$y = b_1 \cdot \ln x + b_0$	$y = b_0 + b_1 \cdot u$	$u = \ln x$
$y = \frac{1}{b_1 e^{-x} + b_0}$	$z = b_0 + b_1 \cdot u$	$z = \frac{1}{y}; u = e^{-x}$
$y = b_0 \cos x + b_1 \sin x$	$z = b_0 + b_1 \cdot u$	$z = \frac{y}{\cos x}; u = \tan x$

Таблиця 6.2 - Приведення нелінійних залежностей у множинну лінійну форму

Початкова функція	До якого вигляду зводиться	Заміна змінних
$y =$ $= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots$ $+ b_mx^m$	$y =$ $= b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$ $+ \dots + b_mx_m$	$x_1 = x; x_2$ $= x^2; \dots; x_m = x^m$
$y = b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2}$ $+ \dots$ $+ \frac{b_m}{x^m}$	$y =$ $= b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$ $+ \dots + b_mx_m$	$x_1 = \frac{1}{x}; x_2$ $= \frac{1}{x^2}; \dots; x_m = \frac{1}{x^m}$
$y =$ $= Ax_1^{b_1}x_2^{b_2} \dots x_m^{b_m}$	$z =$ $= b_0 + b_1u_1 + b_2u_2$ $+ \dots + a_mu_m$	$z = \ln y; b_0 = \ln A;$ $u_1 = \ln x_1; u_2$ $= \ln x_2; \dots; u_m = \ln x_m$

Більш детально теоретичні відомості з даної теми наведені у [1], стор. 187 – 210.

6.2 Завдання до роботи

6.2.1 Проста лінійна регресія

У табл. 6.3 наведені результати вимірювань фізичної величини y (результативний показник) в залежності від фізичної величини x (факторний показник).

6.2.1.1 Скласти лінійну регресійну модель у вигляді аналітичної залежності $y = f(x)$.

6.2.1.2 Оцінити тісноту зв'язку отриманої моделі.

6.2.1.3 Оцінити частку впливу факторного показника x на результативний показник y .

6.2.1.4 Оцінити значущість коефіцієнта кореляції.

6.2.1.5 Оцінити значущість коефіцієнтів регресії.

6.2.1.6 Оцінити адекватність регресійної моделі.

6.2.1.7 Обчислити прогнозне значення величини y при заданому значенні фактору x . Зробити висновки.

Таблиця 6.3 – Вихідні дані до розрахунків

Варіант 1								
<i>x</i>	7,9	11,6	12,8	14,9	16,3	18,6	20,3	25,0
<i>y</i>	13,0	22,8	24,8	28,6	31,6	38,7	44,9	?
Варіант 2								
<i>x</i>	2	3	8	10	14	15	20	22
<i>y</i>	14,4	9,5	7,1	5,3	16,9	1,9	0,4	?
Варіант 3								
<i>x</i>	6,6	10,6	12,4	15,9	17,3	20,5	24,4	30,0
<i>y</i>	10,5	21,7	25,0	30,4	31,4	37,5	43,1	?
Варіант 4								
<i>x</i>	2,2	3,6	7,1	10,6	13,7	17,5	17,2	18,0
<i>y</i>	15,8	14,5	17,2	19,4	25,1	24,7	30,4	?
Варіант 5								
<i>x</i>	5,8	6,2	8,1	10,4	14,3	15,3	17,1	17,5
<i>y</i>	0,3	2,8	5,1	8,4	11,2	16,8	20,4	?
Варіант 6								
<i>x</i>	53	55	59	67	71	75	81	100
<i>y</i>	21,1	20,6	24,8	11,3	11,6	12,8	3,2	?
Варіант 7								
<i>x</i>	65,8	66,1	66,5	68,3	71,8	72,7	73,1	82,2
<i>y</i>	16,6	15,3	12,0	11,5	18,1	15,8	14,9	?
Варіант 8								
<i>x</i>	21	34	41	43	55	68	72	80
<i>y</i>	13	16	15	18	28	32	47	?
Варіант 9								
<i>x</i>	2,2	3,8	4,1	6,3	7,3	8,1	8,8	10,0
<i>y</i>	12	16	13	11	14	19	22	?
Варіант 10								
<i>x</i>	23,3	28,5	29,1	39,1	41,7	43,9	45,0	50,0
<i>y</i>	2,5	3,5	4,9	5,8	7,0	7,7	11,0	?
Варіант 11								
<i>x</i>	5	11	24	31	36	43	55	65
<i>y</i>	8	7	12	15	19	24	36	?

Продовження табл. 6.3

Варіант 12								
x	2,2	3,8	4,1	6,3	7,2	7,9	8,4	10,0
y	6,4	8,8	9,1	11,3	12,9	15,0	18,1	?
Варіант 13								
x	25,4	27,4	30,1	33,1	38,6	41,2	44,5	50,0
y	18,2	22,5	27,8	31,2	41,3	47,9	51,6	?
Варіант 14								
x	15	18	24	33	37	45	55	60
y	12	14	18	19	21	26	30	?
Варіант 15								
x	34	36	38	41	44	47	51	65
y	19	18	15	11	8	6	2	?
Варіант 16								
x	41,1	43,8	45,4	47,4	50,1	51,3	53,4	55,0
y	68,8	55,2	41,3	35,7	30,1	27,4	25,0	?
Варіант 17								
x	7,5	8,0	9,1	12,6	16,4	19,3	21,5	25,0
y	21,1	25,4	28,1	33,2	35,7	38,8	40,1	?
Варіант 18								
x	16	17	19	24	27	32	38	40
y	3,3	5,4	7,8	11,6	13,5	17,0	21,2	?
Варіант 19								
x	7,7	10,2	11,4	11,9	16,0	18,1	19,3	20,0
y	61,1	66,3	72,8	78,9	86,3	88,2	90,5	?
Варіант 20								
x	12	17	18	19	24	28	31	40
y	2	5	11	15	14	17	21	?
Варіант 21								
x	0,1	0,4	0,7	1,1	1,6	1,7	1,9	2,0
y	0,9	1,2	1,3	1,0	1,5	1,9	2,2	?
Варіант 22								
x	13,2	15,7	17,4	19,9	25,6	26,1	28,1	30,0
y	99,5	85,2	71,4	66,3	60,8	54,6	50,1	?

Продовження табл. 6.3

Варіант 23								
x	0,02	0,08	0,15	0,19	0,31	0,43	0,47	0,50
y	0,01	0,05	0,12	0,18	0,21	0,27	0,31	?
Варіант 24								
x	14	18	19	22	27	33	41	50
y	100	88	73	61	57	44	39	?
Варіант 25								
x	2,2	3,3	5,7	6,1	7,8	9,3	9,5	10,0
y	2,4	5,6	8,3	10,0	13,7	17,4	21,0	?

6.2.2 Множинна нелінійна регресія

У табл. 6.4 наведені статистичні дані результативного показника y та факторів x_1, x_2 , які впливають на цей показник.

6.2.2.1 Скласти нелінійну регресійну модель у вигляді аналітичної залежності $y = f(x_1, x_2)$.

6.2.2.2 Оцінити тісноту зв'язку отриманої моделі.

6.2.2.3 Оцінити частку впливу кожного з факторних показників x_1, x_2 на результативний показник y .

6.2.2.3 Оцінити значущість коефіцієнта кореляції.

6.2.2.4 Оцінити значущість коефіцієнтів нелінійної регресії.

6.2.2.5 Оцінити адекватність регресійної моделі.

6.2.2.6 Обчислити прогнозне значення величини y при заданих значеннях факторів x_1, x_2 . Зробити висновки.

Таблиця 6.4 – Вихідні дані до розрахунків

Варіант 1									
x_1	1,12	1,39	1,53	1,96	2,2	2,32	2,76	2,97	3,19
x_2	13,13	15,48	15,58	17,26	17,44	19,72	21,51	23,5	24,93
y	49,48	54,28	54,24	58,46	59,08	64,84	70,09	76,45	80,95
Прогноз	x_1	4	Залежність	$y = b_0 + \frac{b_1}{x_1} + \frac{b_2}{x_2}$					
	x_2	25							

Продовження табл. 6.4

Варіант 2									
x_1	10,0	12,0	8,0	9,0	14,3	15,5	13,6	18,6	16,1
x_2	14,0	13,0	13,5	15,0	12,0	15,8	15,5	15,6	17,0
y	38,0	37,9	38,5	39,0	38,8	40,0	39,5	45,0	43,0
<i>Прогноз</i>	x_1	20		<i>Залежність</i>	$y = A \cdot x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2}$				
	x_2	20							
Варіант 3									
x_1	52,06	52,63	54,1	57,86	58,44	61,71	66,06	68,23	78,11
x_2	21,06	22,85	24,73	29	31,07	35,48	35,9	39,93	41,57
y	5,62	5,51	5,645	5,812	5,947	6,092	6,11	6,46	6,356
<i>Прогноз</i>	x_1	80		<i>Залежність</i>	$y = \sqrt{b_0 + b_1 \ln x_1 + b_2 x_2}$				
	x_2	50							
Варіант 4									
x_1	4,1	5,8	4,5	6,3	5,4	7,1	8,9	11,1	9,0
x_2	8,8	12,8	8,5	15,1	7,9	15,8	8,8	18,5	17,4
y	42,0	50,0	42,0	52,7	41,0	54,0	43,0	64,0	53,2
<i>Прогноз</i>	x_1	12		<i>Залежність</i>	$y = A \cdot x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2}$				
	x_2	20							
Варіант 5									
x_1	30,1	32,6	33,7	35,1	36,4	39,4	41,8	43,3	44,2
x_2	52,1	53,5	53,1	56,5	54,1	58,2	55,1	57,2	56,1
y	78,2	82,5	83,8	86,7	87	92,8	91,5	95,3	94,7
<i>Прогноз</i>	x_1	50		<i>Залежність</i>	$y = A \cdot x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2}$				
	x_2	60							
Варіант 6									
x_1	34,4	35,5	35,9	57,3	40,1	42,7	44,6	44,8	46,5
x_2	67,2	67,6	72,7	76,9	81	84,4	85,8	89,8	93,7
y	96,3	97,2	102,2	107,1	114	116,5	123,1	126,2	131
<i>Прогноз</i>	x_1	40		<i>Залежність</i>	$y = A \cdot x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2}$				
	x_2	40							

Продовження табл. 6.4

Варіант 7									
x_1	19,0	16,3	17,5	18,4	17,2	15,0	19,8	16,1	14,9
x_2	65,4	73,9	68,5	64,5	69,3	83,8	62,3	58,7	69,4
y	2,4	2,7	2,6	2,3	2,4	2,8	2,2	2,5	2,6
Прогноз	x_1	20		Залежність	$y = b_0 + \frac{b_1}{x_1} + \frac{b_2}{x_2}$				
	x_2	70							
Варіант 8									
x_1	36,4	39,4	41,8	43,3	44,2	46	47,8	49,5	49,7
x_2	54,1	58,2	55,1	57,2	56,1	56,1	57,1	58,7	58,1
y	87	92,8	91,5	95,3	94,7	96,7	99,5	102,9	102,6
Прогноз	x_1	40		Залежність	$y = A \cdot x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2}$				
	x_2	40							
Варіант 9									
x_1	15,0	18,6	16,2	15,7	17,9	16,3	17,7	16,8	17,5
x_2	94,0	78,0	87,5	90,2	84,8	95,9	91,0	84,7	88,2
y	2,7	2,5	2,9	2,9	2,6	2,7	2,7	2,5	2,7
Прогноз	x_1	25		Залежність	$y = b_0 + \frac{b_1}{x_1} + \frac{b_2}{x_2}$				
	x_2	100							
Варіант 10									
x_1	4,13	5,35	7,67	8,09	9,01	10,77	11,61	10,33	10,94
x_2	7,55	8,78	9,65	10,77	11,78	13,41	14,37	13,11	15,15
y	65,14	54,37	78,32	82,16	79,24	90,58	85,79	76,36	82,15
Прогноз	x_1	15		Залежність	$y = A \cdot x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2}$				
	x_2	20							
Варіант 11									
x_1	4,53	5,75	8,07	8,49	9,41	11,17	12,01	10,73	11,34
x_2	7,95	9,18	10,05	11,17	12,18	13,81	14,77	13,51	15,55
y	65,54	54,77	78,72	82,56	79,64	90,98	86,19	76,76	82,55
Прогноз	x_1	15		Залежність	$y = A \cdot x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2}$				
	x_2	18							

Продовження табл. 6.4

Варіант 12									
x_1	2	5	9	10	16	20	21	29	32
x_2	1,41	2,24	3,00	3,16	4,00	4,47	4,58	5,39	5,66
y	1,30	0,50	0,30	0,26	0,21	0,18	0,15	0,12	0,11
Прогноз	x_1	35	Залежність	$y = b_0 + \frac{b_1}{x_1} + \frac{b_2}{x_2^2}$					
	x_2	6							
Варіант 13									
x_1	4,93	6,15	8,47	8,89	9,81	11,57	12,41	11,13	11,74
x_2	8,35	9,58	10,45	11,57	12,58	14,21	15,17	13,91	15,95
y	65,94	55,17	79,12	82,96	80,04	91,38	86,59	77,16	82,95
Прогноз	x_1	15	Залежність	$y = A \cdot x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2}$					
	x_2	19							
Варіант 14									
x_1	5,5	6,2	6,0	7,4	5,8	8,3	6,2	9,5	7,5
x_2	14,1	11,4	14,0	14,4	17,7	16,1	18,6	21,8	20,5
y	43,9	41,2	46,0	57,6	47,8	59,6	56,7	69,1	77,9
Прогноз	x_1	10	Залежність	$y = A \cdot x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2}$					
	x_2	25							
Варіант 15									
x_1	5	7	10	11	13	16	18	21	25
x_2	1,71	1,91	2,15	2,22	2,35	2,52	2,62	2,76	2,92
y	7	18	56	75	125	236	336	535	904
Прогноз	x_1	30	Залежність	$y = b_0 + \frac{b_1}{x_1} + b_2 \cdot x_2^3$					
	x_2	4							
Варіант 16									
x_1	12,6	11,9	12,4	11,1	14,0	14,4	13,1	14,5	15,6
x_2	4,8	4,0	4,1	5,3	7,4	6,4	8,0	7,3	6,4
y	89,7	95,4	93,1	87,4	106,7	100,2	109,8	110,6	116,3
Прогноз	x_1	20	Залежність	$y = A \cdot x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2}$					
	x_2	5							

Продовження табл. 6.4

Варіант 17									
x_1	0,208	0,076	0,172	0,076	0,064	0,079	0,074	0,054	0,069
x_2	2,608	2,983	2,646	3,332	3,847	2,898	4,899	4,012	3,782
y	34,3	36,3	25,7	37,5	38,5	33,6	43,6	40,8	40,6
<i>Прогноз</i>	x_1	0,3		<i>Залежність</i>	$y = A \cdot x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2}$				
	x_2	5,0							
Варіант 18									
x_1	9,36	13,29	11,57	13,64	10,79	15,30	13,25	14,88	16,52
x_2	10,70	14,00	12,00	13,50	14,80	17,10	17,40	17,60	18,10
y	28,6	32,5	30,8	31,5	41,5	40,5	40,1	43,3	45,0
<i>Прогноз</i>	x_1	20		<i>Залежність</i>	$y = A \cdot x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2}$				
	x_2	20							
Варіант 19									
x_1	12,48	15,34	15,05	13,25	12,90	13,02	17,57	18,04	15,06
x_2	7,08	8,28	10,47	8,86	9,65	11,58	13,65	14,59	15,35
y	85,40	76,80	98,80	96,40	108,70	136,43	117,46	117,60	149,38
<i>Прогноз</i>	x_1	20		<i>Залежність</i>	$y = A \cdot x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2}$				
	x_2	20							
Варіант 20									
x_1	4,3	5,6	6,9	5,1	5,0	4,3	8,8	12,8	14,6
x_2	11,9	9,5	11,5	15,6	15,1	17,4	15,7	18,9	16,6
y	54,2	54,6	62,7	73,9	67,2	64,4	80,1	92,7	88,3
<i>Прогноз</i>	x_1	15		<i>Залежність</i>	$y = A \cdot x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2}$				
	x_2	20							
Варіант 21									
x_1	7,7	8,9	9,8	9,2	12,3	8,8	13,3	13,2	12,5
x_2	6,6	5,2	7,4	8,4	9,4	8,8	11,7	17,7	15,9
y	40,4	40,6	50	47,7	57,8	47,7	56,1	63,8	59,7
<i>Прогноз</i>	x_1	15		<i>Залежність</i>	$y = A \cdot x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2}$				
	x_2	20							

Продовження табл. 6.4

Варіант 22									
x_1	14,01	12,26	16,50	17,49	14,03	18,64	16,34	14,63	18,60
x_2	15,74	15,92	16,57	15,64	16,02	13,77	15,81	16,94	17,81
y	95,80	98,70	116,83	116,06	103,81	113,05	109,70	106,96	122,99
Прогноз	x_1	20		Залежність	$y = A \cdot x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2}$				
	x_2	25							
Варіант 23									
x_1	0,52	5,32	10,02	14,61	20,11	20,17	25,3	27,61	30,25
x_2	2,42	7,02	11,38	14,3	15,34	17,31	21,78	24,69	29,5
y	2,399	0,96	0,59	0,58	0,56	0,409	0,367	0,411	0,34
Прогноз	x_1	40		Залежність	$y = \frac{1}{b_0 + b_1 \ln x_1 + b_2 x_2}$				
	x_2	40							
Варіант 24									
x_1	15,8	16,7	11,0	10,8	14,1	19,8	17,4	14,9	19,8
x_2	16,0	16,5	14,2	14,8	15,3	17,8	18,1	19,5	18,8
y	40,1	41,0	30,2	34,3	38,8	45,5	44,2	48,0	47,3
Прогноз	x_1	25		Залежність	$y = A \cdot x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2}$				
	x_2	25							
Варіант 25									
x_1	0,43	0,78	0,91	1,03	1,29	1,3	1,62	1,7	1,71
x_2	5,12	5,09	4,7	4,23	3,87	3,43	3,26	2,85	2,59
y	21,22	23,91	21,78	17,83	17,36	12,7	14,63	11,08	9,82
Прогноз	x_1	2		Залежність	$y = e^{b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2}$				

6.3 Зміст звіту

6.3.1 Тема та мета роботи.

6.3.2 Короткі теоретичні відомості.

6.3.3 Розрахунки та оцінка параметрів простої лінійної регресійної моделі методом найменших квадратів відповідно з варіантом.

6.3.4 Економічне обґрунтування отриманих результатів.

6.3.5 Розрахунки та оцінка параметрів множинної нелінійної регресійної моделі відповідно з варіантом.

6.3.6 Економічне обґрунтування отриманих результатів.

6.3.7 Висновки.

6.4 Приклади кореляційно-регресійного аналізу

6.4.1 Приклад 1. Проста лінійна регресія

У табл. 6.5 наведені результати вимірювань величини струму через резистор I , A (результативний показник y) в залежності від прикладеної напруги U , B (факторний показник x).

За допомогою МНК скласти лінійну регресійну модель у вигляді аналітичної залежності $I = f(U)$ та оцінити її параметри.

Обчислити значення струму I при значенні напруги $U = 60$ В.

Таблиця 6.5 – Вихідні дані та розрахунки для побудови простої лінійної регресії за методом найменших квадратів

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ
x	18	20	23	25	28	32	37	40	44	267
y	12	17	23	29	29	34	37	38	47	266
x^2	324	400	529	625	784	1024	1369	1600	1936	8591
xy	216	340	529	725	812	1088	1369	1520	2068	8667
\hat{y}	16,0	18,4	21,8	24,2	27,6	32,3	38,0	41,5	46,1	
$y - \bar{y}$	-17,6	-12,6	-6,6	-0,6	-0,6	4,4	7,4	8,4	17,4	
$(y - \bar{y})^2$	308,2	157,6	43,0	0,3	0,3	19,8	55,4	71,3	304,3	960,2
v	-4,0	-1,4	1,2	4,8	1,4	1,7	-1,0	-3,5	0,9	
v^2	16,39	1,86	1,35	23,49	1,89	3,04	1,09	12,38	0,72	62,22

Результати проміжних розрахунків наведені у табл. 6.5.

6.4.1.1 Визначимо коефіцієнти регресії для чого, використовуючи розрахунки, наведені у табл. 6.3, складемо систему рівнянь (6.21) за методом найменших квадратів:

$$\begin{cases} b_0 \cdot 9 + b_1 \cdot 267 = 266 \\ b_0 \cdot 267 + b_1 \cdot 8591 = 8667 \end{cases}$$

Результат розв'язання: $b_0 = -4,79$; $b_1 = 1,16$.

Таким чином, регресійна модель має вигляд:

$$\hat{y} = -4,79 + 1,16 \cdot x$$

Значення коефіцієнта $b_1 = 1,16$ визначає кут нахилу прямої рівняння регресії до осі абсцис. Фізично він дорівнює значенню опору резистора R , Ом.

Значення $b_0 = -4,79$ пов'язане з систематичною похибкою вимірювань (впливом сторонніх факторів).

6.4.1.2 Оцінімо тісноту зв'язку регресійної моделі.

За формулами (6.23) та (6.24) визначимо дисперсії залежної змінної та залишків:

$$\sigma_{\hat{y}}^2 = \frac{960,2}{8} = 120,03$$

$$\sigma_v^2 = \frac{62,22}{7} = 8,89$$

За формулою (6.10) визначимо коефіцієнт кореляції:

$$R = \sqrt{1 - \frac{8,89}{120,03}} = 0,967$$

Оскільки коефіцієнт кореляції наближується до 1, це свідчить про те, що між змінними існує дуже тісний зв'язок.

6.4.1.3 Оцінімо частку впливу факторного показника на результативний показник.

Оскільки коефіцієнт кореляції R дорівнює 0,967, то коефіцієнт детермінації відповідно дорівнює: $R^2 = 0,935$.

Це свідчить про те, що варіація результативного показника на 93,5% визначається варіацією факторного показника.

6.4.1.4 Оцінімо значущість коефіцієнта кореляції, для чого за формулою (6.14) розрахуємо t -критерій Стьюдента для коефіцієнта кореляції. Попередньо розрахуємо довірчі границі коефіцієнта кореляції за формулою 6.15.

$$\sigma_R = \frac{1 - 0,935}{\sqrt{9 - 1 - 1}} = 0,024$$

$$t_R = \frac{0,967}{0,024} = 39,48$$

Табличне значення критерію Стьюдента визначаємо для рівня значущості $\alpha = 0,05$ та числа ступенів вільності $n-m-1 = 7$.

$$t_{(0,05;7)} = 1,89.$$

Оскільки $t_R > t_{(0,05;7)}$, то з ймовірністю $p = 0,95$ можна стверджувати, що коефіцієнт кореляції значущий.

6.4.1.5 Оціним значущість коефіцієнтів регресії для чого за формулою (7.16) розрахуємо для них t -критерій Стьюдента.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 18 \\ 1 & 20 \\ 1 & 23 \\ 1 & 25 \\ 1 & 28 \\ 1 & 32 \\ 1 & 37 \\ 1 & 40 \\ 1 & 44 \end{pmatrix}, X^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 18 & 20 & 23 & 25 & 28 & 32 & 37 & 40 & 44 \end{pmatrix},$$

$$X^T \cdot X = \begin{pmatrix} 9 & 267 \\ 267 & 8591 \end{pmatrix}, (X^T \cdot X)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,425 & -0,044 \\ -0,044 & 0,001 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{b_0} = \sqrt{8,89 \cdot 1,425} = 3,56, \sigma_{b_1} = \sqrt{8,89 \cdot 0,001} = 0,12,$$

$$t_{b_0} = \frac{4,79}{3,56} = 1,34, t_{b_1} = \frac{1,16}{0,12} = 10,05$$

Табличне значення критерію Стьюдента для рівня значущості $\alpha = 0,05$ та числа ступенів вільності $n-m-1 = 7$ $t_{(0,05;7)} = 1,89$.

Оскільки $t_{b_j} > t_{(0,05;7)}$ для обох коефіцієнтів, то з ймовірністю $p = 0,95$ можна стверджувати, що коефіцієнт b_1 значущий, а коефіцієнт b_0 – незначущий.

6.4.1.6 Оцінимо адекватність регресійної моделі, для чого за формулою (6.18) розрахуємо F -критерій Фішера:

$$F_p = \frac{0,935}{1 - 0,935} \cdot 7 = 100,69$$

Табличне значення F -критерію визначаємо для рівня значущості $\alpha = 0,05$ та числа ступенів вільності $m=1$ та $n-m-1=7$.

$$F_{(0,05;1;7)} = 5,59.$$

Оскільки $F_R > F_{(0,05;1;7)}$, то з ймовірністю $p = 0,95$ можна стверджувати, що регресійна модель адекватно описує задане явище.

6.4.1.7 Визначимо значення струму I при значенні напруги $U = 60$ В:

$$I = -4,79 + 1,16 \cdot 60 = 64,67(\text{А})$$

6.4.2 Приклад 2. Двофакторна лінійна регресія

У табл. 6.6 наведені експериментальні результати визначення конвективного коефіцієнта тепловіддачі від поверхні корпусу радіоелектронного апарата α , Вт/(м²·К) (результативний показник y) при різних значеннях перегріву корпусу Δt , К (факторний показник x_1) та швидкості охолоджуючого потоку w , м/с (факторний показник x_2).

На основі експериментальних даних побудувати двофакторну лінійну модель у вигляді аналітичної залежності $\alpha = f(\Delta t, w)$ та оцінити її параметри.

Обчислити значення конвективного коефіцієнта тепловіддачі α для перегріву корпусу $\Delta t = 70$ К при швидкості охолоджуючого потоку $w = 8$ м/с.

Таблиця 6.6 - Вихідні дані для побудови двофакторної лінійної регресійної моделі

№	y_i	x_{1i}	x_{2i}
1	8,94	0	0,5
2	18,04	12	1,0
3	23,58	24	2,0
4	27,93	36	3,0
5	34,64	48	5,0
6	46,71	60	10,0
Σ	159,84	120	21,5

Двофакторну лінійну модель шукаємо у вигляді:

$$y = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2$$

6.4.2.1 Розрахуємо коефіцієнти регресійної моделі матричним методом.

На основі вихідних даних сформуємо матриці незалежних змінних X , залежної змінної Y та транспоновані до них X^T і Y^T .

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0,5 \\ 1 & 12 & 1,0 \\ 1 & 24 & 2,0 \\ 1 & 36 & 3,0 \\ 1 & 48 & 5,0 \\ 1 & 60 & 10,0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 8,94 \\ 18,04 \\ 23,58 \\ 27,93 \\ 34,64 \\ 46,71 \end{pmatrix},$$

$$X^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 12 & 24 & 36 & 48 & 60 \\ 8,94 & 18,04 & 23,58 & 27,93 & 34,64 & 46,71 \end{pmatrix},$$

$$Y^T = (8,94 \quad 18,04 \quad 23,58 \quad 27,93 \quad 34,64 \quad 46,71)$$

Знайдемо добутки матриць:

$$X^T \cdot X = \begin{pmatrix} 6 & 180 & 21,5 \\ 180 & 7900 & 1008 \\ 21,5 & 1008 & 139,3 \end{pmatrix},$$

$$X^T \cdot Y = \begin{pmatrix} 159,8 \\ 6253,2 \\ 739,8 \end{pmatrix}$$

Знайдемо обернену матрицю:

$$(X^T \cdot X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0,579 & -0,023 & 0,074 \\ -0,023 & 0,002 & -0,015 \\ 0,074 & -0,015 & 0,101 \end{pmatrix}$$

За отриманими результатами розрахуємо вектор параметрів моделі:

$$B = (X^T \cdot X)^{-1} \cdot (X^T \cdot Y) = \begin{pmatrix} 10,10 \\ 0,42 \\ 1,11 \end{pmatrix}$$

Регресійна модель має вигляд:

$$\hat{y} = 10,10 + 0,42 \cdot x_1 + 1,11 \cdot x_2$$

6.4.2.2 Оцінимо тісноту зв'язку отриманої моделі.

Визначимо добуток матриць: $Y^T \cdot Y = 5123,22$.

Визначимо дисперсію результативного показника за формулою (6.11):

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{6-1} \cdot \left[5123,22 - \frac{1}{6} (159,84)^2 \right] = 173,01$$

Визначимо дисперсію залишків за формулою (6.12).
Попередньо визначимо вектор залишків за формулою (6.13):

$$V = \begin{pmatrix} 8,94 \\ 18,04 \\ 23,58 \\ 27,93 \\ 34,64 \\ 46,71 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0,5 \\ 1 & 12 & 1,0 \\ 1 & 24 & 2,0 \\ 1 & 36 & 3,0 \\ 1 & 48 & 5,0 \\ 1 & 60 & 10,0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10,10 \\ 0,42 \\ 1,11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,71 \\ 1,80 \\ 1,21 \\ -0,58 \\ -1,11 \\ 0,39 \end{pmatrix}$$

$$V^T = (-1,71 \quad 1,80 \quad 1,21 \quad -0,58 \quad -1,11 \quad 0,39),$$

$$V^T \cdot V = 9,37.$$

Дисперсія залишків:

$$\sigma_v^2 = \frac{9,37}{6-2-1} = 3,12$$

Визначимо коефіцієнт множинної кореляції за формулою (6.10):

$$R = \sqrt{1 - \frac{3,12}{173,01}} = 0,994$$

Оскільки коефіцієнт множинної кореляції більший за 0,9, зв'язок між залежною та незалежними змінними можна вважати дуже тісним.

6.4.2.3 Оцінимо частку впливу факторних показників x_1 , x_2 на результативний показник y .

Оскільки коефіцієнт кореляції R дорівнює 0,994, то коефіцієнт детермінації відповідно дорівнює: $R^2 = 0,989$.

Це свідчить про те, що побудована модель регресії пояснює варіацію значень результативної змінної щодо свого середнього рівня на 98,9%, тобто 98,9% загальної дисперсії результативної змінної пояснюється варіацією факторних змінних, включених до моделі регресії.

6.4.2.4 Перевіримо значущість коефіцієнта множинної кореляції за t -критерієм Стьюдента.

Визначимо довірчі границі коефіцієнта множинної кореляції за формулою (6.15):

$$\sigma_R = \frac{1 - 0,989}{\sqrt{6 - 2 - 1}} = 0,006$$

Розрахуємо критерій Стьюдента за формулою (6.14):

$$t_R = \frac{0,994}{0,006} = 158,97$$

Табличне значення критерію Стьюдента визначаємо для рівня значущості $\alpha = 0,05$ та числа ступенів вільності $n-m-1 = 3$.

$$t_{(0,05;3)} = 2,35.$$

Оскільки $t_R > t_{(0,05;3)}$, то з ймовірністю $p = 0,95$ можна стверджувати, що коефіцієнт кореляції значущий.

6.4.2.5 Оцінимо значущість коефіцієнтів регресії за t -критерієм Стьюдента.

Для цього обчислимо значення критерію Стьюдента для кожного коефіцієнта регресії за формулами (6.16), (6.17):

$$\sigma_{b_0} = \sqrt{4,68 \cdot 0,579} = 1,65; \quad t_{b_0} = \frac{10,10}{1,65} = 6,13$$

$$\sigma_{b_1} = \sqrt{4,68 \cdot 0,002} = 0,11; \quad t_{b_1} = \frac{0,42}{0,11} = 3,88$$

$$\sigma_{b_2} = \sqrt{4,68 \cdot 0,100} = 0,69; \quad t_{b_2} = \frac{1,11}{0,69} = 1,61$$

Оскільки для коефіцієнтів b_0, b_1 $t_b > t_{(0,05;3)}$, то з ймовірністю $p = 0,95$ можна стверджувати, що ці коефіцієнти значущі.

Оскільки для коефіцієнта b_2 $t_b < t_{(0,05;3)}$, то з ймовірністю $p = 0,95$ можна стверджувати, що цей коефіцієнт незначущий.

6.4.2.6 Оцінимо адекватність моделі за F -критерієм Фішера.

Розрахуємо F -критерій Фішера за формулою (6.18):

$$F_p = \frac{0,989}{1 - 0,989} \cdot \frac{6 - 2 - 1}{2} = 136,93$$

Табличне значення F -критерію визначаємо для рівня значущості $\alpha = 0,05$ та числа ступенів вільності $m=2$ та $n-m-1=3$.

$$F_{(0,05;2;3)} = 9,55.$$

Оскільки $F_R > F_{(0,05;2;3)}$, то з ймовірністю $p = 0,95$ можна стверджувати, що регресійна модель адекватно описує задане явище.

6.4.2.7 Обчислимо значення конвективного коефіцієнта тепловіддачі α для перегріву корпусу $\Delta t = 70$ К при швидкості охолоджуючого потоку $w = 8$ м/с:

$$\alpha = 10,10 + 0,42 \cdot 70 + 1,11 \cdot 8 = 48,29 \left(\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}} \right)$$

6.4.3 Приклад 3. Двофакторна нелінійна регресія

На основі статистичних даних, наведених у табл. 6.7, побудувати двофакторну модель у вигляді виробничої регресії Кобба-Дугласа:

$$y = A \cdot x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2} \quad (6.29)$$

Оцінити параметри отриманої моделі.

Обчислити прогнозні дані у заданій точці.

Таблиця 6.7 - Вихідні дані для побудови двофакторної нелінійної регресійної моделі

№	y_i	x_{1i}	x_{2i}
1	69,5	21,1	52,1
2	75,9	23,6	57,0
3	79,9	24,4	60,7
4	84,6	24,8	65,7
5	89,0	27,0	69,9
6	95,6	28,6	74,6
7	99,8	31,0	77,8
8	103,1	33,4	78,0
9	107,5	33,7	83,0
10	111,9	34,9	86,9
11	114,5	35,2	89,2
12	120,9	36,4	94,6
13	122,8	37,2	97,0
прогноз		39,3	100,4

6.4.3.1 Перейдемо від нелінійної моделі до лінійної, використовуючи перетворення, наведені у табл. 6.2:

$$z = b_0 + b_1 \cdot u_1 + b_2 \cdot u_2 \quad (6.30)$$

де $z = \ln y;$
 $b_0 = \ln A; A = e^{b_0}$
 $u_1 = \ln x_1;$
 $u_2 = \ln x_2.$

Дані, перераховані для лінійної моделі (6.30), наведені у табл.

6.8.

Таблиця 6.8 – Дані, перераховані для лінійної моделі

№	z_i	u_{1i}	u_{2i}
1	4,24	3,05	3,95
2	4,33	3,16	4,04
3	4,38	3,20	4,10
4	4,44	3,21	4,19
5	4,49	3,29	4,25
6	4,56	3,35	4,31
7	4,60	3,43	4,35
8	4,64	3,51	4,36
9	4,68	3,52	4,42
10	4,72	3,55	4,47
11	4,74	3,56	4,49
12	4,80	3,60	4,55
13	4,81	3,62	4,58
Σ	59,4	44,05	56,06

6.4.3.2 Розрахуємо коефіцієнти лінійної моделі матричним методом.

На основі вихідних даних сформуємо матриці незалежних змінних U , залежної змінної Z та транспоновані до них U^T і Z^T .

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 3,05 & 3,95 \\ 1 & 3,16 & 4,04 \\ 1 & 3,20 & 4,10 \\ 1 & 3,21 & 4,19 \\ 1 & 3,29 & 4,25 \\ 1 & 3,35 & 4,31 \\ 1 & 3,43 & 4,35 \\ 1 & 3,51 & 4,36 \\ 1 & 3,52 & 4,42 \\ 1 & 3,55 & 4,47 \\ 1 & 3,56 & 4,49 \\ 1 & 3,60 & 4,55 \\ 1 & 3,62 & 4,58 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} 4,24 \\ 4,33 \\ 4,38 \\ 4,44 \\ 4,49 \\ 4,56 \\ 4,60 \\ 4,64 \\ 4,68 \\ 4,72 \\ 4,74 \\ 4,80 \\ 4,81 \end{pmatrix},$$

Знайдемо добутки матриць:

$$U^T \cdot U = \begin{pmatrix} 13,0 & 44,1 & 56,0 \\ 44,1 & 149,7 & 190,4 \\ 56,0 & 190,4 & 242,2 \end{pmatrix},$$

$$U^T \cdot Z = \begin{pmatrix} 59,4 \\ 201,7 \\ 256,6 \end{pmatrix}$$

Знайдемо обернену матрицю:

$$(U^T \cdot U)^{-1} = \begin{pmatrix} 75,8 & 49,7 & -56,6 \\ 49,7 & 70,0 & -66,6 \\ -56,6 & -66,5 & 65,4 \end{pmatrix}$$

За отриманими результатами розрахуємо вектор параметрів моделі:

$$B = (U^T \cdot U)^{-1} \cdot (U^T \cdot Z) = \begin{pmatrix} 0,76 \\ 0,30 \\ 0,65 \end{pmatrix}$$

Лінійна модель має вигляд:

$$\hat{z} = 0,76 + 0,30 \cdot u_1 + 0,65 \cdot u_2$$

6.4.3.3 Перейдемо від лінійної моделі до нелінійної.
Попередньо визначимо коефіцієнт А:

$$A = e^{0,76} = 2,13$$

Таким чином, нелінійна модель має вигляд:

$$\hat{y} = 2,13 \cdot x_1^{0,30} \cdot x_2^{0,65} \quad (6.31)$$

6.4.3.4 Оцінимо тісноту зв'язку отриманої моделі.

Визначимо добуток матриць: $Y^T \cdot Y = 5123,22$.

Визначимо дисперсію результативного показника за формулою (6.11):

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{13 - 1} \cdot \left[128667 - \frac{1}{13} (1275)^2 \right] = 301,6$$

Визначимо дисперсію залишків за формулою (6.12). Попередньо визначимо вектор залишків, для чого за формулою (6.31) розрахуємо теоретичні значення результативного показника. Результати розрахунків наведені у табл. 6.9.

Таблиця 6.9 – Розрахунки вектору залишків

X_{1i}	X_{2i}	\hat{Y}_i	y_i	$v_i = y_i - \hat{Y}_i$
21,1	52,1	69,2	69,5	0,3
23,6	57,0	75,8	75,9	0,1
24,4	60,7	79,8	79,9	0,1
24,8	65,7	84,4	84,6	0,2
27,0	69,9	90,1	89,0	-1,1
28,6	74,6	95,7	95,6	-0,1
31,0	77,8	100,6	99,8	-0,8
33,4	78,0	103,0	103,1	0,1
33,7	83,0	107,6	107,5	-0,1
34,9	86,9	112,0	111,9	-0,1
35,2	89,2	114,2	114,5	0,3
36,4	94,6	120,0	120,9	0,9
37,2	97,0	122,6	122,8	0,2

$$V^T \cdot V = 3,26$$

Дисперсія залишків:

$$\sigma_v^2 = \frac{3,26}{13 - 2 - 1} = 0,33$$

Визначимо коефіцієнт множинної кореляції за формулою (6.10):

$$R = \sqrt{1 - \frac{0,33}{301,60}} = 0,999$$

Оскільки коефіцієнт множинної кореляції наближається до 1, зв'язок між залежною та незалежними змінними можна вважати дуже тісним.

6.4.3.5 Оцінимо частку впливу факторних показників x_1, x_2 на результативний показник y .

Оскільки коефіцієнт кореляції R дорівнює 0,999, то коефіцієнт детермінації відповідно дорівнює: $R^2 = 0,998$.

Це свідчить про те, що побудована модель регресії пояснює варіацію значень результативної змінної щодо свого середнього рівня на 99,8%, тобто 99,8% загальної дисперсії результативної змінної пояснюється варіацією факторних змінних, включених до моделі регресії.

6.4.3.6 Перевіримо значущість коефіцієнта множинної кореляції за t -критерієм Стьюдента.

Визначимо довірчі границі коефіцієнта множинної кореляції за формулою (6.15):

$$\sigma_R = \frac{1 - 0,998}{\sqrt{13 - 2 - 1}} = 0,0003$$

Розрахуємо критерій Стьюдента за формулою (6.14):

$$t_R = \frac{0,998}{0,0003} = 2922$$

Табличне значення критерію Стьюдента визначаємо для рівня значущості $\alpha = 0,05$ та числа ступенів вільності $n-m-1 = 10$.

$$t_{(0,05;10)} = 1,81.$$

Оскільки $t_R \gg t_{(0,05;10)}$, то з ймовірністю $p = 0,95$ можна стверджувати, що коефіцієнт кореляції значущий.

6.4.3.7 Оцінимо значущість коефіцієнтів регресії нелінійної моделі за t -критерієм Стьюдента.

Попередньо запишемо матрицю X та визначимо матрицю $(X^T \cdot X)^{-1}$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 21,1 & 52,1 \\ 1 & 23,6 & 57,0 \\ 1 & 24,4 & 60,7 \\ 1 & 24,8 & 65,7 \\ 1 & 27,0 & 69,9 \\ 1 & 28,6 & 74,6 \\ 1 & 31,0 & 77,8 \\ 1 & 33,4 & 78,0 \\ 1 & 33,7 & 83,0 \\ 1 & 34,9 & 86,9 \\ 1 & 35,2 & 89,2 \\ 1 & 36,4 & 94,6 \\ 1 & 37,2 & 100,4 \end{pmatrix}$$

$$(X^T \cdot X)^{-1} = \begin{pmatrix} 2,613 & -0,118 & 0,014 \\ -0,118 & 0,076 & -0,029 \\ 0,014 & -0,029 & 0,011 \end{pmatrix}$$

Обчислимо значення критерію Стьюдента для кожного коефіцієнта регресії за формулами (6.16), (6.17):

$$\sigma_{b_0} = \sqrt{0,36 \cdot 2,613} = 0,97; \quad t_{b_0} = \frac{2,13}{0,97} = 2,19$$

$$\sigma_{b_1} = \sqrt{0,36 \cdot 0,076} = 0,16; \quad t_{b_1} = \frac{0,30}{0,16} = 1,86$$

$$\sigma_{b_2} = \sqrt{0,36 \cdot 0,011} = 0,06; \quad t_{b_2} = \frac{0,65}{0,06} = 10,20$$

Для усіх коефіцієнтів $t_b > t_{(0,05;10)} = 1,81$, тому з ймовірністю $p = 0,95$ можна стверджувати, що усі коефіцієнти регресії значущі.

6.4.3.8 Оцінимо адекватність моделі за F -критерієм Фішера.

Розрахуємо F -критерій Фішера за формулою (6.18):

$$F_p = \frac{0,998}{1 - 0,998} \cdot \frac{13 - 2 - 1}{2} = 4620$$

Табличне значення F -критерію визначаємо для рівня значущості $\alpha = 0,05$ та числа ступенів вільності $m=2$ та $n-m-1=10$.

$$F(0,05;2;10) = 4,10.$$

Оскільки $F_R \gg F_{(0,05;2;10)}$, то з ймовірністю $p = 0,95$ можна стверджувати, що регресійна модель адекватно описує задане явище.

6.2.3.9 Прогнозні дані у точці: $x_1 = 39,3$; $x_2 = 100,4$

$$\hat{y}_{\text{прогн.}} = 2,13 \cdot (39,3)^{0,30} \cdot (100,4)^{0,65} = 127,5$$

7 ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ 7. ВИКОРИСТАННЯ MS EXCEL В АНАЛІТИЧНИХ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

Мета роботи: отримати практичні навички використання інструментарію MS Excel для розв'язання складних аналітичних задач та математичної обробки результатів досліджень.

Більш детально теоретичні відомості з даної теми наведені у [1], стор. 212 – 231.

7.1 Практичне заняття 7.1. Застосування MS Excel для розв'язання систем лінійних рівнянь

Під час розрахунків складних систем часто доводиться розв'язувати системи лінійних рівнянь високих порядків.

Так, наприклад, розрахунок статичної рівноваги плоскої статично визначеної системи сил зводиться до розв'язання трьох рівнянь з трьома невідомими, але для статично невизначених систем їх кількість збільшується до шести.

Так само, розрахунки розгалужених електричних кіл потребують розв'язання систем лінійних рівнянь, причому, чим більше гілок у колі, тим більше потрібно рівнянь.

Для розв'язання систем лінійних рівнянь існує декілька методів, основними з яких є методи Крамера, Гауса та оберненої матриці (матричний метод); при цьому останній можна застосовувати для швидкого розв'язання систем лінійних рівнянь високих порядків за допомогою MS Excel.

7.1.1 Операції над матрицями

7.1.1.1 Транспонування матриць

Транспонуванням називається операція переходу від початкової матриці (A) до транспонованої (A^T).

Транспонованою називається матриця (A^T), у якій стовпці початкової матриці (A) замінюються рядками з відповідними номерами.

З визначення транспонованої матриці виходить, що якщо початкова матриця A має розмір $m \times n$, то транспонована матриця A^T має розмір $n \times m$.

Для здійснення транспонування в MS Excel використовується функція “**ТРАНСП**”, яка дозволяє поміняти орієнтацію масиву на робочому листі з вертикальною на горизонтальну і навпаки.

Функція має вигляд “**ТРАНСП (масив)**”, де масив - це матриця, що транспонується, або діапазон осередків на робочому листі. Транспонування масиву полягає в тому, що перший рядок масиву стає першим стовпцем нового масиву, другий рядок масиву стає другим стовпцем нового масиву і т. ін.

7.1.1.2 Обчислення визначника матриці

Важливою характеристикою квадратних матриць є їх *визначник*.

Визначник матриці – це число, що обчислюється на основі значень елементів масиву. Визначник матриці A позначається як $|A|$ або Δ .

У MS Excel для обчислення визначника квадратної матриці використовується функція “**МОПРЕД**”. Функція має вигляд “**МОПРЕД (масив)**”, де масив – це числовий масив, в якому зберігається матриця з рівною кількістю рядків і стовпців. При цьому масив може бути заданий як інтервал осередків, наприклад, A1:C3; чи як масив констант, наприклад, {1;2;3;4;5;6;7;8;9}.

7.1.1.3 Знаходження зворотної матриці

Так само, як для кожного числа $a \neq 0$ існує зворотне число a^{-1} , для квадратних матриць вводиться аналогічне поняття.

Зворотні матриці зазвичай використовуються для вирішення систем рівнянь з декількома невідомими.

Матриця A^{-1} називається зворотною по відношенню до квадратної матриці A , якщо при множенні цієї матриці на дану як ліворуч, так і праворуч виходить одинична матриця:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E = 1 \quad (7.1)$$

Як впливає з визначення, зворотна матриця є квадратною того ж порядку, що і початкова матриця.

Існують спеціальні досить складні алгоритми для ручного обчислення зворотних матриць.

У MS Excel для знаходження зворотної матриці використовується функція “**МОБР**”, яка обчислює зворотну матрицю для матриці, що зберігається в таблиці у вигляді масиву. Функція має

де:

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (7.5)$$

Якщо домножити праву і ліву частини рівняння (7.4) на матрицю A^{-1} , зворотну до матриці A , то отримаємо:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

Враховуючи (7.1), отримаємо формулу для визначення вектору невідомих X :

$$X = A^{-1} \cdot B \quad (7.6)$$

MS Excel надає багатий інструментарій, який дозволяє виконувати різноманітні операції з матрицями, у тому числі множення матриць та визначення матриці, зворотної до даної.

7.1.3 Завдання до роботи

Для розгалуженої електричної схеми постійного струму, наведеної на рис. 7.1, розрахувати струми у гілках, використовуючи закони Ома та Кірхгофа.

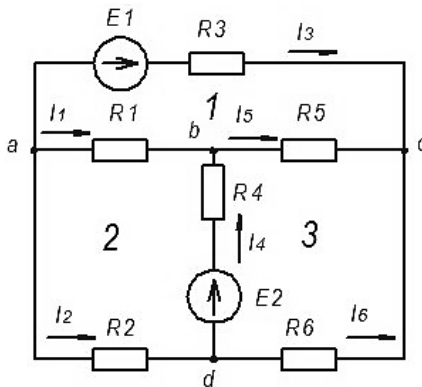


Рисунок 7.1 – Електрична схема для розрахунків

Вихідні дані за варіантами наведені у табл. 7.1.

Таблиця 7.1 – Вихідні дані для розрахунків струмів за схемою на рис. 7.1.

Варіант	ЕРС джерел напруги, В		Значення опорів, Ом					
	E1	E2	R1	R2	R3	R4	R5	R6
1	150	220	15	20	35	40	55	80
2	120	-210	10	18	44	58	26	12
3	-220	150	50	28	25	74	44	52
4	-135	-130	30	40	10	15	75	85
5	140	85	40	36	30	22	48	54
6	200	-75	25	42	36	18	75	44
7	210	90	16	75	38	22	45	76
8	-115	125	22	85	14	46	28	82
9	85	-110	45	90	68	38	16	36
10	-180	-150	25	35	46	62	8	28
11	90	160	36	15	52	82	10	16
12	125	230	18	34	78	16	22	46
13	-230	-250	10	12	92	44	36	38
14	-110	220	8	10	62	55	56	90
15	130	-120	55	18	38	50	82	45
16	-145	130	90	44	36	35	74	88
17	160	-135	75	78	14	30	88	62
18	-70	80	80	84	20	85	95	56
19	250	-165	35	28	50	70	50	32
20	225	185	24	16	55	75	40	16
21	-170	190	15	18	64	80	30	8
22	-95	200	42	35	18	95	28	14
23	130	-260	64	50	92	44	14	26
24	220	120	75	40	30	22	62	30
25	-215	-155	45	24	28	48	52	20

Примітка. Знак "-" вказує, що напрямок відповідної ЕРС протилежний вказаному на рис. 7.1.

7.1.4 Зміст звіту

7.1.4.1 Схема електрична та вихідні дані до розрахунків.

7.1.4.2 Система рівнянь для визначення струмів у гілках схеми, складена з використанням закону Ома та законів Кірхгофа.

7.1.4.3 Система рівнянь у матричній формі.

7.1.4.4 Скриншоти розрахунків системи рівнянь у середовищі MS Excel матричним методом.

7.1.4.5 Скриншоти розрахункових формул.

7.1.4.6 Висновки.

7.1.5 Приклад розрахунку

Умова задачі

Для електричної схеми постійного струму, наведеної на рис. 7.1, розрахувати струми у гілках схеми за допомогою законів Ома та Кірхгофа.

Значення ЕРС джерел напруги E_1 , E_2 та опорів резисторів $R_1 \dots R_6$ наведені нижче:

$$E_1 = 100 \text{ В}$$

$$E_2 = 115 \text{ В}$$

$$R_1 = 20 \text{ Ом}$$

$$R_2 = 15 \text{ Ом}$$

$$R_3 = 30 \text{ Ом}$$

$$R_4 = 10 \text{ Ом}$$

$$R_5 = 25 \text{ Ом}$$

$$R_6 = 12 \text{ Ом}$$

Рішення

Наведена на рис. 7.1 розгалужена схема постійного струму містить $n = 3$ контури та $m = 4$ вузли.

За законами Кірхгофа для цієї схеми можна скласти $n + m - 1 = 6$ лінійно незалежних рівнянь.

Оскільки кількість невідомих струмів $p = 6$, система лінійних рівнянь визначена і її можна розв'язувати матричним методом.

Рівняння за першим законом Кірхгофа:

$$\text{Вузол а: } -I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

$$\text{Вузол б: } I_1 + I_4 - I_5 = 0$$

$$\text{Вузол с: } I_3 + I_5 + I_6 = 0$$

Рівняння за другим законом Кірхгофа:

$$\text{Контур 1: } -R1 \cdot I_1 + R3 \cdot I_3 - R5 \cdot I_5 = E1$$

$$\text{Контур 2: } -R1 \cdot I_1 + R2 \cdot I_2 + R4 \cdot I_4 = E2$$

$$\text{Контур 3: } R4 \cdot I_4 + R5 \cdot I_5 - R6 \cdot I_6 = E2$$

Підставивши чисельні значення, отримаємо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{aligned} -1 \cdot I_1 - 1 \cdot I_2 - 1 \cdot I_3 &= 0 \\ 1 \cdot I_1 + 1 \cdot I_4 - 1 \cdot I_5 &= 0 \\ 1 \cdot I_3 + 1 \cdot I_5 + 1 \cdot I_6 &= 0 \\ -20 \cdot I_1 + 30 \cdot I_3 - 25 \cdot I_5 &= 100 \\ -20 \cdot I_1 + 15 \cdot I_2 + 10 \cdot I_4 &= 115 \\ 10 \cdot I_4 + 25 \cdot I_5 - 12 \cdot I_6 &= 115 \end{aligned} \quad (7.7)$$

Представимо її у матричній формі:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -20 & 0 & 30 & 0 & -25 & 0 \\ -20 & 15 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 25 & -12 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \\ 115 \\ 115 \end{pmatrix}$$

Розрахуємо члени вектору X за допомогою інструментарію MS Excel.

Результати розрахунків показані на рис. 7.2, розрахункові формули – на рис. 7.3.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2									
3		-1	-1	-1	0	0	0		0
4		1	0	0	1	-1	0		0
5		0	0	1	0	1	1		0
6		-20	0	30	0	-25	0		100
7		-20	15	0	10	0	0		115
8		0	0	0	10	25	-12		115
9									
10									
11		-0,272	0,189	-0,010	-0,009	-0,018	-0,001		
12		-0,538	-0,175	-0,159	-0,013	0,031	-0,013		
13		-0,189	-0,014	0,169	0,021	-0,013	0,014		
14		0,263	0,642	0,220	0,001	0,018	0,018		
15		-0,010	-0,169	0,210	-0,007	-0,001	0,018		
16		0,199	0,183	0,621	-0,014	0,013	-0,032		
17									
18			-3,055						
19			0,751						
20			2,304						
21			4,264						
22			1,209						
23			-3,512						

Рисунок 7.2 – Розв'язання системи лінійних рівнянь

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
2		-1	-1	-1	0	0	0		0
3		1	0	0	0	1	-1	0	0
4		0	0	1	0	0	1	1	0
5		-20	0	30	0	-25	0		100
6		-20	15	0	10	0	0		115
7		0	0	0	10	25	-12		115
8									
9									
10									
11									
12									
13									
14									
15									
16									
17									
18									
19									
20									
21									
22									
23									

Рисунок 7.3 – Розрахункові формули для розв'язання системи лінійних рівнянь

Таким чином, струми у гілках схеми:

$$I_1 = -3,055 \text{ A}$$

$$I_2 = 0,751 \text{ A}$$

$$I_3 = 2,304 \text{ A}$$

$$I_4 = 4,264 \text{ A}$$

$$I_5 = 1,209 \text{ A}$$

$$I_6 = -3,512 \text{ A}$$

З урахуванням знаків, напрямки струмів I_1 , I_6 слід змінити на протилежні.

7.2 Практичне заняття 7.2. Розв'язання трансцедентних рівнянь за допомогою MS Excel

7.2.1 Методи розв'язання трансцедентних рівнянь

Параметри більшості фізичних процесів зазвичай пов'язані між собою досить складними залежностями; при цьому для їх визначення часто доводиться розв'язувати трансцедентні рівняння.

Трансцедентне рівняння – це рівняння виду:

$$f(x) = g(x) \quad (7.8)$$

де функції $f(x)$ і $g(x)$ є аналітичними функціями та принаймні одна з них не є алгебраїчною.

Трансцедентні рівняння зазвичай не мають аналітичних розв'язків і допускають тільки наближені розв'язки, знайти які можна чисельними, аналітичними або графічними методами.

У чисельних методах розв'язання трансцедентних рівнянь використовуються алгоритми знаходження нуля функції.

В деяких випадках для отримання аналітичних рішень можна використовувати спеціальні функції. Зокрема, рівняння $x = e^{-x}$ має аналітичне рішення у термінах W -функції Ламберта.

Графічний метод полягає у тому, щоб розділити змінні і представити їх двома графіками, точки перетину яких являють собою розв'язок рівняння. Для знаходження розв'язку трансцедентного рівняння (7.8) слід представити у вигляді:

$$F(x) = f(x) - g(x) \quad (7.8)$$

де $f(x)$; $g(x)$ – складові частини трансцедентного рівняння.

Після цього слід побудувати графік функції $F(x)$ та визначити орієнтоване значення кореня (або коренів у випадку, коли їх декілька) в точках, де графік перетинає вісь абсцис.

Як правило, за графіками ці значення можуть бути визначені лише приблизно, і для їх уточнення доцільно застосувати чисельні методи.

7.2.2 Застосування інструмента Підбір параметра для розв'язання трансцендентних рівнянь

У MS Excel присутній інструмент **Підбір параметра**, який за допомогою чисельних методів дозволяє знаходити наближені розв'язки трансцендентних рівнянь.

Цей інструмент можна викликати зі спливаючого меню **Аналіз "що якщо?"**, яке знаходиться у групі команд **Прогноз** на вкладці стрічки **Дані** (див. рис. 7.4).

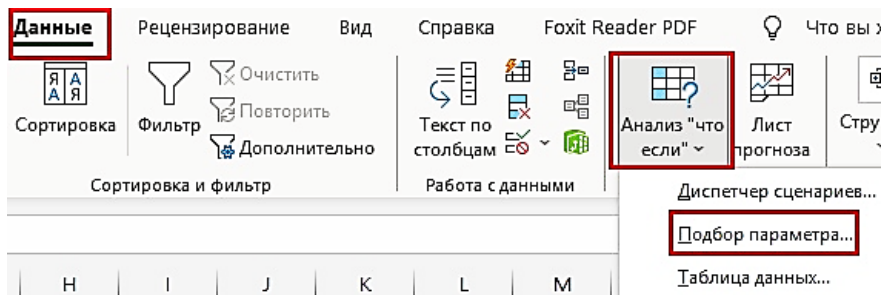


Рисунок 7.4 – Виклик інструменту **Підбір параметра**

Перш за все слід у одну з комірок середовища MS Excel ввести орієнтоване значення кореня рівняння x , а в іншу – формулу для визначення $F(x)$ виду (7.8); при цьому значення x вводиться посиланням на комірку, де записане його орієнтоване значення.

Після цього слід викликати діалогове вікно **Підбір параметра** та налаштувати його, вводючи у віконці наступні дані:

- у віконці **«Установити в комірку»** – посилання на комірку, де знаходиться формула для обчислення функції $F(x)$;
- у віконці **«Значення»** – число 0 ;
- у віконці **«Змінюючи значення комірки»** – посилання на комірку, де знаходиться орієнтоване значення кореня x .

Натиснувши ОК, отримаємо результат: у комірці з формулою для обчислення функції $F(x)$ з'явиться значення, близьке до нуля, а в комірці з орієнтованим значенням кореня – його відповідне значення.

Слід зауважити, що у випадку, коли рівняння має більш одного кореня, за цим методом різні його значення слід знаходити окремо, кожного разу вводячи в комірку з орієнтованим значенням число, найближче до того значення кореня, яке відшукується у даному випадку. Це може являти деяку незручність.

Крім того, метод не є досить точним, його можна застосовувати лише в інженерних розрахунках, коли висока точність не потребується.

7.2.3 Завдання до роботи

Знайти всі корені трансцедентного рівняння за допомогою інструменту **Підбір параметра**. Завдання за варіантами наведені у табл. 7.2.

Таблиця 7.2 – Завдання до практичного заняття 7.2

Варіант	Завдання
1	2
1	$y = x^2 - 3 \sin x$
2	$y = \sqrt{x^2 + 1} + e^{-x}$
3	$y = 8 \cdot x^3 - \ln x$
4	$y = 7 \cdot \sin(x^2) + x^3$
5	$y = 4 \cdot e^x - 3x$
6	$y = \sqrt{3x^3 + 5} + \cos(x)$
7	$y = \sqrt{x^2 + 5} \cdot x^3 + \sin(x)$
8	$y = \sqrt{2} \cdot x^4 + x^2 - \ln x$
9	$y = 3 \cdot \ln(x) - 4 \cdot x^3$
10	$y = 4 \cdot x - 10 \cdot \ln(x^2)$
11	$y = 5 \cdot e^x + 4 \cdot e^{-x} + x$
12	$y = 4 \cdot x^3 + 3 \cdot \cos(y)$
13	$y = 6 \cdot x^2 - 8 \cdot e^x$
14	$y = 4 \cdot e^x - x$
15	$y = 5 \cdot x^2 - 4 \cdot \cos(x)$
16	$y = 7 \cdot x^3 + \sin(x)$
17	$y = \cos x + 5x^2 - e^x$

Кінець табл. 7.2

1	2
18	$y = \sqrt{3x^4 - \ln x}$
19	$y = 2 \cdot e^{-x} - 3^{2x}$
20	$y = 2^x - \ln x^2$
21	$y = -2 \cdot e^x - 5 \cdot e^{-x} + 5x$
22	$y = 5 \cdot x^4 - 3 \sin(x)$
23	$y = 3 \cdot e^x + 5 \cdot e^{-2x} + \sin(x)$
24	$y = 2 \cdot x^2 - \ln(x)$
25	$y = \sqrt{5 \cdot x^3 + 2x^2} - \operatorname{tg} x$

7.2.4 Зміст звіту

7.2.4.1 Вихідні дані до розрахунків.

7.2.4.2 Графік функції $F(x)$ та орієнтовані значення кореня (коренів) рівняння.

7.2.4.3 Скриншоти налаштування діалогового вікна **Підбір параметра** та результатів розрахунку. У випадку, якщо коренів декілька, слід надати скриншоти для розрахунку кожного кореня.

7.2.4.4 Висновки.

7.2.5 Приклади розв'язання трансцендентних рівнянь за допомогою інструменту Підбір параметра.

Приклад 1.

Умова задачі.

Електрорадіоелемент знаходиться усередині сталевому корпусу циліндричної форми довжиною L та внутрішнім діаметром d_1 .

Коефіцієнт тепловіддачі від поверхні електрорадіоелемента до внутрішньої стінки корпусу – α_1 , від зовнішньої стінки корпусу у навколишнє середовище – α_2 .

Для забезпечення нормального теплового режиму електрорадіоелемента необхідно, щоб тепловий опір стінки не перевищував значення $R_{\text{дон}}$.

Визначити зовнішній діаметр корпусу d_2 .

Вихідні дані:

$$L = 0,2 \text{ м}$$

$$d_1 = 0,015 \text{ м}$$

$$\alpha_1 = 34,2 \text{ Вт/м}^2\cdot\text{К}$$

$$\alpha_2 = 18,4 \text{ Вт/м}^2\cdot\text{К}$$

$$R_{\text{доп}} = 3,5 \text{ К/Вт}$$

Рішення.

З теорії теплообміну відомо, що тепловий опір циліндричної стінки визначається за формулою:

$$R = \frac{1}{2\pi \cdot L} \left(\frac{1}{\alpha_1 \cdot d_1} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 \cdot d_2} \right), \quad (7.9)$$

де λ – коефіцієнт теплопровідності матеріалу стінки; для сталі $\lambda = 70 \text{ Вт/м}\cdot\text{К}$.

Визначимо значення d_2 , при якому тепловий опір стінки дорівнює $R_{\text{доп}}$, для чого вирішимо рівняння:

$$f(d_2) = \frac{1}{2\pi \cdot L} \left(\frac{1}{\alpha_1 \cdot d_1} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 \cdot d_2} \right) - R_{\text{доп}} = 0 \quad (7.10)$$

Підставивши числові значення, отримаємо трансцендентне рівняння:

$$f(d_2) = 0,796 \cdot \left(1,949 + 0,014 \cdot \ln(66,7 \cdot d_2) + 0,054 \frac{1}{d_2} \right) - 3,5 = 0,$$

або після перетворення:

$$f(d_2) = 0,011 \cdot \ln(66,7 \cdot d_2) + 0,043 \frac{1}{d_2} - 1,949 = 0 \quad (7.11)$$

Область визначення функції $f(d_2)$: $x \in (0; +\infty)$.

Але, враховуючи те, що невідома d_2 – зовнішній діаметр корпусу і не може бути більшою за внутрішній діаметр d_1 , область визначення $f(d_2)$: $x \in (0,015; +\infty)$.

Визначимо значення кореня d_2 .

У комірку В1 введемо значення кореня з області визначення, яке дорівнює 0,016, а у комірку В2 – формулу для розрахунку $f(d_2)$ з посиланням на комірку В1.

Встановивши курсор на комірку B2, викликаємо діалогове вікно **Підбір параметра**, налаштуємо його відповідно до рис. 7.5 та натискаємо ОК.

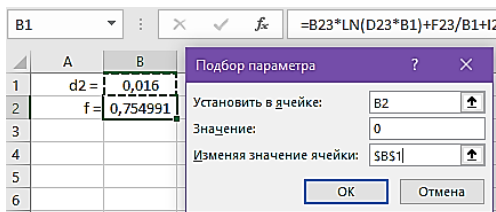


Рисунок 7.5 – Налаштування діалогового вікна **Підбір параметра** для прикладу 1

Натиснувши ОК, отримаємо результат, наведений на рис. 7.6.

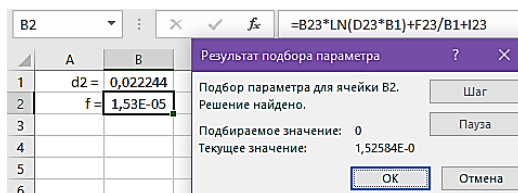


Рисунок 7.6 – Результат розрахунку з точністю $1,5 \cdot 10^{-5}$

Таким чином, щоб забезпечити тепловий опір стінки корпусу не більше $R_{дон}$, зовнішній діаметр повинен бути не менш, ніж $d_{2max} = 0,022$ м, тобто, товщина стінки повинна бути не менш, ніж:

$$s = \frac{d_2 - d_1}{2} = \frac{0,022 - 0,015}{2} = 0,0035 \text{ (м)} = 3,5 \text{ мм}$$

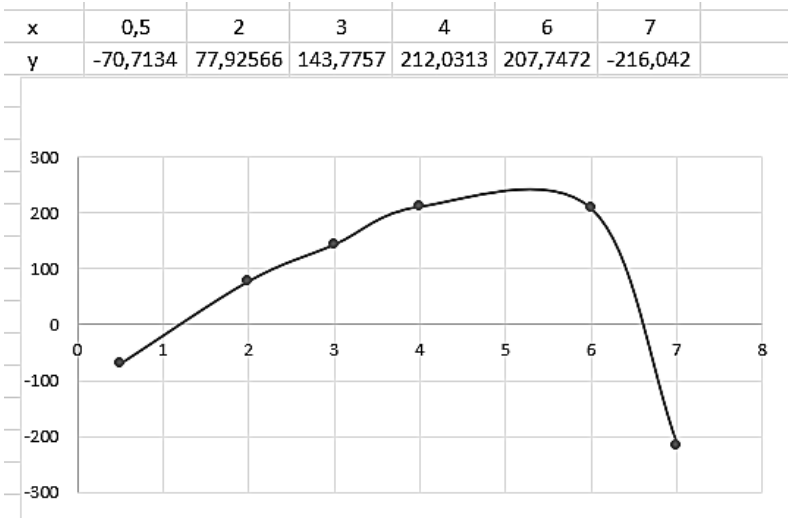
Приклад 2.

Знайти усі корені рівняння:

$$f(x) = 2x^3 - e^x + 100 \cdot \ln x = 0 \quad (7.12)$$

Область визначення функції $f(x)$: $x \in (0; +\infty)$

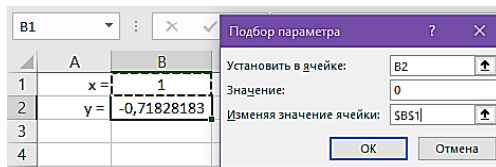
7.2.5.1 Визначимо приблизно точки, поблизу яких можуть знаходитися корені рівняння (9.4). Для цього, використовуючи засоби MS Excel, розрахуємо значення $f(x)$ для ряду значень x , які належать області визначення, та побудуємо графік функції $f(x)$ (див. рис. 7.7).

Рисунок 7.7 – Графік функції $f(x)$

Точки перетину цього графіку з віссю абсцис і є коренями рівняння. З рис. 7.7 видно, що рівняння має два кореня, один з яких знаходиться поблизу точки $x = 1$, а другий – поблизу точки $x = 7$.

7.2.5.2 Визначимо значення першого кореня рівняння. Для цього у комірку B1 введемо наближене значення першого кореня, яке дорівнює 1, а у комірку B2 – формулу для розрахунку $f(x)$ з посиланням на комірку B1.

Встановивши курсор на комірку B2, викликаємо діалогове вікно **Підбір параметра**, налаштуємо його відповідно до рис. 7.8 та натискаємо ОК.

Рисунок 7.8 – Налаштування діалогового вікна **Підбір параметра** для прикладу 2

Отриманий результат з точністю 10^{-4} наведений на рис. 7.9.

	A	B
1	x =	1,006985031
2	y =	0,000942886

Рисунок 7.9 – Результат розрахунку першого кореня рівняння

7.2.5.3 Другий корінь рівняння визначаємо аналогічним чином, ввівши в комірку B1 наближене значення другого кореня, яке дорівнює 7, та повторивши процедуру.

Отриманий результат з точністю 10^{-7} наведений на рис. 7.10.

	A	B
1	x =	6,659754872
2	y =	-2,5923E-07

Рисунок 7.10 – Результат розрахунку другого кореня рівняння

Таким чином, наближені результати розв'язання рівняння (7.12) з точністю 10^{-4} :

$$x_1 \approx 1,0070; x_2 \approx 6,6598$$

7.3 Практичне заняття 7.3. Розв'язання задач ЛП за допомогою надбудови Пошук рішення

7.3.1 Налаштування надбудови Пошук рішення у середовищі MS Excel

Для розв'язання задач ЛП MS Excel оснащений спеціальною надбудовою, яка називається **Пошук рішення**.

Зазвичай ця надбудова знаходиться у групі команд **Аналіз** на вкладці стрічки **Дані** (див. рис. 7.11).



Рисунок 7.11 – Надбудова Пошук рішення

Якщо ця надбудова відсутня на стрічці, її необхідно туди додати. Для цього слід перейти за шляхом: **Файл** → **Параметри** → **Надбудови**, та у вікно **Надбудови Excel** натиснути **Перейти** (рис. 7.12), після чого відкриється діалогове вікно зі списком надбудов,

При виконанні завдань рекомендується користатися прикладами, наведеними нижче.

7.3.3 Зміст звіту

7.3.3.1 Скриншоти розв'язання задачі ЛП (вихідні дані брати з завдання до практичного заняття 3 відповідно до варіанту) за допомогою надбудови **Пошук рішення**.

7.3.3.2 Скриншоти розв'язання задачі ЛП (вихідні дані брати з табл. 4.3 до практичного заняття 4 відповідно до варіанту) за допомогою надбудови **Пошук рішення**.

7.3.3.3 Скриншоти розв'язання транспортної задачі (вихідні дані брати з табл. 5.1 до практичного заняття 5 відповідно до варіанту) за допомогою надбудови **Пошук рішення**.

7.3.3.4 Висновки.

7.3.4 Приклади розв'язання задач ЛП за допомогою надбудови Пошук рішення

7.3.4.1 Знайдемо розв'язок задачі ЛП з прикладу до практичного заняття 4.

На новому листі MS Excel введемо дані згідно рис. 7.14.

	A	B	C	D	E	F	G
1	c =	9	6	8			
2	x =	0	0	0			
3	F =	0					
4							
5	5	2	3	=	0	≤	300
6	4	6	5	=	0	≤	316
7	3	8	6	=	0	≤	360
8	5	6	6	=	0	≤	392

Рисунок 7.14 – Вихідні дані для розв'язання задачі ЛП симплекс-методом

Формули для обчислень показані на рис. 7.15.

	A	B	C	D	E	F	
1	c =	9	6	8			
2	x =	0	0	0			
3	F =	=СУММПРОИЗВ(B2:D2;B1:D1)					
4							
5	5	2	3	=	=СУММПРОИЗВ(A5:C5;B2:D2)	<=	300
6	4	6	5	=	=СУММПРОИЗВ(A6:C6;B2:D2)	<=	316
7	3	8	6	=	=СУММПРОИЗВ(A7:C7;B2:D2)	<=	360
8	5	6	6	=	=СУММПРОИЗВ(A8:C8;B2:D2)	<=	392

Рисунок 7.15 – Формули для розв’язання задачі ЛПІ симплекс-методом

Встановимо курсор на комірку В3 з формулою для обчислення значення цільової функції та викликаємо надбудову **Пошук рішення**.

У діалоговому вікні, що відкриється, зробимо налаштування відповідно рис. 7.16.

При цьому слід увімкнути прапорець *Зробити змінні без обмежень невід’ємними*, а також обрати метод рішення *Пошук рішення лінійних задач симплекс-методом*.

Рисунок 7.16 – Налаштування параметрів у діалоговому вікні **Пошук рішення**

По закінченні налаштувань слід натиснути *Знайти рішення*, після чого в комірках В2 – В4 з’являться значення вхідних параметрів x_i , які відповідають максимальному значенню цільової функції (комірка В1) для заданої системи обмежень.

Результати рішення показані на рис. 7.17.

	A	B	C	D	E	F	G
1	c =	9	6	8			
2	x =	42,46154	0	29,23077			
3	F =	616					
4							
5	5	2	3	=	300	≤	300
6	4	6	5	=	316	≤	316
7	3	8	6	=	302,7692	≤	360
8	5	6	6	=	387,6923	≤	392

Рисунок 7.17 – Результати розв’язання задачі ЛП симплекс-методом

Як бачимо, результат співпадає з отриманим раніше.

7.3.4.2 Знайдемо розв’язок транспортної задачі з прикладу до практичного заняття 5.

На новому листі MS Excel введемо дані згідно рис. 7.18.

При цьому у комірки A1:D4 введені дані для збалансованої задачі, у комірки A7:D10 – початковий опорний план, складений методом північно-західного кута.

	A	B	C	D	E
1	2	9	6	7	30
2	3	5	4	2	10
3	3	5	4	9	25
4	0	0	0	0	65
5	45	15	60	10	
6					
7	30				30
8	10				10
9	5	15	5		25
10			55	10	65
11	45	15	60	10	
12					
13	F =	200			

Рисунок 7.18 – Вихідні дані для транспортної задачі

Червоним шрифтом виділені значення вхідних параметрів x_i , які будуть змінюватися у процесі пошуку розв’язку (їх початкові значення дорівнюють нулю), **синім** шрифтом – коефіцієнти цільової функції та системи обмежень, а **зеленим** – результати обчислень рівнянь системи обмежень та цільової функції.

Формули для обчислень показані на рис. 7.19.

	A	B	C	D	E
1	2	9	6	7	30
2	3	5	4	2	10
3	3	5	4	9	25
4	0	0	0	0	65
5	45	15	60	10	
6					
7	30				=СУММ(A7:D7)
8	10				=СУММ(A8:D8)
9	5	15	5		=СУММ(A9:D9)
10			55	10	=СУММ(A10:D10)
11	=СУММ(A7:A10)	=СУММ(B7:B10)	=СУММ(C7:C10)	=СУММ(D7:D10)	
12					
13		F=	=СУММПРОИЗВ(A1:D4;A7:D10)		

Рисунок 7.19 – Формули для обчислень для транспортної задачі

Встановимо курсор на комірку B13 з формулою для обчислення значення цільової функції та викликаємо надбудову **Пошук рішення**.

У діалоговому вікні, що відкриється, зробимо налаштування відповідно рис. 7.20.

Результати рішення показані на рис. 7.21.

Параметры поиска решения

Оптимизировать целевую функцию: SBS13

До: Максимум Минимум Значения: 0

Изменяя ячейки переменных: SAS7:SDS10

В соответствии с ограничениями:

- SAS11 = SAS5
- SBS11 = SBS5
- SC511 = SC55
- SD511 = SD55
- SES10 = SES4
- SES7 = SES1
- SES8 = SES2
- SES9 = SES3

Сделать переменные без ограничений неотрицательными

Выберите метод решения: Поиск решения симплекс-методом

Метод решения
Для гладких нелинейных задач используйте поиск решения нелинейных задач методом ОПГ, для линейных задач - поиск решения линейных задач симплекс-методом, а для негладких задач - эволюционный поиск решения.

Найти решение

Рисунок 7.20 – Налаштування діалогового вікна **Пошук рішення** для транспортної задачі

	A	B	C	D	E	F
1	2	9	6	7	30	
2	3	5	4	2	10	
3	3	5	4	9	25	
4	0	0	0	0	65	
5	45	15	60	10		
6						
7	30	0	0	0	30	
8	0	0	0	10	10	
9	15	0	10	0	25	
10	0	15	50	0	65	
11	45	15	60	10		
12						
13	F=	165				
14						

Рисунок 7.21 - Результати розв'язку транспортної задачі

Як бачимо, результат співпадає з отриманим раніше.

7.4 Практичне заняття 7.4. Застосування MS Excel для регресійного аналізу

7.4.1 Визначення параметрів лінійної регресії за допомогою спеціальних функцій MS Excel

У середовищі MS Excel є ряд спеціальних функцій категорії **Статистичні**, за допомогою яких можна визначити параметри лінійної регресії.

7.4.1.1 Визначення параметрів парної лінійної регресії

Деякі параметри лінійної парної регресії можна визначити за допомогою функцій **НАКЛОН**; **ОТРЕЗОК** та **КОРРЕЛ**.

Розглянемо приклад 1, наведений у практичному занятті 6.

На новому листі MS Excel слід ввести значення змінних x_i , y_i з табл. 6.5.

Функція **НАКЛОН** повертає тангенс кута нахилу лінії лінійної регресії до осі x , тобто, коефіцієнт b_1 . (рис. 7.22).

x	18	20	23	25	28	32	37	40	44
y	12	17	23	29	29	34	37	38	47

=НАКЛОН(B2:J2;B1:J1)

Аргументы функции

НАКЛОН

Известные_значения_y B2:J2 = (12;17;23;29;29;34;37;38;47)

Известные_значения_x B1:J1 = (18;20;23;25;28;32;37;40;44)

= 1,157711443

Возвращает наклон линии линейной регрессии.

Известные_значения_x множество независимых элементов данных или ссылки на ячейки, содержащие числа.

Значение: 1,157711443

Рисунок 7.22 – Застосування функції **НАКЛОН** для визначення коефіцієнта b_1

Для наведеного прикладу результат дорівнює:

$$b_1 = 1,157711 \approx 1,16$$

Функція **ОТРЕЗОК** повертає відрізок, який відсікає лінія лінійної регресії на осі y , тобто, коефіцієнт b_0 . (рис. 7.23).

x	18	20	23	25	28	32	37	40	44
y	12	17	23	29	29	34	37	38	47

1,157711	=ОТРЕЗОК(B2:J2;B1:J1)
----------	-----------------------

Аргументы функции

ОТРЕЗОК

Известные_значения_y B2:J2 = (12;17;23;29;29;34;37;38;47)

Известные_значения_x B1:J1 = (18;20;23;25;28;32;37;40;44)

= -4,78988314

Возвращает отрезок, отсекаемый на оси линейной регрессии.

Известные_значения_x независимое множество наблюдений или ссылки на ячейки, содержащие числа.

Значение: -4,789883914

Рисунок 7.23 – Застосування функції **ОТРЕЗОК** для визначення коефіцієнта b_0

Для наведеного прикладу результат дорівнює:

$$b_0 = -4,789883 \approx -4,79$$

Функція **КОРРЕЛ** повертає коефіцієнт кореляції між двома множинами даних, тобто, коефіцієнт R (рис. 7.24).

x	18	20	23	25	28	32	37	40	44
y	12	17	23	29	29	34	37	38	47
	1,157711	-4,78988							
	=КОРРЕЛ(B2:J2;B1:J1)								

Аргументы функции

КОРРЕЛ

Массив1 B2:J2 = (12;17;23;29;29;34;37;38;47)

Массив2 B1:J1 = (18;20;23;25;28;32;37;40;44)

= 0,967056506

Возвращает коэффициент корреляции между двумя множествами данных.

Массив2 второй диапазон значений. Значениями массивы или ссылки с именами.

Значение: 0,967056506

Рисунок 7.24 – Застосування функції **КОРРЕЛ** для визначення коефіцієнта кореляції R

Для наведеного прикладу результат дорівнює:

$$R = 0,9670565 \approx 0,967$$

Усі результати повністю співпадають з результатами розрахунків прикладу 1, наведеного у практичному занятті 6.

7.4.1.2 Визначення параметрів довільної лінійної регресії

Для визначення параметрів як парної, так і множинної лінійної регресії можна застосувати функцію **ЛИНЕЙН**.

Функція **ЛИНЕЙН** повертає параметри лінійного наближення за методом найменших квадратів.

У вікні **Известные_значения_y** слід ввести діапазон комірок, у яких знаходяться значення функції y .

У вікні **Известные_значения_x** слід ввести повний діапазон комірок, у яких знаходяться значення всіх аргументів x_j . Якщо регресія парна, це буде один рядок, у іншому випадку виділяється діапазон, який містить усі значення аргументів.

У вікні **Конст** слід ввести "ИСТИНА", або "1", інакше коефіцієнт b_0 буде дорівнювати нулю.

У вікні **Статистика** слід ввести "ИСТИНА", або "1", інакше будуть виведені тільки коефіцієнти регресії без додаткової статистики.

Розглянемо приклад 2, наведений у практичному занятті 6.

На новому листі MS Excel введемо значення змінних x_{1i} , x_{2i} , y_i з табл. 6.6 та налаштуємо діалогове вікно **Аргументи функції** відповідно до рис. 7.25.

y_i	x_{1i}	x_{2i}
8,94	0	0,5
18,04	12	1
23,58	24	2
27,93	36	3
34,64	48	5
46,71	60	10

Аргументы функции	
ЛИНЕЙН	
Известные_значения_у	C2:C7 = {8,94;18,04;23,58;27,93;34,64;46,71}
Известные_значения_х	D2:E7 = {0;0,5;12;24;36;48;60;10}
Конст	1 = ИСТИНА
Статистика	1 = ИСТИНА
=ЛИНЕЙН(C2:C7;D2:E7;1;1)	
Возвращает параметры линейного приближения по методу наименьших квадратов.	
Статистика логическое значение, которое указывает, требуется ли вернуть дополнительную статистику по регрессии (ИСТИНА) или только коэффициенты m и константу b (ЛОЖЬ или отсутствие значения).	
Значение: 1,106817091	

Рисунок 7.25 – Застосування функції **ЛИНЕЙН** для визначення параметрів множинної лінійної регресії

Результати наведені на рис. 7.26.

Коефіцієнти регресії: $b_2 = 1,11$; $b_1 = 0,42$; $b_0 = 10,10$

Регресійна модель має вигляд: $\hat{y} = 10,10 + 0,42 \cdot x_1 + 1,11 \cdot x_2$

Коефіцієнт детермінації $R^2 = 0,989$

F -критерій Фішера $Fp = 136,93$

Усі результати повністю співпадають з результатами розрахунків у прикладі 2 практичного заняття 6.

	A	B	C	D	E	F	G
1	1,10682	0,41914	10,0998	A1 - нахил x_2			
2	0,56127	0,08819	1,34476	B1 - нахил x_1			
3	0,98916	1,76769	#Н/Д	C1 - відрізок			
4	136,925	3	#Н/Д	A2 - стандартна помилка для x_2			
5	855,708	9,37419	#Н/Д	B2 - стандартна помилка для x_1			
6	y_i	x_{1i}	x_{2i}	C2 - стандартна помилка для b			
7	8,94	0	0,5	A3 - коефіцієнт детермінації R^2			
8	18,04	12	1	B3 - стандартна помилка для y			
9	23,58	24	2	A4 - F-статистика			
10	27,93	36	3	B4 - число ступенів вільності			
11	34,64	48	5	A5 - регресійна сума квадратів			
12	46,71	60	10	B5 - остаточна сума квадратів			
13							

Рисунок 7.26 – Результати розрахунків параметрів множинної лінійної регресії за допомогою функції **ЛИНЕЙН**

7.4.2 Застосування надбудови **Пакет аналізу** для кореляційно-регресійного аналізу

Для більш повного кореляційно-регресійного аналізу, окрім розглянутих вище функцій, MS Excel оснащений спеціальним інструментарієм **Регресія**, який є складовою частиною надбудови **Пакету аналізу**

7.4.2.1 Застосування надбудови **Пакет аналізу** для аналізу простої лінійної регресії

Розглянемо приклад 1, наведений у практичному занятті 6.

На новому листі MS Excel слід ввести значення змінних x_i , y_i з табл. 6.5, відкрити діалогове вікно **Пакету аналізу**, де обрати інструментарій **Регресія** (див. рис. 7.27), після чого у знов відкритому діалоговому вікні ввести вихідні дані відповідно рис. 7.28.

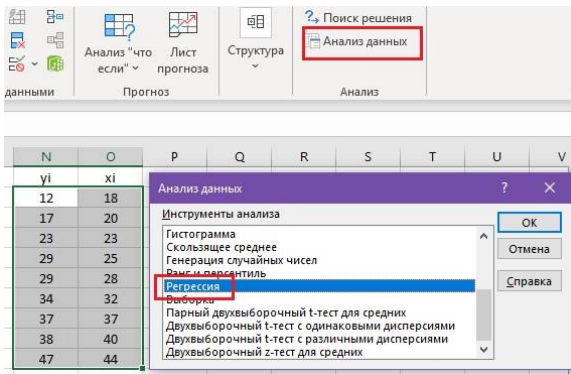


Рисунок 7.27 – Вибір інструментарію **Регресія**

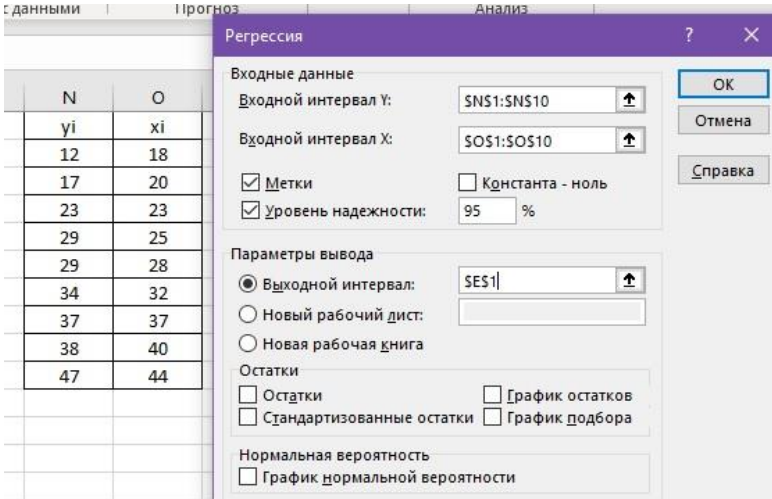


Рисунок 7.28 – Введення даних для парної регресії

У якості вхідних інтервалів для Y та X слід задати діапазони комірок з відповідними даними, *включаючи заголовки*.

У якості вихідного інтервалу слід вказати будь-яку вільну комірку, беручи до уваги факт, що вона є крайньою лівою верхньою коміркою результатів аналізу, тобто, таблиця з результатами, яка містить 18 рядків та 9 стовпців, буде відображена праворуч нижче, і її комірки не повинні перекриватися з комірками даних.

Оскільки для Y та X вказані інтервали з заголовками, слід встановити прапорець *Мітки*.

Слід також вказати рівень надійності у відсотках. У розглянутому прикладі рівень значущості $\alpha = 0,05$, що відповідає рівню надійності 95%.

Результати аналізу MS Excel виводить у вигляді таблиці, наведеної на рис. 7.29.

Вывод итогов					yi	xi
					12	18
Регрессионная статистика					17	20
Множественный R	0,967056506				23	23
R-квадрат	0,935198285				29	25
Нормированный R-квадрат	0,925940898				29	28
Стандартная ошибка	2,981467674				34	32
Наблюдения	9				37	37
					38	40
Дисперсионный анализ					47	44
	df	SS	MS	F	Значимость F	
Регрессия	1	897,9981758	897,9981758	101,021833	2,06889E-05	
Остаток	7	62,22404643	8,889149491			
Итого	8	960,2222222				
	Коэффициенты	Стандартная ошибка	t-статистика	P-значение	Нижние 95%	Верхние 95%
Y-пересечение	-4,789883914	3,558715815	-1,345958532	0,220273854	-13,20490964	3,625141808
xi	1,157711443	0,115184145	10,0509618	2,06889E-05	0,88534422	1,430078666

Рисунок 7.29 – Результати аналізу парної регресії

Проаналізуємо отримані результати.

Вільний член рівняння регресії (*Y-перетин*): $b_0 \approx -4,79$.

Коефіцієнт при незалежній змінній (*xi*): $b_1 \approx 1,16$.

Таким чином, рівняння лінійної регресії має вигляд:

$$\hat{y} = -4,79 + 1,16 \cdot x$$

Коефіцієнт кореляції $R \approx 0,96$.

Коефіцієнт детермінації $R^2 \approx 0,93$.

Як видно, усі результати збігаються з отриманими раніше.

Параметр **P-значення** використовується для оцінки статистичної значимості коефіцієнтів регресії. Якщо P-значення менше заданого рівня значущості α , то коефіцієнт є значущим на цьому рівні значущості, інакше коефіцієнт не значущий.

У даному прикладі P-значення:

- для коефіцієнта b_0 дорівнює 0,22% або 0,0022;
- для коефіцієнта b_1 дорівнює $2 \cdot 10^{-5}$ % або $2 \cdot 10^{-7}$.

Оскільки обидва значення менші за $\alpha = 0,05$, це значить, що обидва коефіцієнти регресії значущі.

У частині таблиці **Дисперсійний аналіз** наведено значення F-критерію Фішера для ступенів вільності, що відповідають умові задачі.

В даному випадку $n = 9$; $m = 2$, тому ступені вільності:

$$k_1 = m - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$k_2 = n - m = 9 - 2 = 7$$

Розрахункове значення F-критерію Фішера: $F_{(1,7)} = 101,02$.

Критичне значення статистики Фішера в Excel можна отримати, використовуючи функцію F.ОБР. Для заданих ймовірності та ступенів вільності $F_{(0,95;1;7)} = 5,59$.

Оскільки $F_{(1,7)} > F_{(0,95;1;7)}$, регресійна модель адекватна.

7.4.2.2 Застосування надбудови **Пакет аналізу** для аналізу множинної регресії

Розглянемо приклад двофакторної лінійної регресії, наведений у прикладі 2 практичного заняття 6.

На новому листі MS Excel слід ввести значення змінних x_i , y_i з табл. 6.6, відкрити діалогове вікно **Регресія** та ввести вихідні дані відповідно рис. 7.30.

	A	B	C	D
1	y_i	x_{1i}	x_{2i}	
2	8,94	0	0,5	
3	18,04	12	1	
4	23,58	24	2	
5	27,93	36	3	
6	34,64	48	5	
7	46,71	60	10	
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				

Регрессия

Входные данные
 Входной интервал Y: \$A\$1:\$A\$7
 Входной интервал X: \$B\$1:\$C\$7
 Метки Константа - ноль
 Уровень надежности: 95 %

Параметры вывода
 Выходной интервал: \$D\$1\$
 Новый рабочий лист:
 Новая рабочая книга

Остатки
 Остатки График остатков
 Стандартизованные остатки График подбора

Рисунок 7.30 – Введення даних для аналізу двофакторної регресії

При цьому вхідний інтервал для двох вхідних факторів x_1 та x_2 задається спільною сукупністю комірок, тому ці дані повинні бути розташовані у сусідніх стовпцях.

Результати аналізу наведені на рис. 7.31.

D	E	F	G	H	I	J	K	L
Вывод итогов								
<i>Регрессионная статистика</i>								
Множественный R	0,994567154							
R-квадрат	0,989163825							
Нормированный R-квадрат	0,981939708							
Стандартная ошибка	1,767690268							
Наблюдения	6							
Дисперсионный анализ								
	<i>df</i>	<i>SS</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>	<i>Значимость F</i>			
Регрессия	2	855,708	427,8542	136,9252253	0,001128013			
Остаток	3	9,37419	3,124729					
Итого	5	865,083						
	<i>Коэффициенты</i>							
	<i>артная статистика</i>		<i>P-Значение</i>		<i>Нижние 95%</i>		<i>верхние 95%</i>	
Y-пересечение	10,09979357	1,34476	7,510474	0,004891288	5,820163517	14,37942	5,820164	14,37942
x1i	0,419137062	0,08819	4,752924	0,017675509	0,138492726	0,699781	0,138493	0,699781
x2i	1,106817091	0,56127	1,97199	0,143169105	-0,679391889	2,893026	-0,67939	2,893026

Рисунок 7.31 – Результати аналізу двофакторної регресії

Проаналізуємо отримані результати.

Вільний член рівняння регресії (*Y-перетин*): $b_0 \approx 10,10$.

Коефіцієнти при незалежних змінних:

(*x1i*): $b_1 \approx 0,42$;

(*x2i*): $b_2 \approx 1,11$.

Таким чином, рівняння лінійної регресії має вигляд:

$$\hat{y} = 10,10 + 0,42 \cdot x_1 + 1,11 \cdot x_2$$

Коефіцієнт кореляції $R \approx 0,994$.

Коефіцієнт детермінації $R^2 \approx 0,989$.

Як видно, усі результати збігаються з отриманими раніше.

Параметр **P-значення** використовується для оцінки статистичної значимості коефіцієнтів регресії. Якщо P-значення менше заданого рівня значущості α , то коефіцієнт є значущим на цьому рівні значущості, інакше коефіцієнт не значущий.

Параметр P-значення:

– для коефіцієнта b_0 дорівнює 0,004% або 0,00004;

– для коефіцієнта b_1 дорівнює 0,017% або 0,00017;

– для коефіцієнта b_2 дорівнює 0,143% або 0,0014.

Оскільки усі P-значення менші за $\alpha = 0,05$, це значить, що усі коефіцієнти регресії значущі.

Розрахункове значення F-критерію Фішера: $F_{(2,3)} = 136,92$.

Критичне значення статистики Фішера отримаємо, використовуючи функцію F.ОБР. Для заданих ймовірності та ступенів вільності $F_{(0,95;2;3)} = 9,55$.

Оскільки $F_{(1,7)} > F_{(0,95;2;3)}$, регресійна модель адекватна.

7.4.3 Завдання до роботи

7.4.3.1 Визначити параметри парної регресії за допомогою вбудованих функцій НАКЛОН; ОТРЕЗОК та КОРРЕЛ. Вихідні дані взяти з практичного завдання 6, табл. 6.3. Результати порівняти з отриманими раніше.

7.4.3.2 Визначити параметри парної регресії за допомогою вбудованої функції ЛИНЕЙН. Вихідні дані взяти з практичного завдання 6, табл. 6.3. Результати порівняти з отриманими раніше.

7.4.3.3 Визначити параметри множинної регресії за допомогою надбудови **Пакет аналізу**. Вихідні дані взяти з практичного завдання 6, табл. 6.4, але перевести їх у лінійну форму, використовуючи відповідні формули перерахунку. Результати порівняти з отриманими раніше.

7.4.3.4 Зробити висновки.

7.4.4 Зміст звіту

7.4.4.1 Скриншоти результатів регресійного аналізу за допомогою вбудованих функцій НАКЛОН; ОТРЕЗОК та КОРРЕЛ за вихідними даними з практичного завдання 6, табл. 6.3.

7.4.4.2 Скриншоти результатів регресійного аналізу за допомогою вбудованої функції ЛИНЕЙН за вихідними даними з практичного завдання 6, табл. 6.3.

7.4.4.3 Скриншоти результатів регресійного аналізу за допомогою надбудови **Пакет аналізу** за вихідними даними з практичного завдання 6, табл. 6.4.

7.4.4.4 Висновки.

8 ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 8. ВИКОРИСТАННЯ MS EXCEL ДЛЯ ГРАФІЧНОЇ ОБРОБКИ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕНЬ

Мета роботи: отримати практичні навички використання інструментарію MS Excel для графічної обробки результатів досліджень.

8.1 Теоретична частина

8.1.1 Типи діаграм

Результати дослідів зазвичай являють собою великі сукупності інформації, найчастіше у числовому вираженні. Вони можуть бути оформлені у вигляді списків або таблиць, але багато чисел буває складно сприймати, особливо, коли їх потрібно порівняти між собою, щоб зробити висновки. У таких випадках на допомогу приходять графічні методи: діаграми та графіки, які являють собою лінії або геометричні фігури, що вибудовуються на основі даних і позначають співвідношення величин.

Таке наочне зображення дозволяє швидко вловити суть, побачити закономірності та структуру показників, оперативного сприйняти інформацію та дійти необхідних висновків, що майже неможливо зробити за допомогою табличних даних.

Існує багато типів діаграм, найрозповсюдженішими з яких є: **стовпчаста, лінійчаста, кругова, точкова діаграми, гістограма, лінійний графік** з одним або декількома рядами даних. Вони призначені для візуалізації частин цілого, порівняння категорій, відображення змін показників у часі тощо.

Останнім часом використовуються й інші, спеціальні типи діаграм, серед яких: **діаграма снагеті**, яка застосовується для аналізу та порівняння динаміки великої кількості даних, різні типи **географічних діаграм** для аналізу географічної інформації, подання просторових відносин та регіональних даних, **стрім-графік (графік потоку)** для графічного зображення змін у часі, **бульбашкова діаграма**, у якої розмір бульбашок служить додатковим виміром даних.

Окрему групу складають **поверхневі діаграми**, які дозволяють візуалізувати зв'язки між даними у просторі.

Розглянемо деякі типи діаграм та області їхнього застосування.

8.1.1.1 Стовпчаста діаграма

Стовпчаста діаграма – це діаграма, представлена прямокутними зонами (стовпцями), висоти або довжини яких пропорційні величинам, які вони відображають. Прямокутні зони можуть бути розташовані вертикально чи горизонтально.

Стовпчаста діаграма являє собою один із найнаочніших типів подання статистики. Вона відображає порівняння декількох дискретних категорій. Одна її вісь показує порівнювані категорії, інша вимірну величину.

Стовпчасті діаграми забезпечують візуальне подання категоріальних даних, тобто даних, згрупованих в дискретні групи, або категорії (наприклад, місяці року, вікові групи, показники ефективності тощо).

Стовпчаста діаграма має дискретну область категорій та зазвичай масштабована так, щоб могли поміститися всі дані. Коли немає природного принципу впорядкування порівнюваних категорій, зони на ній можуть бути розміщені у будь-якому порядку.

Стовпчаста діаграма, у якій категорії розставлені в порядку зменшення їх значень, називається **діаграмою Парето**.

Приклад побудови діаграми Парето при аналізі причин браку під час виготовлення друкованих плат наведений на рис. 8.1.

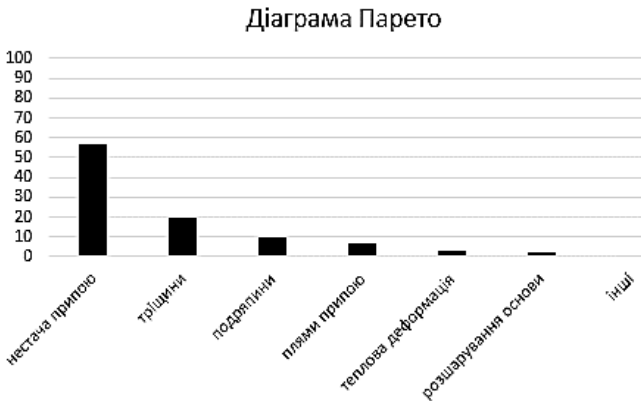


Рисунок 8.1 – Діаграма Парето при аналізі причин браку під час виготовлення друкованих плат у вигляді стовпчастої діаграми

Якщо підписи даних не поміщаються на полі стовпчастої діаграми, її можна представити у вигляді *лінійчастої діаграми*, яка являє собою стовпчасту діаграму, у якій осі порівнюваних категорій та величин, що їм відповідають, помінялися місцями (рис. 8.2).

Стовпчасті діаграми також можуть бути використані для порівняння декількох величин кожної порівнюваної категорії.

Наприклад, у *групованій діаграмі* кожна категорія може мати дві або більше порівнювані властивості, для кожної з яких є своя зона діаграми. Зони, що відображають одні й самі властивості різних категорій, позначені одним кольором.

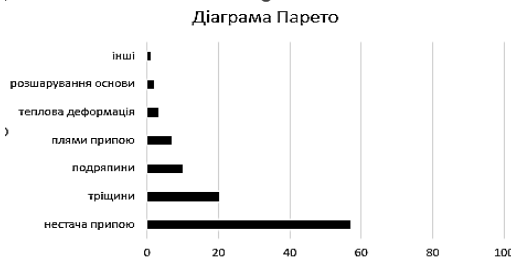


Рисунок 8.2 – Діаграма Парето при аналізі причин браку під час виготовлення друкованих плат у вигляді лінійчастої діаграми

На рис. 8.3 наведена групована стовпчаста діаграма, на якій показана залежність власної резонансної частоти плати від співвідношення її сторін для різних способів закріплення.

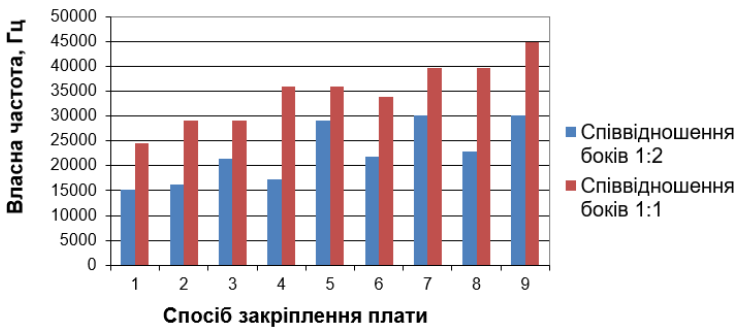


Рисунок 8.3 – Залежність власної резонансної частоти плати від способу закріплення плати для різних співвідношень її боків у вигляді групованої стовпчастої діаграми

Властивості категорій групованих діаграм зазвичай йдуть в одній послідовності кожної категорії.

Іншим різновидом складної стовпчастої діаграми є *стекова діаграма*, яка відображає зони, що представляють властивості однієї категорії, одну поверх одної для порівняння властивостей у межах однієї категорії (рис. 8.4).

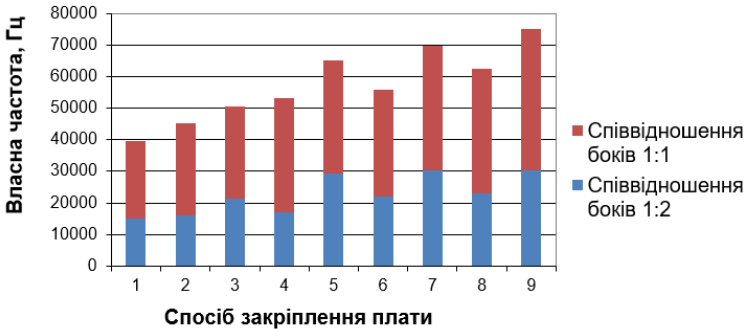


Рисунок 8.4 – Залежність власної резонансної частоти плати від способу закріплення плати для різних співвідношень її боків у вигляді стекової стовпчастої діаграми

Слід відмітити, що стекова діаграма не підходить у тих випадках, коли використовуються додатні та від’ємні значення властивостей. У таких випадках слід використовувати груповану діаграму.

8.1.1.2 Гістограма

Ще одним способом графічного представлення табличних даних є гістограма, де кількісні співвідношення деякого показника представлені у вигляді прямокутників; при цьому їх висота визначає співвідношення відображуваного параметра.

Між стовпчастою діаграмою та гістограмою існують істотні відмінності, суть яких наведена у табл. 8.1.

Гістограми використовують для представлення кількісних значень показника (залежної величини), незмінних у межах певного інтервалу значень деякої категорії (незалежної величини), але таких, що можуть приймати різні значення для різних інтервалів.

Таблиця 8.1 – Відмінності між стовпчастою діаграмою та гістограмою

Стовпчаста діаграма	Гістограма
Є відстань між стовпцями	Немає відстані між стовпцями
Застосовується для порівняння категоріальних даних	Застосовується для виявлення залежності якісних даних
Якщо переставити місцями стовпці, логіка не порушиться.	Якщо переставити місцями стовпці, логіка порушиться.

Кількісні співвідношення на гістограмі представлені у вигляді прямокутників, висота яких відповідає кількісним значенням розглядаемого показника, а ширина – відповідному інтервалу значень категорії. Найчастіше ширину прямокутників беруть однаковою, що відповідає даним, згрупованим за рівновеликими інтервалами; при цьому їх висота визначає співвідношення відображуваного показника.

Гістограму, як і стовпчасту діаграму, можна використовувати для порівнянь значень декількох показників для кожного інтервалу порівнюваної категорії.

На рис. 8.5 показана залежність конвективного коефіцієнта тепловіддачі з поверхні радіоелектронного апарату від перегріву для різних швидкостей потоку у вигляді групованої гістограми, на рис. 8.6 – у вигляді стекової гістограми.

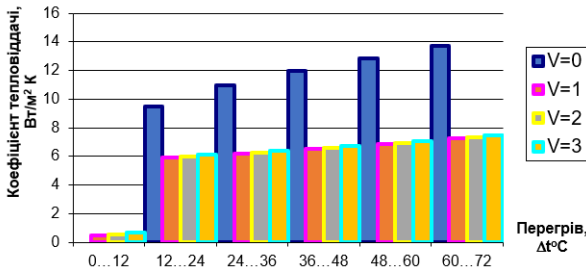


Рисунок 8.5 – Залежність конвективного коефіцієнта тепловіддачі від перегріву для різних швидкостей потоку у вигляді групованої гістограми

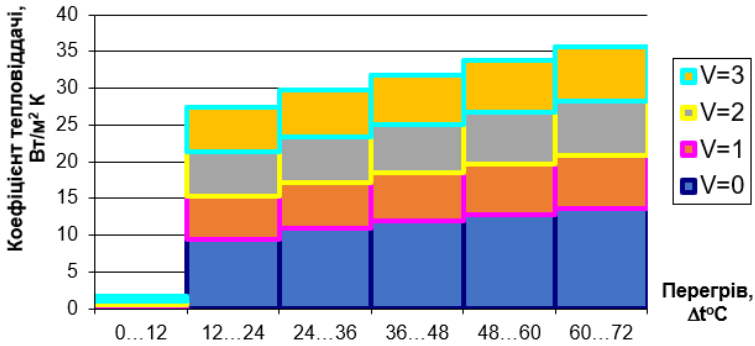


Рисунок 8.6 – Залежність конвективного коефіцієнта тепловіддачі від перегріву для різних швидкостей потоку у вигляді стекової гістограми

8.1.1.3 Графік

Якщо точки на верхньому боці прямокутників гістограми, що відповідають середнім значенням інтервалів категорій, з'єднати ламаною лінією, то отримаємо *лінійну діаграму*, яку частіше називають *графіком*. Цей тип діаграм нагадує вершини гірського хребта.

Графік доцільно використовувати для візуалізації динаміки, якщо інтервалів не менш 7, інакше рекомендується використовувати гістограму.

Також графік варто вибирати, якщо використовується декілька рядів даних.

На рис. 8.7 показана залежність конвективного коефіцієнта тепловіддачі від перегріву для різних швидкостей потоку у вигляді графіка.

Слід відмітити, що графік не може бути застосований, коли треба показати взаємозалежність між значеннями категорії та вхідного фактору.

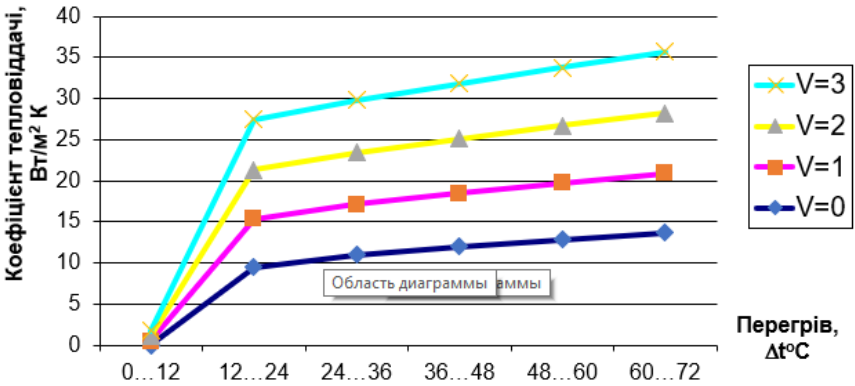


Рисунок 8.7 – Залежність конвективного коефіцієнта тепловіддачі від перегріву для різних швидкостей потоку у вигляді графіка

8.1.1.4 Кругова та кільцева діаграми

Кругова та кільцева діаграми суттєво не розрізняються та використовуються, щоб показати, з яких частин складається ціле та скільки місця у ньому займає кожна частина. При цьому слід мати на увазі, що їх можна використовувати **тільки** для візуалізації структури цілого.

При створенні кругової та кільцевої діаграм слід враховувати наступні рекомендації:

- вони зрозумілі лише на невеликому обсязі даних; якщо секторів/часток багато, слід вибрати іншу візуалізацію;
- рекомендується сортувати дані від більшого сектора до меншого;
- точку відліку слід обирати, як із точки "12:00" на циферблаті;
- не рекомендується перевантажувати діаграму легендою.

На рис. 8.8 показана питома вага причин браку при виготовленні друкованих плат у вигляді кругової діаграми.

Для представлення ієрархічних даних доцільно використовувати різновид кільцевої діаграми, так звану **променевою діаграму** (діаграму "*сонячні промені*").

На рис. 8.9 показана питома вага причин браку при виготовленні друкованих плат у вигляді променевої діаграми.

Питома вага причин браку при виготовленні друкованих плат



Рисунок 8.8 – Питома вага причин браку при виготовленні друкованих плат у вигляді кругової діаграми

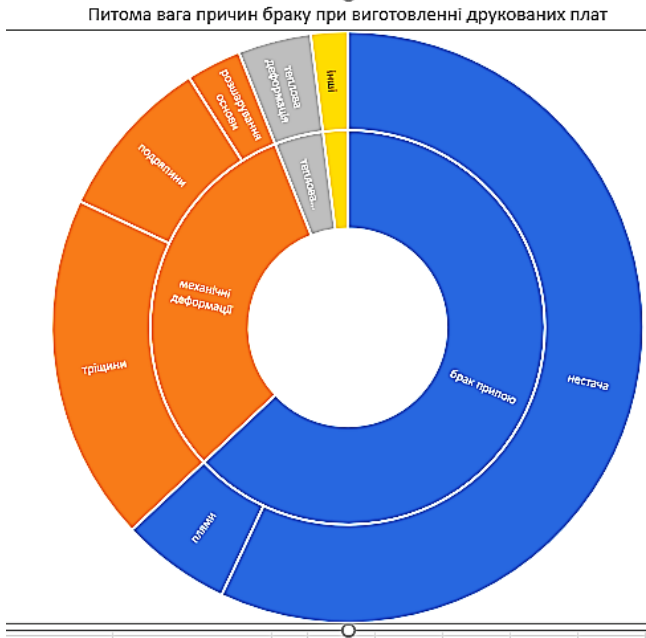


Рисунок 8.9 – Питома вага причин браку при виготовленні друкованих плат у вигляді променевої діаграми

8.1.1.5 Точкова діаграма

Під час обробки експериментальних даних часто виникає потреба показати взаємозв'язок між двома або декількома показниками. Для цього використовується так звана *діаграма розсіювання*, яка найчастіше має назву *точкової діаграми*.

При створенні такої діаграми табличні дані обробляють графічними методами з використанням звичайної прямокутної системи координат.

На рис. 8.10 наведена вольт-амперна характеристика напівпровідникового діода при прямому включенні, побудована за експериментальними даними у вигляді точкової діаграми.

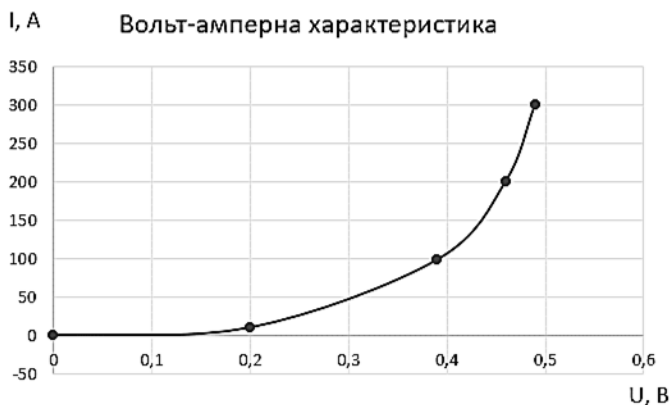


Рисунок 8.10 – Вольт-амперна харатеристика напівпровідникового діода при прямому включенні, побудована за експериментальними даними

Точкова діаграма є найбільш зручним засобом передачі інформації про залежність фізичних величин одна від одної. Щоб її побудувати, необхідно добре знати хід дослідження протягом дослідного процесу, тобто те, що можна взяти з теоретичних досліджень.

8.1.1.6 Номограма

Часто для систематичних розрахунків замість складних теоретичних або емпіричних формул використовують номограми, які будують, застосовуючи рівномірні або нерівномірні координатні сітки.

Номограма – графічне представлення функції від декількох змінних, що дозволяє за допомогою простих геометричних операцій (наприклад, прикладання лінійки) досліджувати функціональні залежності без обчислень.

Номограми розрізняють за способом зображення значень змінних (точками або лініями) і способом визначення відповідності між зображеннями змінних.

Найбільш розповсюдженими є номограми:

- з вирівняних точок;
- сітчасті;
- транспарантні.

Номограми з вирівняних точок застосовують для розв’язання рівнянь із трьома змінними.

Вони мають три шкали, які побудовані таким чином, щоб три точки, що задовольняють рівнянню, лежали на одній прямій.

На рис. 8.11 наведена номограма з вирівняних точок для визначення конвективного коефіцієнта тепловіддачі α_k в умовах вільної конвекції.

Для побудови **сітчастих номограм** із прямих ліній застосовуються функціональні сітки, найпростішими з яких є логарифмічна та напівлогарифмічна. Крім прямої лінії можуть застосовуватися й інші так звані роздільні індекси номограми: кола (Годсель), довільна крива (Швердт), катети креслярського косинця (Сіглер) і т. ін.

На рис. 8.12 наведена сітчаста номограма для вибору доцільного способу охолодження радіоелектронного апарату.

Транспарантна номограма у найпростішому випадку складається з двох площин – основної площини та транспаранту – із зображеннями на них змінних. Транспарант часто робиться із прозорого матеріалу. Приклад транспарантної номограми – логарифмічна лінійка.

Для рівнянь із багатьма змінними застосовуються складові номограми, які складаються з номограм, пов’язаних загальними шкалами чи сімействами ліній.

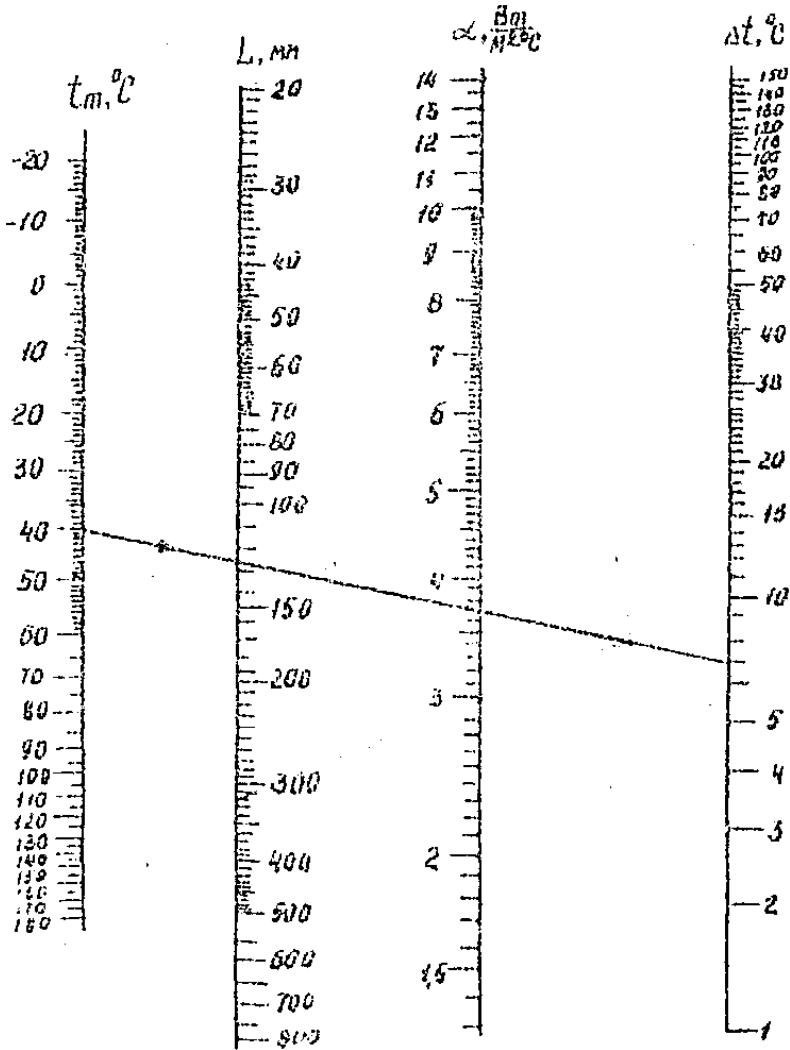


Рисунок 8.11 – Номограма з вирівняних точок для визначення конвективного коефіцієнта тепловіддачі α_k в умовах вільної конвекції

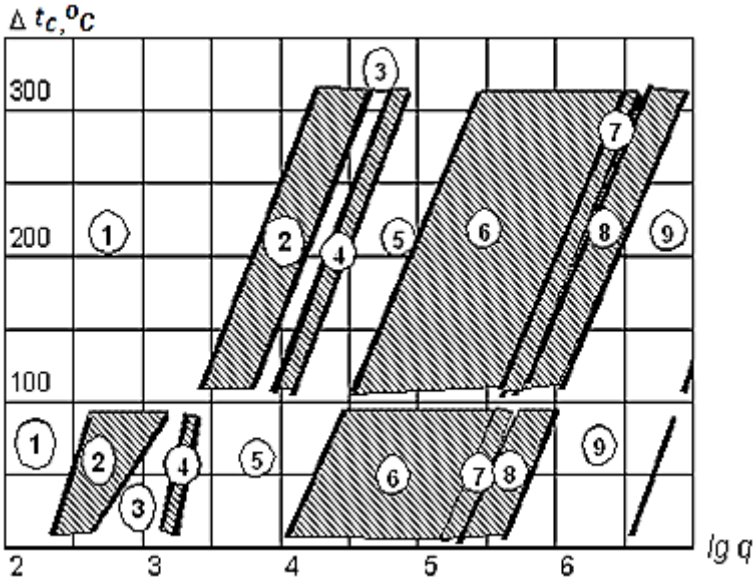


Рисунок 8.12 – Сітчаста номограма для вибору доцільного способу охолодження радіоелектронного апарату

8.1.1.7 Поверхнева діаграма

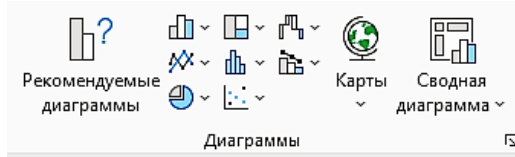
Поверхнева діаграма служить для того, щоб проілюструвати взаємозв'язок між трьома координатами: x , y та z , тобто, вона дозволяє будувати не лінії, а поверхні (як і витікає з її назви).

8.1.2 Типи діаграм у MS Excel та способи їх налаштування

8.1.2.1 Вибір типу діаграми

Діаграми усіх наведених вище типів (окрім номограм) можна створювати у середовищі MS Excel і по-різному їх форматувати. Вибираючи форматування, тим самим визначається засіб відображення діаграми цього типу. Коли на діаграмі представлений один ряд даних, усі маркери даних мають однаковий колір. Якщо ж рядів даних декілька, маркери виділяються різними кольорами.

Тип діаграми можна обрати у групі команд **Діаграма** на вкладці **Вставка** (рис. 8.13).

Рисунок 8.13 – Команди **Діаграми**

При натисненні на кнопку з потрібною групою (гістограма, графік, точкова тощо) відкривається спливаюче вікно, у якому можна обрати потрібний тип діаграми (рис. 8.14).

Рисунок 8.14 – Вибір діаграми **Графік**

Розширений набір типів діаграм наведений у діалоговому вікні **Вставка діаграми**, яке викликається кнопкою **Рекомендовані діаграми** або натисненням на стрілку у правому нижньому куті цієї групи команд (рис. 8.15).

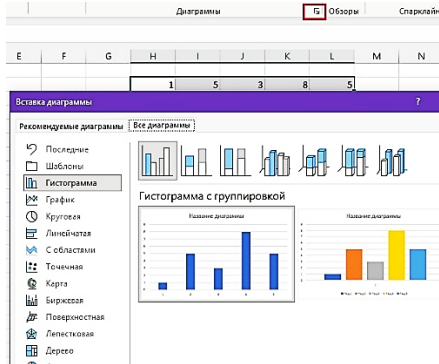


Рисунок 8.15 – Діалогове вікно **Вставка діаграми**

Після вибору типу з'явиться поле з діаграмою, у якому можна налаштувати її параметри (рис. 8.16):

- додати, видалити або змінити її елементи, такі як назва, легенда, лінії сітки та підписи даних;
- налаштувати стиль та кольорову гаму;
- розташувати дані за рядами та надати рядам назви.

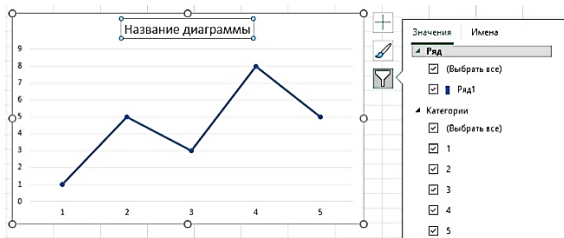


Рисунок 8.16 – Налаштування параметрів діаграми

Ще більше можливостей редагування параметрів діаграми надають контекстні вкладки **Конструктор** та **Формат**, які з'являються, якщо виділити діаграму.

Команди вкладки **Конструктор** (рис. 8.17) дозволяють:

- додати числові значення для осей та їх назви;
- додати назву діаграми;
- додати підписи даних біля маркерів на самій діаграмі;
- додати границі похибок;
- додати лінії сітки;
- додати легенду;

- додати лінію тренду;
- обрати стиль діаграми;
- поміняти місцями дані у рядках та стовпцях;
- задати новий діапазон даних для кожного ряду діаграми окремо;
- змінити тип діаграми;
- перемістити діаграму на новий лист.

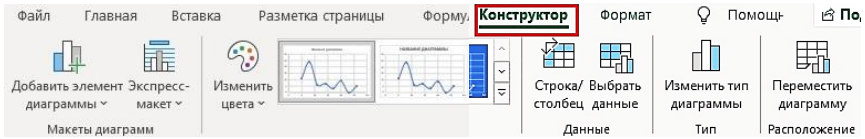


Рисунок 8.17 – Вкладка **Конструктор**

Крім того, у цій вкладці можна зробити додаткові налаштування.

8.1.2.2 Налаштування формату осей

Щоб налаштувати формати осей, слід у групі **Макети діаграм** на вкладці **Конструктор** вибрати опцію **Додаткові параметри осі** (рис. 8.18).

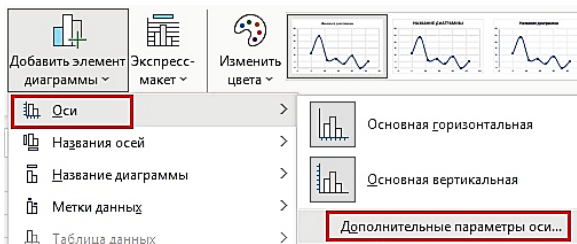


Рисунок 8.18 – Додаткове налаштування параметрів осей

Після цього відкривається діалогове вікно, у якому можна зробити потрібні налаштування.

Наприклад, у якості мінімального (початкового) значення осі за замовчанням задається **0**. Але у деяких випадках доцільно задати інші числа (див. приклад на рис. 8.19).

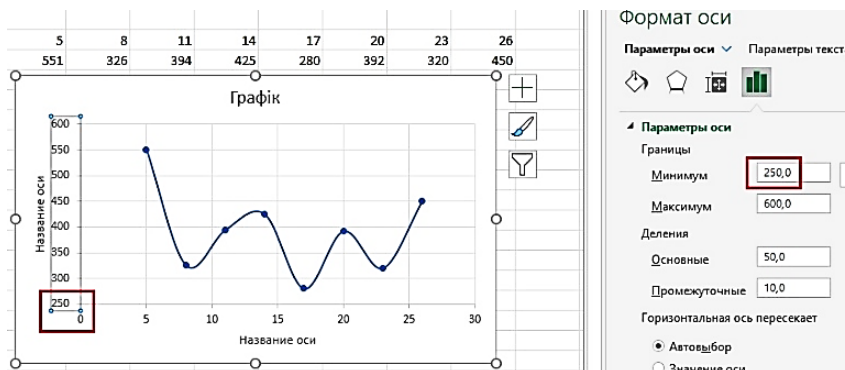


Рисунок 8.19 – Налаштування мінімального значення для вертикальної осі

8.1.2.3 Налаштування рядів даних

При створення діаграми її дані у вигляді масивів об'єднуються у ряди, при цьому кожен ряд відповідає певному рядку або стовпцю масиву даних.

Прості гістограми та графіки можуть містити один ряд; кількість рядів у більш складних діаграмах залежить від кількості груп даних, які треба відобразити.

Для того, щоб розрізнити ряди, до діаграми додають легенду, яка включає у себе назви рядів. Якщо діаграма складається з одного ряду, легенду доцільно вимкнути.

Увімкнути легенду можна групі **Макети діаграм** на вкладці **Конструктор**, і там також можна задати місце її розташування відносно самої діаграми: праворуч, ліворуч, згори, знизу, та налаштувати її стиль.

При створенні діаграми ряди отримують назви: **Ряд 1**, **Ряд 2...** тощо. Їх можна перейменувати, прив'язавши до конкретних даних. Для цього слід у групі команд **Дані** вкладки **Конструктор** натиснути кнопку **Вибір даних**, у діалоговому вікні **Вибір джерела даних**, що відкриється (рис. 8.20), обрати потрібний ряд на натиснути **Змінити**, після чого задати нове ім'я ряду у діалоговому вікні **Зміна ряду** (рис. 8.21).

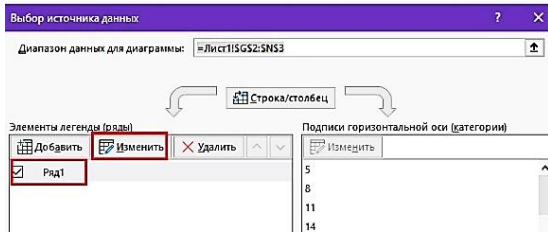
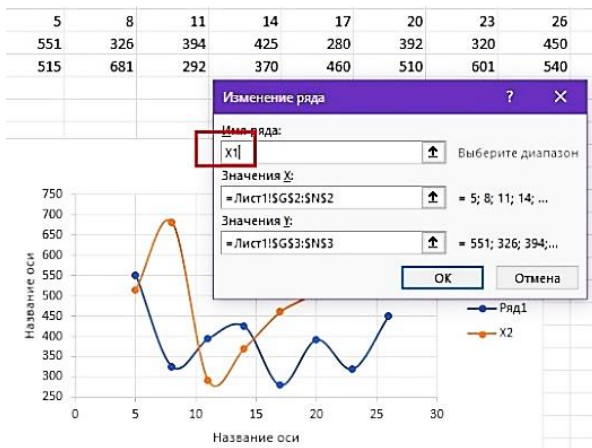
Рисунок 8.20 – Діалогове вікно **Вибір джерела даних**

Рисунок 8.21 – Зміна назви ряду

У цих діалогових вікнах можна також додати нові ряди до діаграми.

Для точкових діаграм (графіків залежності $y = f(x)$) для даних, що відповідають аргументу x , створюється окремий ряд, який не входить до легенди, а дані, що відповідають функції y , утворюють **Ряд 1**.

Якщо від аргументу x залежить декілька функцій (x_1, x_2, \dots) , то доцільно спочатку побудувати одну з залежностей (наприклад, $x_1 = f(x)$), а після цього додати інші шляхом додавання нових рядів. При цьому дані аргументу x кожного разу обираються з одного масиву даних.

На рис. 8.22 показаний процес додавання додаткового ряду до точкової діаграми.

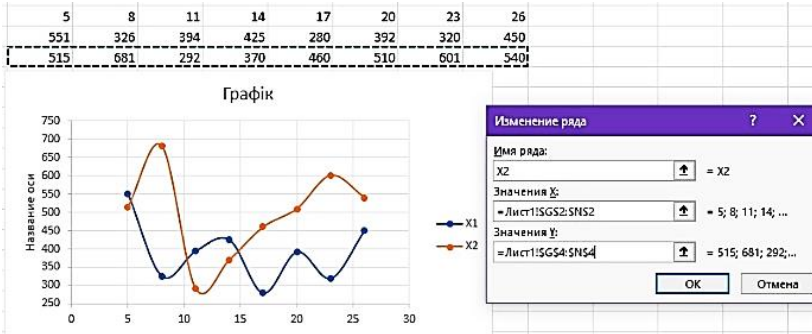


Рисунок 8.22 – Додавання ряду до точкової діаграми

8.1.3 Визначення параметрів рівняння регресії за допомогою лінії тренду на точковій діаграмі MS Excel

Якщо між змінними, наведеними таблично, треба швидко підібрати вид залежності (в тому числі і нелінійної) та розрахувати коефіцієнти регресії, можна за цими даними побудувати у **MS Excel** точкову діаграму та додати до неї *лінію тренду*, що являє собою накладену на вихідну діаграму криву, яка максимально наближена до неї та описується певною аналітичною залежністю.

Щоб побудувати лінію тренду, слід на точковій діаграмі виділити потрібний ряд, у групі **Макети діаграм** на вкладці **Конструктор** вибрати опцію **Додаткові параметри осі** та обрати потрібну залежність (рис. 8.23).

Якщо залежність вказаного типу відсутня, слід обрати опцію **Додаткові параметри лінії тренду** та й діалоговому вікні, що відкриється, обрати потрібну залежність (рис. 8.24).

Якщо у цьому діалоговому вікні також увімкнути прапорець **Показувати рівняння на діаграмі**, то на полі діаграми буде відтворена аналітична залежність, яка відповідає обраній лінії тренду, та яку потім можна використовувати при розрахунках.

У цьому ж вікні можна також увімкнути прапорець **Помістити на діаграму величину достовірності апроксимації**, то на діаграмі з'явиться значення коефіцієнта детермінації R^2 .

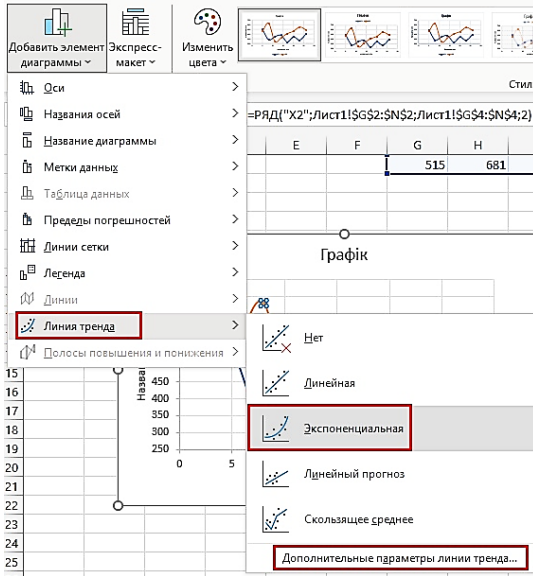


Рисунок 8.23 – Побудова лінії тренду

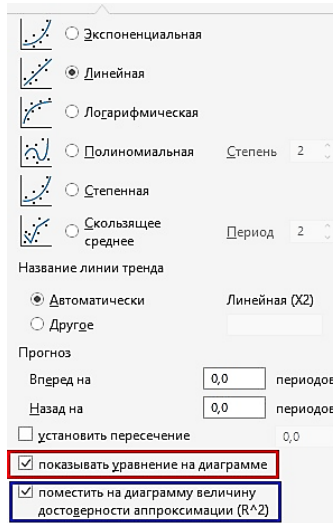


Рисунок 8.24 – Налаштування параметрів лінії тренду

На рис. 8.25, 8.26 показана побудова ліній тренду для залежності коефіцієнта тепловіддачі α , Вт/м²·К від температури корпусу t , °С за умови вільної конвекції, виконаної у вигляді точкової діаграми.

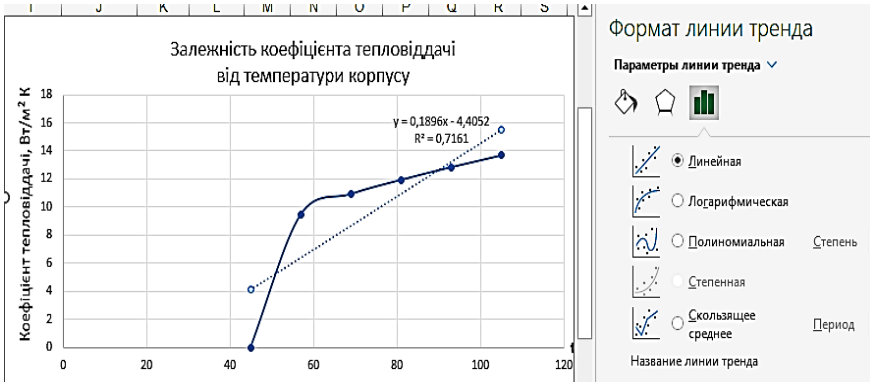


Рисунок 8.25 – Залежність коефіцієнта тепловіддачі від температури корпусу, апроксимована лінійною лінією тренду

Лінійна залежність має вигляд: $y = 0,1896x - 4,4052$

При цьому достовірність апроксимації $R^2 = 0,7161$, що відповідає сильному зв'язку між результативним та факторним показниками.

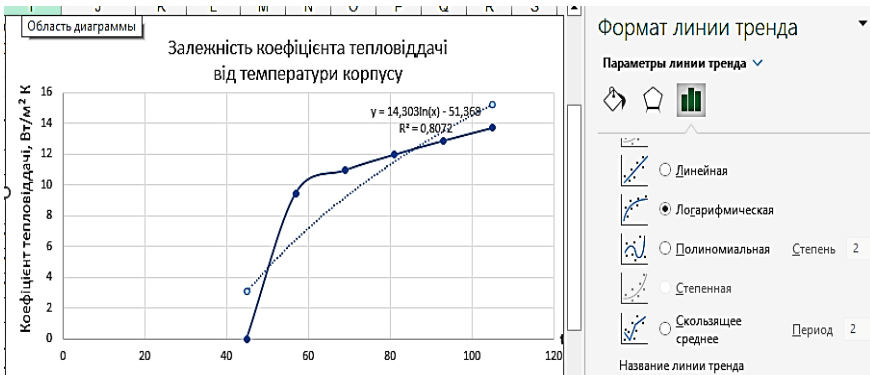


Рисунок 8.26 – Залежність коефіцієнта тепловіддачі від температури корпусу, апроксимована логарифмічною лінією тренду

Логарифмічна залежність має вигляд:

$$y = 14,303 \cdot \ln x - 51,368$$

При цьому достовірність апроксимації $R^2 = 0,8079$, що відповідає досить сильному зв'язку між результативним та факторним показниками.

8.1.4 Поверхнева діаграма

Поверхнева діаграма служить для того, щоб проілюструвати взаємозв'язок між трьома координатами: x , y та z , тобто, вона дозволяє будувати не лінії, а поверхні (як і витікає з її назви).

Принцип побудови поверхневих діаграм у MS Excel можна порівняти з рельєфними картами, де розташування пункту визначається довготою, широтою й висотою.

Розглянемо приклад побудови поверхневої діаграми.

Друківана плата у формі квадрата ABCD знаходиться у стані статичної рівноваги. Плата вважається умовно невагомою (її власна вага значно менша за величину зовнішнього навантаження).

Кути плати або закріплені (деформація дорівнює 0), або мають початкові деформації, які змінюються за заданими законами:

$$u|_{AB} = 30 \cdot (1 - y)$$

$$u|_{BC} = 20 \cdot \sqrt{x}$$

$$u|_{CD} = 20 \cdot y$$

$$u|_{DA} = 30 \cdot (1 - x)$$

У табл. 8.2 наведене розподілення прогинів за поверхнею плати (поле деформацій), визначених методом кінцевих різниць.

Таблиця 8.2 – Розподілення прогинів за поверхнею плати

0	30,00	24,00	18,00	12,00	6,00	0
0,2	24,00	20,17	16,26	12,25	8,14	4,00
0,4	18,00	16,44	14,65	12,59	10,35	8,00
0,6	12,00	12,96	13,32	13,16	12,66	12,00
0,8	6,00	10,11	12,54	14,08	15,15	16,00
1,0	0	8,94	12,65	15,49	17,89	20,00
x / y	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0

Представимо поле деформацій плати графічно у вигляді поверхневої діаграми.

Для цього виділимо діапазон комірок B2:G7 та побудуємо за цими даними поверхневу діаграму.

Її попередній варіант наведений на рис. 8.27.

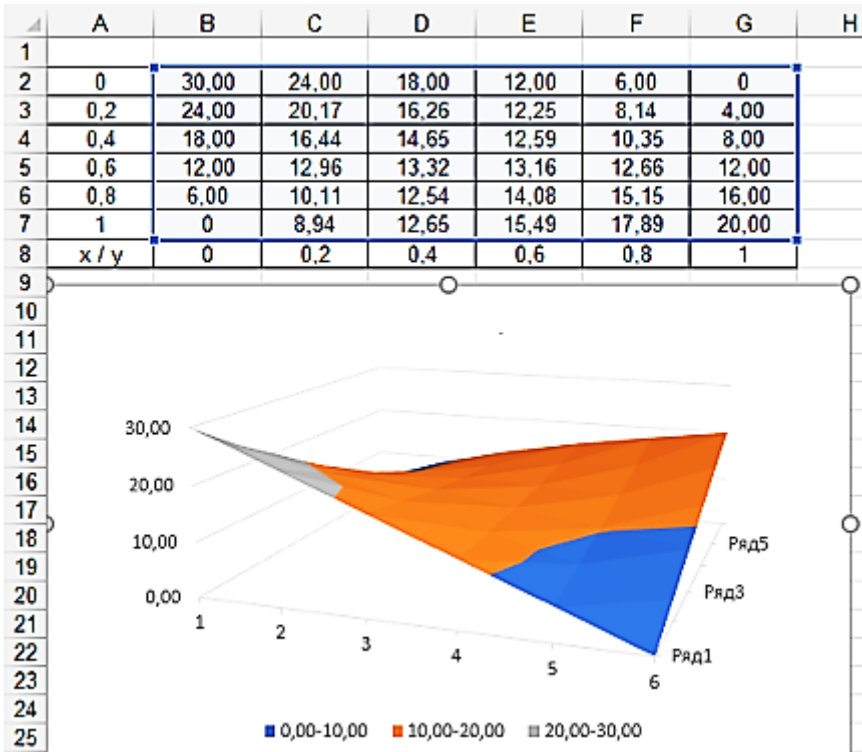


Рисунок 8.27 – Поверхнева діаграма поля деформації плати (попередній варіант)

Налаштуємо параметри діаграми.

Виділимо комірки A2:A7 та B8:G8 й змінимо їх формат на **Текстовий** (рис. 8.28).

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2	0	30,00	24,00	18,00	12,00	6,00	0
3	0,2	24,00	20,17	16,26	12,25	8,14	4,00
4	0,4	18,00	16,44	14,65	12,59	10,35	8,00
5	0,6	12,00	12,96	13,32	13,16	12,66	12,00
6	0,8	6,00	10,11	12,54	14,08	15,15	16,00
7	1	0	8,94	12,65	15,49	17,89	20,00
8	x / y	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
9							
10	Название диаграммы						
11							
12							
13							

Формат ячеек

Число Выравнивание

Числовые форматы:

- Общий
- Числовой
- Денежный
- Финансовый
- Дата
- Время
- Процентный
- Дробный
- Экспоненциальный
- Текстовый

Рисунок 8.28 – Зміна формату комірок A2:A7 та B8:G8

Після цього виділимо діаграму, відкриємо вкладку **Конструктор**, оберемо команду **Обрати дані** та у діалоговому вікні **Вибір джерела даних** зробимо наступні налаштування.

Надамо кожному ряду ім'я, обираючи значення відповідної координати за віссю y (рис. 8.29).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2	0	30,00	24,00	18,00	12,00					
3	0,2	24,00	20,17	16,26	12,25					
4	0,4	18,00	16,44	14,65	12,59					
5	0,6	12,00	12,96	13,32	13,16					
6	0,8	6,00	10,11	12,54	14,08					
7	1	0	8,94	12,65	15,49					
8	x / y	0	0,2	0,4	0,6					
9										
10	Название диаграммы									

Изменение ряда

Имя ряда:

=7_3 (2) 'ISAS3' = 0,2

Значения:

=7_3 (2) 'ISB53:SG53' = 24,00; 20,17; ...

OK Отмена

Рисунок 8.29 – Надання імен рядам діаграми

У якості діапазону підпису горизонтальної осі вибираємо значення координат за віссю x (рис. 8.30).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												
2	0	30,00	24,00	18,00	12,00	6,00	0					
3	0,2	24,00	20,17	16,26	12,25	8,14	4,00					
4	0,4	18,00	16,44	14,65	12,59	10,35	8,00					
5	0,6	12,00	12,96	13,32	13,16	12,66	12,00					
6	0,8	6,00	10,11	12,54	14,08	15,15	16,00					
7	1	0	8,94	12,65	15,49	17,89	20,00					
8	x / y	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1					
9												

Подписи оси

Диапазон подписей оси:

=7_3 (2) 'ISB58:SG58' = 0; 0,2; 0,4; 0,6; ...

OK Отмена

Рисунок 8.30 – Підписи горизонтальної осі діаграми

Надамо діаграмі назву **Поле розподілення деформацій друкованої плати**.

Остаточний вигляд поверхневої діаграми розподілення прогинів за поверхнею плати наведений на рис. 8.31.

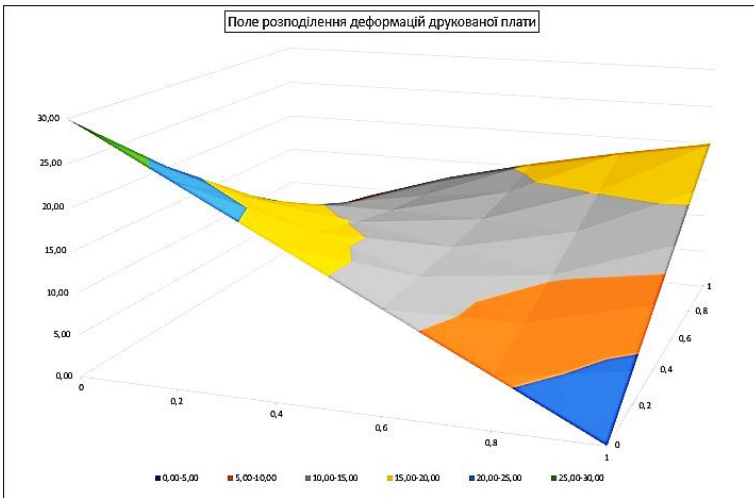


Рисунок 8.31 – Поверхнева діаграма поля деформації плати (остаточний варіант)

Більш детально теоретичні відомості з даної теми наведені у [1], стор. 254 – 266.

8.2 Завдання до роботи

8.2.1 Завдання 1

Залежність між змінними x та y задана у вигляді таблиці.

8.2.1.1 Побудувати графік залежності $y = f(x)$ у вигляді точкової діаграми.

8.2.1.2 Побудувати дві лінії тренду з різними типами залежностей, помістивши на діаграму для обох залежностей рівняння регресії та величину достовірності апроксимації.

8.2.1.3 Визначити, яка залежність дає більшу достовірність.

8.2.1.4 Зробити висновки.

Вихідні дані до завдання 1 відповідно до варіантів наведені у табл. 8.3.

Таблиця 8.3 – Вихідні дані до завдання 1

Варіант 1										
x	2,7	4,6	6,3	7,8	9,2	10,6	12,0	13,4	14,7	22,7
y	17,1	16,2	13,3	13	9,7	9,9	6,2	5,8	5,7	3,2
Варіант 2										
x	53	55	67	71	75	82	86	89	95	99
y	20,6	11,6	22,1	11,3	3,2	12,8	24,8	11,3	28,4	21,5
Варіант 3										
x	51	67	84	81	90	99	101	107	109	115
y	25	30	43	44	57	58	43	46	62	45
Варіант 4										
x	66	70	75	80	82	85	90	92	95	98
y	60	78	65	87	74	70	78	95	88	90
Варіант 5										
x	2	5	8	10	14	15	22	24	33	37
y	14,4	9,5	7,0	5,3	16,9	1,9	8,7	3,4	13,4	8,2
Варіант 6										
x	7,9	11,6	12,8	14,9	16,3	18,6	20,3	21,9	23,6	27,9
y	13,2	22,8	24,8	28,6	31,6	38,7	40,1	44,9	43,4	13,6
Варіант 7										
x	7,0	8,1	9,2	9,6	10,4	11,0	11,4	13,2	15,6	18,4
y	8,4	9,6	8,4	10,2	10,2	7,5	10,2	8,4	8,4	10,2
Варіант 8										
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	0,21	0,32	0,58	1,02	1,76	2,68	3,75	5,07	6,62	8,32
Варіант 9										
x	1,0	1,5	1,6	2,4	2,7	3,1	3,6	4,3	4,8	5,6
y	-1,4	-0,8	-0,5	0,9	1,4	2,0	2,9	4,1	4,6	5,6
Варіант 10										
x	12	14,4	15,6	18,2	22,6	23,2	29,1	33,8	35,2	38,8
y	42,6	33,8	33,2	29,1	23,8	22,6	18,8	14,4	10,8	6,6
Варіант 11										
x	8,2	8,8	9,4	10,6	12,8	14,4	16,7	18,2	21,4	28,8
y	8,8	9,4	16,8	9,4	11,4	15,2	8,2	6,4	0,6	1,8

Продовження табл. 8.3

Варіант 12										
x	19,7	22,8	30,3	39,8	48,2	57,6	66,0	74,4	82,7	83,7
y	15,7	12,8	10,3	9,8	8,2	7,6	6,0	4,4	2,7	0,7
Варіант 13										
x	45	48	64	77	79	80	86	90	95	99
y	20,3	21,4	12,2	16,3	13,2	10,7	14,8	12,7	18,1	11,5
Варіант 14										
x	2	4	7	11	15	18	23	27	31	40
y	16,4	8,1	17,0	15,4	6,9	4,9	7,8	13,2	13,4	18,2
Варіант 15										
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	1,1	3,2	0,8	1,4	2,7	3,1	5,1	4,7	6,8	8,3
Варіант 16										
x	1,0	1,1	1,3	1,7	1,9	2,1	2,6	3,3	3,8	3,9
y	-2,2	-2,6	-1,5	-1,9	0	1,1	3,9	3,1	4,6	4,3
Варіант 17										
x	6,9	10,4	13,3	15,9	17,2	19,9	23,5	25,9	27,8	29,1
y	12,2	22,8	25,8	23,7	32,5	33,1	30,0	14,5	13,3	8,6
Варіант 18										
x	3,2	4,1	5,4	7,7	9,8	11,2	13,6	17,9	20,0	22,2
y	19	15	21	14	8	3	12	11	7	9
Варіант 19										
x	5	6	8	9	11	15	17	22	28	34
y	45	23	17	14	11	8	10	12	18	20
Варіант 20										
x	-5	-2	-3	-1	0	4	6	8	11	15
y	14	12	7	13	9	0	-4	-7	-2	0
Варіант 21										
x	0,1	0,3	0,4	0,6	0,9	1,1	1,2	1,5	1,8	1,9
y	-1	0	0	1	3	5	7	15	25	30
Варіант 22										
x	1	2	3	5	7	8	10	11	12	13
y	-20	-19	-17	-14	-13	-16	-31	-44	-62	-85

Продовження табл. 8.3

Варіант 23										
x	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
y	1	2	2	3	4	5	7	8	10	13
Варіант 24										
x	1	15	16	25	30	40	55	64	75	90
y	7,0	11,2	13,5	14,5	15,0	15,5	16,0	16,4	16,6	17,0
Варіант 25										
x	2	3	4	5	7	8	10	11	12	14
y	16	17	18	19	22	24	28	32	40	55

8.2.2 Завдання 2

Інтенсивність випромінювання z у кожній точці квадратної кімнати пов'язана з координатами її розташування за горизонталлю x та y заданою залежністю.

8.2.2.1 Розрахувати інтенсивність випромінювання в точках кімнати за заданою залежністю.

Значення координат x та y змінюються в інтервалі від -1 до $+1$ з кроком $0,2$.

Початок координат (точка $0;0$) розташований у геометричному центрі кімнати.

8.2.2.2 Побудувати поверхневу діаграму залежності інтенсивності випромінювання від координат точки та визначити точку в кімнаті з найбільш інтенсивним випромінюванням.

Вихідні дані до завдання відповідно варіантам наведені у табл. 8.4.

Таблиця 8.4 – Вихідні дані до завдання 2

Варіант	Залежність інтенсивності випромінювання від координат точки
1	2
1	$z = 5 \cdot x^2 - 3 \cdot \cos(y)$
2	$z = 3\sqrt{x^2 + 1} + 2\sin(y)$
3	$z = 8 \cdot x^3 + 6 \cdot y^2$
4	$z = 7 \cdot \sin(x^2) + 2 \cdot \cos(y^2)$
5	$z = 4 \cdot e^x - 3 \cdot \text{th}(y)$

Продовження табл. 8.4

1	2
6	$z = \sqrt{3x^2 + 5} + \cos(y)$
7	$z = \sqrt{x^2 + 5 \cdot y^2}$
8	$z = \sqrt{2 \cdot x^4 + y^2}$
9	$z = 3 \cdot \operatorname{tg}(x) - 4 \cdot y^3$
10	$z = 4 \cdot x - 10 \cdot \ln(y^2)$
11	$z = 5 \cdot e^{-x} + 4 \cdot e^{-y}$
12	$z = 4 \cdot x^3 + 3 \cdot \cos(y)$
13	$z = 6 \cdot x^2 + 8 \cdot y^3$
14	$z = 4 \cdot e^x - 3 \cdot e^{-2y}$
15	$z = 5 \cdot x^2 - 4 \cdot \cos(y)$
16	$z = 7 \cdot x^3 + \sin(y)$
17	$z = e^{2x} + e^{-3y}$
18	$z = \sqrt{3x^4 + 5y^4}$
19	$z = 2 \cdot e^{-x} - 3 \cdot e^{2y}$
20	$z = 2^x + 3^y$
21	$z = 2 \cdot x^3 - \cos(2 \cdot y)$
22	$z = e^{-2x} + 2 \cdot e^{-2y}$
23	$z = \sqrt{x^4 + 3y^2}$
24	$z = \sqrt{x^2 + 4} - \sin(y)$
25	$z = \operatorname{tg}(x) + 2 \cdot y^2$

8.3 Зміст звіту

8.3.1 Тема та мета роботи.

8.3.2 Графік залежності $y = f(x)$ у вигляді точкової діаграми для вихідних даних з табл. 8.3 з побудованими двома лініями тренду з різними залежностями.

8.3.3 Порівняння результатів та висновки.

8.3.4 Таблиця з розрахунками інтенсивності випромінювання за координатами.

8.3.5 Поверхнева діаграма залежності інтенсивності випромінювання від координат точки в кімнаті.

8.3.6 Координати точки в кімнаті з найбільш інтенсивним випромінюванням.

8.3.7 Висновки.

ЛІТЕРАТУРА

1. Конспект лекцій з дисципліни "Методологія наукових досліджень" для магістрів спеціальностей 151 "Автоматизація та комп'ютерно інтегровані технології", 172 "Телекомунікації та радіотехніка" (освітні програми "Радіоелектронні апарати та засоби", "Інтелектуальні технології мікросистемної радіоелектронної техніки") усіх форм навчання / Уклад. : Ірина ПОСПЕСВА, Наталія ФУРМАНОВА – Запоріжжя : НУЗП, 2023. – 327 с.
2. Гончаренко Я.В. Математичне програмування : монографія. К. : НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2010. 184 с.
3. Демиденко М.А. Математичне програмування : навч. посіб. Дніпропетровськ : НГУ, 2005. 110 с.
4. Літнарвич Р.М. Побудова і дослідження математичної моделі за джерелами експериментальних даних методами регресійного аналізу : навч. посіб. Рівне: МЕРУ, 2011. 140 с.
5. Жильцов О.Б. Теорія ймовірностей та математична статистика у прикладах і задачах : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / за ред. Г.О. Михаліна. К. : ун-т ім. Грінченка, 2015. 336 с.

Додаток А

Критичні точки розподілу Стьюдента

Число ступенів вільності k	Рівень значущості α (однобічна критична область)			
	0,050	0,025	0,010	0,005
1	6,31	12,7	31,82	63,7
2	2,92	4,30	6,97	9,92
3	2,35	3,18	4,54	5,84
4	2,13	2,78	3,75	4,60
5	2,01	2,57	3,37	4,03
6	1,94	2,45	3,14	3,71
7	1,89	2,36	3,00	3,50
8	1,86	2,31	2,90	3,36
9	1,83	2,26	2,82	3,25
10	1,81	2,23	2,76	3,17
11	1,80	2,20	2,72	3,11
12	1,78	2,18	2,68	3,05
13	1,77	2,16	2,65	3,01
14	1,76	2,14	2,62	2,98
15	1,75	2,13	2,60	2,95
16	1,75	2,12	2,58	2,92
17	1,74	2,11	2,57	2,90
18	1,73	2,10	2,55	2,88
19	1,73	2,09	2,54	2,86
20	1,73	2,09	2,53	2,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83
22	1,72	2,07	2,51	2,82
23	1,71	2,07	2,50	2,81
24	1,71	2,06	2,49	2,80
25	1,71	2,06	2,49	2,79
26	1,71	2,06	2,48	2,78
27	1,71	2,05	2,47	2,77
28	1,70	2,05	2,46	2,76
29	1,70	2,05	2,46	2,76
30	1,70	2,04	2,46	2,75
40	1,68	2,02	2,42	2,70
60	1,67	2,00	2,39	2,66
120	1,66	1,98	2,36	2,62
∞	1,64	1,96	2,33	2,58

Додаток Б
Критичні точки розподілу Фішера-Снедекора

Рівень значущості $\alpha = 0,05$											
	k_1										
k_2	1	2	3	4	5	6	7	8	10	12	>50
1	161	200	216	225	230	234	237	239	242	244	254
2	18,5	19,0	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,39	19,41	19,53
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,78	8,74	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	5,96	5,91	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,74	4,68	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,06	4,00	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,63	3,57	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,34	3,28	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,13	3,07	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	2,97	2,91	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,86	2,79	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,0	2,92	2,85	2,76	2,69	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,67	2,60	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,60	2,53	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,55	2,48	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,49	2,42	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,45	2,38	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,57	2,51	2,41	2,34	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,38	2,31	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,31	2,60	2,50	2,45	2,35	2,28	1,84
50	4,03	3,28	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,03	1,95	1,44
>50	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	2,02	1,94	1,84	1,75	1,00